

Laboratorio 2 - Problema de valores iniciales

Pablo Chehade

pablo.chehade@ib.edu.ar

Métodos Numéricos en Fluidos I, Instituto Balseiro, CNEA-UNCuyo, Bariloche, Argentina, 2022

Se estudiaron métodos numéricos para resolver problemas de valores iniciales. En particular, se aplicaron los métodos de Euler implícito, Crank-Nicholson, Runge Kutta 4 y Leap-Frog al problema del péndulo simple y el método de Runge Kutta 4 al del péndulo doble. Para todos los casos se estudió el orden de convergencia global del error de fase y el error de amplitud, **obteniendo resultados similares a los teóricos?**. También se estudió la sensibilidad del péndulo doble a perturbaciones.

I. INTRODUCCIÓN

1 [¿Por qué es importante estudiar numéricamente PVI?]

En ciencias físicas es de gran interés conocer la dinámica de un sistema a partir de sus condiciones iniciales. Sin embargo, dadas las ecuaciones de movimiento, no siempre es posible obtener la dinámica exactamente y es necesario recurrir a métodos numéricos.

2 [En este trabajo se analizaron dos problemas de valores iniciales]

En este trabajo se analizaron dos problemas de valores iniciales: la evolución del péndulo simple y del péndulo doble. Se resolvieron numéricamente a través de distintos métodos numéricos implícitos y explícitos y se estudió la convergencia de los mismos.

A. Péndulo simple

3 [Presentar ecuaciones de la dinámica]

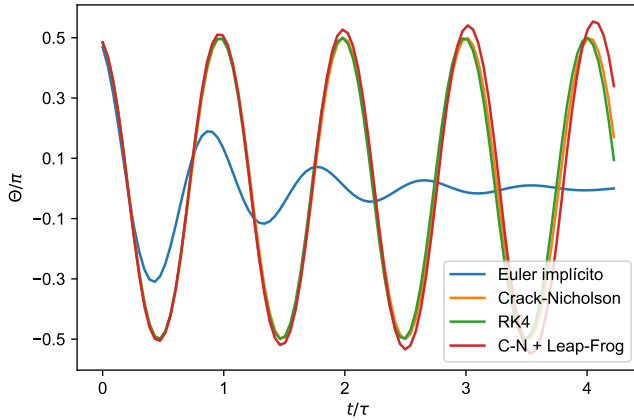


Figura 1: Esquema del péndulo simple. Una partícula puntual de masa m está suspendida de un punto fijo mediante un hilo de longitud l . El ángulo θ es el ángulo que forma el hilo con la vertical. Figura extraída de **Referencia**

El péndulo simple consta de una partícula puntual de masa m suspendida de un punto fijo mediante un hilo de longitud l (ver esquema en figura ??). La partícula se

mueve en un plano y el ángulo θ que forma el hilo con la vertical se describe mediante la ecuación diferencial

$$\begin{cases} \theta'' = -\frac{g}{l} \sin(\theta) \\ \theta(0) = \theta_0, \theta'(0) = \theta'_0 \end{cases} \quad (1)$$

donde g es la aceleración de la gravedad y θ_0 y θ'_0 corresponden a las condiciones iniciales. Algunos parámetros importantes de la evolución del péndulo simple son el período de oscilación τ dado por

$$\tau(\theta) = T_0 \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \right)^2 \sin^{2n} \left(\frac{\theta}{2} \right) \right], T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (2)$$

la fase ϕ dada por

$$\phi = \tan^{-1}(\theta'/\theta) \quad (3)$$

y la energía por unidad de masa o amplitud A_S dada por

$$A_S = 1/2 l^2 \theta'^2 - gl \cos(\theta). \quad (4)$$

Debido a que en el sistema actúan solo fuerzas conservativas, la amplitud A_S se mantiene constante durante la evolución.

La ecuación diferencial de orden 2 de ?? se puede convertir en dos ecuaciones diferenciales de orden 1 mediante el cambio de variable $y_1 = \theta$, $y_2 = \theta'$. De este modo, el problema ?? se convierte en

$$\begin{cases} \frac{d\vec{y}_S}{dt} = \begin{pmatrix} y_2 \\ -\frac{g}{l} \sin y_1 \end{pmatrix} = \vec{f}_S(\vec{y}_S, t) \\ \vec{y}_S(0) = \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \theta'_0 \end{pmatrix}, \end{cases} \quad (5)$$

donde $\vec{y}_S^T = (y_1, y_2)$.

