Título??

Pablo Chehade
pablo.chehade@ib.edu.ar
Métodos Numéricos en Fluidos I, Instituto Balseiro, CNEA-UNCuyo, Bariloche, Argentina, 2022

- Se estudiaron métodos numéricos espaciales y de evolución temporal para resolver el problema de la cavidad cuadrada hidrodinámica bidimensional.
- Se tiene en cuenta la ecuación de momentos y la de conservación de masa. Este tiene un término advectivo, uno difusivo.
- Se resolvió mediante el método de volumenes finitos y algoritmo simpler calculando presión y velocidades diferidas? con grilla desplazada.
- En primer lugar, se estudió la dependencia de la solución en el estado estacionario con respecto al paso temporal.
- Se planteó un algoritmo para minimizar el costo computacional para encontrar el estado estacionario con un error menor al 5 %
- Se evaluó el efecto de los pasos internos del algoritmo simpler
- En segundo lugar, se estudió el impacto en el estacionario del esquema espacial en el término advectivo empleando distintos números de Reynolds. En particular, se utilizaron diferencias centradas de orden 2, Up-wind de orden uno y el esquema QUICK de orden ?
- Además, se estudió el orden de convergencia espacial de Up-wind de primer orden en referencia al mejor esquema advectivo
- Se estudió el efecto del método de evolución temporal, evaluando el estado transitorio de la solución mediante los métodos Euler Implícito y Crank-Nicholson

I. INTRODUCCIÓN

1 [¿Por qué es importante resolver problemas de fluidos numéricamente? Rtas en la primera clase]

- Una gran parte de los problemas de mecánica de fluidos no son resolubles analíticamente
- En algunos de los problemas es posible realizar experimentos. Sin embargo, estos traen aparejados un gran costo operativo y dificultades para realizar las mediciones ref clase 1
- Una alternativa más rápida y de menor costo es resolver estos problemas numéricamente, con las dificultades que esto conlleva. Tal es el caso de los errores de aproximación numérica y el costo computacional, que puede ser aún así más barato que hacer el experimento
- Aun así, en los últimos años la resolución numérica de ecuaciones es aceptada y está ganando preponderancia

2 [Explicar el problema de la cavidad cuadrada hidrodinámica bidimensional]

- Un problema muy estudiado desde el punto de vista numérico en mecánica de fluidos es el de la cavidad cuadrada hidrodinámica bidimensional, también conocida como Shear-drien cavity flow
- Consiste en una cavidad cuadrada bidimensional de lado L que contiene un fluido incompresible de viscocidad ν. Las condiciones de borde son de no deslizamiento en todas las paredes excepto en la horizontal superior. Sea $\vec{V}(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$ la velocidad en el punto (x,y), las condiciones anteriores se traducen en $\vec{V}(x,0) = \vec{V}(0,y) = \vec{V}(L,y) = (0,0)$ y $\vec{V}(x,L) = (U_0, 0)$
- En la figura 1 se muestra un esquema del problema

