

Monografía - Cavity Cuadrada

1. **(Problema a entregar - 10/11/21)** En este trabajo se resolverá uno de los problemas más estudiados desde el punto de vista numérico en la mecánica de fluidos: la Cavity Cuadrada Hidrodinámica Bidimensional ("Shear-driven cavity flow"). Para este caso se conocen soluciones numéricas precisas que permiten, por ejemplo, evaluar la fiabilidad de un código como el que se utilizará en este trabajo. La geometría a estudiar se resume en la Figura 1 y consiste en una cavidad cuadrada (2D) de lado L , que contiene un fluido incompresible de viscosidad ν con condiciones de borde de no deslizamiento $\vec{V} = (0,0)$ en todas las paredes excepto en la horizontal superior donde $\vec{V} = (U_0, 0)$.

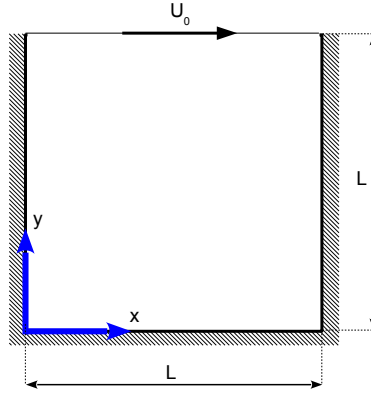


Figure 1: Esquema de la cavidad cuadrada hidrodinámica bidimensional.

La adimensionalización de las ecuaciones de Navier-Stokes empleando las constantes L , U_0 y ν produce un nuevo conjunto que depende de un único parámetro adimensional, el número de Reynolds ($Re = U_0 L/\nu$). En particular, las componentes de la ecuación de conservación de momento en las direcciones x e y resultan:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial uu}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial vv}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

mientras que para la conservación de la masa se obtiene:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

De esta forma, las soluciones numéricas dependen del valor utilizado para Re , el cual cambia al modificarse las dimensiones de la cavidad, la velocidad de la cara superior o las propiedades del fluido.

En este trabajo se utilizará un código *in house* que permite resolver numéricamente este problema. La implementación del mismo está caracterizada por:

- (a) Método de Volúmenes Finitos,
- (b) Algoritmo SIMPLER (Patankar, 1980),
- (c) Grilla desplazada,
- (d) Diferencias centradas-2 (DC-2) para la advección. Escrita como Up-wind de primer orden (UP1) más la corrección diferida,
- (e) Diferencias centradas-2 para la difusión y el gradiente de presión. Primer orden para difusión en las paredes,
- (f) Método de Euler implícito (EI) para el avance temporal,
- (g) Resuelve la no linealidad utilizando la velocidad de advección del paso anterior o realizando iteraciones internas.

En cuanto a la discretización propiamente dicha, el dominio se discretiza utilizando una grilla uniforme en $x - y$ con igual espaciamiento en ambas direcciones, es decir $\delta x = \delta y = \Delta$. La variable n_1 es el número de volúmenes por dirección espacial tal que $\Delta = 1/n_1$ y se tiene entonces un total de n_1^2 volúmenes. Estos se enumeran usando el índice i para la dirección x y el j para la dirección y , de modo que V_{11} corresponda al volumen ubicado en el vértice inferior izquierdo y $V_{n_1 n_1}$ al del vértice superior derecho. Los volúmenes donde se integran las ecuaciones de conservación se muestran en la Figura 2. Note que de esta forma no es necesario imponer condiciones de borde para la presión y se tienen n_1^2 incógnitas para p , $(n_1 - 1)n_1$ para u y $n_1(n_1 - 1)$ para v .

