

# Métodos numéricos en fluidos – Instituto Balseiro – 2021

## Práctica 2

1. Considere el método multipaso denominado Leap-Frog ( $y_{n+1} = y_{n-1} + 2h f(y_n, t_n)$ ). Responda a los siguientes items considerando la ecuación modelo  $y' = \lambda y$ .
  - (a) Calcule el error de amplitud y fase para este método (considere la parte convergente del método).
  - (b) Muestre que el método es inestable si  $\lambda_r < 0$  ( $\lambda_r = \Re(\lambda)$ ). Halle condiciones de estabilidad para el caso  $\lambda_r = 0$ .
2. Considere el método  $\theta$ :  $y_{n+1} = y_n + h[\theta f(y_{n+1}, t_{n+1}) + (1 - \theta)f(y_n, t_n)]$  con  $0 \leq \theta \leq 1$ .
  - (a) Calcule el error global del método en función del parámetro  $\theta$ .
  - (b) Realice el diagrama de estabilidad del método en función del parámetro  $\theta$  (*Ayuda:* encuentre el conjunto de puntos que hace el módulo del factor de amplificación igual a 1 para  $\theta < 1/2$ ). Note que para ciertos valores de  $\theta$  el método es implícito y sin embargo en condicionalmente estable.
3. Para la siguiente versión del método Runge-Kutta de tercer orden (RK-3):

$$\begin{aligned}y_{n+1} &= y_n + (k_1 + 4k_2 + k_3)/6, \\k_1 &= hf(y_n, t_n), \\k_2 &= hf(y_n + k_1/2, t_n + h/2), \\k_3 &= hf(y_n - k_1 + 2k_2, t_n + h),\end{aligned}$$

responda a los siguientes puntos considerando la ecuación modelo  $y' = \lambda y$ .

- (a) Muestre que el método es una aproximación de tercer orden.
  - (b) Calcule el máximo paso de tiempo que puede utilizarse para el caso de  $\lambda$  imaginario puro y para el caso de  $\lambda$  real negativo.
  - (c) Considere que se quiere avanzar una ODE hasta un determinado tiempo. ¿Que método usaría para obtener la solución en el menor tiempo posible si dispone de una implementación para RK-2, RK-3 y RK-4? Considere que sólo interesa el costo para evaluar la función en cuestión, no interesa la precisión y tiene el caso con  $\lambda$  imaginario y real negativo.
4. **(Problema a entregar - 27/9/2020)** Considere la ecuación del péndulo simple:

$$\theta'' = -\frac{g}{l} \sin(\theta).$$

- (a) Realizando experimentos numéricos determine el orden de convergencia global que se tiene para el error de fase ( $\tan^{-1}(\theta'/\theta)$ ) y de amplitud ( $1/2l^2\theta'^2 - gl \cos(\theta)$ ) para los siguientes métodos:
  - i. Euler implícito.
  - ii. Crank-Nicholson (C-N).
  - iii. RK-4.
  - iv. Dos pasos de tiempo con C-N y un pasos de tiempo con Leap-Frog. ¿Cuál es la la razón para probar la implementación de este método?

Compare con la tabla entregada en clase. **Ayuda:** note que éste no es el péndulo linealizado.

- (b) Resuelva ahora el péndulo doble utilizando RK-4 y considerando  $M_1 = M_2 = l_1 = l_2 = 1$  (puede revisar el documento **DoublePendulum.pdf**) :

$$2\theta_1'' + \theta_2'' \cos(\theta_2 - \theta_1) = \theta_2'^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) - 20 \sin(\theta_1),$$

$$\theta_1'' \cos(\theta_2 - \theta_1) + \theta_2'' = -\theta_1'^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) - 10 \sin(\theta_2).$$

- i. Asegúrese que su solución numérica coincide con la obtenida por la cátedra. Para la siguiente condición inicial  $(\theta_1, \theta_2, \theta_1', \theta_2') = (\pi/2, \pi/2, 0, 0)$  obtenemos en  $t = \pi$  el valor solución  $(1.708, 1.008, -1.278, -0.725)$ .
- ii. Muestre que el sistema puede ser muy sensible a perturbaciones en las condiciones iniciales y por tanto muy difícil de predecir. Para esto estudie la solución numérica para las siguientes condiciones iniciales  $(\pi/2, a, 0, 0)$ . Con  $a = \pi/2$ ,  $a = 1.00001\pi/2$  y  $a = 0.99999\pi/2$ . ¿Es su solución independiente de  $\Delta t$ ?
- iii. Para una de las condiciones iniciales del punto anterior realice un gráfico que *ilumina* la posición de  $M_2$  en el tiempo utilizando por ejemplo la función **comet** de Octave. ¿Es posible indentificar patrones de movimiento? Avance al menos hasta  $t = 10\pi$ .
- iv. Verifique si su método numérico conserva la energía mecánica del sistema. Si no es así, ¿con qué orden de convergencia la conserva?