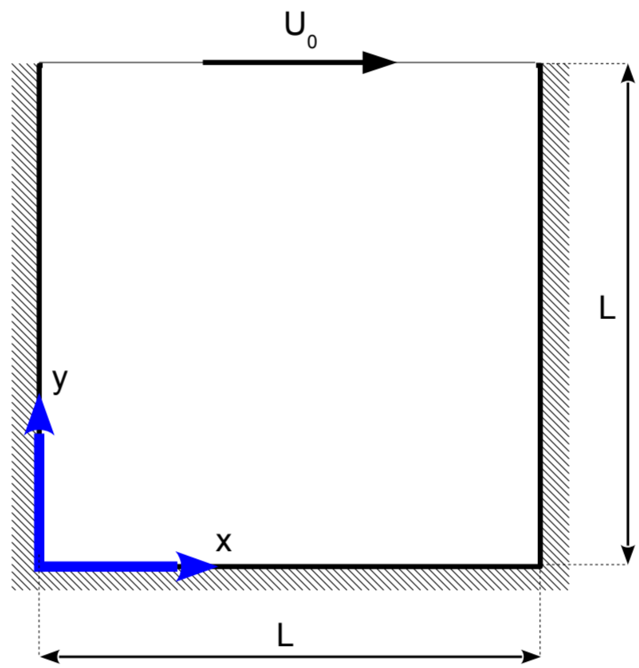
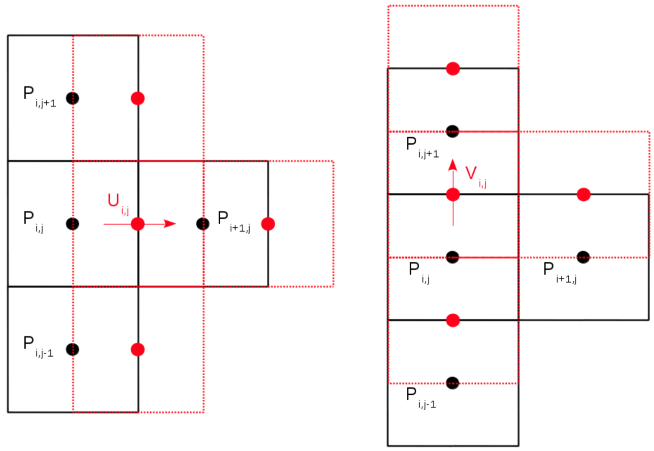


Figura 1

3 [Explicación de las ecuaciones involucradas]

- Las variables de interés son la presión y la velocidad vertical y horizontal
- Se cuentan con tres ecuaciones diferenciales:
- En primer lugar, las dos ecuaciones de conservación de momento en direcciones vertical y horizontal que, adimensionales, son

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (uu)}{\partial x} + \frac{\partial (uv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$



(a) (b)

Figura 2: Grillas diferidas. Figuras extraídas de [**?**]

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial (uv)}{\partial x} + \frac{\partial (vv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

donde $Re = U_0 L/\nu$

- Nombrar cada término (temporal, advectivo, de presión y difusivo)
- En segundo lugar, la ecuación de conservación de masa que para fluido incompresible es

$$\bigtriangledown \bullet \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

- en base a esa ecuación se dice que el campo de velocidades tiene ”divergencia libre”
- Las soluciones dependen de Re

II. MÉTODOS NUMÉRICOS

4 **[Resumen]**

- Para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales es necesario discretizar el dominio y plantear esquemas numéricos para las ecuaciones. En cuanto al primero, es necesario diferenciar entre dominio espacial y temporal.
- En cuanto al segundo, se emplearon volúmenes finitos con el objetivo de asegurar la conservación de masa ? y distintos métodos espaciales y temporales para cada término.

5 **[Discretización espacial]**

- El dominio espacial se discretiza ...
- Copiar lo que está en el pdf de la cátedra
- [**?**]

6 **[Grilla desplazada]**

- Copiar lo que está en el pdf de la cátedra

7 **[Discretización temporal]**

- En cuando al dominio temporal, la variable temporal se discretizó en puntos equiespaciados $t_n = n\Delta t$ con $n = 0, 1, \ldots, N$ con $\Delta t = t_{max}/N$

8 **[Costo computacional y elección de dt]**

- Debido a la cantidad de variables involucradas y dependiendo del número de pasos de tiempo a realizar, el costo computacional puede ser alto.
- Un modo de minimizarlo es eligiendo n1 lo suficientemente pequeño para que el error sea menor a una tolerancia determinada, aunque para esto es necesario conocer al menos la solución exacta, lo cual no siempre se tiene
- Otra alternativa es elegir N en base a un criterio de convergencia: si la solución tiende a un estacionario independiente del tiempo, entonces avanzamos la solución hasta que, por ejemplo, CONDICIÓN SOBRE DERIVADAS
- Si solo es de interés la solución en el estado estacionario, otro modo de atacar el problema es eligiendo dt para que el problema converja rápido a pesar de tener un estado transitorio lejos de la solución exacta. Esto último se basa en la hipótesis de que la solución no depende del paso de tiempo
- En este trabajo se estudiaron ambos métodos, eligiendo n1 de modo que el error sea menor a una tolerancia de 1e-5 y proponiendo un algoritmo para elegir dt de modo de minimizar el costo computacional.
- No describir el algoritmo