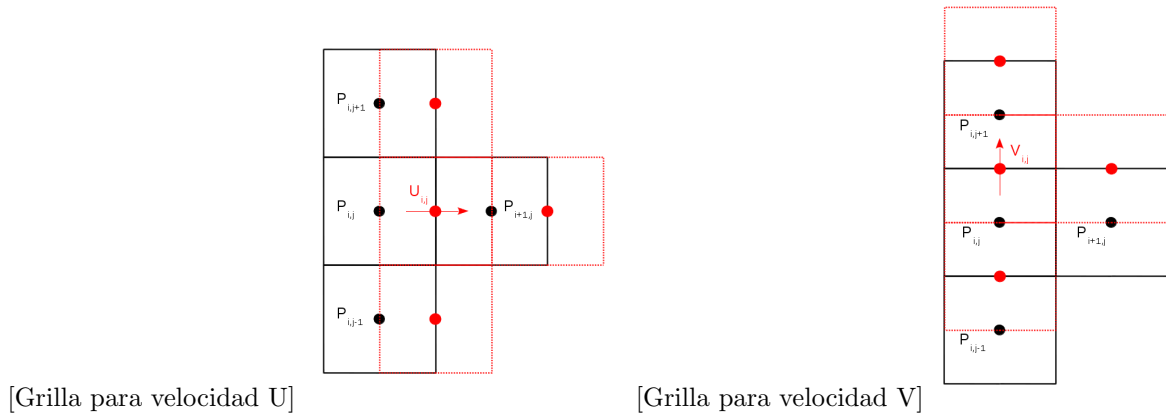


Figure 2: Implementación de las grillas desplazadas

- (a) Identifique en el código los siguientes elementos que le permitirán familiarizarse con el mismo:
 - i. Datos del problema (línea 15),
 - ii. Datos para la discretización (línea 26),
 - iii. Definición e inicialización a cero de vectores y matrices a utilizar (línea 59 a 135),
 - iv. Loop de iteración temporal con índice k (línea 138 a 1007),
 - v. Loop de iteración SIMPLER con índice $lsimpler$ (línea 165 a 945),
 - vi. Cálculo de las velocidades de advección en las caras (línea 168),
 - vii. Cálculo de los factores de up-wind (línea 228),
 - viii. Cálculo de las fuentes diferidas de up-wind (línea 309),
 - ix. Paso 1 SIMPLER: cálculo de la presión para un campo de velocidad dado (línea 430),

- x. Paso 2 SIMPLER: cálculo de la velocidad dado el campo de presión (línea 686),
 - xi. Paso 3 SIMPLER: cálculo de la corrección de presión para que el campo de velocidades sea divergencia libre (línea 865),
 - xii. Paso 4 SIMPLER: corrección de la velocidad dado el campo de corrección de presión (línea 918),
 - xiii. Paso 5 SIMPLER: se verifica la conservación de masa y se calcula la derivada temporal de la velocidad para evaluar el estado estacionario. Esto se imprime en el archivo `evolucion.tex` (línea 953),
 - xiv. Se imprimen y plotean resultados (línea 1028).
- (b) Verifique que su herramienta numérica está bien implementada para el problema de la cavidad. Resuelva el problema para $Re = 100, 1000$ y 5000 y para $n1 = 20, 40$ y 80 . Compare con los resultados publicados por Ghia et al. (1982) Nota: use la tabla I y II de Guia et al. (1982). Explique el criterio que utilizó para decidir si su solución numérica alcanzó el estado estacionario.
- (c) Para el término advectivo implemente el esquema UP1 y el esquema QUICK, éste último según la recomendación de Hayase et al. (1992) (fórmulas 19a y 19b). Repita el punto anterior utilizando estos dos esquemas. Ayuda1: solo tiene que modificar el cálculo de las fuentes diferidas de up-wind (línea 309). Ayuda2: no implemente QUICK en los bordes para evitar esquemas especiales (para u use QUICK desde $i = 3 : n1 - 2$ y $j = 3 : n1 - 1$, para v use QUICK desde $i = 3 : n1 - 1$ y $j = 3 : n1 - 2$). Discuta el comportamiento de los diferentes esquemas, incluyendo DC2, en función de lo estudiado en clase.
- (d) Resuelva con el mejor esquema advectivo que tiene el caso $Re = 1$ y $Re = 1000$ con $n1 = 80$. Considere que ésta es la solución exacta. Estudie el orden de convergencia espacial de UP1 en el cálculo de $u(0.5, 0.2)$ y $v(0.2, 0.5)$ para estos dos Re utilizando $n1 = 10, 20, 40, 60$ y 80 . Discuta y explique sus resultados en función de lo estudiado en clase.
- (e) Para $Re = 100$ y 1000 , minimice el costo computacional para encontrar $u(0.5, 0.5)$ con un error menor al 5% respecto a Guia et al. (1982) utilizando UP1 y DC2. Es decir, minimice $n1$ y $Ndeltat$. Considere que tiene una hora como máximo para finalizar cada cálculo. Discuta sus resultados y justifique su análisis.
- (f) Para $Re = 1000$, $n1 = 30$ y DC-2, evalúe el máximo Δt admisible si utiliza $lsimpler = 1, 2$ o 3 . Discuta sus resultados en función del costo computacional para encontrar el estado estacionario.
- (g) Modifique ahora la condición de contorno en la cara superior para hacerla dependiente del tiempo con $U_0 = \cos(t)$. Utilizando DC-2, $n1 = 30$, $Re = 1000$ y $\Delta t = 0.4$, grafique la evolución temporal de $u(0.5, 0.5)$ y $v(0.5, 0.5)$ desde la condición inicial hasta $t_{final} = 60$. Utilice $lsimpler = 1$ y $lsimpler = 3$. Implemente ahora el método de Crank-Nicholson (C-N) y realice el mismo gráfico. Discuta sus resultados explicando si alguna de sus soluciones numéricas está convergida. ¿Si no es así, que metodología propone para encontrarla? Ayuda: dada una implementación de EI se puede implementar C-N de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\frac{y^1 - y^0}{\Delta t} &= f^1, \quad b^1 = 0 + \frac{y^1 - y^0}{\Delta t} \\
\frac{y^2 - y^1}{\Delta t} &= f^2 + b^1, \quad b^2 = -b^1 + \frac{y^2 - y^1}{\Delta t} \\
\frac{y^3 - y^2}{\Delta t} &= f^3 + b^2, \quad b^3 = -b^2 + \frac{y^3 - y^2}{\Delta t} \\
&\dots
\end{aligned}$$