**Instituto Balseiro**

MÉTODOS NUMÉRICOS EN FLUIDOS I



LABORATORIO N°2

Renato Trono Figueras

24 de Septiembre de 2021

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Métodos utilizados	2
1.1.1. Euler implícito	2
1.1.2. Crank-Nicholson	2
1.1.3. Runge-Kutta de cuarto orden	2
1.1.4. Leap Frog	3
1.2. Ecuaciones a resolver	3
1.2.1. Péndulo simple	3
1.2.2. Péndulo doble	4
1.3. Objetivos	5
<b>2. Resultados</b>	<b>5</b>
2.1. Péndulo simple: Errores globales en fase y amplitud	5
2.2. Péndulo doble	9
2.2.1. Sensibilidad del sistema	9
2.2.2. Trayectoria de la masa $m_2$	10
2.2.3. Conservación de la energía mecánica	11
<b>3. Conclusiones</b>	<b>12</b>

## Resumen

Se resolvió numéricamente la ecuación de movimiento del péndulo simple mediante los métodos de Euler implícito, Crank-Nicholson, Runge-Kutta de cuarto orden y una combinación de Crank-Nicholson con Leap Frog. Se hicieron experimentos numéricos para determinar el orden del error global en fase y amplitud para cada uno de los métodos.

Por otro lado, se resolvieron numéricamente las ecuaciones de movimiento del péndulo doble con el método de Runge-Kutta de cuarto orden. Se pudo ver que el sistema es altamente sensible a perturbaciones en las condiciones iniciales, lo cual lo hace impredecible. Además, se observó un comportamiento caótico del sistema, una vez transcurrido un pequeño tiempo inicial en el cual sí pudieron verse oscilaciones. Se obtuvo que el método conserva la energía mecánica del sistema con orden de convergencia  $O(h^4)$  y que la solución a tiempos largos es dependiente del paso de tiempo utilizado.

## 1. Introducción

Se desea resolver numéricamente las ecuaciones de movimiento del péndulo simple y del péndulo doble, restringidos a un plano.

Para la resolución de las mismas se utilizarán los siguientes métodos:

- Euler implícito (EI).
- Crank-Nicholson (CN).
- Runge-Kutta de cuarto orden (RK4).

- Combinación de Crank-Nicholson con Leap Frog (CN+LF)

En general, se tiene un problema de valor inicial del tipo:

$$\begin{aligned}y' &= f(y, t) \\ y(t_0) &= y_0\end{aligned}$$

En todos los casos, se discretiza el dominio temporal en  $N$  nodos, con paso de tiempo  $h = \frac{t_I}{N} = \Delta t$ , donde  $t_I$  es el tiempo total de integración. La notación  $y^n$  hace referencia a  $y(t^n) = y(n\Delta t)$ , donde  $y$  es la función solución.

### 1.1. Métodos utilizados

En esta sección, se hace una breve introducción a cada uno de los métodos que serán utilizados.

#### 1.1.1. Euler implícito

El método de Euler implícito consiste en aproximar la solución en el nodo  $n + 1$  utilizando el valor de la solución en el nodo  $n$  y el valor de la derivada en el nodo  $n + 1$ , de la siguiente forma [1]:

$$y^{n+1} = y^n + hf(y^{n+1}, t^{n+1}) \quad (1)$$

#### 1.1.2. Crank-Nicholson

El método de Crank-Nicholson consiste en aproximar la solución en el nodo  $n + 1$  utilizando el valor de la solución en el nodo  $n$ , el valor de la derivada en el nodo  $n$  y el valor de la derivada en el nodo  $n + 1$ , de la siguiente forma [1]:

$$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2} [f(y^{n+1}, t^{n+1}) + f(y^n, t^n)] \quad (2)$$

#### 1.1.3. Runge-Kutta de cuarto orden

El método de Runge-Kutta de cuarto orden consiste en aproximar la solución en el nodo  $n + 1$  utilizando el valor de la solución en el nodo  $n$ , el valor de la derivada en el nodo  $n$  y evaluaciones intermedias de  $f$ , es decir, entre el nodo  $n$  y el nodo  $n + 1$ , de la siguiente forma [1]:

$$y^{n+1} = y^n + \frac{1}{6} (K_1 + K_4) + \frac{1}{3} (K_2 + K_3) \quad (3)$$

donde

$$\begin{aligned}K_1 &= hf(y^n, t^n) \\ K_2 &= hf(y^n + \frac{K_1}{2}, t^n + \frac{h}{2}) \\ K_3 &= hf(y^n + \frac{K_2}{2}, t^n + \frac{h}{2}) \\ K_4 &= hf(y^n + K_3, t^{n+1})\end{aligned}$$

