

# Métodos numéricos en fluidos – Instituto Balseiro – 2021

## Práctica 1

1. Encuentre la fórmula más precisa para aproximar la derivada primera en el punto  $x_i$  conociendo los valores de  $f$  en  $x_{i-1}$ ,  $x_i$ ,  $x_{i+1}$  y  $x_{i+2}$ . Considere que los puntos están equiespaciados. Calcule el error del método y gráfíquelo en función del espaciamiento en escala log-log.
2. Un esquema general de Padé para la derivada primera en un punto del borde ( $i = 0$ ) y que no altere la estructura tridiagonal de la matriz se puede escribir como:

$$f'_0 + \alpha f'_1 = \frac{1}{h}(a f_0 + b f_1 + c f_2 + d f_3).$$

- (a) Muestre que si se impone una aproximación de al menos tercer orden, los coeficientes quedan definidos según:

$$a = -\frac{11 + 2\alpha}{6}, \quad b = \frac{6 - \alpha}{2}, \quad c = \frac{2\alpha - 3}{2}, \quad d = \frac{2 - \alpha}{6}.$$

¿Qué valor de  $\alpha$  elegiría y por qué?

- (b) Encuentre los coeficientes para que el esquema sea de cuarto orden.

3. Verificar que el número de onda modificado para el esquema de Padé de cuarto orden para la derivada primera es:

$$k' = \frac{3 \sin(k\Delta)}{\Delta(2 + \cos(k\Delta))}.$$

4. Los esquemas de diferencias finitas que no son centrados producen números de onda modificados complejos. Calcule el número de onda modificado para el siguiente esquema *down-wind*:

$$f'_j = \frac{-3f_j + 4f_{j+1} - f_{j+2}}{2h} + \mathcal{O}(h^2).$$

Grafique su parte real e imaginaria y discuta los resultados.

5. En este problema se quiere evaluar la precisión de esquemas de diferencias finitas para la derivada segunda empleando el método de número de onda modificado. Para esto compare  $k'^2 h^2$  y  $k^2 h^2$  con  $kh$  donde  $k'^2$  es el número de onda modificado para la función  $f(x) = \exp(ikx)$ . Compare la precisión de la fórmula de diferencias centradas y Padé de cuarto orden por este método.
6. **(Problema a entregar - 13/09)** En la resolución numérica de ecuaciones diferenciales, muchas veces la física del problema nos obliga a utilizar esquemas numéricos precisos en pos de obtener soluciones adecuadas con un costo computacional aceptable. En este problema estudiaremos el comportamiento de diferentes aproximaciones numéricas en una ecuación donde la solución exacta tiene un número de frecuencias definidas por nosotros y que trataremos de aproximar con el método numérico. Suponga que se quiere resolver numéricamente un problema de valores de contorno con condiciones tipo Dirichlet:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - y = - \sum_{j=1}^K (1 + (j\pi)^2) \sin(j\pi x) \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (1)$$

$$y(0) = 0 \quad y(1) = 1. \quad (2)$$

El dominio se discretiza con puntos  $x_i = ih$ ,  $i = 1, \dots, N$ , y  $h = 1/(N + 1)$ . Notar que no hay puntos en los contornos. En este problema  $y_i$  es la estimación de  $y$  en el punto  $x_i$ , y  $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_N)$  es el vector solución. El valor de  $y''$  se puede estimar como combinación lineal de los valores de  $y$  empleando diferencias finitas, transformando el problema de EDO en un sistema de ecuaciones lineales.

- (a) Utilice diferencias centradas de segundo orden para reducir la EDO y sus condiciones de contorno a un sistema de ecuaciones algebraicas del tipo  $A\vec{y} = \vec{b}$ . Explícite  $A$  y  $\vec{b}$ .
- (b) Además se pide resolver el problema utilizando Padé de cuarto orden para los puntos interiores:

$$\frac{1}{12}f''_{i-1} + \frac{10}{12}f''_i + \frac{1}{12}f''_{i+1} = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}.$$

Derivar entonces una aproximación de Padé para  $y''_1$  en el contorno izquierdo de la siguiente manera:

$$y''_1 + b_2 y''_2 = a_0 y_0 + a_1 y_1 + a_2 y_2 + O(?),$$

donde  $y_0 = y(0)$ , es conocido de la condición de contorno en  $x = 0$ . ¿De qué orden es esta aproximación?