B. Péndulo doble

4 [Presentar ecuaciones de la dinámica]

El péndulo doble es un sistema más complejo que el anterior. Consta básicamente de un péndulo simple con masa m_1 , longitud l_1 y ángulo θ_1 sobre el que se suspende otro péndulo simple con masa m_2 , longitud l_2 y ángulo θ_2 (ver esquema en la figura ??). Empleando $l_1 = l_2 = 1$,

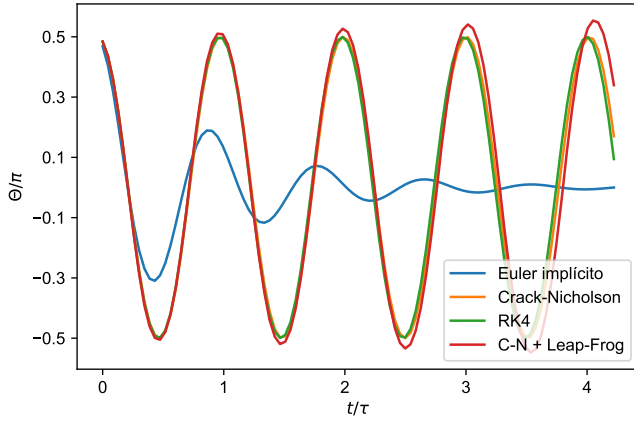


Figura 2: Esquema del péndulo doble. Una partícula puntual de masa m_1 está suspendida de un punto fijo mediante un hilo de longitud l_1 . El ángulo θ_1 es el ángulo que forma el hilo con la vertical. Sobre esta partícula se encuentra suspendida otra de masa m_2 mediante un hilo de longitud l_2 . El ángulo θ_2 es el ángulo que forma este último hilo con la vertical. Figura extraída de [referencia](#)

$m_1 = m_2 = 1$ y $g = 10$, las ecuaciones de la evolución de los ángulos involucrados son

$$\begin{cases} 2\theta_1'' + \theta_2'' \cos \Delta\theta = \theta_2'^2 \sin \Delta\theta - 20 \sin(\theta_1), \\ \theta_1'' \cos \Delta\theta + \theta_2'' = -\theta_1'^2 \sin \Delta\theta - 10 \sin(\theta_2), \\ \theta_1(0) = \theta_{10}, \theta_1'(0) = \theta_{10}', \\ \theta_2(0) = \theta_{20}, \theta_2'(0) = \theta_{20}', \end{cases} \quad (6)$$

donde $\Delta\theta = (\theta_2 - \theta_1)$.

Al igual que en el péndulo simple, la energía se conserva y la amplitud A_D se mantiene constante durante la evolución. En este caso, tal amplitud está dada por

$$A_D = \theta_1'^2 + \frac{1}{2}\theta_2'^2 + \theta_1'\theta_2' \cos(\theta_2 - \theta_1) - 20 \cos \theta_1 - 10 \cos \theta_2 \quad (7)$$

Haciendo el cambio de variables $y_1 = \theta_1$, $y_2 = \theta_2$, $y_3 = \theta_1'$ y $y_4 = \theta_2'$, el problema ?? se convierte en

$$\begin{cases} \frac{dy_D}{dt} = \begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \\ \frac{y_4^2 \sin \Delta - 20 \sin y_1 + y_3^2 \sin \Delta \cos \Delta + 10 \sin y_2 \cos \Delta}{2 - \cos^2 \Delta} \\ \frac{-2y_3^2 \sin \Delta - 20 \sin y_2 - y_4^2 \sin \Delta \cos \Delta + 20 \sin y_1 \cos \Delta}{2 - \cos^2 \Delta} \end{pmatrix} = \begin{cases} \vec{k}_1 = h\vec{f}(\vec{y}_n, t_n), \\ \vec{k}_2 = h\vec{f}(\vec{y}_n + \frac{1}{2}\vec{k}_1, t_n + \frac{h}{2}), \\ \vec{k}_3 = h\vec{f}(\vec{y}_n + \frac{1}{2}\vec{k}_2, t_n + \frac{h}{2}), \\ \vec{k}_4 = h\vec{f}(\vec{y}_n + \vec{k}_3, t_n + h) \end{cases} \\ \vec{y}_S(0) = \begin{pmatrix} \theta_{10} \\ \theta_{20} \\ \theta_{10}' \\ \theta_{20}' \end{pmatrix}, \end{cases}$$

donde $\vec{y}_D^T = (y_1, y_2, y_3, y_4)$

II. MÉTODO NUMÉRICO

Para resolver numéricamente ambos problemas de valores iniciales es necesario discretizar la variable temporal y proponer un esquema numérico que permita obtener la solución aproximada.