Nota, use $\Delta t_{C-N} = \Delta t_{EI}/2$.

1 REFERENCIAS

Ghia U., Ghia K., y Shin C. High-re solution for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and the multigrid method. *Journal of Numerical Methods*, 48:387-411, 1982.

Hayase T., Humphrey J., y Greif R. A consistently formulated quick scheme for fast and stable convergence using finite-volume iterative calculation procedures. *Journal of Computational Physics*, 98:108-118, 1992.

Patankar S. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Taylor Francis, 1980.

Instituto Balseiro

MÉTODOS NUMÉRICOS EN FLUIDOS I



MONOGRAFÍA FINAL

Renato Trono Figueras

28 de Noviembre de 2021

Índice

1. Introducción	2
1.1. Dominio, condiciones de borde y ecuaciones a resolver	2
1.2. Discretización del dominio	3
1.3. Método para la resolución numérica	3
2. Validación del código	4
3. Implementación de UP-1 y QUICK para el término advectivo	5
3.1. UP-1	6
3.2. QUICK	6
3.3. Resultados	7
4. Convergencia espacial para UP-1	9
5. Minimización de costo computacional con DC-2 y UP-1	10
5.1. DC-2	10
5.2. UP-1	11
6. Iteraciones internas y máximo paso de tiempo admisible con DC-2	12
7. Condición de borde no estacionaria y avance temporal con Crank-Nicolson	13
8. Conclusiones	15

1. Introducción

En el presente trabajo se estudia el problema de la Cavity Cuadrada Hidrodinámica Bidimensional desde el punto de vista de la resolución numérica. Para ello, se utiliza un método de volúmenes finitos y el algoritmo SIMPLER (Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations Revised) [1]. En primer lugar, se valida el código utilizado, comparando resultados con los de et al. 1982 [2]. Luego, se estudian distintas implementaciones para resolver el término advectivo, para distintos números de Reynolds y cantidad de volúmenes en los que se discretiza el dominio. Además, se estudia el costo computacional del método y se prueban diferentes implementaciones para el avance temporal.

1.1. Dominio, condiciones de borde y ecuaciones a resolver

La geometría del problema consiste de una cavidad cuadrada bidimensional de lado L , como se muestra en la Figura 1, la cual contiene un fluido incompresible de viscosidad cinemática ν .

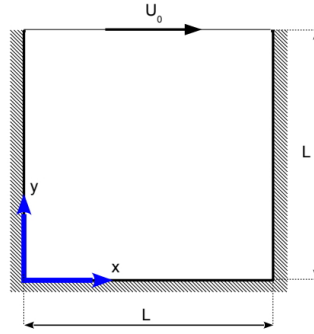


Figura 1: Geometría del problema y sistema de referencia.

Las condiciones de borde son $\vec{V} = (0, 0)$ en todas las paredes, excepto en la horizontal superior, donde la velocidad es $\vec{V} = (U_0(t), 0)$. Además, el fluido se encuentra en reposo en el instante inicial.