#### 1.1.4. Leap Frog

El método de Leap Frog consiste en aproximar la solución en el nodo  $n + 1$  utilizando el valor de la solución en el nodo  $n - 1$  y el valor de la derivada en el nodo  $n$ , de la siguiente forma [1]:

$$y^{n+1} = y^{n-1} + 2hf(y^n, t^n) \quad (4)$$

### 1.2. Ecuaciones a resolver

En esta sección, se derivan y describen las ecuaciones diferenciales a resolver.

#### 1.2.1. Péndulo simple

Considérese el arreglo de la Figura 1.

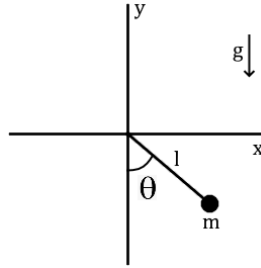


Figura 1: Esquema del péndulo simple.

El Lagrangiano del sistema es:

$$L = T - U = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta \quad (5)$$

donde T y U son la energía cinética y potencial, respectivamente.

La ecuación de movimiento para  $\theta$  se deriva aplicando la ecuación de Lagrange al Lagrangiano en las variables  $\theta$  y  $\dot{\theta}$ . Esto es,  $\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = 0$ . De ahí:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta \quad (6)$$

Esta ecuación diferencial de segundo orden puede expresarse como dos ecuaciones diferenciales de primer orden como:

$$\dot{y}_1 = y_2 \quad (7)$$

$$\dot{y}_2 = -\frac{g}{l} \sin y_1 \quad (8)$$

donde  $y_1 = \theta$  e  $y_2 = \dot{\theta}$ . De esta forma, se pueden aplicar a (7) y (8) los métodos numéricos mencionados anteriormente.

### 1.2.2. Péndulo doble

Considérese el arreglo de la Figura 2.

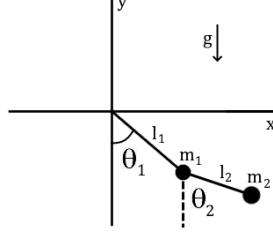


Figura 2: Esquema del péndulo doble.

El Lagrangiano del sistema es:

$$L = m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) + (m_1 + m_2) g l_1 \cos \theta_1 + m_2 g l_2 \cos \theta_2 \quad (9)$$

Las ecuaciones de movimiento para  $\theta_1$  y  $\theta_2$  se derivan aplicando la ecuación de Lagrange al Lagrangiano en las variables  $\theta_i$  y  $\dot{\theta}_i$ , con  $i = 1, 2$ . Esto es,  $\frac{\partial L}{\partial \theta_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} \right) = 0$ . De ahí, y considerando  $g = 10$  y  $m_1 = m_2 = l_1 = l_2 = 1$ , se obtienen las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) = \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) - 20 \sin \theta_1 \quad (10)$$

$$\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) + \ddot{\theta}_2 = -\dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) - 10 \sin \theta_2 \quad (11)$$

Estas dos ecuaciones diferenciales de segundo orden pueden expresarse como cuatro ecuaciones diferenciales de primer orden como:

$$\dot{y}_1 = y_3 \quad (12)$$

$$\dot{y}_2 = y_4 \quad (13)$$

$$\dot{y}_3 = \frac{-y_3^2 \sin(y_2 - y_1) - 10 \sin y_2 - y_4}{\cos(y_2 - y_1)} \quad (14)$$

$$\dot{y}_4 = y_4^2 \sin(y_2 - y_1) \cos(y_2 - y_1) + 2y_3^2 \sin(y_2 - y_1) - 20 \sin y_1 \cos(y_2 - y_1) + 20 \sin y_2 \quad (15)$$

donde  $y_1 = \theta_1$ ,  $y_2 = \theta_2$ ,  $y_3 = \dot{\theta}_1$  e  $y_4 = \dot{\theta}_2$ . De esta forma, se pueden aplicar a (12), (13), (14) y (15) los métodos mencionados anteriormente.

### 1.3. Objetivos

En primer lugar, se desea determinar el orden del error global en la fase y amplitud del péndulo simple, para de cada uno de los métodos.

