

Laboratorio 3 - Solución numérica de ecuación en derivadas parciales y análisis de estabilidad

Pablo Chehade

pablo.chehade@ib.edu.ar

Métodos Numéricos en Fluidos I, Instituto Balseiro, CNEA-UNCuyo, Bariloche, Argentina, 2022

Se resolvió numéricamente la ecuación de onda escalar, homogénea y unidimensional con velocidad dependiente de la posición. Se empleó el método Runge-Kutta 4 para la evolución temporal y diferencias finitas de orden 2 para la espacial. Se analizó la evolución temporal de una condición inicial para distintas funciones de velocidad. Se estudió la estabilidad de la solución y se determinó la relación entre la velocidad y las discretizaciones espaciales y temporales necesaria para asegurar estabilidad. Esto se realizó mediante el análisis del número de onda modificado y se verificó numéricamente para distintas funciones de velocidad.

I. INTRODUCCIÓN

En ciencias físicas es usual modelar sistemas mediante ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Algunas ecuaciones cuentan con dependencias tanto espaciales como temporales, tratándose representativamente de un problema de valores de contorno para la dependencia espacial y uno de valores iniciales para la temporal. Sin embargo, no toda ecuación cuenta con solución analítica y es necesario recurrir a aproximaciones. De este modo, es necesario proponer un método numérico para cada dependencia. Esto implica que a las ventajas y desventajas propias de cada método se le suman nuevas propias de la combinación de métodos, lo cual debe ser estudiado en detalle para cada problema en particular.

En este trabajo se resolvió numéricamente una ecuación diferencial particular y se estudió las características de la solución en base a los métodos empleados. En particular, se resolvió la ecuación de onda escalar, homogénea y unidimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t \geq 0, \quad 0 < x < 4, \quad (1)$$

con condiciones iniciales

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x) = e^{-200(x-0.25)^2} \\ u_t(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

y condiciones de contorno de onda saliente

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{x=0} = c(0) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0}, \\ \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{x=4} = -c(4) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=4}, \end{cases} \quad (3)$$

para una variedad de velocidades del sonido $c(x)$ en el medio

$$\begin{cases} c_a(x) = 1, \\ c_b(x) = 1.5, \\ c_c(x) = 1.25 - 0.25 \tanh[40(0.75 - x)], \\ c_d(x) = 1.5 - \exp[-300(x - 1.75)^2]. \end{cases} \quad (4)$$

Una particularidad de la ecuación es la ausencia de un término difusivo, por lo que una onda en un medio homogéneo se transmite sin modificar su amplitud.

II. MÉTODOS NUMÉRICOS

La ecuación de onda 1 de segundo orden en el tiempo se puede transformar en el siguiente sistema de ecuaciones de primer orden en el tiempo mediante el cambio de variables $u_a = u$, $u_b = \partial u / \partial t$

$$\begin{cases} \frac{\partial u_a}{\partial t} = u_b \\ \frac{\partial u_b}{\partial t} = c^2(x) \frac{\partial^2 u_a}{\partial x^2} \end{cases}$$

junto a las condiciones iniciales

$$\begin{cases} u_a(x, 0) = u_0(x) \\ u_b(x, 0) = 0 \end{cases}$$

y a las condiciones de borde

$$\begin{cases} \frac{\partial u_a}{\partial t} \Big|_{x=0} = c(0) \frac{\partial u_a}{\partial x} \Big|_{x=0}, \\ \frac{\partial u_a}{\partial t} \Big|_{x=4} = -c(4) \frac{\partial u_a}{\partial x} \Big|_{x=4}, \end{cases}$$

Para resolver numéricamente el sistema, es necesario discretizar el dominio y proponer métodos numéricos para la parte espacial y temporal, buscando asegurar la estabilidad de la solución. En cuanto a la discretización del dominio, la variable espacial se discretizó en puntos equiespaciados $x_j = j\Delta x$ donde $j = 1, \dots, M$ y $\Delta x = 4/(M + 1)$. Por otro lado, la variable temporal también se discretizó en puntos equiespaciados $t_n = n\Delta t$ con $n = 0, 1, \dots, N$ y $\Delta t = t_{max}/N$. Aquí t_{max} es el tiempo máximo de evolución temporal. En este trabajo se optó por $t_{max} = 8$ debido a que se observó que a partir de ese momento la dinámica de la solución no es de interés.

