



Laboratorio 2 - Problema de valores iniciales

Pablo Chehade

pablo.chehade@ib.edu.ar

Métodos Numéricos en Fluidos I, Instituto Balseiro, CNEA-UNCuyo, Bariloche, Argentina, 2022

Se estudiaron distintos métodos numéricos para resolver problemas de valores iniciales no lineales. En particular se aplicaron los métodos de Euler implícito, Crank-Nicholson, Runge-Kutta 4 y una combinación de Crank-Nicholson con Leap-Frog al problema del péndulo simple y el método de Runge-Kutta 4 al del péndulo doble. En el caso del péndulo simple se analizaron los errores fase y amplitud globales de cada método, se calcularon los órdenes de convergencia y se compararon con los valores teóricos. En el caso del péndulo doble se analizó la sensibilidad del sistema frente a perturbaciones y el error de amplitud global.

I. INTRODUCCIÓN

En ciencias físicas es de gran interés conocer la dinámica de un sistema a partir de sus condiciones iniciales. Sin embargo, dadas las ecuaciones de movimiento, no siempre es posible obtener la dinámica exactamente y es necesario recurrir a métodos numéricos. Existen una gran variedad de esquemas numéricos y ninguno está exento de error. En este trabajo se analizaron dos problemas de valores iniciales: la evolución del péndulo simple y del péndulo doble. Se resolvieron numéricamente a través de distintos métodos numéricos implícitos y explícitos y se estudió la convergencia de los mismos.

A. Péndulo simple

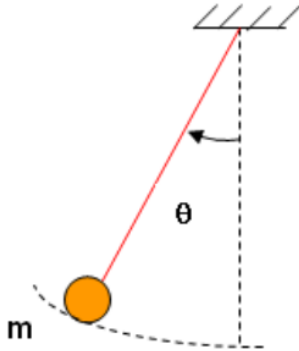


Figura 1: Esquema del péndulo simple. Una partícula puntual de masa m está suspendida de un punto fijo mediante un hilo de longitud l . El ángulo θ es el ángulo que forma el hilo con la vertical. Imagen extraída de [1].

El péndulo simple consta de una partícula puntual de masa m suspendida de un punto fijo mediante un hilo de longitud l (ver esquema en figura 1). La partícula se mueve en un plano y el ángulo θ que forma el hilo con la vertical se describe mediante la ecuación diferencial

$$\begin{cases} \theta'' = -\frac{g}{l} \sin(\theta) \\ \theta(0) = \theta_0, \theta'(0) = \theta'_0 \end{cases} \quad (1)$$

donde g es la aceleración de la gravedad y θ_0 y θ'_0 corresponden a las condiciones iniciales de ángulo y velocidad angular, respectivamente. Algunos parámetros importantes de la evolución de este sistema en particular son el período de oscilación τ dado por [2]

$$\tau(\theta) = T_0 \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \right)^2 \sin^{2n} \left(\frac{\theta}{2} \right) \right], T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (2)$$

la fase ϕ_{teo} dada por

$$\phi_{teo}(\theta) = \tan^{-1}(\theta'/\theta) \quad (3)$$

y la energía por unidad de masa o amplitud A_S dada por

$$A_S(\theta) = 1/2l^2\theta'^2 - gl \cos(\theta). \quad (4)$$

Debido a que sólo actúan fuerzas conservativas, la amplitud A_S se mantiene constante durante la evolución.

La ecuación diferencial de segundo orden de 1 se puede convertir en dos ecuaciones diferenciales de orden 1 mediante el cambio de variable $\vec{y}_S^T = (y_1, y_2) = (\theta, \theta')$. De este modo, el problema 1 se convierte en

$$\begin{cases} \frac{d\vec{y}_S}{dt} = \begin{pmatrix} y_2 \\ -\frac{g}{l} \sin y_1 \end{pmatrix} = \vec{f}_S(\vec{y}_S, t), \\ \vec{y}_S(0) = \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \theta'_0 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (5)$$

B. Péndulo doble

El péndulo doble es un sistema más complejo que el anterior. Consta básicamente de un péndulo simple con masa m_1 , longitud l_1 y ángulo θ_1 sobre el que se suspende otro péndulo con masa m_2 , longitud l_2 y ángulo θ_2 (ver esquema en la figura 2). Empleando $l_1 = l_2 = 1$, $m_1 = m_2 = 1$ y $g = 10$, las ecuaciones de la evolución de los ángulos involucrados son

$$\begin{cases} 2\theta_1'' + \theta_2'' \cos \Delta\theta = \theta_2'^2 \sin \Delta\theta - 20 \sin(\theta_1), \\ \theta_1'' \cos \Delta\theta + \theta_2'' = -\theta_1'^2 \sin \Delta\theta - 10 \sin(\theta_2), \\ \theta_1(0) = \theta_{10}, \theta_1'(0) = \theta'_{10}, \\ \theta_2(0) = \theta_{20}, \theta_2'(0) = \theta'_{20}, \end{cases} \quad (6)$$