La fase se define como:

$$\phi = \tan^{-1} \left( \frac{\dot{\theta}}{\theta} \right) \quad (16)$$

y la amplitud como:

$$A = \frac{1}{2} l^2 \dot{\theta}^2 - gl \cos \theta \quad (17)$$

Para evaluar el error global hace falta conocer la solución analítica de (6) en algún instante posterior al inicial. Por la física del problema, es sabido que el sistema conserva su energía mecánica. Así, al cabo de un período, el péndulo volverá a estar en las mismas condiciones que en el instante inicial. El período del péndulo simple está dado por [2]:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \right)^2 \sin^{2n} \left( \frac{\theta_0}{2} \right) \right] \quad (18)$$

donde  $\theta_0$  es la amplitud inicial.

Si se avanza la solución numérica hasta  $t = T$ , se pueden comparar los resultados numéricos a ese tiempo  $t$ , con los valores reales, que son los iniciales. De esta forma, se puede determinar el error global de la solución numérica.

En segundo lugar, se desea resolver las ecuaciones de movimiento del péndulo doble con el método de Runge-Kutta de cuarto orden, analizar la sensibilidad del sistema ante perturbaciones en las condiciones iniciales y ver si el método conserva la energía mecánica. En caso de respuesta negativa a este último punto, se quiere determinar con que orden la conserva.

## 2. Resultados

En esta sección se presentan los resultados obtenidos para los errores globales en fase y amplitud del péndulo simple así como también la resolución numérica del péndulo doble.

### 2.1. Péndulo simple: Errores globales en fase y amplitud

Para un ángulo inicial de  $\frac{\pi}{4}$ , y considerando  $g = 9,8$  y  $l = 1$ , el período del péndulo a partir de la ecuación (18) es  $T \simeq 2,0873$ , donde se incluyeron los primeros 85 términos de la serie. Para resolver la ecuación (6) numéricamente se utilizó un tiempo total de integración  $t_I = T$ . Luego, se comparó la fase y amplitud de la solución numérica a tiempo  $T$  con la fase y amplitud de la solución exacta a tiempo  $T$ . En todos los casos, el error se define como el valor absoluto de la diferencia entre las fases o amplitudes de las soluciones.

En la Figura 3 se muestran los errores globales en la fase y amplitud para el método de Euler implícito.



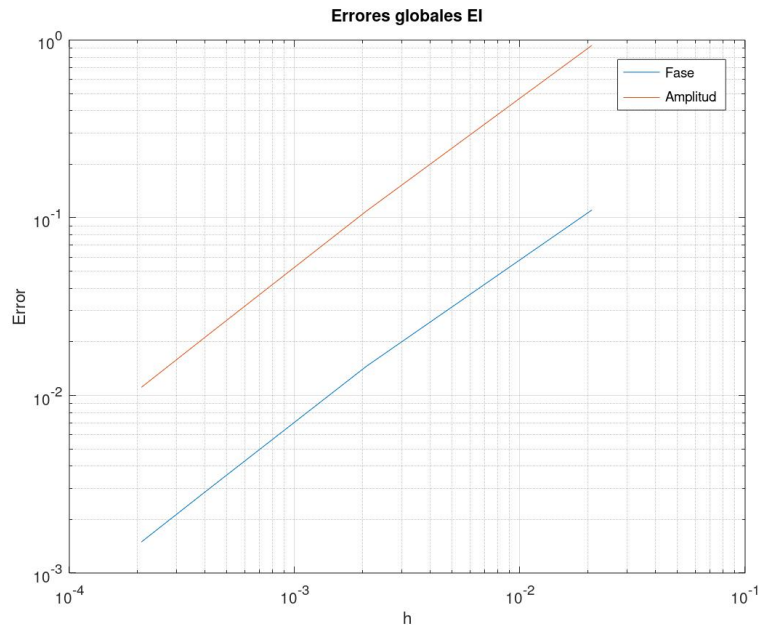


Figura 3: Errores globales en fase y amplitud para el método de Euler implícito.

Observando la Figura 3 puede verse que el error global tanto en fase como en amplitud es de orden  $O(h)$  aproximadamente.

En la Figura 4 se muestran los errores globales en la fase y amplitud para el método de Crank-Nicholson. Como se ve en dicha figura, el método de Crank-Nicholson no presenta error en la amplitud. Por otro lado, el orden del error global en la fase es  $O(h^2)$  aproximadamente.

En la Figura 5 se muestran los errores globales en la fase y amplitud para el método de Runge-Kutta de cuarto orden.