9 **[Algoritmo simpler simplificadamente]**

- [**?**]
- Es un algoritmo segregado o de paso fraccionado. Esto último en el sentido de que se calculan por separado $\vec{v}$ y p.
- Permite calcular la velocidad con divergencia libre (cumple la conservación de masa) y la presión en cada paso de tiempo a partir de un guess, el cual suele ser la solución del paso anterior. es así, no?
- Se propone que determinados términos de la ecuación se pueden estimar con el paso anterior. Se calcula la presión de modo de que el nuevo campo de velocidades tenga divergencia libre. Luego se calcula el campo de velocidades empleando esta nueva presión, obteniendo un campo que no necesariamente tiene divergencia libre. Posteriormente, se vuelve a calcular la presión de modo que el nuevo campo de velocidades tenga divergencia libre, empleando como guess el campo de velocidades calculado. Este proceso es un paso del algoritmo simpler.
- En el link `https://www.cfd-online.com/Wiki/SIMPLER_algorithm_-_SIMPLE_-_Revised` se explica el procedimiento bien resumido y sin ecuaciones.
- La exactitud de la solución depende del número de pasos internos realizados en el algoritmo, que pueden ser tantos como uno quiera aunque aumenta el costo computacional

Es necesario explicar cómo discretizar las ecuaciones de momento? Sería copiar textual el desarrollo hecho en la penúltima clase. Le pregunté a Federico Plantear lo siguiente luego de que Federico me halla respondido

10 **[Esquemas numéricos posibles para cada término]**

- Para cada término de las ecuaciones de momento, se pueden plantear distintos esquemas numéricos. En este trabajo se estudiaron los siguientes:
  - Para la parte temporal, se emplearon los esquemas de Euler implícito y de Crank-Nicolson.

11 **[Término advectivo. Explicar cada método numérico]**

-

12 **[Término temporal. Explicar cada método numérico]**

-

13 **[Resumen de lo que se va a estudiar]**

- En primer lugar, se estudió la dependencia de la solución en el estado estacionario con respecto al paso temporal.
- Se planteó un algoritmo para minimizar el costo computacional para encontrar el estado estacionario con un error menor al 5 %
- Se evaluó el efecto de los pasos internos del algoritmo simpler
- En segundo lugar, se estudió el impacto en el estacionario del esquema espacial en el término advectivo empleando distintos números de Reynolds. En particular, se utilizaron diferencias centradas de orden 2, Up-wind de orden uno y el esquema QUICK de orden ?
- Además, se estudió el orden de convergencia espacial de Up-wind de primer orden en referencia al mejor esquema advectivo
- Se estudió el efecto del método de evolución temporal, evaluando el estado transitorio de la solución mediante los métodos Euler Implícito y Crank-Nicholson
- En todos los casos se usó una tolerancia para el estado estacionario de 1e-5

III. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

A. Dependencia del estado estacionario con el paso dt

En primer lugar, se analizó la dependencia del estado estacionario con el paso de evolución temporal. Se calculó $u(0.5, 0.5)$ y $v(0.5, 0.5)$ para $Re = 1000$, $n_1 = 20$ y distintos Δt entre 0.005 y 20. Se emplearon diferencias centradas de orden 2 para el término advectivo y Euler implícito para la evolución temporal. En la figura 3 se grafican los resultados obtenidos respecto al valor correspondiente al menor Δt en valor absoluto. Se observa una diferencia entre los valores obtenidos del orden de 1×10^{-4}, ligeramente superior a la tolerancia en el criterio de convergencia. Aunque si solo se consideraran Δt menores a 1, se obtendría una diferencia menor a dicha tolerancia.