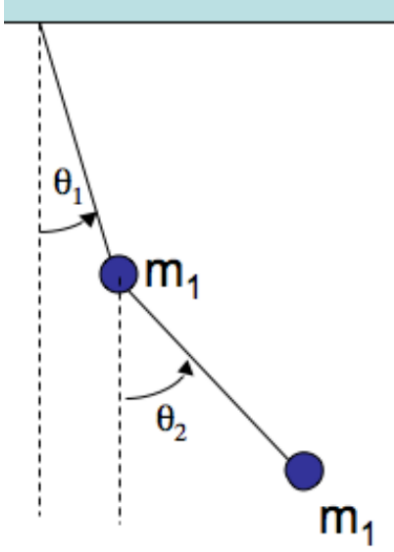


Figura 2: Esquema del péndulo doble. Una partícula puntual de masa m_1 está suspendida de un punto fijo mediante un hilo de longitud l_1 . El ángulo θ_1 es el ángulo que forma el hilo con la vertical. Sobre esta partícula se encuentra suspendida otra de masa m_2 mediante un hilo de longitud l_2 . El ángulo θ_2 es el ángulo que forma este último hilo con la vertical.

Imagen extraída de [3].

donde $\Delta\theta = (\theta_2 - \theta_1)$.

Al igual que en el péndulo simple, la energía se conserva y la amplitud A_D se mantiene constante durante la evolución. En este caso, tal amplitud está dada por

$$A_D = \theta_1'^2 + \frac{1}{2}\theta_2'^2 + \theta_1'\theta_2'\cos(\theta_2 - \theta_1) - 20\cos\theta_1 - 10\cos\theta_2 \quad (7)$$

Haciendo el cambio de variables $\vec{y}_D^T = (y_1, y_2, y_3, y_4) = (\theta_1, \theta_2, \theta_1', \theta_2')$, el problema 6 se convierte en

$$\begin{cases} \frac{d\vec{y}_D}{dt} = \begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \\ \frac{y_4^2 \sin \Delta - 20 \sin y_1 + y_3^2 \sin \Delta \cos \Delta + 10 \sin y_2 \cos \Delta}{2 - \cos^2 \Delta} \\ \frac{-2y_3^2 \sin \Delta - 20 \sin y_2 - y_4^2 \sin \Delta \cos \Delta + 20 \sin y_1 \cos \Delta}{2 - \cos^2 \Delta} \end{pmatrix} \\ = \vec{f}_D(\vec{y}_D, t), \\ \vec{y}_D^T(0) = \begin{pmatrix} \theta_{10} \\ \theta_{20} \\ \theta_{10}' \\ \theta_{20}' \end{pmatrix} \end{cases} \quad (8)$$

II. MÉTODO NUMÉRICO

Para resolver numéricamente ambos problemas de valores iniciales es necesario discretizar la variable temporal y proponer un esquema numérico que permita obtener la solución aproximada. En cuanto a lo primero, el dominio se discretizó con puntos equiespaciados $t_n = nh$ donde $n = 0, \dots, N$ y $h = 1/N$. En cuanto a lo segundo,

se utilizaron en total cuatro métodos numéricos, algunos explícitos y otros implícitos, que serán descriptos próximamente.

Además, es necesario evaluar de alguna manera la convergencia de los métodos numéricos. Para esto se podría emplear el error respecto a la solución exacta a todo tiempo o bien evaluar el error en un tiempo específico sobre cantidades conocidas. En este trabajo se optó por la segunda opción. Se evaluó para el péndulo simple el error de fase en $t = \tau$ dado por

$$e_{fase}^S(t = \tau) = \phi_a(\tau) - \phi_{teo}(\tau) = \phi_{aprox}(\tau) \quad (9)$$

pues por definición $\theta'(\tau) = 0$, y el error de amplificación en $t = \tau$ dado por

$$e_{amp}^S(t = \tau) = A_{aprox}^S(\tau) - A_{teo}^S(\tau), \quad (10)$$

donde A_{teo}^S es constante como se mencionó en la sección anterior. En ambos casos, para determinar τ se empleó la expresión 2 calculada con un error del orden de 10^{-15} menor a todos los errores obtenidos en este trabajo. Mientras que para el péndulo doble se evaluó sólo el error de amplitud para todo tiempo

$$e_{amp}^D(t) = A_{aprox}^D(t) - A_{teo}^D(t), \quad (11)$$

donde A_{teo}^D también es constante en el tiempo.

