# Métodos numéricos en fluidos – Instituto Balseiro – 2022

## Práctica 3

1. Mediante el análisis de número de onda modificado muestre que la utilización del esquema de segundo orden y hacia un lado para la derivada segunda:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,|_j \approx \frac{-u_{j+3}+4u_{j+2}-5u_{j+1}+2u_j}{\Delta x^2},$$

   conduce a inestabilidades si se aplica a la ecuación de difusión ($u_t - \alpha u_{xx} = 0$).

2. Suponga que decide avanzar la ecuación de onda de primer orden ($u_t + c\,u_x = 0$) con el método de Leap-Frog para la parte temporal y con diferencias centradas de segundo orden o Padé de cuarto orden para la parte espacial. Compare para cada caso el máximo número CFL (CFL= $c\,\Delta t/\Delta x$) que resulta en un esquema estable. Note que ocurre con el CFL cuando se mejora la resolución espacial.

3. El siguiente esquema numérico ha sido propuesto para resolver la ecuación de onda de primer orden:

$$\frac{1}{\Delta t}[u_j^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)]\frac{c}{2\Delta x}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n).$$

   (a) Encuentre el rango para el CFL que hace el método estable.

   (b) ¿Es el método consistente?

4. El esquema ADI (o de factorización aproximada) recomendado para la ecuación de difusión en 3D es:

$$\begin{aligned}
(I - \alpha\Delta t/2\,A_x)\mathbf{u}^* &= [I + \alpha\Delta t(A_x/2 + A_y + A_z)]\mathbf{u}^{(n)},\\
(I - \alpha\Delta t/2\,A_y)\mathbf{u}^{**} &= \mathbf{u}^* - \alpha\Delta t/2\,A_y\mathbf{u}^{(n)},\\
(I - \alpha\Delta t/2\,A_z)\mathbf{u}^{n+1} &= \mathbf{u}^{**} - \alpha\Delta t/2\,A_z\mathbf{u}^{(n)}.
\end{aligned}$$

   (a) Muestre que el método es incondicionalmente estable y halle el orden de aproximación.

   (b) Discuta como aplicaría las condiciones de contorno en esta formulación.

5. Considere la ecuación de Burgers en 1D:

$$u_t + u\,u_x = \alpha u_{xx}$$

   en $0 \le x \le 1$, con las siguientes condiciones de borde:

$$u(0,t) = 0, \qquad u(1,t) = 0.$$

   (a) Si se utiliza un esquema implícito de segundo orden para la parte temporal y esquemas centrados de segundo orden para la parte espacial; escriba la forma discreta de la ecuación, las matrices involucradas, y explique como sería el algoritmo que utilizaría para resolver la ecuación.

   (b) ¿Cómo podría evitar iteraciones en su algoritmo?

6. **(Problema a entregar - 01/11/2022)** Las imágenes sísmicas son utilizadas en una gran variedad de aplicaciones, desde explotaciones petrolíferas hasta observaciones médicas no intrusivas. Se quiere estudiar numéricamente un modelo unidimensional de un problema de imágenes sísmicas para ver los efectos que tiene una velocidad del sonido variable entre diferentes medios sobre la transmisión y reflección de una onda acústica. Considere la ecuación de onda escalar, homogénea y unidimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad t \geq 0 \qquad -\infty < x < \infty \tag{1}$$

con condiciones iniciales

$$u(x,0) = u_0(x) \qquad u_t(x,0) = 0$$

donde $c > 0$ es la velocidad del sonido. El dominio $x$ para este problema es infinito. Para poder abordarlo numéricamente se trunca el dominio en $0 \leq x \leq 4$. Sin embargo, para hacer esto es necesario especificar algunas condiciones en los bordes del dominio, $x = 4$ y $x = 0$, de modo que las ondas calculadas viajen suavemente saliendo del dominio computacional como si éste se extendiera hasta el infinito. Una "condición radiativa" (condición radiativa de Sommerfeld) especificaría que en $\infty$ todas las ondas son salientes, lo cual es necesario para que el problema esté bien planteado. En casos unidimensionales, esta condición puede ser aplicada en forma exacta en un $x$ finito: se desea sólo ondas salientes en los bordes del dominio. Es decir, en $x = 4$ se quiere que la solución numérica mantenga sólo ondas que viajan hacia la derecha y en $x = 0$ sólo aquellas que lo hacen hacia la izquierda. Si se factorizan los operadores en la ecuación de onda puede verse en forma más explícita qué es lo que debe hacerse (asumiendo $c$ constante por el momento)

No me queda claro la elección de las CB
A pesar de que c = c(x), sigo asumiendo la validez de las CB?

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right) u = 0 \tag{2}$$

La parte de la solución que viaja hacia la derecha es

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right) u = 0 \tag{3}$$

y la que viaja hacia la izquierda es

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right) u = 0 \tag{4}$$

de modo que en $x = 4$ es necesario resolver la ecuación (3) en lugar de la ecuación (1) para asegurar una solución saliente. Del mismo modo, en $x = 0$ hay que resolver la ecuación (4) en lugar de la ecuación (1).

Para el avance en el tiempo es recomendable que la ecuación (1) sea descompuesta en dos ecuaciones de primer orden en el tiempo

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = u_2 \qquad y \qquad \frac{\partial u_2}{\partial t} = c^2(x)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}$$

Las condiciones de borde resultan

$$\left.\frac{\partial u_1}{\partial t}\right|_{x=0} = c(0)\left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=0} \qquad \left.\frac{\partial u_1}{\partial t}\right|_{x=4} = -c(4)\left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=4}$$

Se recomienda utilizar esquemas de segundo orden para la derivada espacial. Este problema requiere una elevada precisión para la solución y encontrará que son necesarios al menos $N = 400$ puntos. Compare una solución con menos puntos con una que considere precisa. Se recomienda utilizar Runge-Kutta de cuarto orden para el avance temporal.

¿Qué valor de $c$ debería ser usado para estimar el máximo $\Delta t$ permitido para obtener una solución estable? Estimar el máximo paso de tiempo permitido a través del análisis del número de onda modificado. Tome $u(x,0) = \exp[-200(x-0.25)^2]$ especificando $c(x)$ según:

(a) Arenisca porosa: $c(x) = 1$.

(b) Transición a arenisca impermeable: $c(x) = 1.25 - 0.25 \tanh[40(0.75 - x)]$.

(c) Arenisca impermeable: $c(x) = 1.5$.

(d) Nave alienígena sepultada: $c(x) = 1.5 - \exp[-300(x - 1.75)^2]$.

Grafique $u(x)$ para diferentes tiempos ($\sim$8) a medida que la onda se propaga a través de todo el dominio.