A. Discretización del dominio

El dominio se discretizó con puntos equiespaciados $t_n = nh$ donde $n = 0, \dots, N$ y $h = 1/N$. En base a esto, las ecuaciones dif cambian?

5 [Ecuación vectorial del péndulo simple]

6 [Ecuación vectorial del péndulo doble]

7 [Para resolver estos problemas se usaron métodos numéricos. De cada método se analizó el error de fase y el error de amplitud]

B. Métodos numéricos de evolución temporal

8 [Describo cada método (un párrafo por método)]

Los órdenes colocados son los locales [Verificar con la tabla](#)

9 [Euler implícito]

$$\vec{y}_{n+1} = \vec{y}_n + h\vec{f}(\vec{y}_{n+1}, t_{n+1}) + O_{local}(h^2) \quad (8)$$

10 [Crank Nicholson]

$$\vec{y}_{n+1} = \vec{y}_n + \frac{h}{2}[\vec{f}(\vec{y}_{n+1}, t_{n+1}) + \vec{f}(\vec{y}_n, t_n)] + O_{local}(h^3) \quad (9)$$

11 [Runge Kutta 4]

$$\vec{y}_{n+1} = \vec{y}_n + \frac{1}{6}\vec{k}_1 + \frac{1}{3}(\vec{k}_2 + \vec{k}_3) + \frac{1}{6}\vec{k}_4 + O_{local}(h^5) \quad (10)$$

donde

12 [Leap Frog]

$$\vec{y}_{n+1} = \vec{y}_{n-1} + 2h\vec{f}(\vec{y}_n, t_n) + O_{local}(h^3) \quad (11)$$

13 [Resumen de lo que se hará. Qué se resuelve con qué]

III. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

14 [Resumen de lo que se hará. Se comenzará analizando el péndulo simple. ¿Qué se va a analizar?]