Tanto el error de fase como el de amplitud dependen del método numérico a utilizar. Se encuentran tabulados sus órdenes de convergencia teóricos en [3], los cuales se obtienen al analizar la ecuación diferencial $y' = \lambda y$ con λ constante.

En base a lo anterior, a continuación se desarrollan los métodos numéricos utilizados, junto con los órdenes de convergencia globales del error de amplificación o error de amplitud y del error de fase. Es necesario aclarar que en el caso de los métodos implícitos se utilizó el método de bisección para resolver el sistema de ecuaciones resultantes, con un error del orden de 10^{-15} menor a todos los errores obtenidos en este trabajo.

■ Euler implícito (EI): este método es implícito, el factor de amplificación converge con orden $O(h^1)$ y el error de fase, con orden $O(h^2)$. Su fórmula es

$$\vec{y}_{n+1} = \vec{y}_n + h\vec{f}(\vec{y}_{n+1}, t_{n+1}) + O_{local}(h^2)$$

■ Crank-Nicholson (CN): este método es implícito, el factor de amplificación es 1, por lo que se esperaría $e_{amp}^S = 0$ y el error de fase converge con orden $O(h^2)$. Su fórmula es

$$\vec{y}_{n+1} = \vec{y}_n + \frac{h}{2}[\vec{f}(\vec{y}_{n+1}, t_{n+1}) + \vec{f}(\vec{y}_n, t_n)] + O_{local}(h^3)$$

■ Runge Kutta 4 (RK4): este método es explícito, el factor de amplificación converge con orden $O(h^5)$ y el error de fase, con orden $O(h^4)$. Su fórmula es

$$\vec{y}_{n+1} = \vec{y}_n + \frac{1}{6}\vec{k}_1 + \frac{1}{3}(\vec{k}_2 + \vec{k}_3) + \frac{1}{6}\vec{k}_4 + O_{local}(h^5)$$

donde

$$\begin{cases} \vec{k}_1 = h\vec{f}(\vec{y}_n, t_n), \\ \vec{k}_2 = h\vec{f}\left(\vec{y}_n + \frac{1}{2}\vec{k}_1, t_n + \frac{h}{2}\right), \\ \vec{k}_3 = h\vec{f}\left(\vec{y}_n + \frac{1}{2}\vec{k}_2, t_n + \frac{h}{2}\right), \\ \vec{k}_4 = h\vec{f}(\vec{y}_n + \vec{k}_3, t_n + h) \end{cases}$$

- 2 pasos con Crank-Nicholson y uno con Leap Frog (CN + LF). Este último método es explícito, el factor de amplificación es unitario y el error de fase converge con orden $O(h^2)$. Su fórmula es

$$\vec{y}_{n+1} = \vec{y}_{n-1} + 2h\vec{f}(\vec{y}_n, t_n) + O_{local}(h^3)$$

El objetivo de combinar ambos métodos de esta forma en particular es que los errores de fase se compensan para dar un orden de convergencia mayor, de al menos $O(h^3)$. Además, el factor de amplificación se mantendría unitario.

Se resolvió el péndulo simple con los cuatro esquemas numéricos mencionados. Se evaluó el orden de convergencia de e_{fase}^S y e_{amp}^S y se comparó con los valores teóricos. Además, se resolvió el péndulo doble con el método Runge-Kutta 4. Se estudió la sensibilidad del sistema frente a perturbaciones y la conservación de la amplitud.

III. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

A. Péndulo simple

Se resolvió el péndulo simple con los cuatro esquemas numéricos mencionados para las condiciones iniciales $\theta_0 = \pi/2$ y $\theta'_0 = 0$ con $h = 0.1$. La evolución de $\theta(t)$ se grafica en la figura 3. Por un lado, se observa que la amplitud de variación de $\theta(t)$, relacionada con la amplitud A^S , no es constante para algunos métodos, siendo el caso más notable el de Euler implícito. Por otro lado, para algunos métodos se observa un cambio en la fase, es decir, el tiempo en el que $\theta(t)$ alcanza su valor máximo. Ambos resultados son esperados considerando el análisis de errores realizado en la sección anterior.