Adimensionalizando las ecuaciones de Navier-Stokes con L y U_0 , se llega a un conjunto de ecuaciones dependientes del número de Reynolds, $Re = \frac{U_0 L}{\nu}$. Para la conservación de momento lineal, se tiene:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial uu}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial vu}{\partial x} + \frac{\partial vv}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

donde (1) corresponde a la dirección \hat{x} y (2) corresponde a la dirección \hat{y} . Para la conservación de la masa, se tiene:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

Se aclara aquí que se utilizará $U_0(t) = 1$ en todo el trabajo, excepto en la última sección, donde se aplicará una condición de borde no estacionaria.

1.2. Discretización del dominio

La discretización del dominio se lleva a cabo utilizando una grilla uniforme en ambas direcciones, y con volúmenes de igual tamaño en ambas direcciones. Se define $\delta x = \delta y = \Delta = \frac{1}{n_1}$, donde n_1 es la cantidad de volúmenes asociados a la presión por cada dirección espacial. Así, se tienen n_1^2 volúmenes para la presión. Luego, se implementan grillas desplazadas para u y v , como se muestra en la Figura 2.

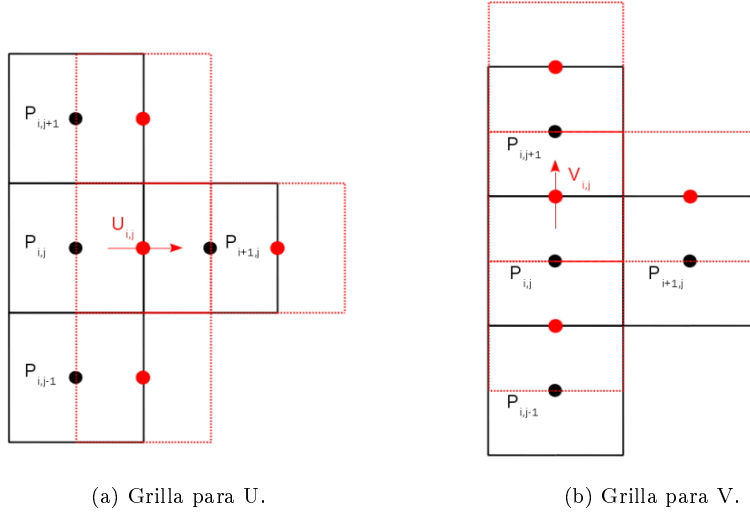


Figura 2: Implementación de grillas desplazadas.

Los volúmenes se enumeran utilizando el índice i para la dirección \hat{x} y el índice j para la dirección \hat{y} , de forma tal que el volumen V_{11} para la presión corresponde al de la esquina inferior izquierda. Nótese que en la forma en que está discretizado el dominio, no es necesario imponer condiciones de borde para la presión.

1.3. Método para la resolución numérica

Para la resolución numérica se utiliza un código programado en el lenguaje GNU Octave, el cual tiene las siguientes características:

- Método de volúmenes finitos.
- Algoritmo SIMPLER.
- Grilla desplazada.
- Diferencias centradas de segundo orden (DC-2) para la advección, escrita como Up-wind de primer orden (UP-1) más fuentes diferidas.

- Diferencias centradas de segundo orden para la difusión y el gradiente de presión. Primer orden para difusión en las paredes.
- Método de Euler implícito para el avance temporal (EI).
- Resuelve la no linealidad utilizando la velocidad de advección del paso anterior o realizando iteraciones internas.

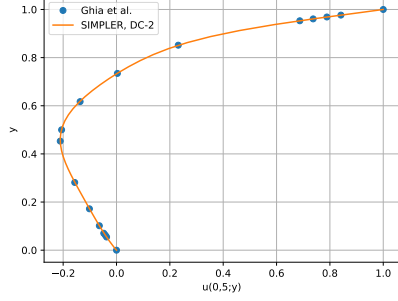
Si bien esas son las características del código base, el mismo se modificará para estudiar advección con UP-1 y con QUICK [3]. Además, también se lo modificará para implementar Crank-Nicolson para el avance temporal.

