Métodos numéricos en fluidos – Instituto Balseiro – 2022

Práctica 1

1. Encuentre la fórmula más precisa para aproximar la derivada primera en el punto x_i conociendo los valores de f en x_{i-1}, x_i, x_{i+1} y x_{i+2}. Considere que los puntos están equiespaciados. Calcule el error del método y grafíquelo en función del espaciamiento en escala log-log.

2. Un esquema general de Padé para la derivada primera en un punto del borde $(i = 0)$ y que no altere la estructura tridiagonal de la matriz se puede escribir como:

$$f_0' + \alpha f_1' = \frac{1}{h}(a\, f_0 + b\, f_1 + c\, f_2 + d\, f_3).$$

   a) Muestre que si se impone una aproximación de al menos tercer orden, los coeficientes quedan definidos según:

$$a = -\frac{11 + 2\alpha}{6}, \quad b = \frac{6 - \alpha}{2}, \quad c = \frac{2\alpha - 3}{2}, \quad d = \frac{2 - \alpha}{6}.$$

   ¿Qué valor de α elegiría y por qué?

   b) Encuentre los coeficientes para que el esquema sea de cuarto orden.

3. Verificar que el número de onda modificado para el esquema de Padé de cuarto orden para la derivada primera es:

$$k' = \frac{3 \sin (k\Delta)}{\Delta\, (2 + \cos (k\Delta))}.$$

4. Los esquemas de diferencias finitas que no son centrados producen números de onda modificados complejos. Calcule el número de onda modificado para el siguiente esquema *down-wind*:

$$f_j' = \frac{-3\, f_j + 4\, f_{j+1} - f_{j+2}}{2h} + \mathcal{O}\left(h^2\right).$$

   Grafique su parte real e imaginaria y discuta los resultados.

5. En este problema se quiere evaluar la precisión de esquemas de diferencias finitas para la derivada segunda empleando el método de número de onda modificado. Para esto compare $k'^2\, h^2$ y $k^2\, h^2$ con kh donde k'^2 es el número de onda modificado para la función $f(x) = \exp(ikx)$. Compare la precisión de la fórmula de diferencias centradas y Padé de cuarto orden por este método.

6. **(Problema a entregar - 15/09)** En la resolución numérica de ecuaciones diferenciales, muchas veces la física del problema nos obliga a utilizar esquemas numéricos precisos en pos de obtener soluciones adecuadas con un costo computacional aceptable. En este problema estudiaremos el comportamiento de diferentes aproximaciones numéricas en una ecuación donde la solución exacta tiene un número de frecuencias definidas por nosotros y que trataremos de aproximar con el método numérico. Suponga que se quiere resolver numéricamente un problema de valores de contorno con condiciones tipo Dirichlet:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - y = -\sum_{j=1}^{K} (1 + (j\pi)^2) \sin (j\pi x) \qquad 0 \le x \le 1, \tag{1}$$

$$y(0) = 0 \qquad y(1) = 1. \tag{2}$$

   El dominio se discretiza con puntos $x_i = ih$, $i = 1, \ldots, N$, y $h = 1/(N + 1)$. Notar que no hay puntos en los contornos. En este problema y_i es la estimación de y en el punto x_i, y $\vec{y} = (y_1, y_2, ..., y_N)^T$ es el vector solución. El valor de y'' se puede estimar como combinación lineal de los valores de y empleando diferencias finitas, transformando el problema de EDO en un sistema de ecuaciones lineales.

a) Utilice diferencias centradas de segundo orden para reducir la EDO y sus condiciones de contorno a un sistema de ecuaciones algebraicas del tipo $A\vec{y} = \vec{b}$. Explicite A y $\vec{b}$.

b) Además se pide resolver el problema utilizando Padé de cuarto orden para los puntos interiores:

$$\frac{1}{12}f''_{i-1} + \frac{10}{12}f''_i + \frac{1}{12}f''_{i+1} = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}.$$

Derivar entonces una aproximación de Padé para y''_1 en el contorno izquierdo de la siguiente manera:

$$y''_1 + b_2\, y''_2 = a_0\, y_0 + a_1\, y_1 + a_2\, y_2 + O(?),$$

donde $y_0 = y(0)$, es conocido de la condición de contorno en $x = 0$. ¿De qué orden es esta aproximación?

c) Repetir el paso anterior para el contorno derecho.

c_vec tiene que ver con las condiciones de contorno. No hay que considerar con los términos de mayor orden porque justamente es una diferencia finita

d) Empleando la fórmula de diferencia finita derivada anteriormente se puede escribir la siguiente relacion lineal: $A_2\vec{y}'' = B_2\vec{y} + \vec{c}$. ¿Cuáles son los elementos de las matices A_2 y B_2 operando en los puntos interiores y en el contorno? ¿Cuáles son los elementos del vector $\vec{c}$?

e) Elija N impar y resuelva el problema con diferencias centradas y Padé (note que en ambos casos el sistema a resolver esta dado por una matriz tridiagonal). Muestre en un gráfico la solución exacta y ambas aproximaciones numéricas para $K = 6$ y $N = 23$. Grafique además el error (solución exacta menos aproximada) en el punto central ($x = 0,5$) en función de h para ambos métodos y determine el orden del error de truncamiento en ese punto.

f) Realice una tabla donde se muestre el número de puntos mínimos necesarios para obtener un error menor a 10^{-1} entre la solución exacta en los puntos discretos y la aproximada en norma 2 ($\|\vec{y}_{exac.} - \vec{y}_{aprox.}\|_2$) y norma ∞ en función de la frecuencia K y para cada aproximación numérica. Elija $K = 4, 8, 16, 32, 64, 128$. Discuta las diferencias de ambos métodos numéricos.

7. Considere la función $f(x) = 1 - x^8$ y una grilla no uniforme definida de la siguiente manera:

$$\begin{cases} j = 0, 1, 2, \ldots, N \\ \zeta_j = -1 + 2\, j/N \\ x_j = \frac{1}{a}\tanh\left(\zeta_j \tanh^{-1}(a)\right) \quad 0 < a < 1. \end{cases}$$

El parámetro a puede ser utilizado para ajustar el espaciado entre los puntos de la grilla (para mayores valores de a los puntos se acumulan sobre los bordes). Utilice $a = 0{,}98$ y $N = 32$.

a) Calcule la derivada primera usando diferencias centradas y el método de transformación de coordenadas. Grafique y compare con la solución exacta en $-1 < x < 1$. ¿Cómo se modifican los resultados si $a = 0{,}9$?

b) Repita el punto anterior para la transformación:

$$\begin{cases} j = 0, 1, 2, ..., N \\ \zeta_j = \frac{\pi j}{N} \\ x_j = \cos(\zeta_j). \end{cases}$$

¿Qué transformación le parece más adecuada y por qué?

c) ¿Cuántos puntos equiespaciados necesita para obtener la misma precisión que en a)? La precisión se podría definir en este caso como el máximo error obtenido en alguno de los x_j puntos.