Para todos los métodos se calculó e_{fase}^S para distintos valores de h y se determinó el orden de convergencia. La dependencia del error con el tamaño de la discretización para todos los esquemas se grafica en la figura 4a en escala log-log. En todos los casos se obtuvo un comportamiento lineal a partir de h suficientemente pequeño. En base a esto, se ajustó una recta para cada caso, obteniendo el orden de convergencia como la pendiente de la recta. Estos se resumen en la tabla I. Se observa que en todos los métodos los órdenes de convergencia teóricos y numéricos son distinguibles a más de 3 desviaciones estándar, siendo los más cercanos los de CN y RK4.

Análogamente, se calculó e_{amp}^S en función de h y se determinó el orden de convergencia. Tal dependencia se grafica en la figura 4b. A diferencia del caso anterior,

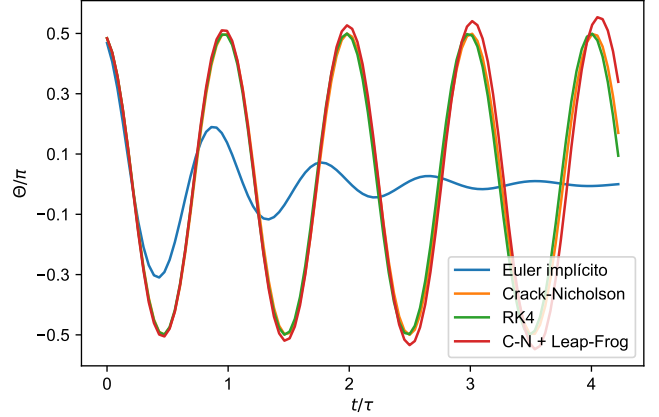


Figura 3: Evolución de $\theta(t)$ para los cuatro esquemas numéricos para las condiciones iniciales $\theta_0 = \pi/2$ y $\theta'_0 = 0$ con $h = 0.1$. Ambos ejes se encuentran normalizados: el eje vertical por π y el horizontal por el período τ .

si bien se observa un comportamiento lineal, para h suficientemente pequeño, los métodos RK4 y CN alcanzan un valor constante, lo cual puede deberse a errores de punto flotante. De todos modos, se realiza un ajuste lineal sobre la zona con comportamiento lineal y se determina el orden de convergencia. Los valores se resumen en la tabla I. Al igual que en e_{fase}^S , los órdenes de convergencia teóricos y numéricos son distinguibles a más de 3 desviaciones estándar. Los casos más extremos corresponden a CN y CN + LF en los que se hubiera esperado un error de amplitud nulo. Aún así, el orden de convergencia de CN es relativamente alto respecto a los demás.

En el análisis de ambos errores no se obtuvieron los órdenes de convergencia teóricos. Esto pudo deberse a que los valores teóricos se calculan en base a un problema lineal $y' = \lambda y$. En el caso de la ecuación de movimiento, el problema es no lineal y por lo tanto se puede esperar que los órdenes de convergencia no sean los mismos. Sin embargo, sí se esperaría obtener los mismos valores para $\theta_0 \rightarrow 0$ debido a que en este caso la ecuación de movimiento se reduce a un problema lineal. En base a esto se calculó la dependencia de e_{fase}^S y e_{amp}^S en función de h para $\theta_0 = 0.01$. Los resultados se grafican en las figuras 4c y 4d, respectivamente. Cualitativamente se encuentran tendencias similares respecto al caso $\theta_0 = \pi/2$. La diferencia más notable se encuentra en e_{amp}^S para el método de CN. Existe un valor de h a partir del cual $e_{amp}^S = 0$. Esto implica que el método conserva la amplitud bajo esas condiciones, como se esperaba a partir del análisis teórico. Es necesario aclarar que existe un valor de h aún más pequeño con el cual $e_{amp}^S \neq 0$, el cual podría deberse a errores de punto flotante.