2. Validación del código

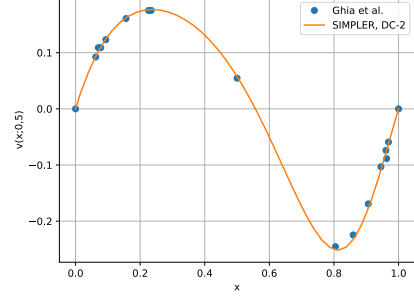
Para comprobar que la herramienta numérica utilizada está correctamente implementada, se resolvió el problema para $Re = 100, 1000$ y 5000 y $n_1 = 20, 40$ y 80 , y se compararon los resultados con los de Ghia et al. 1982 [2]. Para ello, se consideró a la solución en estado estacionario cuando las derivadas temporales de las velocidades u y v alcanzaron el orden de 10^{-6} . En la Figura 3, en la página siguiente, se muestran los perfiles de velocidad $u(0, 5; y)$ y $v(x; 0, 5)$ obtenidos con el código base y $n_1 = 80$, y la comparación con los resultados presentados en [2].

Puede observarse que para $Re = 100$ y $Re = 1000$, las soluciones coinciden. En el caso de $Re = 5000$, se observan discrepancias. Cabe destacar que la cantidad de volúmenes utilizados en [2] es 129. Así, para un Re alto como 5000, es necesaria una mejor resolución espacial para llegar a una solución satisfactoria.

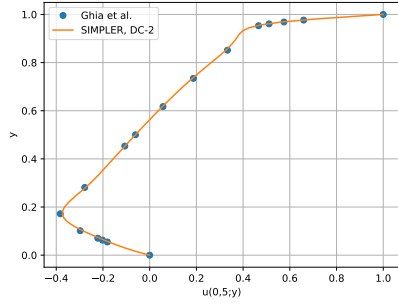
Con los resultados obtenidos, se considera que la herramienta numérica utilizada está correctamente implementada.



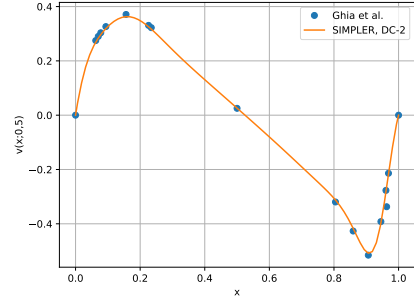
(a) Velocidad $u(0, 5; y)$. $Re = 100$, $n_1 = 80$.



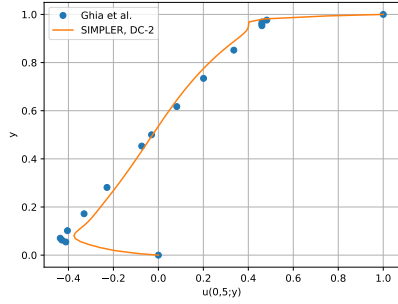
(b) Velocidad $v(x; 0, 5)$. $Re = 100$, $n_1 = 80$.



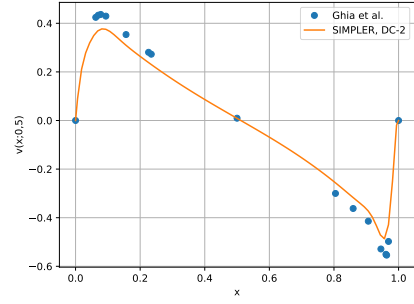
(c) Velocidad $u(0, 5; y)$. $Re = 1000$, $n_1 = 80$.



(d) Velocidad $v(x; 0, 5)$. $Re = 1000$, $n_1 = 80$.



(e) Velocidad $u(0, 5; y)$. $Re = 5000$, $n_1 = 80$.



(f) Velocidad $v(x; 0, 5)$. $Re = 5000$, $n_1 = 80$.

Figura 3: Comparación de resultados obtenidos con el código base con los de Ghia et al. 1982.



3. Implementación de UP-1 y QUICK para el término advectivo

En esta sección se estudia la implementación de los esquemas UP-1 y QUICK para el término advectivo y se realiza un comparación entre los mismos y con DC-2.

3.1. UP-1

El código base tiene implementado un esquema DC-2 para el término advectivo. Sin embargo, el mismo está escrito como UP-1 más fuentes diferidas. Así, para implementar UP-1, solo hace falta suprimir el cálculo de dichas fuentes.

3.2. QUICK

La implementación del esquema QUICK se hace en base a lo expuesto en Hayase et al. 1990 [3]. Dada la implementación del código base, resulta conveniente implementar QUICK como UP-1 más fuentes diferidas. A continuación, se muestra la deducción de la expresión para las fuentes.