- (c) Repetir el paso anterior para el contorno derecho.
- (d) Empleando la fórmula de diferencia finita derivada anteriormente se puede escribir la siguiente relación lineal:  $A_2 \vec{y}'' = B_2 \vec{y} + \vec{c}$ . ¿Cuáles son los elementos de las matrices  $A_2$  y  $B_2$  operando en los puntos interiores y en el contorno? ¿Cuáles son los elementos del vector  $\vec{c}$ ?
- (e) Elija  $N$  impar y resuelva el problema con diferencias centradas y Padé (note que en ambos casos el sistema a resolver está dado por una matriz tridiagonal). Muestre en un gráfico la solución exacta y ambas aproximaciones numéricas para  $K = 6$  y  $N = 23$ . Grafique además el error (solución exacta menos aproximada) en el punto central ( $x = 0,5$ ) en función de  $h$  para ambos métodos y determine el orden del error de truncamiento en ese punto.
- (f) Realice una tabla donde se muestre el número de puntos mínimos necesarios para obtener un error menor a  $10^{-1}$  entre la solución exacta en los puntos discretos y la aproximada en norma 2 ( $\|\vec{y}_{\text{exact}} - \vec{y}_{\text{approx}}\|_2$ ) y norma  $\infty$  en función de la frecuencia  $K$  y para cada aproximación numérica. Elija  $K = 4, 8, 16, 32, 64, 128$ . Discuta las diferencias de ambos métodos numéricos.

7. Considere la función  $f(x) = 1 - x^8$  y una grilla no uniforme definida de la siguiente manera:

$$\begin{cases} j = 0, 1, 2, \dots, N \\ \zeta_j = -1 + 2j/N \\ x_j = \frac{1}{a} \tanh(\zeta_j \tanh^{-1}(a)) \end{cases} \quad 0 < a < 1.$$

El parámetro  $a$  puede ser utilizado para ajustar el espaciado entre los puntos de la grilla (para mayores valores de  $a$  los puntos se acumulan sobre los bordes). Utilice  $a = 0.98$  y  $N = 32$ .

- (a) Calcule la derivada primera usando diferencias centradas y el método de transformación de coordenadas. Grafique y compare con la solución exacta en  $-1 < x < 1$ . ¿Cómo se modifican los resultados si  $a = 0.9$ ?
- (b) Repita el punto anterior para la transformación:

$$\begin{cases} j = 0, 1, 2, \dots, N \\ \zeta_j = \frac{\pi j}{N} \\ x_j = \cos(\zeta_j). \end{cases}$$

¿Qué transformación le parece más adecuada y por qué?

- (c) ¿Cuántos puntos equiespaciados necesita para obtener la misma precisión que en a)? La precisión se podría definir en este caso como el máximo error obtenido en alguno de los  $x_j$  puntos.

**Instituto Balseiro**

MÉTODOS NUMÉRICOS EN FLUIDOS I



LABORATORIO N°1

Renato Trono Figueras

5 de Septiembre de 2021

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Resultados</b>	<b>3</b>
2.1. Inciso a) . . . . .	3
2.2. Inciso b) . . . . .	3
2.3. Inciso c) . . . . .	5
2.4. Inciso d) . . . . .	5
2.5. Inciso e) . . . . .	6
2.6. Inciso f) . . . . .	8
<b>3. Conclusiones</b>	<b>8</b>
<b>4. Apéndice</b>	<b>9</b>
4.1. Código en Octave para la resolución numérica . . . . .	9

## Resumen

Se resolvió numéricamente una ecuación diferencial ordinaria mediante dos métodos de diferencias finitas. Por un lado, se utilizó el método de diferencias centradas de segundo orden. Por otro lado, se utilizó el método de Padé de cuarto orden, con un esquema de segundo orden en los bordes del dominio. Se compararon los resultados obtenidos mediante ambos métodos numéricos, entre sí y con la solución exacta. Se obtuvo que el orden del error de truncamiento en el nodo central del dominio es aproximadamente  $O(h^2)$  para el método de diferencias centradas de segundo orden y aproximadamente  $O(h^4)$  para el método de Padé de cuarto orden.