En base al comportamiento lineal se realizó un ajust-

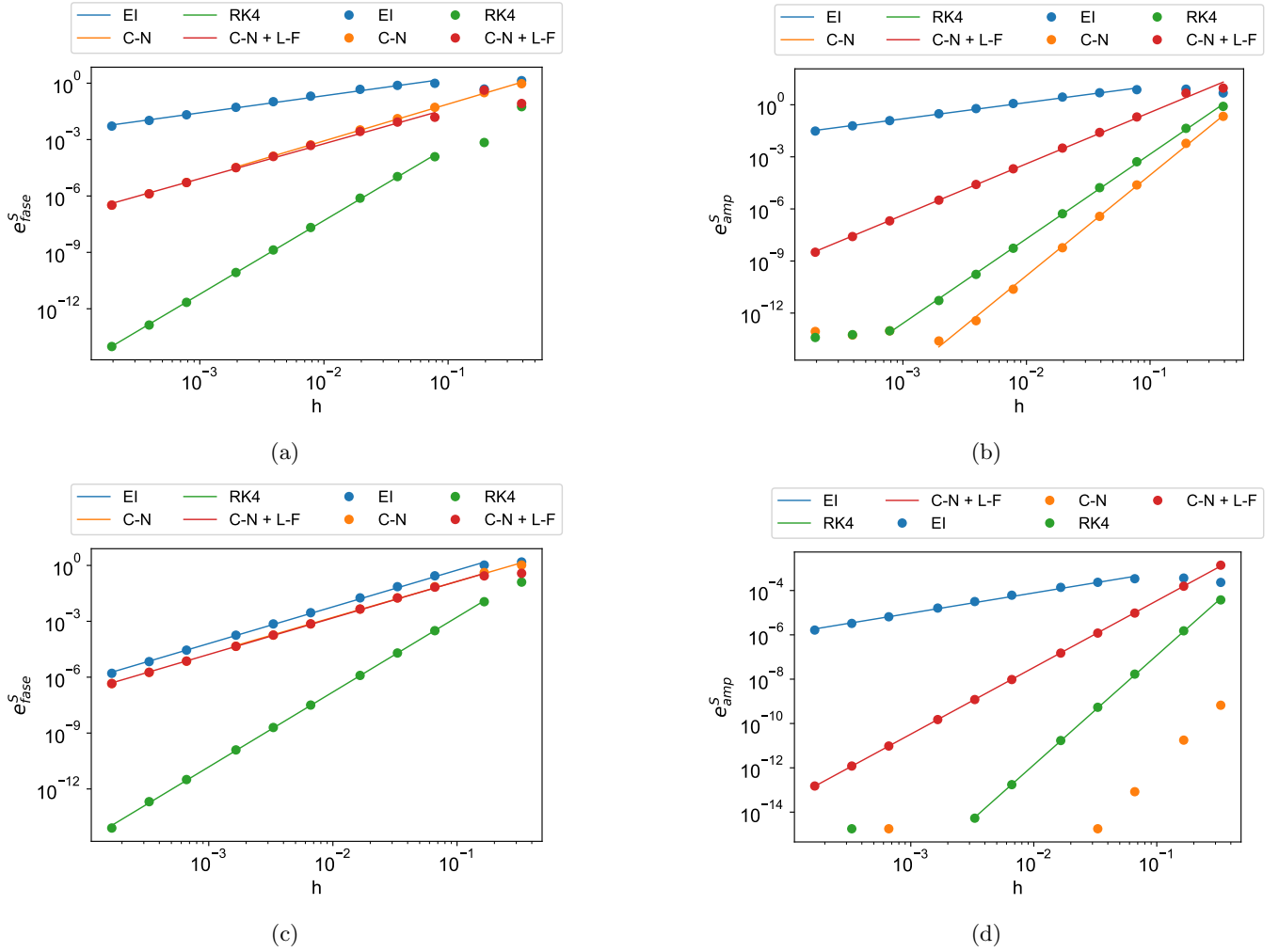




Figura 4: Error de fase e_{fase}^S y error de amplitud e_{amp}^S en función del tamaño de la discretización h para los cuatro esquemas numéricos bajo las condiciones iniciales 4a y 4b, $\theta_0 = \pi/2$ y $\theta'_0 = 0$, 4c y 4d, $\theta_0 = 0.01$ y $\theta'_0 = 0$. Los puntos corresponden a los valores calculados y las líneas a los ajustes lineales. 'EI': Euler implícito, 'C-N': Crank-Nicholson, 'RK4': Runge-Kutta 4 y 'C-N + L-F': dos pasos con Crank Nicholson y uno con Leap-Frog. En la figura c los valores correspondientes a CN y CN + LF se encuentran superpuestos.