Esto indica que el estado estacionario depende de Δt con una variación menor a la tolerancia siempre que ocurra $\Delta t < 1$ menor pero del orden. Si bien esto sólo se da en el caso particular considerado, se tomará como normal general

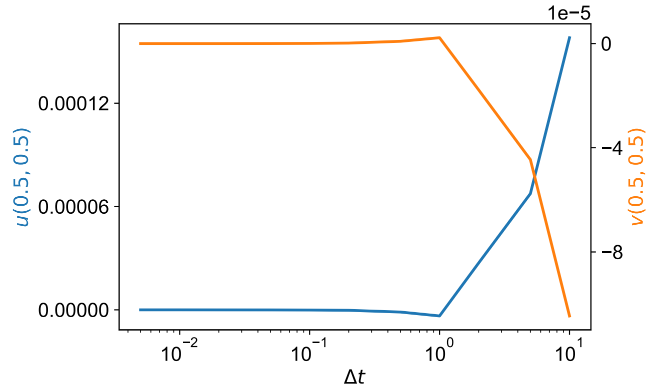


Figura 3

B. Elección de dt

- Como se mencionó en la sección anterior, debido a la cantidad de variables involucradas el costo computacional necesario para encontrar el estado estacionario es muy alto.
- Además, el resultado anterior indica que el estado estacionario podría no depender del paso de tiempo Δt.
- Por lo tanto, si solo es de interés el estado estacionario, se puede elegir Δt de modo que el número de pasos necesarios sea el menor posible.
- Esto no implica necesariamente que Δt sea lo mayor posible.
- En base a esto, se propone el siguiente algoritmo.

14 **[Algoritmo]**

-

15 **[Para qué se usó el algoritmo anterior]**

- Este algoritmo no siempre va a encontrar el mejor Δt posible, pero se espera que esté cerca del óptimo.
- El algoritmo anterior fue empleado para hallar el estado estacionario en todo este trabajo salvo el caso particular $n_1 = 80$. Este es el caso más costoso y se buscará a mano el mejor Δt para cada Re específico.
- Se usaron $\Delta t = 0.35$, 1.25 y 2.0 para $Re = 100$, 1000 y 5000, respecticamente

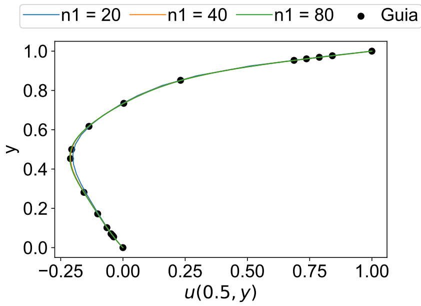
C. dt para distintos lsimpler

Estaría bueno dar para cada caso el máximo dt posible y el que me da mi algoritmo

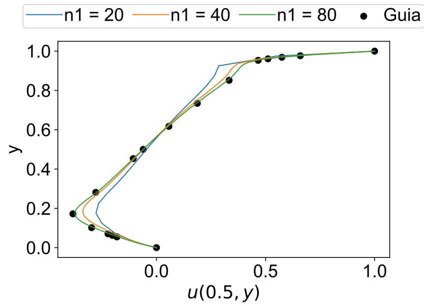
D. Término advectivo

Los captions no están siendo autocontenidos. Hay que mencionar qué curva se encima sobre cuál

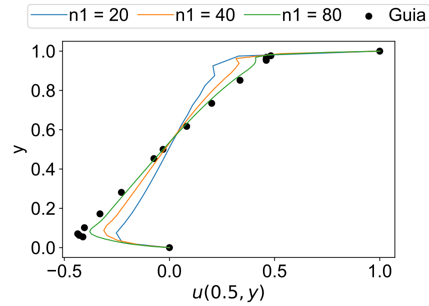
Se implementó para el término advectivo los esquemas DC2, UP1 y QUICK. Se calculó el estado estacionario para $Re = 100, 1000\,\text{y}\,5000$, para $n1 = 20, 40\,\text{y}\,80$ y para los tres esquemas mencionados



(a)



(b)



(c)

Figura 4: Velocidad $u(0.5, y)$ en función de y para distinto tamaño de la grilla espacial n_1 y número de Reynolds Re: (a) $Re = 100$, (b) $Re = 1000$ y (c) $Re = 5000$.