Adicionalmente, se calculó el número mínimo de nodos internos necesarios para obtener un error menor a  $10^{-1}$ , en función de las frecuencias de oscilación presentes en el problema, y de la norma utilizada para cuantificar el error. Se obtuvo que el número mínimo de nodos aumenta conforme aumentan las frecuencias de oscilación en las componentes de la solución. Además, el método de Padé de cuarto orden resultó requerir menos nodos internos que el método de diferencias centradas de segundo orden, para obtener un error menor al mencionado.

## 1. Introducción

Se desea resolver numéricamente mediante diferencias finitas la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - y = - \sum_{j=1}^K \left[ 1 + (j\pi)^2 \right] \sin(j\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (1)$$

$$y(0) = 0$$

$$y(1) = 1$$

Para ello, se utilizará el método de diferencias centradas de segundo orden y un método modificado del tipo Padé.

El dominio se discretizará en  $N$  nodos internos equiespaciados una distancia  $h = \frac{1}{N+1}$ . Así, el  $i$ -ésimo nodo interno es  $x_i = hi$ , con  $i = 1, \dots, N$

En el caso de diferencias centradas de segundo orden se tiene que la aproximación para  $\frac{d^2y}{dx^2}(x_i) = y''(x_i) = y_i''$  es [1]:

$$y_i'' = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} \quad (2)$$

Como la ecuación tiene condiciones de Dirichlet no hace falta un tratamiento especial para los nodos adyacentes a los bordes, es decir, para  $x_1$  y  $x_N$ . Por otro lado, la aproximación de Padé de cuarto orden para los nodos internos es [1]:

$$\frac{y_{i-1}'' + 10y_i'' + y_{i+1}''}{12} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} \quad (3)$$

En este caso, para los nodos  $x_1$  y  $x_N$  hará falta utilizar otra aproximación que no requiera los valores  $y_0''$  o  $y_{N+1}''$ . La derivación de dicha aproximación es parte del trabajo y se encuentra en la sección de resultados.

El objetivo del presente trabajo es resolver numéricamente la ecuación (1) con los métodos mencionados y comparar los resultados numéricos entre sí y con la solución exacta. A continuación, se detalla la resolución de la ecuación (1) en forma analítica.

En primer lugar, se resuelve la ecuación homogénea asociada:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$$

La solución para la homogénea es directa, y resulta:

$$y_h = Ae^x + Be^{-x}, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

Para la solución particular se propone una sumatoria de senos de la forma:

$$y_p = - \sum_{j=1}^K A_j \sin(j\pi x)$$

Reemplazando  $y_p$  en (1) se obtiene:

$$\sum_{j=1}^K A_j [1 + (j\pi)^2] \sin(j\pi x) = \sum_{j=1}^K (-1) [1 + (j\pi)^2] \sin(j\pi x)$$

De ahí,  $A_j = -1 \forall j$ . Con eso, la solución general de la ecuación (1) es:

$$y = y_h + y_p = Ae^x + Be^{-x} + \sum_{j=1}^K \sin(j\pi x) \quad A, B \in \mathbb{R}$$

Finalmente, ajustando las condiciones de borde se tiene que la solución analítica de la ecuación (1) es:

$$y = \frac{1}{e - e^{-1}} (e^x - e^{-x}) + \sum_{j=1}^K \sin(j\pi x) \quad (4)$$

## 2. Resultados

### 2.1. Inciso a)

En primer lugar, se discretizó la ecuación (1) utilizando diferencias centradas de segundo orden y se redujo a un sistema de ecuaciones algebraicas de la forma  $A\vec{y} = \vec{b}$ . En el nodo  $i$ , y utilizando (2), se tiene:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - y_i = - \sum_{j=1}^K \left[ 1 + (j\pi)^2 \right] \sin(j\pi x_i) = f(x_i) = f_i \quad (5)$$