Considérese el término de advección de la ecuación (1), correspondiente a la conservación de momento lineal en la dirección \hat{x} . Al integrarlo en el volumen V_{ij} se tiene:

$$\int_{V_{ij}} \frac{\partial uu}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} dV = \int_0^\Delta U_e U_e - U_w U_w dy + \int_0^\Delta U_n V_n - U_s V_s dx$$

donde los subíndices e , w , n y s hacen referencia a las fronteras este, oeste, norte y sur del volumen V_{ij} asociado a la velocidad u , respectivamente. Haciendo una aproximación de segundo orden, se tiene:

$$\int_0^\Delta U_e U_e - U_w U_w dy + \int_0^\Delta U_n V_n - U_s V_s dx \simeq (U_e U_e^* - U_w U_w^*) \Delta + (U_n V_n^* - U_s V_s^*) \Delta$$

donde, además de la aproximación, se denota con supraíndice $*$ a las velocidades de advección en las caras del volumen, las cuales son calculadas con información del paso de tiempo previo, o de la iteración interna previa. La implementación de la herramienta numérica utilizada en el presente trabajo se basa en las caras oeste y sur del volumen V_{ij} . Luego, se tiene que la cara oeste del volumen V_{ij} coincide con la cara este del volumen V_{i-1j} y la cara sur del volumen V_{ij} coincide con la cara norte del volumen V_{ij-1} . Las velocidades de advección en las caras se aproximan como:

$$U_{w_{ij}}^* = \frac{U_{ij} + U_{i-1j}}{2}$$

$$V_{s_{ij}}^* = \frac{V_{ij-1} + V_{i+1j-1}}{2}$$

Lo expuesto hasta aquí, es parte del algoritmo SIMPLER. Luego, se debe implementar el esquema QUICK para el cálculo de $U_{w_{ij}}$ y de $U_{s_{ij}}$. Según Hayase et al. 1990 [3], para QUICK, se tiene:

$$U_{w_{ij}} = U_{i-1j} + \frac{1}{8} (-U_{i-2j} - U_{i-1j} + 3U_{ij}) \quad si \quad U_{w_{ij}}^* \geq 0 \quad (4)$$

$$U_{w_{ij}} = U_{ij} + \frac{1}{8} (3U_{i-1j} - 2U_{ij} - U_{i+1j}) \quad si \quad U_{w_{ij}}^* < 0 \quad (5)$$

$$U_{s_{ij}} = U_{ij-1} + \frac{1}{8} (-U_{ij-2} - 2U_{ij-1} + 3U_{ij}) \quad si \quad V_{s_{ij}}^* \geq 0 \quad (6)$$

$$U_{s_{ij}} = U_{ij} + \frac{1}{8} (3U_{ij-1} - 2U_{ij} - U_{ij+1}) \quad si \quad V_{s_{ij}}^* < 0 \quad (7)$$

Luego, se quiere escribir QUICK como UP-1 más una fuente diferida. Considérese el caso $U_{w_{ij}}^* \geq 0$, entonces:

$$U_{w_{ij}}^* U_{wi-1j} \Delta + S_{w_{ij}}^* = U_{w_{ij}}^* \left[U_{i-1j} + \frac{1}{8} (-U_{i-2j} - U_{i-1j} + 3U_{ij}) \right] \Delta \quad (8)$$

donde el lado izquierdo representa el esquema UP-1 más una fuente diferida, $S_{w_{ij}}^*$, y el lado derecho representa el esquema QUICK, según la ecuación (4). En base a las ecuaciones (5), (6) y (7), se pueden construir ecuaciones análogas a la ecuación (8), de las cuales despejar la fuente en cada caso. Así, se obtiene:

$$S_{w_{ij}}^* = U_{w_{ij}}^* \frac{\Delta}{8} (-U_{i-2j}^* - U_{i-1j}^* + 3U_{ij}^*) \quad si \quad U_{w_{ij}}^* \geq 0 \quad (9)$$

$$S_{w_{ij}}^* = U_{w_{ij}}^* \frac{\Delta}{8} (3U_{i-1j}^* - 2U_{ij}^* - U_{i+1j}^*) \quad si \quad U_{w_{ij}}^* < 0 \quad (10)$$

$$S_{s_{ij}}^* = V_{s_{ij}}^* \frac{\Delta}{8} (3U_{ij-1}^* - 2U_{ij}^* - U_{ij+1}^*) \quad si \quad V_{s_{ij}}^* \geq 0 \quad (11)$$

$$S_{s_{ij}}^* = V_{s_{ij}}^* \frac{\Delta}{8} (-U_{ij-2}^* - 2U_{ij-1}^* + 3U_{ij}^*) \quad si \quad V_{s_{ij}}^* < 0 \quad (12)$$

donde se agregó el supraíndice * en todos los términos para indicar que las fuentes también se calculan con información del paso de tiempo previo.