En cuanto al método numérico, para la variable espacial se empleó diferencias centradas de orden dos para los nodos internos [1]

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} = \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2),$$

diferencias finitas adelantada orden 2 para el nodo del borde izquierdo ($j = 0$) [1]

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_0 = \frac{-3u_0 + 4u_1 - u_2}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

y diferencias finitas atrasada de orden 2 para el nodo del borde derecho ($j = N + 1$) [2]

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{N+1} = \frac{3u_{N+1} - 4u_N + u_{N-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2).$$

En base a estas aproximaciones, el sistema de ecuaciones junto a las condiciones de borde se convierten en el sistema semidiscretizado

$$\begin{cases} \frac{\partial u_{aj}}{\partial t} = u_{bj} \\ \frac{\partial u_{bj}}{\partial t} = \frac{c_j^2}{\Delta x^2}(u_{aj+1} - 2u_{aj} + u_{aj-1}) \\ \frac{\partial u_{a0}}{\partial t} = \frac{c_0}{2\Delta x}(-3u_{a0} + 4u_{a1} - u_{a2}) \\ \frac{\partial u_{aN+1}}{\partial t} = \frac{c_{N+1}}{2\Delta x}(-3u_{aN+1} + 4u_{aN} - u_{aN-1}) \end{cases} \quad (5)$$

donde $c_j = c(x_j)$. De este modo, para nodos internos se tienen dos ecuaciones diferenciales con dos incógnitas (u_a y u_b). Mientras que para los nodos de borde se tiene una ecuación diferencial con una incógnita (u_a). Este sistema se puede escribir de la forma

$$\frac{d\vec{z}}{dt} = \gamma\vec{z} = \vec{f}(\vec{z}, t)$$

definiendo el vector \vec{z} tal que $\vec{z}^T = (u_{a0}, u_{a1}, \dots, u_{aN}, u_{aN+1}, u_{b1}, u_{b2}, \dots, u_{bN+1})$ y la matriz de dimensión $(2N + 2) \times (2N + 2)$

$$\gamma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

tal que

$$A = \frac{1}{2\Delta x} \begin{pmatrix} -3c_0 & 4c_0 & -c_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -c_{N+1} & 4c_{N+1} & -3c_{N+1} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ & I_{N \times N} & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \frac{1}{\Delta x^2} \begin{pmatrix} c_1^2 & -2c_1^2 & c_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2^2 & -2c_2^2 & c_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & c_N^2 & -2c_N^2 & c_N^2 \end{pmatrix},$$

$$D = 0_{N \times N},$$

donde $I_{N \times N}$ es la matriz identidad de tamaño $N \times N$ y $0_{N \times N}$ es la matriz nula de tamaño $N \times N$.

En cuanto a la variable temporal se empleó el método Runge-Kutta de orden 4 [1]

$$\vec{z}_{n+1} = \vec{z}_n + \frac{1}{6}\vec{k}_1 + \frac{1}{3}(\vec{k}_2 + \vec{k}_3) + \frac{1}{6}\vec{k}_4 + O_{local}(h^5) \quad (6)$$

donde

$$\begin{cases} \vec{k}_1 = h\vec{f}(\vec{z}_n, t_n), \\ \vec{k}_2 = h\vec{f}\left(\vec{z}_n + \frac{1}{2}\vec{k}_1, t_n + \frac{h}{2}\right), \\ \vec{k}_3 = h\vec{f}\left(\vec{z}_n + \frac{1}{2}\vec{k}_2, t_n + \frac{h}{2}\right), \\ \vec{k}_4 = h\vec{f}(\vec{z}_n + \vec{k}_3, t_n + h) \end{cases}$$

Como se mencionó anteriormente, debido a la combinación de métodos numéricos pueden aparecer nuevos problemas de convergencia. En particular, puede cambiar la estabilidad de la solución dependiendo de los valores de Δx y Δt elegidos. Para esto es útil realizar el análisis con número de onda modificado, el cual se basa en proponer soluciones del tipo

$$\begin{cases} u_{aj} = v_a(t)e^{ikx_j} \\ u_{bj} = v_b(t)e^{ikx_j} \end{cases}$$

en el sistema de ecuaciones semi-discretizado 5 ignorando las condiciones de contorno. Realizando el reemplazo y desarrollando las ecuaciones se obtiene un sistema de ecuaciones