Además, para una mejor comprensión de la construcción de la matriz  $A$  y el vector  $\vec{b}$  se explicitan las aproximaciones en los nodos  $x_1$  y  $x_N$ , donde se utilizan las condiciones de borde. Para el nodo  $x_1$  se tiene:

$$\frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2} - y_1 = - \sum_{j=1}^K \left[ 1 + (j\pi)^2 \right] \sin(j\pi x_1) \quad (6)$$

donde  $y_0 = y(0) = 0$ . A su vez, para el nodo  $x_N$  se tiene:

$$\frac{y_{N+1} - 2y_N + y_{N-1}}{h^2} - y_N = - \sum_{j=1}^K \left[ 1 + (j\pi)^2 \right] \sin(j\pi x_N) \quad (7)$$

donde  $y_{N+1} = y(1) = 1$ .

Se define  $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_N)^T$ . Con eso, y utilizando (5), (6) y (7),  $A$  y  $\vec{b}$  quedan:

$$A = \begin{bmatrix} -\left(1 + \frac{2}{h^2}\right) & \frac{1}{h^2} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \frac{1}{h^2} & -\left(1 + \frac{2}{h^2}\right) & \frac{1}{h^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{h^2} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \frac{1}{h^2} & -\left(1 + \frac{2}{h^2}\right) \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\vec{b} = \left( f_1, f_2, \dots, f_{N-1}, f_N - \frac{1}{h^2} \right)^T \quad (9)$$

### 2.2. Inciso b)

Como se mencionó en la introducción, se requiere derivar una aproximación tipo Padé en los nodos adyacentes a los bordes del dominio, es decir, en  $x_1$  y  $x_N$ . Esto es para poder utilizar el método de Padé de cuarto orden.

En primer lugar, se procedió con el nodo  $x_1$ . Así, se planteó la obtención de coeficientes  $b_2$ ,  $a_0$ ,  $a_1$  y  $a_2$  tal que:

$$y_1'' + b_2 y_2'' = a_0 y_0 + a_1 y_1 + a_2 y_2 + ET \quad (10)$$

El desarrollo de Taylor de cada término en torno a  $x_1$  es:

$$y_1'' = y_1''$$

$$b_2 y_2'' = b_2 \left( y_1'' + y_1''' h + y_1^{iv} \frac{h^2}{2} + y_1^v \frac{h^3}{6} + y_1^{vi} \frac{h^4}{24} + TOS \right)$$

$$a_0 y_0 = a_0 \left( y_1 - y_1' h + y_1'' \frac{h^2}{2} - y_1''' \frac{h^3}{6} + y_1^{iv} \frac{h^4}{24} + TOS \right)$$

$$a_1 y_1 = a_1 y_1$$

$$a_2 y_2 = a_2 \left( y_1 + y_1' h + y_1'' \frac{h^2}{2} + y_1''' \frac{h^3}{6} + y_1^{iv} \frac{h^4}{24} + TOS \right)$$

Reemplazando todo eso en (10) e igualando coeficientes, se obtiene el siguiente sistema lineal de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas:

$$a_0 + a_1 + a_2 = 0$$

$$-a_0 + a_2 = 0$$

$$\frac{h^2}{2} (a_0 + a_2) = 1 + b_2$$

$$\frac{h^3}{6} (-a_0 + a_2) = b_2 h$$

de donde:

$$a_0 = \frac{1}{h^2}$$

$$a_1 = -\frac{2}{h^2}$$

$$a_2 = \frac{1}{h^2}$$

$$b_2 = 0$$

Reemplazando estos coeficientes en (10) se obtiene:

$$y_1'' = \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2} + y_1^{iv} \frac{h^2}{6} + TOS \quad (11)$$

Así, la aproximación hallada es:

$$y_1'' = \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2} \quad (12)$$

cuyo orden es  $O(h^2)$ , como puede verse en (11)