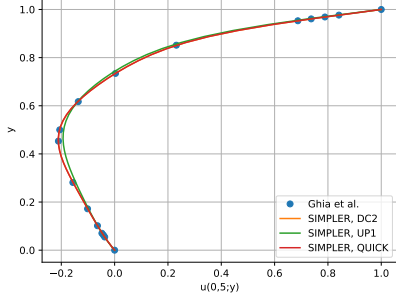
Para obtener la expresión para las fuentes asociadas al término de advección de la conservación de momento lineal en la dirección \hat{y} , se procede de forma análoga a lo expuesto hasta aquí.

Así, se modificó el cálculo de las fuentes diferidas en el código base, introduciendo las expresiones (9) a (12), y las correspondientes para la dirección \hat{y} .

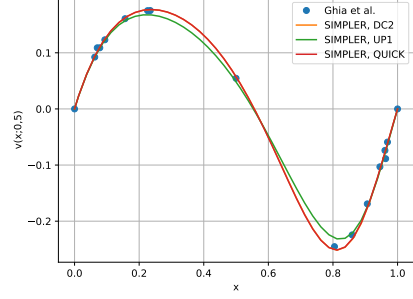


3.3. Resultados

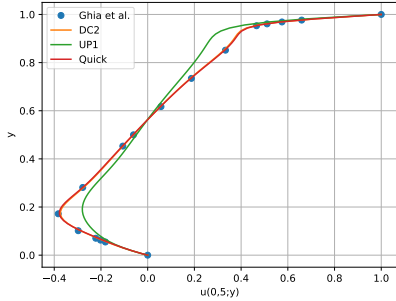
A continuación, en la Figura 4, se muestran los resultados para los perfiles de velocidad $u(0, 5; y)$ y $v(x, ; 0, 5)$, para DC-2, UP-1 y QUICK, para distintos valores de Re y $n_1 = 80$. El criterio para considerar solución en estado estacionario es el mismo que el utilizado en la sección de validación del código.



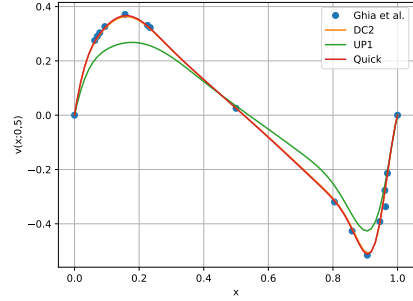
(a) Velocidad $u(0, 5; y)$. $Re = 100$, $n_1 = 80$.



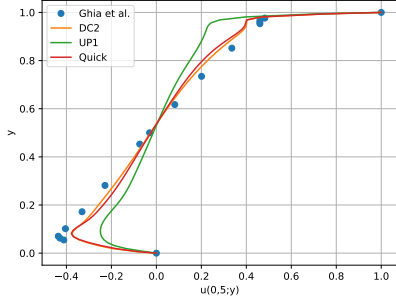
(b) Velocidad $v(x; 0, 5)$. $Re = 100$, $n_1 = 80$.



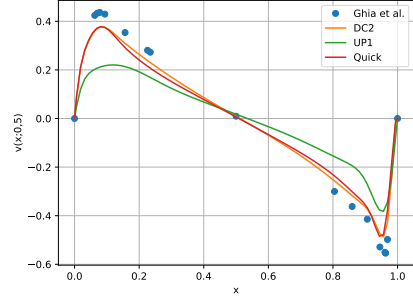
(c) Velocidad $u(0, 5; y)$. $Re = 1000$, $n_1 = 80$.



(d) Velocidad $v(x; 0, 5)$. $Re = 1000$, $n_1 = 80$.



(e) Velocidad $u(0, 5; y)$. $Re = 5000$, $n_1 = 80$.



(f) Velocidad $v(x; 0, 5)$. $Re = 5000$, $n_1 = 80$.

Figura 4: Comparación para diferentes esquemas aplicados al término advectivo.