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v_a \\ v_b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_a \\ v_b \end{pmatrix}$$

donde λ es la matriz

$$\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2\frac{c_j^2}{\Delta x^2}(\cos(k\Delta x) - 1) & 0 \end{pmatrix}$$

con autovalores $\chi_{\pm} = \pm\sqrt{2\frac{c_j^2}{\Delta x^2}(\cos(k\Delta x) - 1)}$ reales. Considerando que se emplea el método Runge-Kutta 4 es necesario pedir, en base a un análisis de estabilidad de la ecuación modelo lineal [1], la relación

$$\Delta t \leq \frac{2.8}{|\chi_{\pm}|}$$

considerando el "peor caso", es decir, el mayor autovalor posible. Esto corresponde a $c_j = c_{max}$ máximo de $c(x)$ y k tal que $\cos(k\Delta x) = -1$. De este modo, se obtiene la relación

$$\Delta t \leq 1.4 \frac{\Delta x}{c_{max}} \quad (7)$$

para asegurar la estabilidad de la solución.

En base a lo anterior, se resolvió el sistema discretizado 6 para la variedad de velocidades $c(x)$ presentadas en 4 y distintas discretizaciones Δx y Δt . En cada caso se observó la evolución del sistema a distintos tiempos y se evaluó el cumplimiento de la condición de estabilidad 7.

III. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En primer lugar se resolvió el sistema discretizado 6 para $c_a(x) = 1$ y $c_b(x) = 1.5$, obteniendo las soluciones

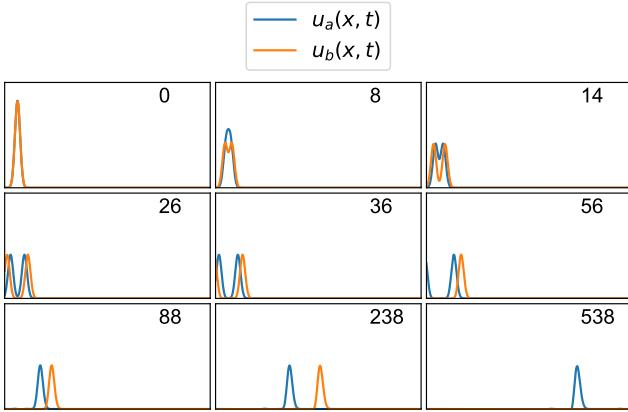


Figura 1: Distintos instantes de la evolución de la solución para distintas funciones de velocidad. $u_a(x, t)$ corresponde a $c_a(x) = 1$ con $\Delta x \sim 2.6 * 10^{-4}$ y $\Delta t \sim 1.9 * 10^{-4}$, mientras que $u_b(x, t)$ corresponde a $c_b(x) = 1.5$ con $\Delta x \sim 2.6 * 10^{-3}$ y $\Delta t \sim 6.3 * 10^{-4}$. El índice superior de cada instante corresponde al índice n del método numérico de evolución temporal.