### 2.3. Inciso c)

En segundo lugar, se derivó una aproximación para  $y_N''$ . Se planteó:

$$y_N'' + d_2 y_{N-1}'' = c_0 y_{N+1} + c_1 y_N + c_2 y_{N-1} \quad (13)$$

Haciendo el desarrollo de Taylor de cada término en torno a  $x_N$  y procediendo de la misma forma que en el inciso b), se obtiene:

$$c_0 = \frac{1}{h^2}$$

$$c_1 = -\frac{2}{h^2}$$

$$c_2 = \frac{1}{h^2}$$

$$d_2 = 0$$

Reemplazando estos coeficientes en (13) queda:

$$y_N'' = \frac{y_{N+1} - 2y_N + y_{N-1}}{h^2} + y_N'' \frac{h^2}{6} + TOS \quad (14)$$

Así, la aproximación hallada es:

$$y_N'' = \frac{y_{N+1} - 2y_N + y_{N-1}}{h^2} \quad (15)$$

cuyo orden es  $O(h^2)$ , como puede verse en (14).

### 2.4. Inciso d)

Empleando (3) y las aproximaciones derivadas en los incisos b) y c) para los nodos adyacentes a los bordes del dominio, se puede escribir la siguiente relación lineal:

$$A_2 \vec{y}'' = B_2 \vec{y} + \vec{c} \quad (16)$$

donde  $\vec{y}'' = (y_1'', y_2'', \dots, y_N'')^T$ .

Ahora, por construcción, la matriz  $A_2$  es:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \frac{1}{12} & \frac{10}{12} & \frac{1}{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{12} & \frac{10}{12} & \frac{1}{12} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$



la matriz  $B_2$  es:

$$B_2 = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad (18)$$

y el vector  $\vec{c}$  es:

$$\vec{c} = \left(0, 0, \dots, 0, \frac{1}{h^2}\right)^T \quad (19)$$

## 2.5. Inciso e)

Para resolver la ecuación mediante diferencias centradas de segundo orden se tiene:

$$A\vec{y} = \vec{b} \quad (20)$$

Por otro lado, para resolver la ecuación mediante el método de Padé de cuarto orden se tiene:

$$A_2\vec{y}'' = B_2\vec{y} + \vec{c} \quad (21)$$

$$\vec{y}'' - \vec{y} = \vec{f} \quad (22)$$

donde  $\vec{f} = (f_1, f_2, \dots, f_N)^T$ .

Despejando  $\vec{y}''$  de (21), reemplazando en (22) y operando se llega a la siguiente ecuación:

$$(B_2 - A_2)\vec{y} = (A_2\vec{f} - \vec{c}) \quad (23)$$

Se escribió un código en Octave para resolver las ecuaciones (20) y (23). En la figura 1 se muestran la solución exacta y las dos soluciones numéricas de la ecuación (1), para  $K = 6$  y  $N = 23$ .

Además, en la Figura 2 se muestra el error en el punto central  $x = 0,5$  en función de  $h$  para ambos métodos numéricos. Por lo que se puede ver en la Figura 2, el método de diferencias centradas de segundo orden tiene orden aproximadamente  $O(h^2)$  en el error de truncamiento en el punto central. Por otro lado, el método de Padé de cuarto orden tiene orden aproximadamente  $O(h^4)$  en el error de truncamiento en ese mismo punto. Esto es razonable, ya que los ordenes de error son similares a los ordenes de error de los esquemas de las diferencias finitas.