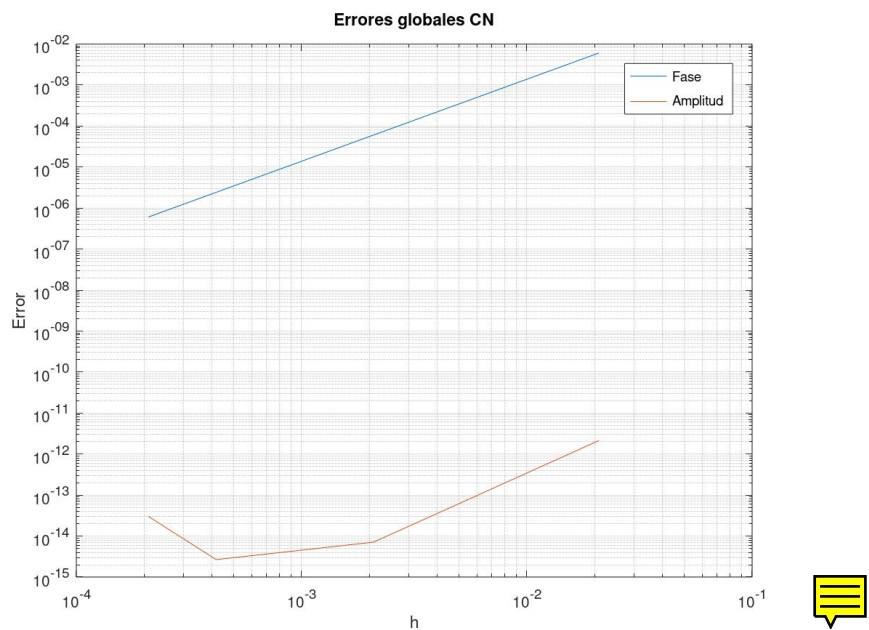


Figura 4: Errores globales en fase y amplitud para el método de Crank-Nicholson.

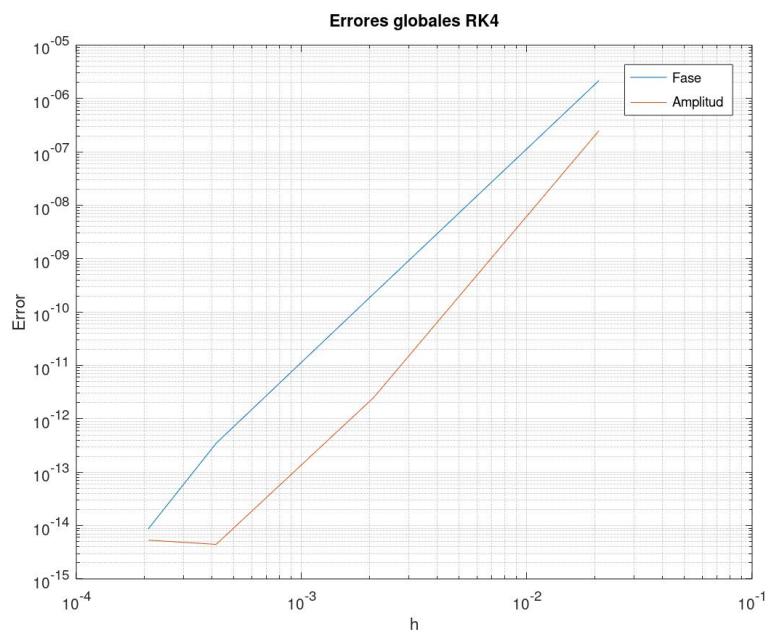


Figura 5: Errores globales en fase y amplitud para el método de Runge-Kutta de cuarto orden.

Observando la Figura 5 puede verse que para el método de Runge-Kutta de cuarto orden, el error global en la fase es de orden  $O(h^4)$  y el error global en la amplitud es de orden  $O(h^5)$ .

Finalmente, en la Figura 6 se muestran los errores globales en la fase y amplitud para una combinación entre el método de Crank-Nicholson y el método Leap Frog. La forma de combinarlos fue avanzar dos pasos de tiempo con CN y un paso de tiempo con LF, en loop. La razón de esta implementación es probar un método multipaso como lo es LF, es decir, que para aproximar la solución en  $t^n$  usa información de la solución y/o la derivada en tiempos previos a  $t^n$ . Esta es una forma alternativa a los métodos de paso fraccionario para ganar precisión, a costa de uso adicional de memoria computacional [1].