A. Péndulo simple

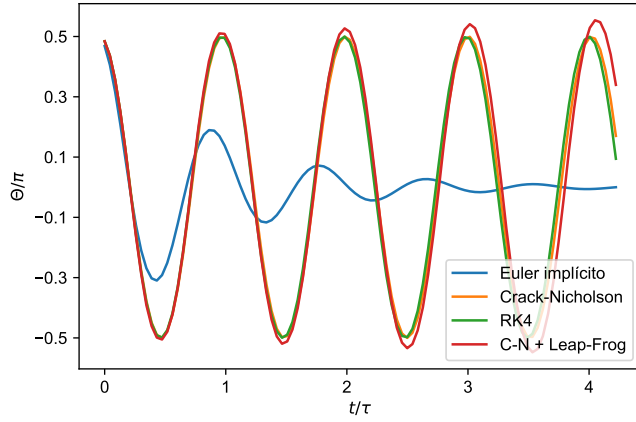


Figura 3: Solución aproximada por los 4 métodos

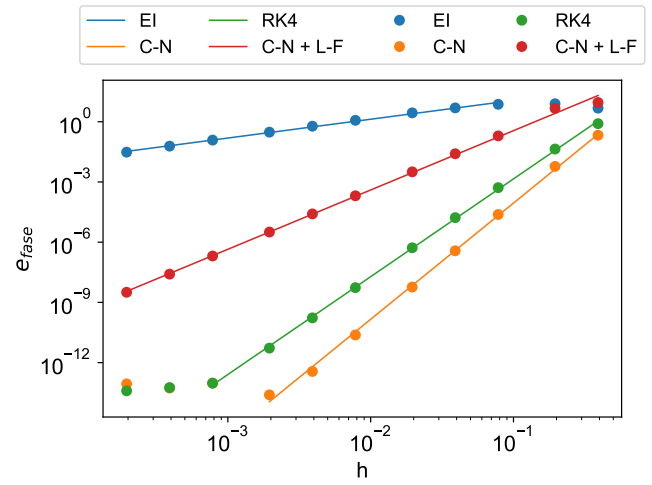


Figura 4: (b) Error de amplitud para los 4 métodos para tita inicial de $\pi/2$

B. Péndulo doble

IV. CONCLUSIÓN

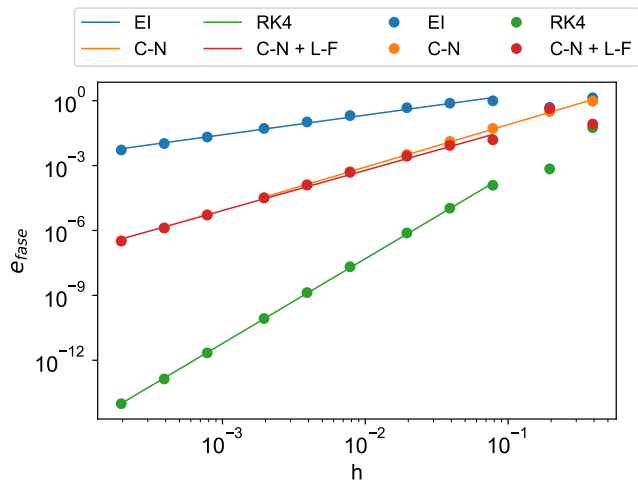


Figura 5: (a) Error de fase para los 4 métodos para tita inicial de $\pi/2$

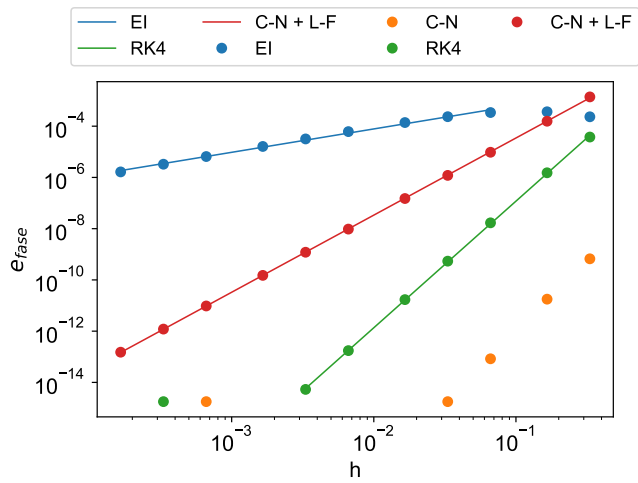


Figura 6: (a) Error de fase para los 4 métodos para tita inicial de $10e-4$

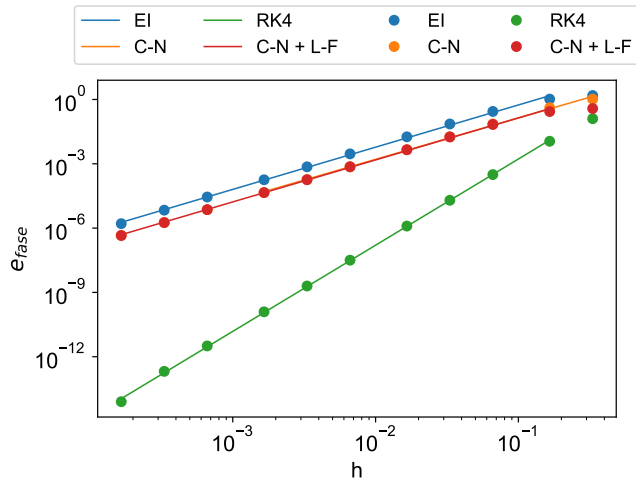