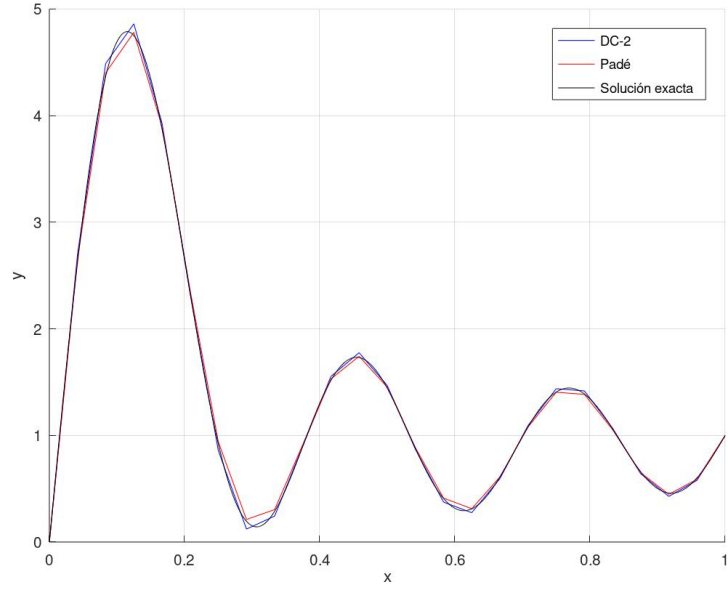


Figura 1: Solución exacta y soluciones numéricas de la ecuación (1), para  $K=6$  y  $N=23$ .

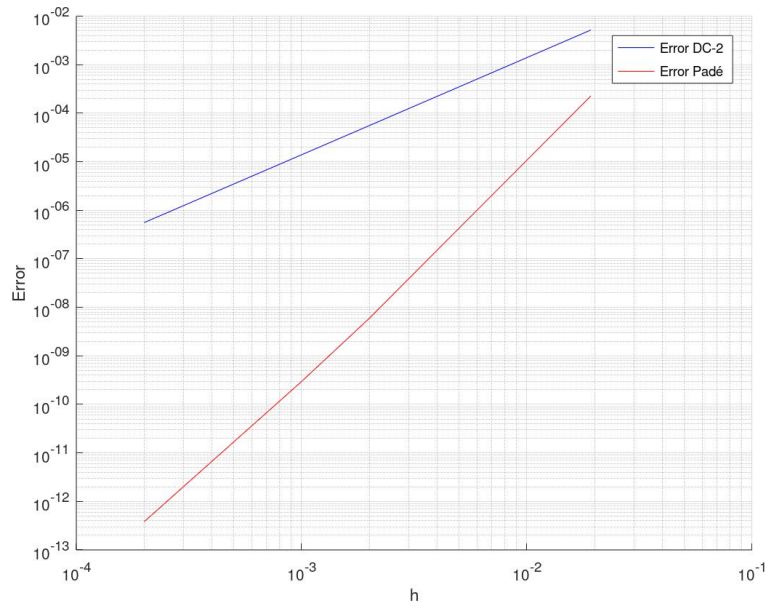


Figura 2: Error en el punto central  $x = 0,5$  en función de  $h$  para ambos métodos numéricos. Escala *loglog*.

## 2.6. Inciso f)

Por último, se calculó el número mínimo de nodos internos necesarios para obtener un error ( $||\vec{y}_{exact} - \vec{y}_{approx}||$ ) menor a  $10^{-1}$  en norma 2 (i.e.  $||\vec{x}||_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_N^2}$ ) y en norma  $\infty$  (i.e.  $||\vec{x}||_\infty = \max(|x_1|, \dots, |x_N|)$ ), para  $K = 2^i$  con  $i = 2, 3, \dots, 7$ , para ambos métodos numéricos.

En la Tabla 1 se muestran los resultados para el método de diferencias centradas de segundo orden y en la Tabla 2 se muestran los resultados para el método de Padé de cuarto orden.

K	$N_{min}$ en norma 2	$N_{min}$ en norma $\infty$
4	$22 \pm 1$	$12 \pm 1$
8	$66 \pm 1$	$30 \pm 1$
16	$202 \pm 1$	$82 \pm 1$
32	$626 \pm 1$	$226 \pm 1$
64	$1963 \pm 10$	$642 \pm 10$
128	$6190 \pm 10$	$1802 \pm 10$

Tabla 1: Número mínimo de nodos internos para obtener un error menor a  $10^{-1}$ , en función de  $K$  y de la norma utilizada, para el método de DC-2

K	$N_{min}$ en norma 2	$N_{min}$ en norma $\infty$
4	$13 \pm 1$	$10 \pm 1$
8	$32 \pm 1$	$19 \pm 1$
16	$81 \pm 1$	$38 \pm 1$
32	$204 \pm 1$	$76 \pm 1$
64	$514 \pm 1$	$152 \pm 1$
128	$1294 \pm 1$	$303 \pm 1$

Tabla 2: Número mínimo de nodos internos para obtener un error menor a  $10^{-1}$ , en función de  $K$  y de la norma utilizada, para el método de Padé

En la Tabla 1 y en la Tabla 2 puede verse que, para ambos métodos, el número mínimo de nodos internos requeridos para obtener un error menor a  $10^{-1}$  es menor si se calcula el error en norma  $\infty$ .