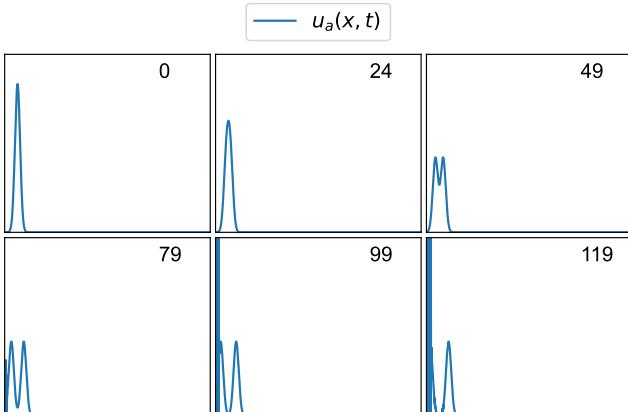
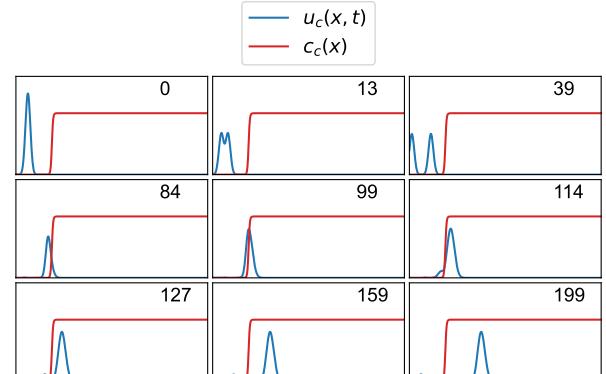
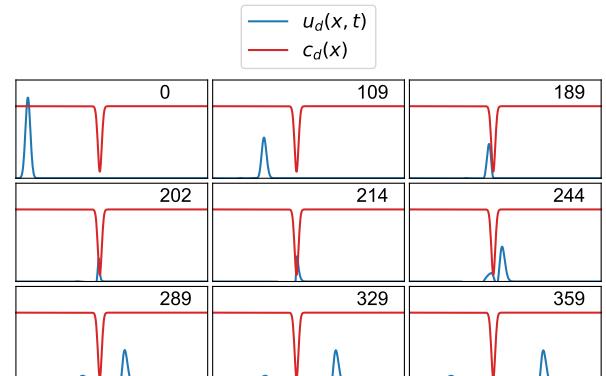


Figura 2: Distintos instantes de la evolución de la solución $u_a(x, t)$ para $c_a(x) = 1$ con $\Delta x \sim 2.6 * 10^{-3}$ y $\Delta t \sim 6.3 * 10^{-4}$. El índice superior de cada instante corresponde al índice n del método numérico de evolución temporal.

$u_a(x, t)$ y $u_b(x, t)$, respectivamente. Nótese que se tratan de las soluciones numéricas de la ecuación original 1, no de las variables semi-discretizadas del sistema 5. En cuanto a la discretización, para el primer caso se empleó $\Delta x \sim 2.6 * 10^{-4}$ y $\Delta t \sim 1.9 * 10^{-4}$, mientras que para el segundo, $\Delta x \sim 2.6 * 10^{-3}$ y $\Delta t \sim 6.3 * 10^{-4}$. La solución a distintos tiempos se grafica en la figura 1. En cuanto al comportamiento de $u_a(x, t)$, inicialmente la condición inicial se divide en dos ondas, cada una moviéndose en direcciones opuestas. Luego, la onda que se mueve hacia la izquierda comienza a acercarse al borde del dominio espacial, para luego escapar del mismo progresivamente.



(a)



(b)

Figura 3: Distintos instantes de la evolución de la solución para distintas funciones de velocidad. 3a $u_c(x, t)$ corresponde a $c_c(x) = 1.25 - 0.25 \tanh[40(0.75 - x)]$, mientras que 3b $u_d(x, t)$ corresponde a $c_d(x) = 1.5 - \exp[-300(x - 1.75)^2]$. En ambos casos se empleó $\Delta x \sim 2.6 * 10^{-3}$ y $\Delta t \sim 6.3 * 10^{-4}$. La velocidad se grafica en escalas arbitrarias. El índice superior de cada instante corresponde al índice n del método numérico de evolución temporal. En la figura 3b no se incluyó la evolución temporal de la onda inicialmente saliente hacia la derecha, como se observa en 3a entre los instantes $n = 0$ y $n = 84$.

te. Durante este proceso la onda no se refleja desde el borde debido a las condiciones de borde de onda saliente utilizadas 3. Mientras tanto, la otra onda continúa su movimiento hacia la derecha sin observarse cambio en su amplitud. En cuanto al comportamiento de $u_b(x, t)$ se observa el mismo proceso pero con mayor velocidad.