Es de interés estudiar

- La dependencia con el número de Reynolds
- La dependencia con n1
- La dependencia con el termino advectivo

16 **[Comparación DC2 vs n1 para distintos Re]** En primer lugar, se estudió la dependencia del estado estacionario con la discretización espacial n_1 y el número de Re, empleando como término advectivo particular diferencias finitas de orden 2

- En las figuras 4 y 5 se grafican las velocidades $u(0.5, y)$ y $v(x, 0.5)$ para distintos casos.
- Para $Re = 100$ se observa en ambos casos que el resultado varía cualitativamente poco con el tamño de la discretización.
- Por otro lado, para $Re = 1000$ la diferencia entre los resultados es más significativa, llegando en algunos sitios a superar la tolerancia de 1×10^{-5} del criterio de convergencia.
- Por último, el caso $Re = 5000$ es el más notable de todos. Ni siquiera la solución de mayor n_1 es cercana a la de referencia
- Esto indica que a mayor número de Re es necesario disminuir el tamaño de la discretización, es decir, aumentar n_1, para obtener una solución más precisa.
- Por qué pasa esto? Qué tiene de particular el caso de Re alto?

17 **[Comparación cualitativa entre métodos numéricos para distintos Re]** En segundo lugar, se estudió la dependencia del estado estacionario con el número de Re y el método numérico empleado para el término advectivo. En todos los casos se empleó $n_1 = 80$

- En las figuras **??** y **??** se grafica
- Cualitativamente, para $Re = 100$ no se observan grandes diferencias.
- Para $Re = 1000$ es notable que el método UP1 no aproxima correctamente la solución, mientras que DC2 y QUICK sí lo hacen. Esto se puede justificar en los órdenes de aproximación de los métodos, siendo el primero de orden 1 y los segundos de orden 2 QUICK es orden 2?
- Para $Re = 5000$ ninguno de los métodos aproxima correctamente la solución en la totalidad del dominio. En base a los resultados obtenidos al variar n_1, esto podría deberse al tamaño de la grilla espacial y no al método numérico.

Tabla con resultados

18 **[Comparación numérica entre métodos numéricos para distintos Re.]** Para cada variación posible de n_1, Re y método para el término advectivo, se calculó el error relativo e_{rel} respecto a la bibliografía referencia en el centro del dominio $x = 0.5$ e $y = 0.5$. Para calcular este error se suman cuadráticamente los errores en u y v y se normaliza con el valor de referencia, es decir,

$$e_{rel} = \frac{\sqrt{(u_{exp} - u_{sol})^2 + (v_{exp} - v_{sol})^2}}{\sqrt{u_{sol}^2 + v_{sol}^2}}.$$

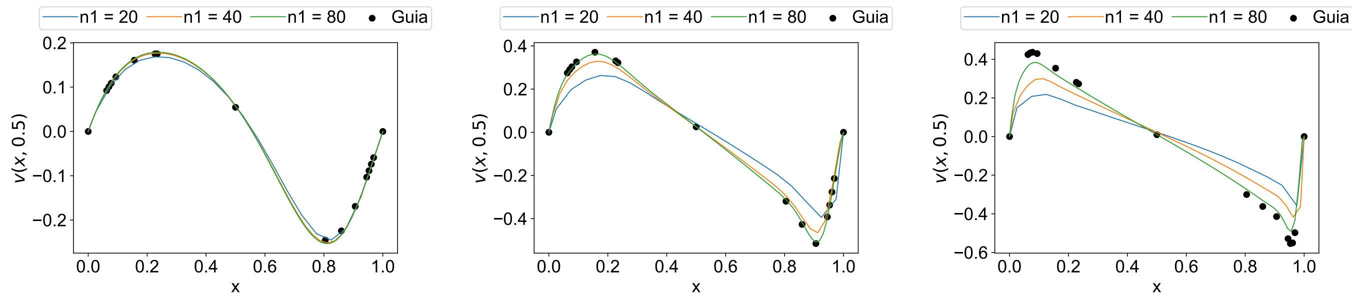
Mencionar cómo se calcula $u(0.5, 0.5)$ y que sólo tiene sentido calcularlo allí porque la aproximación es del mismo orden que los métodos. Calcularla en otro lado con un promedio ponderado es de mayor orden.