Por otro lado, el número mínimo de nodos internos requeridos para obtener un error menor a  $10^{-1}$  es menor para el método de Padé. Esto se debe a que el método de Padé es de mayor orden que el método de diferencias centradas utilizado.

Además, al aumentar  $K$  aumenta en gran medida el número de nodos internos para llegar al error requerido. Esto se debe a que un  $K$  mayor introduce componentes de mayores frecuencias en la solución. Así, se requiere un mayor número de puntos para recrear numéricamente la solución de forma correcta.

## 3. Conclusiones

Se utilizaron los métodos de diferencias centradas de segundo orden y Padé de cuarto orden para resolver numéricamente una ecuación diferencial ordinaria.

Se compararon los resultados de ambos métodos entre sí y con la solución exacta.

Se encontró que el orden del error de truncamiento en el nodo central del dominio es aproximadamente  $O(h^2)$  para el método de diferencias centradas de segundo orden y  $O(h^4)$  para el método de Padé de cuarto orden.

Por otro lado, el número de nodos internos requerido para obtener un error menor a  $10^{-1}$  es menor para el método de Padé, lo cual se debe a que dicho método es de orden mayor que el de diferencias centradas 2.

Finalmente, se observó que al agregar a la solución componentes de frecuencias cada vez más altas, el número mínimo de nodos internos para obtener el error mencionado crecía considerablemente. Eso se debe a que si la solución presenta oscilaciones de alta frecuencia, y no se quiere perder información, necesariamente debe aumentar la cantidad de puntos donde se aproxima la misma.

## Referencias

- [1] "Fundamentals of Engineering Numerical Analysis", P. Moin, Cambridge University Press, 2010

## 4. Apéndice

### 4.1. Código en Octave para la resolución numérica

Se implementó el algoritmo de Thomas para resolver numéricamente las ecuaciones (20) y (23). El código se muestra en la página siguiente.

```
clear
```

```
function A = tridiag(ld,pd,ud,N)
```

```
    A=zeros(N,N);
```

```
    #Llena la diagonal principal
```

```
    i=1;
```

```
    j=1;
```

```
    while i<=N
```

```
        while j<=N
```

```
            A(i,j)=pd;
```

```
            j=j+1;
```

```
            i=i+1;
```

```
        endwhile
```

```
    endwhile
```

```
    #Llena la subdiagonal
```

```
    i=2;
```

```
    j=1;
```

```
    while i<N
```

```
        while j<N
```

```
            A(i,j)=ld;
```

```
            j=j+1;
```

```
            i=i+1;
```

```
        endwhile
```

```
    endwhile
```

```
    #Llena la supradiagonal
```

```
    i=1;
```

```
    j=2;
```

```
    while i<N
```

```
        while j<=N
```

```
            A(i,j)=ud;
```

```
            j=j+1;
```

```
            i=i+1;
```

```
        endwhile
```

```
    endwhile  
endfunction
```

```
function f =func(x,K) #Defino la función
```

```
    j=1;  
    f=0;  
    while j<=K  
        f=f+(1+(j*pi)^2)*sin(j*pi*x);  
        j=j+1;  
    endwhile  
    f=-1*f;  
endfunction
```

```
#Solucion exacta
```

```
function f =sol_exc(x,K)
```

```
    A=1/(exp(1)-exp(-1));  
    B=-1/(exp(1)-exp(-1));  
    f=A*exp(x)+B*exp(-x);  
    j=1;  
    while j<=K  
        f=f+sin(j*pi*x);  
        j=j+1;  
    endwhile  
endfunction
```

```
K=6;
```

```
valor_exc=sol_exc(0.5,K); #Valor exacto en el nodo central
```

```
l=1;
```

```
h_vec=zeros(1,4);
```

```
error_dc=zeros(1,4);
```

```
error_p=zeros(1,4);
```

```

k=1;
for N=[51,501,1001,5001];
h_vec(k)=l/(N+1);
h=h_vec(k);
a=1/h^2*ones(1,N-1);
a=[0 a];
b=-(1+2/h^2)*ones(1,N);
c=1/h^2*ones(1,N-1);
c=[c 0];
d=zeros(N,1);
x_j=linspace(h,1-h,N);
i=1;
while i<=N
    d(i)=func(x_j(i),K);
    if i==N
        d(i)=d(i)-1/h^2;
    endif
    i=i+1;
endwhile

c(1) = c(1) / b(1);
d(1) = d(1) / b(1);

for n = 2:1:N
    temp = b(n) - a(n) * c(n - 1);
    if (n<N)
        c(n) = c(n) / temp;
    endif
    d(n) = (d(n) - a(n) * d(n - 1)) / temp;
endfor

x(N) = d(N);

