

Métodos numéricos en fluidos – Instituto Balseiro – 2022

Monografía - Cavity Cuadrada

1. **(Problema a entregar - 17/11/22)** En este trabajo se resolverá uno de los problemas más estudiados desde el punto de vista numérico en la mecánica de fluidos: la Cavity Cuadrada Hidrodinámica Bidimensional ("Shear-driven cavity flow"). Para este caso se conocen soluciones numéricas precisas que permiten, por ejemplo, evaluar la fiabilidad de un código como el que se utilizará en este trabajo. La geometría a estudiar se resume en la Figura 1 y consiste en una cavidad cuadrada (2D) de lado L , que contiene un fluido incompresible de viscosidad ν con condiciones de borde de no deslizamiento $\vec{V} = (0,0)$ en todas las paredes excepto en la horizontal superior donde $\vec{V} = (U_0, 0)$.

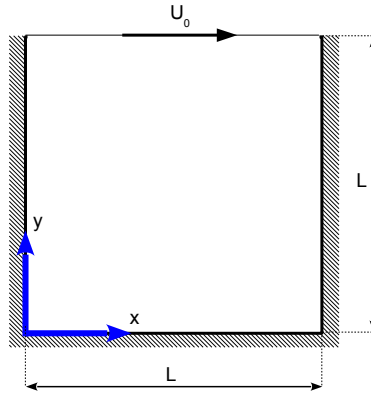


Figura 1: Esquema de la cavidad cuadrada hidrodinámica bidimensional.

La adimensionalización de las ecuaciones de Navier-Stokes empleando las constantes L , U_0 y ν produce un nuevo conjunto que depende de un único parámetro adimensional, el número de Reynolds ($Re = U_0 L/\nu$). En particular, las componentes de la ecuación de conservación de momento en las direcciones x e y resultan:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial uu}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial vv}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

mientras que para la conservación de la masa se obtiene:

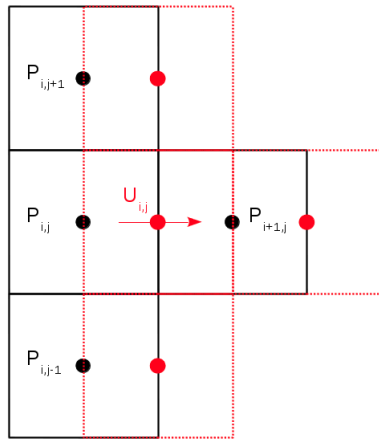
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

De esta forma, las soluciones numéricas dependen del valor utilizado para Re , el cual cambia al modificarse las dimensiones de la cavidad, la velocidad de la cara superior o las propiedades del fluido.

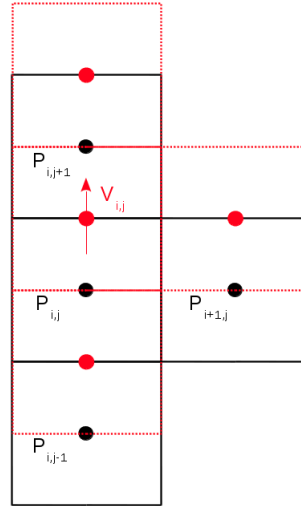
En este trabajo se utilizará un código *in house* que permite resolver numéricamente este problema. La implementación del mismo está caracterizada por:

- a) Método de Volúmenes Finitos,
- b) Algoritmo SIMPLER (Patankar, 1980),
- c) Grilla desplazada,
- d) Diferencias centradas-2 (DC-2) para la advección. Escrita como Up-wind de primer orden (UP1) más la corrección diferida,
- e) Diferencias centradas-2 para la difusión y el gradiente de presión. Primer orden para difusión en las paredes,
- f) Método de Euler implícito (EI) para el avance temporal,
- g) Resuelve la no linealidad utilizando la velocidad de advección del paso anterior o realizando iteraciones internas.

En cuanto a la discretización propiamente dicha, el dominio se discretiza utilizando una grilla uniforme en $x - y$ con igual espaciamento en ambas direcciones, es decir $\delta x = \delta y = \Delta$. La variable n_1 es el número de volúmenes por dirección espacial tal que $\Delta = 1/n_1$ y se tiene entonces un total de n_1^2 volúmenes. Estos se enumeran usando el índice i para la dirección x y el j para la dirección y , de modo que V_{11} corresponda al volumen ubicado en el vértice inferior izquierdo y $V_{n_1 n_1}$ al del vértice superior derecho. Los volúmenes donde se integran las ecuaciones de conservación se muestran en la Figura 2. Note que de esta forma no es necesario imponer condiciones de borde para la presión y se tienen n_1^2 incógnitas para p , $(n_1 - 1)n_1$ para u y $n_1(n_1 - 1)$ para v .