En segundo lugar, se resolvió el sistema discretizado para $c_a(x) = 1$ bajo condiciones teóricas de inestabilidad. En base a la condición 7 y considerando que para este caso $c_{max} = 1$, se eligió $\Delta x \sim 2.6 * 10^{-3}$ y $\Delta t \sim 6.3 * 10^{-4}$. La solución $u_a(x, t)$ a distintos tiempos se grafica en la figura 2. Inicialmente se observa el comportamiento visto en la figura 1. Sin embargo, cuando la onda que se mueve

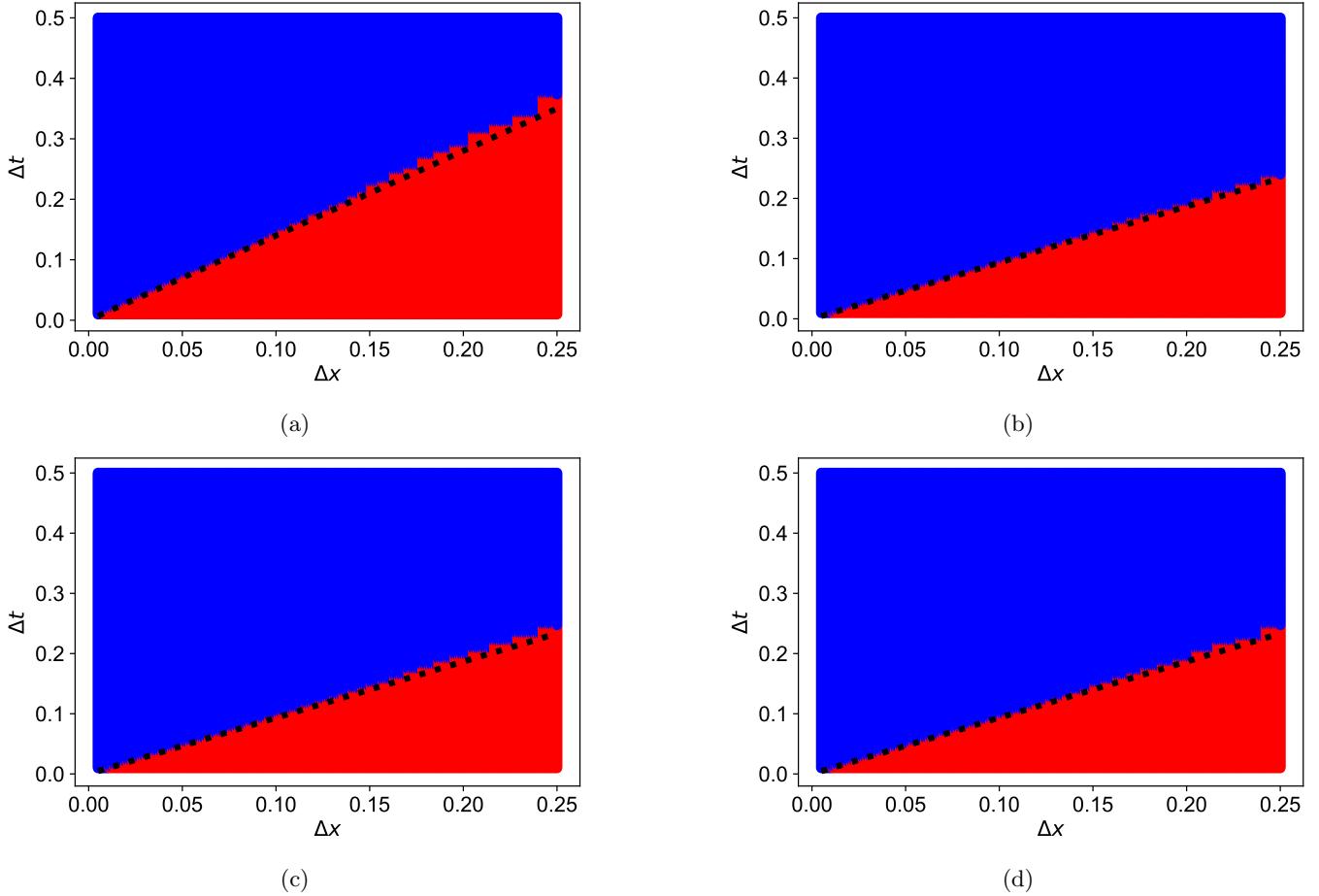


Figura 4: Evaluación de estabilidad para distintas discretizaciones espaciales y temporales y una variedad de velocidades del medio. En color azul (zona superior) se grafican la discretización $\{\Delta x, \Delta t\}$ tal que la solución diverge. En rojo (zona inferior), la discretización tal que la solución no diverge. La línea punteada corresponde a la igualdad $\Delta t = 1.4\Delta x/c_{max}$. 4a corresponde a $c_a(x) = 1$ con $c_{max,a} = 1$, 4b a $c_b(x) = 1.5$ con $c_{max,b} = 1.5$, 4c a $c_c(x) = 1.25 - 0.25 \tanh[40(0.75 - x)]$ con $c_{max,c} = 1.5$ y 4d a $c_d(x) = 1.5 - \exp[-300(x - 1.75)^2]$ con $c_{max,d} = 1.5$.

hacia la izquierda llega al borde, la solución comienza a diverger, tomando valores mucho más grandes que los esperados.