```

```

for n = (N - 1):-1:1
    x(n) = d(n) - c(n) * x(n + 1);
endfor

y=x;

x=linspace(h,1-h,N)
x=[[0] [x] [1]];
y=[[0] [y] [1]];
error_dc(k)=abs(valor_exc-y(int16((N+2)/2 + 0.5)));

```

```

#Padé

b=zeros(N,1);
i=1;
while i<=N
    b(i)=func(x_j(i),K);
    i=i+1;
endwhile

A_2=tridiag(1/12, 10/12, 1/12, N);
A_2(1,1)=1;
A_2(N,N)=1;
A_2(1,2)=0;
A_2(N,N-1)=0;
c=zeros(N,1);
c(N)=1/h^2;
d=A_2*b - c;

```

```

a=(1/h^2-1/12)*ones(1,N-2);
a=[[0] [a] [(1/h^2)]];
b=(-2/h^2-10/12)*ones(1,N-2);
b=[[-2/h^2-1] [b] [-2/h^2-1]];
c=(1/h^2-1/12)*ones(1,N-2);
c=[[(1/h^2)] [c] [0]];

```



```
c(1) = c(1) / b(1);
```

```
d(1) = d(1) / b(1);
```

```
for n = 2:1:N
```

```
    temp = b(n) - a(n) * c(n - 1);
```

```
    if (n<N)
```

```
        c(n) = c(n) / temp;
```

```
    endif
```

```
    d(n) = (d(n) - a(n) * d(n - 1)) / temp;
```

```
endfor
```

```
x=zeros(1,N);
```

```
x(N) = d(N);
```

```
for n = (N - 1):-1:1
```

```
    x(n) = d(n) - c(n) * x(n + 1);
```

```
endfor
```

```
y_p=x;
```

```
x=linspace(h,1-h,N);
```

```
x=[0 x 1];
```

```
y_p=[[0] [y_p] [1]];
```

```
error_p(k)=abs(valor_exc-y_p(int16((N+2)/2 + 0.5)));
```

```
k=k+1;
```

```
endfor
```

```
x_exc=linspace(0,1,1000);
```

```
y_exc=zeros(1,1000);
```

```
for i=1:1000
```

```
    y_exc(i)=sol_exc(x_exc(i),K);
```

```
endfor
```

figure 1

hold on

```
p1=plot(x,y,";DC-2;");
```

```
p2=plot(x,y_p,";Padé;");
```

```
p3=plot(x_exc,y_exc,";Solución exacta;");
```

```
set(p1,'Color','blue');
```

```
set(p2,'Color','red');
```

```
set(p3,'Color','black');
```

```
xlabel("x")
```

```
ylabel("y")
```

```
grid("on")
```

```
print -djpg fig1.jpg
```

hold off

figure 2

hold on

```
p4=loglog(h_vec,error_dc,";Error DC-2;");
```

```
p5=loglog(h_vec,error_p,";Error Padé;");
```

```
set(p4,'Color','blue');
```

```
set(p5,'Color','red');
```

```
xlabel("h")
```

```
ylabel("Error")
```

```
grid("on")
```

```
print -djpg fig2.jpg
```

hold off