- En la figura 8. Esta permite hacer una discusión cualitativa
- Cualitativamente los tres métodos muestran el mismo comportamiento
- En primer lugar, independientemente del valor de Re, a mayor n_1, menor error. La excepción a este caso es el de $Re = 100$ y $n_1 = 80$, donde tanto en DC2 como en QUICK no se cumple la regla por qué será?
- En segundo lugar, a mayor Re, el error tiende a aumentar. Esto se observó en los análisis anteriores: a mayor Re es necesario aumentar n_1 para obtener una solución más precisa.
- Para comparar los métodos numéricos entre sí, es necesario analizar cuantitativamente los errores.
- Estos se presentan para $n_1 = 80$ CREO en la TABLA REF. Tengo que cambiar la tabla, tiene que decir los nros de Re en lugar de e
- Se observa que el método DC2 presenta menor error.

$tol_e stacionario = 1e - 5$

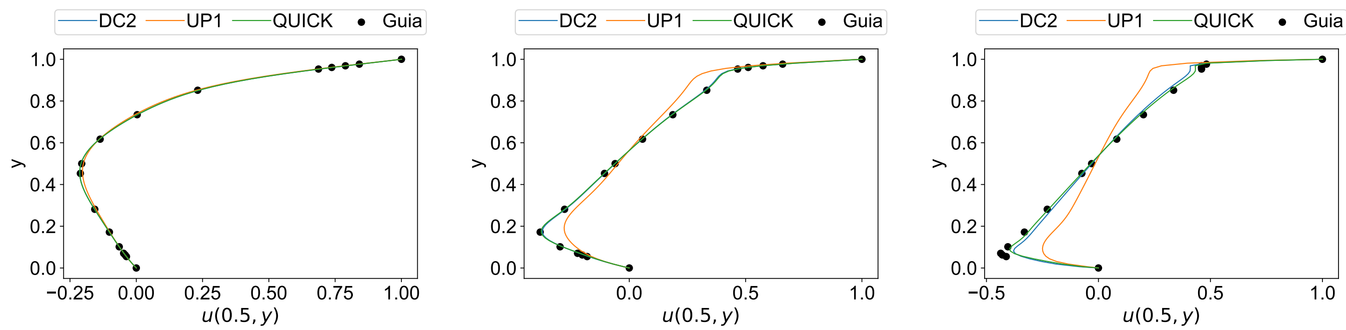
- En la figura **??**

Duda: es necesario reportar el dt en cada caso? No lo



(a) (b) (c)

Figura 5: Velocidad $v(x, 0.5)$ en función de x para distintos tamaño de la grilla espacial n_1 y número de Reynolds Re: (d) $Re = 100$, (e) $Re = 1000$ y (f) $Re = 5000$.



(a) (b) (c)

Figura 6: Velocidad $u(0.5, y)$ en el estado estacionario en función de y para distintas métodos numéricos del término advectivo y distintos números de Re: (a) $Re = 100$, (b) $Re = 1000$ y (c) $Re = 5000$. En todos los casos se empleó una grilla espacial de tamaño $n_1 \times n_1$ con $n_1 = 80$

	e		
DC2	0.08541	0.17567	0.69045
UP1	0.14813	3.46833	17.6402
QUICK	0.08778	0.30266	4.09139

voy a hacer

E. Orden de convergencia espacial de UP1

Se calculó $u(0.5)$ y $v(0.5)$ para $Re = 1$ y $Re = 1000$ con $n1 = 80$ y esquema QUICK. Se consideró este valor como la solución exacta. Luego, se calcularon las mismas velocidades para distintos n1 y se calculó el error respecto a la solución numérica considerada como la exacta

u: Orden de convergencia: 2.5279722490866563 +/- 0.25890392418605823 v: Orden de convergencia: 2.88403428611868 +/- 0.4040887289633906

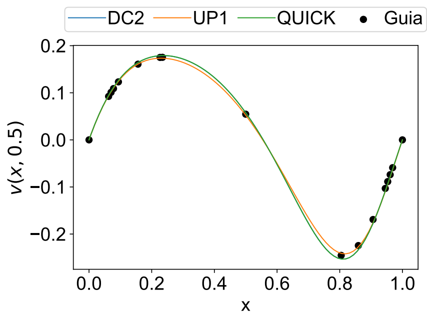
F. Esquema temporal con solución dependiente del tiempo

Evolución temporal con EI y CN.