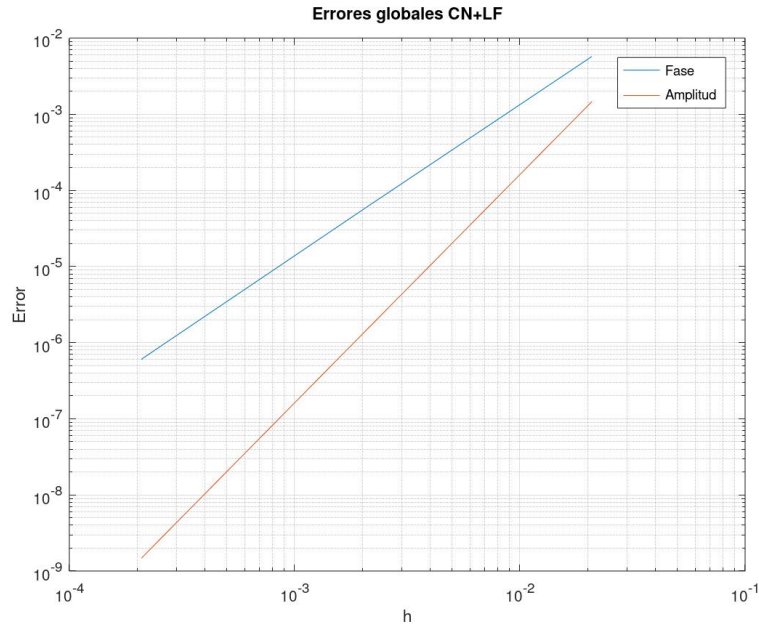


Figura 6: Errores globales en fase y amplitud para una combinación de Crank-Nicholson con Leap Frog.

Como se ve en la Figura 6, la combinación de CN con LF presenta error global de orden  $O(h^2)$  en la fase y  $O(h^3)$  en la amplitud. En este caso, no hubo ventaja al aplicar LF respecto del caso con únicamente CN. El orden de error en la fase es el mismo y el error en la amplitud, además de que era ya inmejorable, empeoró.

En la Tabla 1 se resumen los resultados obtenidos para los ordenes de error global de cada método.

	Fase	Amplitud
Euler Implícito	$O(h)$	$O(h)$
Crank-Nicholson	$O(h^2)$	Sin error
Runge-Kutta de cuarto orden	$O(h^4)$	$O(h^5)$
Crank-Nicholson + Leap Frog	$O(h^2)$	$O(h^3)$



Tabla 1: Ordenes de error global en fase y amplitud para cada uno de los métodos.

## 2.2. Péndulo doble

Se resolvieron numéricamente las ecuaciones (12)-(15) utilizando el método de Runge-Kutta de cuarto orden. Se validó la implementación del método comparando con la solución de la cátedra de Métodos Numéricos en Fluidos I del Instituto Balseiro, para determinadas condiciones iniciales. Luego, se estudió la sensibilidad del sistema a perturbaciones en las condiciones iniciales, se estudió la trayectoria de la masa 2 (ver Figura 2) y se estudió la conservación de la energía mecánica. En todo los casos, el tiempo total de integración fue  $t_I = 10\pi$ .

### 2.2.1. Sensibilidad del sistema

Se hicieron tres simulaciones variando mínimamente las condiciones iniciales  $(y_{1_0}, y_{2_0}, y_{3_0}, y_{4_0}) = \left(\frac{\pi}{2}, a, 0, 0\right)$ . Se utilizó  $a = \frac{\pi}{2}$ ,  $a = 1,00001\frac{\pi}{2}$  y  $a = 0,99999\frac{\pi}{2}$ . En la Figura 7 se muestra la evolución de  $\theta_2$  en el tiempo para las distintas condiciones iniciales. El paso de tiempo utilizado fue  $\Delta t = \pi \times 10^{-3}$ .

Como puede verse, las tres soluciones son similares hasta aproximadamente  $t = 15$ . A partir de ese instante comienzan a discrepar y el sistema adopta comportamientos totalmente distintos en cada caso. Esto muestra que el sistema del péndulo doble es muy sensible a perturbaciones en las condiciones iniciales, lo cual lo hace poco predecible.

También se estudió la dependencia de la solución con el paso de tiempo. Se halló que la solución numérica no es independiente de  $\Delta t$  a tiempos largos. En la Figura 8 se muestran dos soluciones para distintos pasos de tiempo, con  $a = \frac{\pi}{2}$ . Se puede ver que hasta aproximadamente  $t = 15$  las dos soluciones coinciden.