Figura 7: (b) Error de amplitud para los 4 métodos para tita inicial de $10e-4$

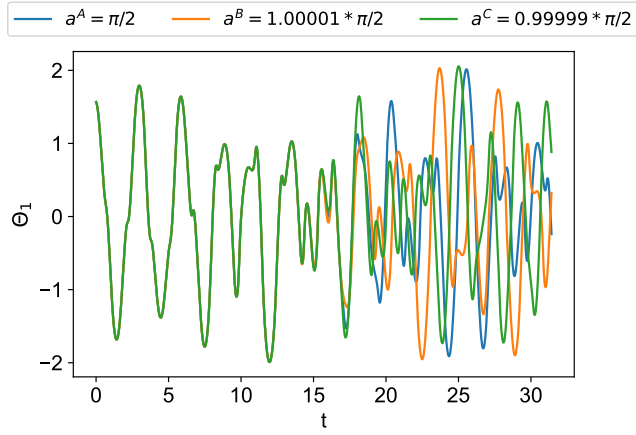


Figura 8: Solución numérica para las 3 distintas condiciones iniciales

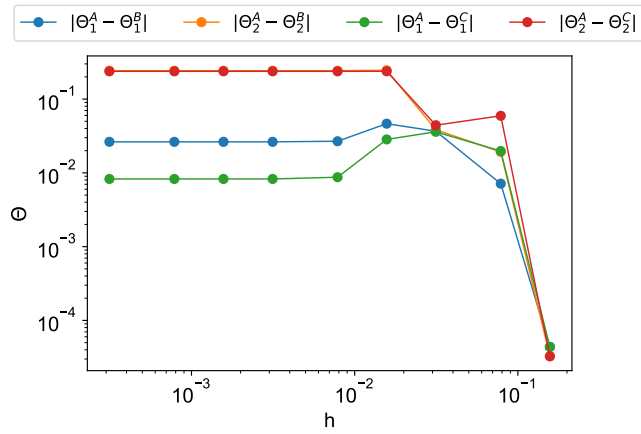


Figura 9: Diferencias entre las soluciones numéricas a tiempo fijo en función de h

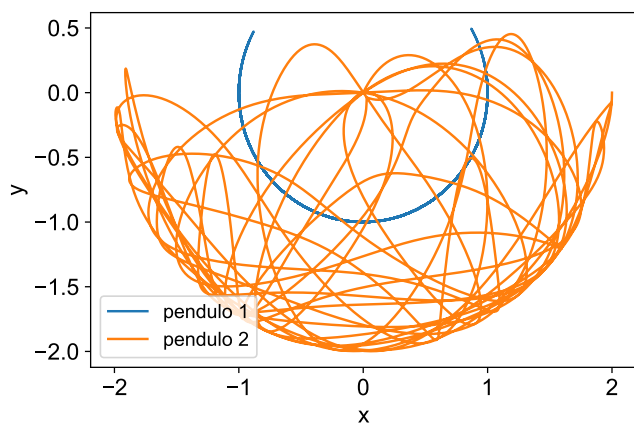


Figura 10: Trayectorias de las 1 condiciones iniciales

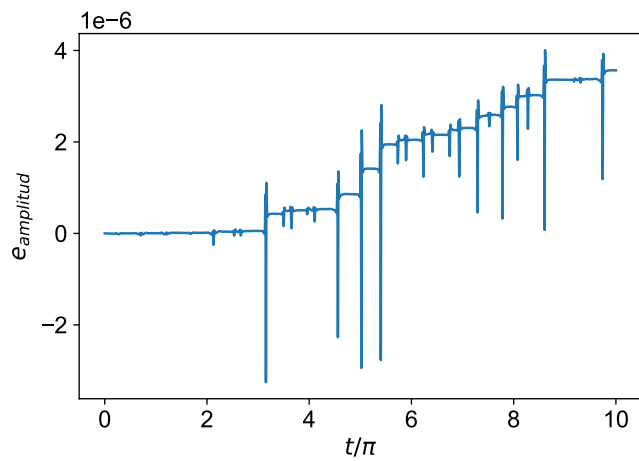


Figura 11: Error de amplitud para todo tiempo

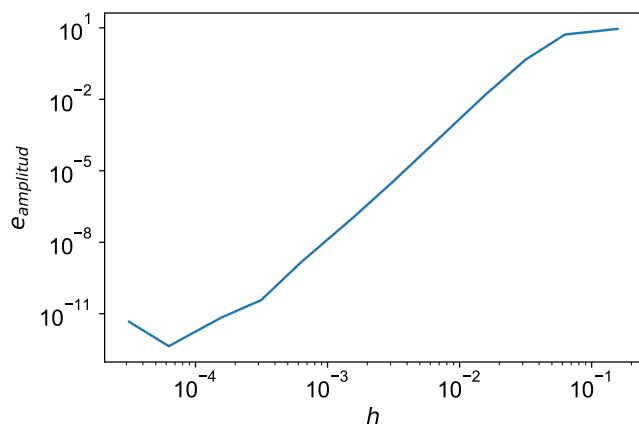


Figura 12: Orden del error de amplitud