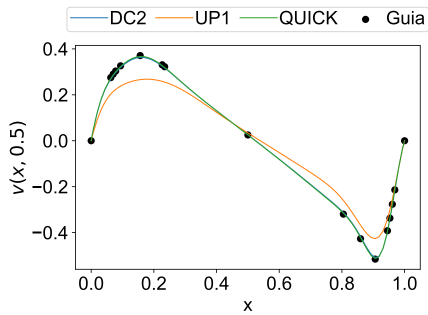
IV. CONCLUSIÓN

[] F. Teruel, *Notas de la materia 'Métodos Numéricos en fluidos I'* (2022).

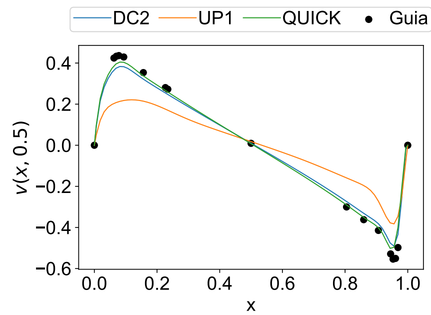
[] S. V. Patankar, *Numerical heat transfer and fluid flow*, Series on Computational Methods in Mechanics and Thermal Science (Hemisphere Publishing Corporation (CRC Press, Taylor & Francis Group), 1980) pp. 131–134.



(a)

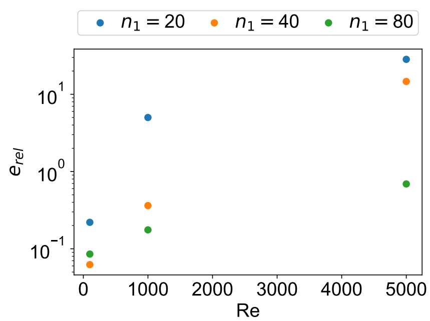


(b)

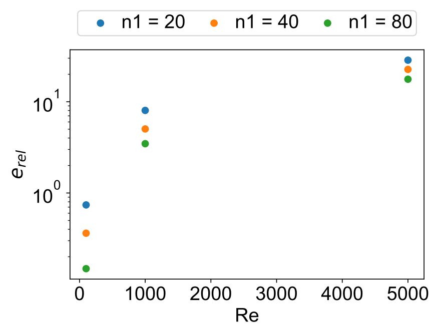


(c)

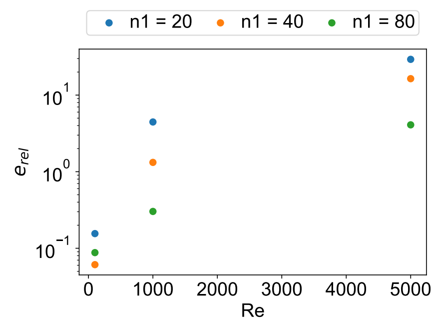
Figura 7



(a)



(b)



(c)

Figura 8: Termino advectivo

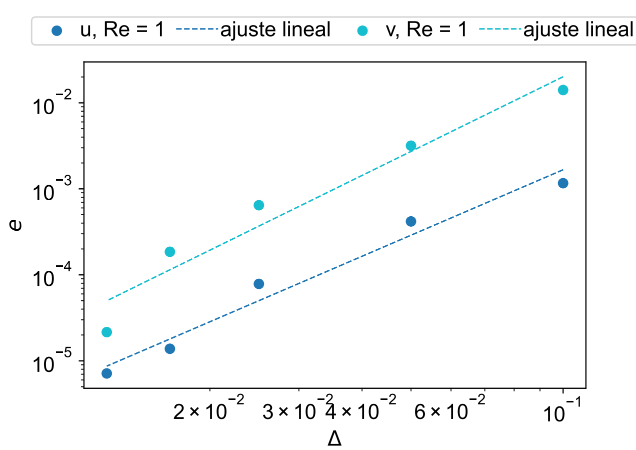


Figura 9