Método	Orden de convergencia de					
	e_{fase}^S			e_{amp}^S		
	teórico	con $\theta_0 = \pi/2$	con $\theta_0 = 0.01$	teórico	con $\theta_0 = \pi/2$	con $\theta_0 = 0.01$
EI	2	0.91 ± 0.03	1.97 ± 0.03	1	0.94 ± 0.02	0.91 ± 0.03
CN	2	1.96 ± 0.02	1.93 ± 0.04	error nulo	5.79 ± 0.09	error nulo
RK4	4	3.92 ± 0.02	4.02 ± 0.02	5	4.87 ± 0.04	4.94 ± 0.03
CN + LF	3	1.86 ± 0.05	1.96 ± 0.02	error nulo	2.96 ± 0.05	3.010 ± 0.005


Cuadro I: Orden de convergencia del error de fase e_{fase}^S y del error de amplitud e_{amp}^S para los cuatro esquemas numéricos bajo las condiciones iniciales $\theta'_0 = 0$ y distintos valores de θ_0 . 'EI': Euler implícito, 'C-N': Crank-Nicholson, 'RK4': Runge-Kutta 4 y 'C-N + L-F': dos pasos con Crank Nicholson y uno con Leap-Frog. Los valores teóricos provienen fueron extraídos de [3].

te lineal y se obtuvieron los órdenes de convergencia. Los resultados se resumen en la tabla I. En cuanto a e_{fase}^S , los órdenes teóricos y numéricos son indistinguibles considerando dos desviaciones estándar para EI, CN y RK4. Esto es acorde a la hipótesis sobre θ_0 planteada. Sin embargo, no se obtiene el valor esperado para el método CN + LF. Esto se podría deber a que el error de fase en el problema no lineal no resulta de orden 3, sino que se mantiene en orden 2. Para ser válido el orden 3 se deberían compensar los errores de fase de cada método mutuamente, para lo cual también es necesario que el error de fase no dependa del paso de integración. Esto podría no ser cierto para el problema no lineal y por lo tanto sería razonable mantener el orden 2. 

En cuanto a e_{amp}^S , los órdenes teóricos y numéricos son indistinguibles considerando dos desviaciones estándar para CN y RK4. Sin embargo, este no es el caso de EI y CN + LF. No es claro a qué se deben ambos comportamientos. Debería estudiarse este problema con mayor detalle. Una opción posible sería considerar θ_0 menor al utilizado. Esto no es factible de realizar en Octave debido a un problema de representación decimal en el lenguaje de programación. 

B. Péndulo doble

Se resolvió el sistema 8 empleando el método RK4 y se estudió la sensibilidad del sistema frente a perturbaciones, la posibilidad de identificar patrones en la trayectoria de las partículas que conforman el péndulo y la conservación de la energía

En primer lugar, se evaluó la sensibilidad del sistema frente a perturbaciones sobre las condiciones iniciales. Para esto se calculó la dinámica del péndulo doble para tres condiciones iniciales ligeramente distintas: $\theta_{10} = \pi/2$, $\theta_{20} = a$ y $\theta'_{10} = \theta'_{20} = 0$ con $a^A = \pi/2$, $a^B = 1.00001\pi/2$ y $a^C = 0.99999\pi/2$. Para la evolución numérica se empleó $h = \pi/100 \approx 0.0314$. En la figura 5 se grafica la evolución de $\theta_1(t)$. Se observa que la evolución es similar para las tres condiciones iniciales hasta $t \approx 5\pi$ cuando comienzan a diferir considerablemente. Esta diferencia se podría justificar en una sensibilidad frente a las condiciones iniciales o bien a errores del método numérico utilizado. En base a esto se calcularon las diferencias angulares entre las soluciones para θ_1 y θ_2 , en función de h a $t = 5\pi$. Los resultados se grafican en la figura 6. Se observa que la diferencia entre las soluciones se mantiene constante a partir de un valor de h suficientemente pequeño. Por lo tanto, las diferencias no se  al método numérico y el sistema es sensible a las perturbaciones

En segundo lugar, se calculó la trayectoria de las partículas que conforman el péndulo doble para las condiciones iniciales $\theta_{10} = \theta_{20} = \pi/2$ y $\theta'_{10} = \theta'_{20} = 0$, discretización $h = \pi/1000$ e intervalo de tiempo $t \in [0, 10\pi]$. Tales trayectorias se grafican en la figura 7. La trayectoria de la partícula 1 está restringida a una circunferencia de radio 1 alrededor del origen. Mientras que la