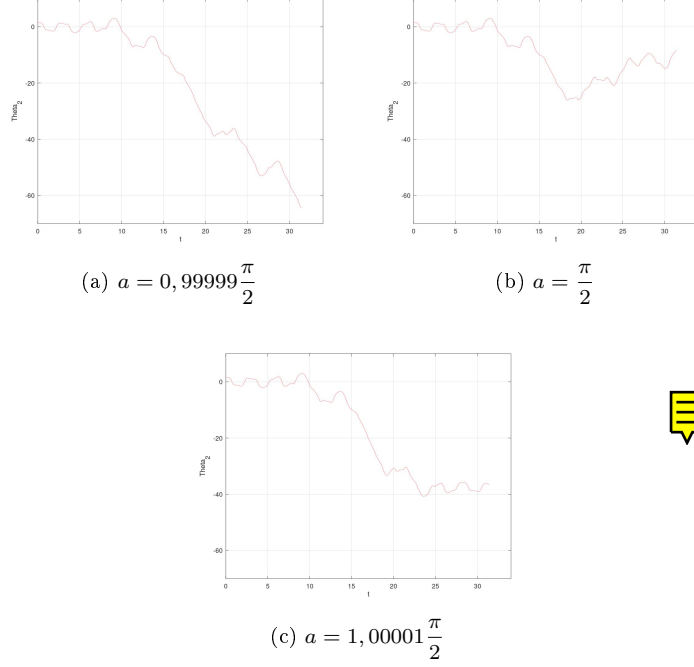


Figura 7: Evolución de  $\theta_2$  en el tiempo para condiciones iniciales muy similares.

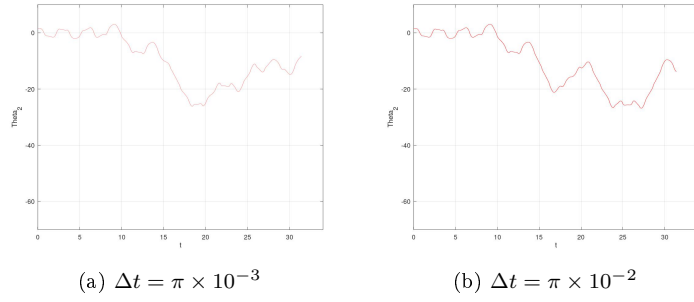


Figura 8: Evolución de  $\theta_2$  en el tiempo para distintos valores de  $\Delta t$ .

### 2.2.2. Trayectoria de la masa $m_2$

Se hizo una simulación con un tiempo total de integración  $t_I = 10\pi$ , paso de tiempo  $\Delta t = \frac{\pi}{2} \times 10^{-2}$  (2000 puntos discretos) y  $a = \frac{pi}{2}$ . En la Figura 9 se muestran las coordenadas de la trayectoria de la masa  $m_2$ .

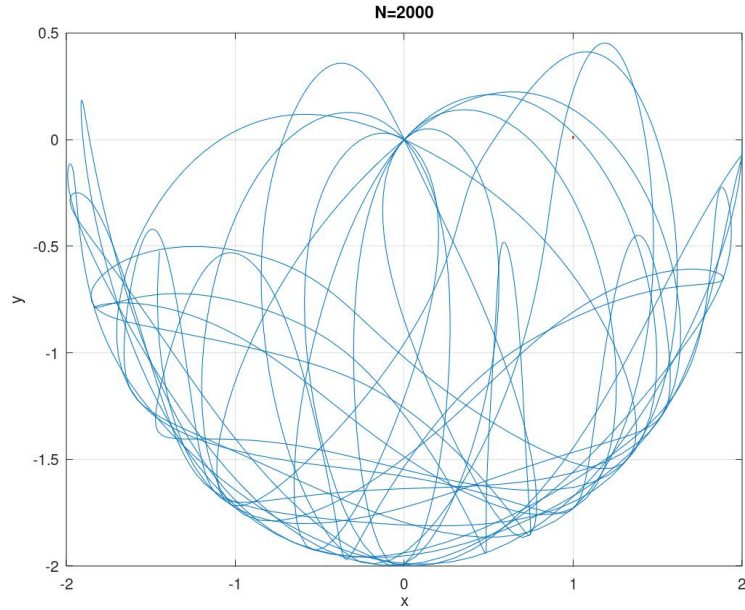


Figura 9: Trayectoria de la masa  $m_2$  para un tiempo de integración de  $10\pi$ .

A tiempos relativamente cortos, del orden de  $3\pi$ , se pudo observar un movimiento oscilatorio donde la masa  $m_2$  retornaba sistemáticamente a posiciones cercanas a la inicial. Esto se ve representado en la Figura 9 en las curvas similares a semicircunferencias que van desde  $(2, 0)$  a  $(-2, 0)$ , pasando por  $(0, -2)$ . Sin embargo, el movimiento se fue distorsionando con el tiempo hasta que en algún punto se volvió caótico y ya no se observaron patrones claros de movimiento. Esto se ve representado en toda la zona central de la Figura 9.