(a) Grilla para velocidad U



(b) Grilla para velocidad V

Figura 2: Implementación de las grillas desplazadas

- a) Identifique en el código los siguientes elementos que le permitirán familiarizarse con el mismo:
 - 1) Datos del problema (línea 15),
 - 2) Datos para la discretización (línea 26),

- 3) Definición e inicialización a cero de vectores y matrices a utilizar (línea 59 a 135),
 - 4) Loop de iteración temporal con índice k (línea 138 a 1007),
 - 5) Loop de iteración SIMPLER con índice $lsimpler$ (línea 165 a 945),
 - 6) Cálculo de las velocidades de advección en las caras (línea 168),
 - 7) Cálculo de los factores de up-wind (línea 228),
 - 8) Cálculo de las fuentes diferidas de up-wind (línea 309),
 - 9) Paso 1 SIMPLER: cálculo de la presión para un campo de velocidad dado (línea 430),
 - 10) Paso 2 SIMPLER: cálculo de la velocidad dado el campo de presión (línea 686),
 - 11) Paso 3 SIMPLER: cálculo de la corrección de presión para que el campo de velocidades sea divergencia libre (línea 865),
 - 12) Paso 4 SIMPLER: corrección de la velocidad dado el campo de corrección de presión (línea 918),
 - 13) Paso 5 SIMPLER: se verifica la conservación de masa y se calcula la derivada temporal de la velocidad para evaluar el estado estacionario. Esto se imprime en el archivo `evolucion.tex` (línea 953),
 - 14) Se imprimen y plotean resultados (línea 1028).
- b) Verifique que su herramienta numérica está bien implementada para el problema de la cavidad. Resuelva el problema para $Re = 100, 1000$ y 5000 y para $n1 = 20, 40$ y 80 . Compare con los resultados publicados por Ghia et al. (1982) Nota: use la tabla I y II de Guia et al. (1982). Explique el criterio que utilizó para decidir si su solución numérica alcanzó el estado estacionario.
- c) Para el término advectivo implemente el esquema UP1 y el esquema QUICK, éste último según la recomendación de Hayase et al. (1992) (fórmulas 19a y 19b). Repita el punto anterior utilizando estos dos esquemas. Ayuda1: solo tiene que modificar el cálculo de las fuentes diferidas de up-wind (línea 309). Ayuda2: no implemente QUICK en los bordes para evitar esquemas especiales (para u use QUICK desde $i = 3 : n1 - 2$ y $j = 3 : n1 - 1$, para v use QUICK desde $i = 3 : n1 - 1$ y $j = 3 : n1 - 2$). Discuta el comportamiento de los diferentes esquemas, incluyendo DC2, en función de lo estudiado en clase.
- d) Resuelva con el mejor esquema advectivo que tiene el caso $Re = 1$ y $Re = 1000$ con $n1 = 80$. Considere que ésta es la solución exacta. Estudie el orden de convergencia espacial de UP1 en el cálculo de $u(0.5, 0.2)$ y $v(0.2, 0.5)$ para estos dos Re utilizando $n1 = 10, 20, 40, 60$ y 80 . Discuta y explique sus resultados en función de lo estudiado en clase.
- e) Para $Re = 100$ y 1000 , minimice el costo computacional para encontrar $u(0.5, 0.5)$ con un error menor al 5 % respecto a Guia et al. (1982) utilizando UP1 y DC2. Es decir, minimice $n1$ y N_{deltat} . Considere que tiene una hora como máximo para finalizar cada cálculo. Discuta sus resultados y justifique su análisis.
- f) Para $Re = 1000$, $n1 = 30$ y DC-2, evalúe el máximo Δt admisible si utiliza $lsimpler = 1, 2$ o 3 . Discuta sus resultados en función del costo computacional para encontrar el estado estacionario.
- g) Modifique ahora la condición de contorno en la cara superior para hacerla dependiente del tiempo con $U_0 = \cos(t)$. Utilizando DC-2, $n1 = 30$, $Re = 1000$ y $\Delta t = 0.4$, grafique la evolución temporal de $u(0.5, 0.5)$ y $v(0.5, 0.5)$ desde la condición inicial hasta $t_{final} = 60$. Utilice $lsimpler = 1$ y $lsimpler = 3$. Implemente ahora el método de Crank-Nicholson (C-N) y realice el mismo gráfico. Discuta sus resultados explicando si alguna de sus soluciones numéricas está convergiendo. ¿Si no es así, que metodología propone para encontrarla? Ayuda: dada una implementación de EI se puede implementar C-N de la siguiente manera:

$$\frac{y^1 - y^0}{\Delta t} = f^1, \quad b^1 = 0 + \frac{y^1 - y^0}{\Delta t}$$

$$\begin{aligned}\frac{y^2-y^1}{\Delta t} &= f^2 + b^1, \quad b^2 = -b^1 + \frac{y^2-y^1}{\Delta t} \\ \frac{y^3-y^2}{\Delta t} &= f^3 + b^2, \quad b^3 = -b^2 + \frac{y^3-y^2}{\Delta t} \\ &\dots\end{aligned}$$

Nota, use $\Delta t_{C-N} = \Delta t_{EI}/2$.

1. REFERENCIAS

Ghia U., Ghia K., y Shin C. High-re solution for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and the multigrid method. *Journal of Numerical Methods*, 48:387-411, 1982.

Hayase T., Humphrey J., y Greif R. A consistently formulated quick scheme for fast and stable convergence using finite-volume iterative calculation procedures. *Journal of Computational Physics*, 98:108-118, 1992.

Patankar S. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Taylor Francis, 1980.