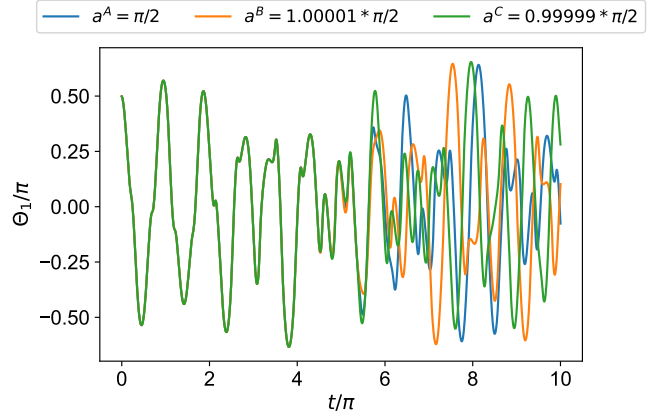


Figura 5: Evolución de $\theta_1(t)$ para los cuatro esquemas numéricos para las condiciones iniciales $\theta_{10} = \pi/2$, $\theta_{20} = a$ y $\theta'_{10} = \theta'_{20} = 0$ con $h = \pi/100$. Ambos ejes se encuentran normalizados por π . La evolución se realizó mediante el método numérico Runge-Kutta 4.

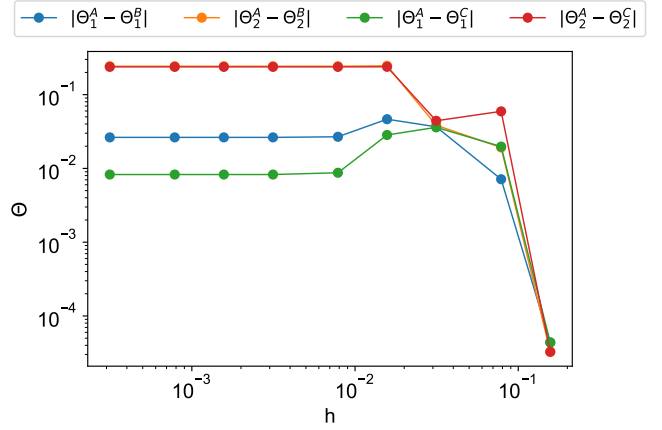


Figura 6: Diferencias angulares entre soluciones numéricas con distintas condiciones iniciales a tiempo $t = 5\pi$, en función de h . Las condiciones iniciales corresponden a $\theta_{10} = \pi/2$, $\theta_{20} = a$ y $\theta'_{10} = \theta'_{20} = 0$ con $a^A = \pi/2$, $a^B = 1.00001\pi/2$ y $a^C = 0.99999\pi/2$. La evolución se realizó mediante el método numérico Runge-Kutta 4.

de la partícula 2 tiene mayor libertad de movimiento, no observándose patrones claros en el comportamiento del péndulo.

En tercer lugar, se calculó la energía del sistema para las mismas condiciones iniciales y discretización que en el caso anterior. Se calculó el error de amplitud e_{amp}^D a partir de la expresión 11 y se graficó en función del tiempo en la figura 8a. Se observa que la amplitud no se conserva, aunque el error es relativamente pequeño. En base a esto, se buscó determinar el error de convergencia, calculando e_{amp}^D en función de h . Los resultados se grafican en la figura 8b. Se distinguen tres regiones. Inicialmente, para h

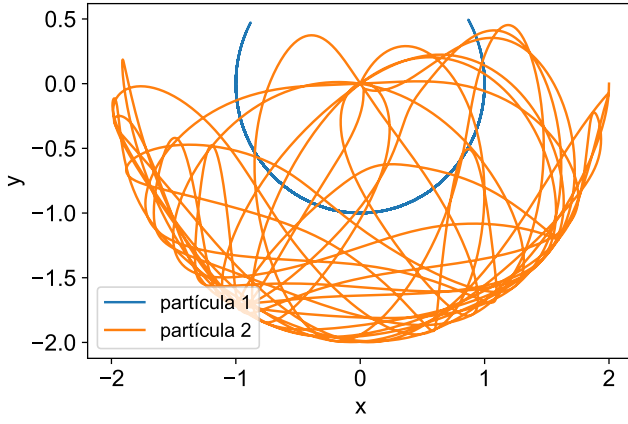
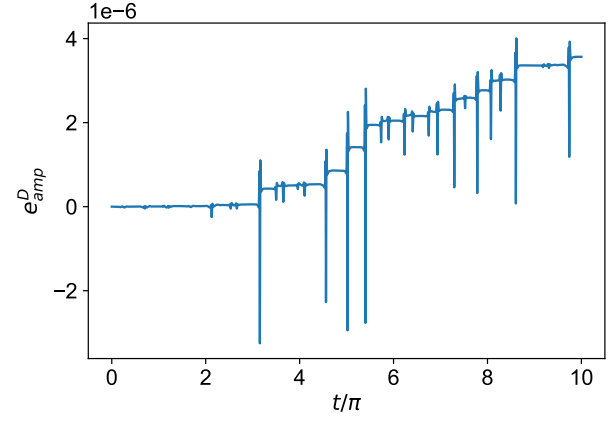


Figura 7: Trayectorias de las dos partículas de un péndulo doble para las condiciones iniciales $\theta_{10} = \theta_{20} = \pi/2$ y $\theta'_{10} = \theta'_{20} = 0$, bajo la discretización $h = \pi/1000$ e intervalo de tiempo $t \in [0, 10\pi]$. La evolución se realizó mediante el método numérico Runge-Kutta 4.