### 2.2.3. Conservación de la energía mecánica

Se estudió la conservación de la energía mecánica del sistema del péndulo doble con el método de Runge-Kutta de cuarto orden. Para ello se hicieron distintas simulaciones variando el paso de tiempo, con un tiempo total de integración  $t_I = 10\pi$  en todos los casos. Para cuantificar el error en la energía mecánica, se calculó la misma en cada punto discreto y se guardaron los valores en un vector. Finalmente, se calculó la norma 2 de dicho vector. En la Figura 10 se muestra el error en la energía mecánica en función del paso de tiempo  $\Delta t = h$ .



Se obtuvo que el método no conserva la energía mecánica. El orden del error es un poco mayor a  $O(h^4)$ , sin llegar a ser  $O(h^5)$ .

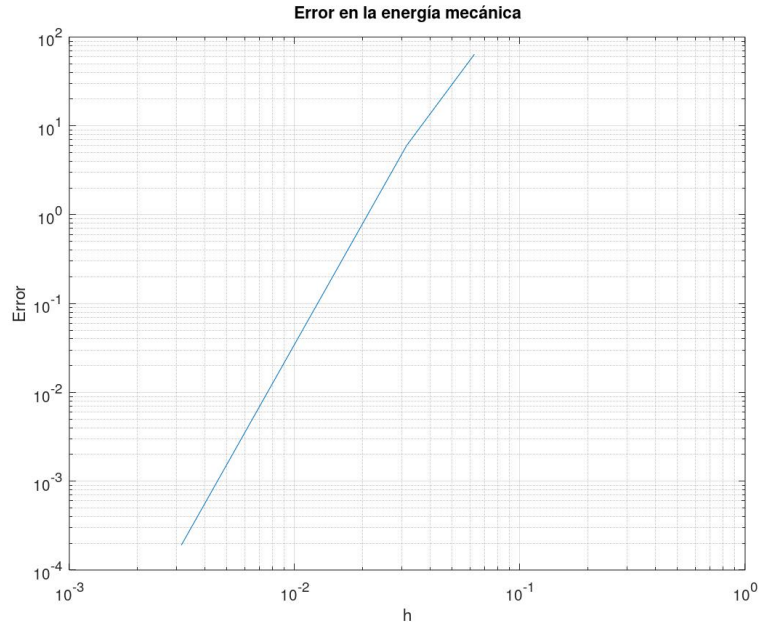


Figura 10: Error en la energía mecánica en función del paso de tiempo.

### 3. Conclusiones

En primer lugar, se resolvió numéricamente la ecuación de movimiento del péndulo simple mediante los métodos de Euler implícito, Crank-Nicholson, Runge-Kutta de cuarto orden y una combinación de Crank-Nicholson con Leap Frog. Se determinaron los ordenes de error global en fase y amplitud (definida como la energía mecánica por unidad de masa) para cada método. Se puede destacar que el método de Crank-Nicholson fue el único método que no presentó error en la amplitud. De los que presentaron error en la amplitud, Euler implícito fue el de menor orden, con  $O(h)$ , y Runge-Kutta de cuarto orden fue el de mayor orden, con  $O(h^5)$ . En cuanto a la fase, todos los métodos presentaron error. El de menor orden fue Euler implícito, con  $O(h)$ , y el de mayor orden fue Runge-Kutta de cuarto orden, con  $O(h^4)$ .

En segundo lugar, se resolvieron numéricamente las ecuaciones de movimiento del péndulo doble con el método de Runge-Kutta de cuarto orden. Se comprobó que el sistema es muy sensible a perturbaciones en las condiciones iniciales y se mostró que la solución es dependiente del paso de tiempo utilizado. Además, se estudió la trayectoria de una de las masas y se pudo ver que pasado un período de tiempo en donde el movimiento es oscilatorio, el sistema se vuelve caótico. Finalmente, se obtuvo que el método no conserva la energía mecánica del sistema. El orden de convergencia con la cual la conserva es aproximadamente  $O(h^4)$ .

## Referencias

- [1] “Fundamentals of Engineering Numerical Analysis”, P. Moin, Cambridge University Press, 2010.
- [2] Wikipedia, la enciclopedia libre: Péndulo simple  
[https://es.wikipedia.org/wiki/Péndulo\\_simple](https://es.wikipedia.org/wiki/Péndulo_simple).