En tercer lugar, se resolvió el sistema discretizado para funciones de la velocidad no constantes. En particular, se utilizaron $c_c(x) = 1.25 - 0.25 \tanh[40(0.75 - x)]$ y $c_d(x) = 1.5 - \exp[-300(x - 1.75)^2]$, bajo la discretización $\Delta x \sim 2.6 \times 10^{-3}$ y $\Delta t \sim 6.3 \times 10^{-4}$, obteniendo las soluciones $u_c(x, t)$ y $u_d(x, t)$, respectivamente. Estas se grafican para distintos instantes de tiempo en la figura 3 junto a las funciones de velocidad. La evolución de $u_c(x, t)$ se resume en que la onda que se mueve hacia la izquierda escapa del borde sin reflejarse, mientras que la onda que se mueve hacia la derecha se divide en una onda reflejada y otra transmitida al encontrarse con el cambio de velocidad. Por otro lado, la solución $u_d(x, t)$ se comporta de manera similar a la anterior, con la diferencia de que la onda que se mueve hacia la derecha se refleja y transmite múltiples veces al encontrarse con el cambio

de velocidad.

En último lugar, se evaluó la validez de la condición de estabilidad teórica 7 para las distintas funciones $c(x)$. Para esto, se resolvió el sistema discretizado 6 empleando distintos pares de discretizaciones $\{\Delta x, \Delta t\}$ y se observó si la solución divergía. En base al comportamiento visto en 2 se definió una solución como divergente si en algún punto de la evolución la solución superaba un umbral arbitrario, por ejemplo $u(x, t) > 2$, que no corresponde a un valor esperado. En la figura 4 se resumen los ensayos realizados. En todos los casos se identifica una zona de estabilidad y otra de inestabilidad, separadas por una línea aproximadamente recta con pendiente $1/c_{max}$, correspondiente a la igualdad de la condición de estabilidad teórica. Visualmente se identifican desviaciones de la estabilidad para los mayores valores de Δx y Δt , aunque esto podría deberse a errores propios en ambos métodos de discretización. Sin embargo, para valores de discretizaciones pequeños la condición de estabilidad vale para todas las funciones de velocidad empleadas.

IV. CONCLUSIÓN

Se resolvió numéricamente la ecuación de onda escalar, homogénea y unidimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, t \geq 0, 0 < x < 4,$$

con condiciones iniciales

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x) = e^{-200(x-0.25)^2} \\ u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$

y condiciones de contorno de onda saliente

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{x=0} = c(0) \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0}, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{x=4} = -c(4) \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=4}, \end{cases}$$

para una variedad de velocidades del sonido $c(x)$ en el medio. Se empleó el método Runge-Kutta 4 para la evolución temporal y diferencias finitas de orden 2 para la espacial. Se analizó la evolución temporal de una condición inicial para distintas funciones de velocidad. Se observó el cumplimiento de la condición de borde saliente al no producirse reflexiones en los bordes. También se observaron fenómenos de reflexión y transmisión frente a un cambio de velocidad en el medio.

Además, se estudió la estabilidad de la solución mediante el análisis con número de onda modificado, determinando la siguiente relación entre la velocidad máxima y las discretizaciones espaciales Δx y temporales Δt necesaria para asegurar estabilidad

$$\Delta t \leq 1.4 \frac{\Delta x}{c_{max}}.$$

También se estudió numéricamente esta relación para una variedad de funciones de velocidad, verificando su validez para valores de Δx y Δt relativamente pequeños.

[1] P. Moin, *Fundamentals of Engineering Numerical Analysis* (Cambridge University Press, 32 Avenida of the Americas,

New York, 2010) pp. 15, 16, 64–68.

[2] C. de Wikipedia, [Finite difference coefficient](#).