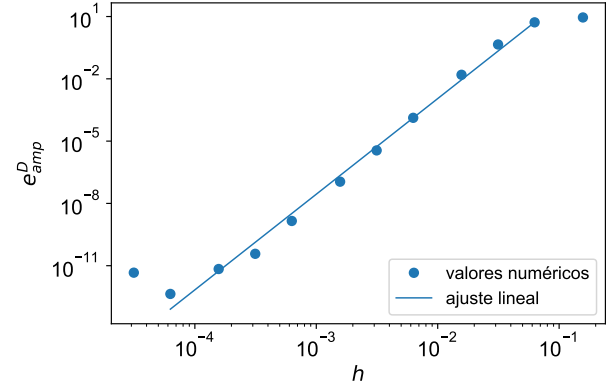
grande, el error presenta un comportamiento aleatorio. A medida que h disminuye, el error varía como una potencia de h , es decir, de forma lineal en escala logarítmica. Por último, para valores de h menores, el error aumenta debido a los errores de precisión de la computadora. En base al comportamiento en la región central se realiza un ajuste lineal cuya pendiente $m = 4.6 \pm 0.2$ corresponde al orden de convergencia. Este valor no es consistente con el error teórico de orden 5, aunque la diferencia se podría justificar en el comportamiento no lineal del sistema.

IV. CONCLUSIÓN

Se estudiaron distintos métodos numéricos para resolver problemas de valores iniciales no lineales. En primer lugar, se aplicaron los métodos de Euler implícito, Crank-Nicholson, Runge-Kutta 4 y una combinación de Crank-Nicholson con Leap-Frog al problema del péndulo simple. El último método se propuso con el objetivo de obtener un error de fase de mayor orden que los métodos por separado. Se analizaron los errores de fase y amplitud globales de cada método, se calcularon los órdenes de convergencia y se compararon con los valores teóricos, calculados en base a un problema lineal. En cuanto al error de fase, se encontraron valores similares a los teóricos, salvo para la combinación de Crank-Nicholson y Leap-Frog. Se encontró que el error no aumenta de orden debido a que en problemas no lineales el error de fase depende del paso de tiempo y la compensación esperada no ocurre. En cuanto al de amplitud, se encontraron valores similares a los teóricos, salvo para el método de Crank-Nicholson y la combinación de este con Leap-Frog. En ambos casos se hubiera esperado encontrar error nulo y no fue así. La razón de este comportamiento podría deberse a



(a)



(b)

Figura 8: **8a** error de amplitud e_{amp}^D en función del tiempo t . **8b** error de amplitud e_{amp}^D en función del tamaño de la discretización h . Ambos cálculos se realizaron para las condiciones iniciales $\theta_{10} = \theta_{20} = \pi/2$ y $\theta'_{10} = \theta'_{20} = 0$, discretización $h = \pi/1000$ e intervalo de tiempo $t \in [0, 10\pi]$. La evolución se realizó mediante el método numérico Runge-Kutta 4.

la no linealidad del problema. En base a esto, debería recuperarse el comportamiento teórico para el péndulo simple con ángulo bajo. Esto ocurre para el método de Crank-Nicholson pero no para la combinación de métodos. Debería estudiarse este caso en particular con mayor detalle.

En segundo lugar, se aplicó el método Runge-Kutta 4 para el problema del péndulo doble. Se obtuvo una gran sensibilidad del sistema frente a perturbaciones de las condiciones iniciales. Además, se observó la dificultad de reconocer patrones sobre las trayectorias de las partículas. Por último, se encontró que la energía proporcional a la amplitud no se conserva. Se encontró un orden de convergencia para el error de amplitud distinto al valor teórico. Tal discrepancia se podría justificar con la misma razón que el péndulo simple: el sistema analizado es no lineal y los valores teóricos se calculan sobre problemas

lineales.

-
- [1] J. J. A. Vara, [Evap3: Pendulo simple](#).
[2] C. de Wikipedia, [Péndulo simple](#).

- [3] F. Teruel, *Notas de la materia 'Métodos Numéricos en fluidos I'* (2022).