En primer lugar, debe notarse que la solución para UP-1 es la menos correcta de las tres. Esto se debe a que, si bien dicho método evita oscilaciones espúreas, agrega difusión numérica a la solución. Sin embargo, cabe destacar que cuanto mayor es Re , menos error presenta la solución para UP-1. La razón de esto es la importancia relativa entre el término advectivo y el término difusivo. Para bajos Re , domina el término difusivo, por lo que los errores introducidos por UP-1 en el término advectivo tienen poca importancia relativa y las tres soluciones terminan siendo similares. En cambio, para Re alto, domina el término advectivo

y comienzan a notarse discrepancias significativas entre la solución para UP-1 y las demás.

Por otro lado, las soluciones para DC-2 y QUICK son prácticamente indistinguibles entre sí, por lo que se consideran igual de buenas.

4. Convergencia espacial para UP-1

En esta sección, se estudia la convergencia espacial para el método con esquema UP-1 en el término advectivo, para $Re = 1$ y $Re = 1000$. Para ello, se considera como solución exacta a la solución obtenida resolviendo el problema con esquema advectivo QUICK y $n_1 = 80$, y se estudia el error en $u(0, 5; 0, 2)$ y $v(0, 2; 0, 5)$, utilizando $n_1 = 10, 20, 40, 60$ y 80 .

El error se calculó como el valor absoluto de la diferencia entre los valores correspondientes a la solución exacta y los valores correspondientes al método con esquema advectivo UP-1, para los n_1 mencionados. Luego, para determinar el orden, se asume:

$$\epsilon = A\Delta^p$$

donde ϵ es el error, A es una constante de proporcionalidad y p es el orden del error. Así, se tiene:


$$\log \epsilon = \log A + p \log \Delta \quad (13)$$

Se hizo un ajuste lineal de la ecuación (15), con los datos obtenidos de las simulaciones, y se determinó p . A continuación, en la Tabla 1, se muestran los ordenes de convergencia obtenidos.

	$Re = 1$	$Re = 1000$
$u(0, 5; 0, 2)$	$p = 2, 5$	$p = 0, 52$
$v(0, 5; 0, 2)$	$p = 2, 9$	$p = 0, 52$

Tabla 1: Ordenes de convergencia espacial para UP-1.

Para el caso de $Re = 1$, se tiene un problema difusivo, por lo que el término advectivo pierde importancia relativa. El esquema UP-1 está implementado en el término advectivo, con lo cual es razonable que el orden del método resulte cercano a 2, que es justamente el orden del esquema implementado en el término difusivo. Por otro lado, la considerada solución exacta fue obtenida implementando el método QUICK en el término advectivo y con $n_1 = 80$, lo que puede explicar el hecho de que el orden de convergencia sea mayor a 2. Para números de Reynolds bajos, no tiene demasiada importancia que método se usa en el término advectivo, debido a lo que se explicó anteriormente. Así, a medida que n_1 se acerca a 80, la solución converge con mayor orden a la solución con QUICK, por no pesar tanto el término advectivo, que es justamente donde difieren los métodos.

Por otro lado, para $Re = 1000$, se tiene un problema  advectivo. Así, resulta consistente que el método tenga un orden cercano a 1, puesto que ese es el orden del esquema implementado en el término advectivo, UP-1.



5. Minimización de costo computacional con DC-2 y UP-1

Lo que resulta de interés para el caso de este trabajo es la solución en estado estacionario, mientras que el transitorio para llegar a la misma es irrelevante. Así, si puede asegurarse que el estado estacionario al que se llega es aceptable, podría pensarse la posibilidad de atravesar el transitorio de la forma más rápida posible. En este caso, el criterio para considerar aceptable la solución en estado estacionario es obtener un error en $u(0, 5; 0, 5)$ menor a 5 % respecto de la solución de Ghia et al. 1982 [2]. Además, se debe tomar un criterio para considerar que la solución llegó al estacionario.

Las variables que influyen en el costo computacional son la cantidad de volúmenes por dirección, n_1 , y el número de pasos de tiempo, $Ndeltat$. En primer lugar, debe destacarse que el error de la solución en estado estacionario respecto de la de Ghia et al. 1982 [2] depende únicamente de la resolución espacial, puesto que una vez alcanzado el estacionario, es irrelevante cuanto se avance en el tiempo. Para determinar el n_1 mínimo que asegura el error deseado, se hacen simulaciones variando n_1 y asegurándose llegar al estado estacionario, hasta que el error cumpla con la condición requerida. Una vez determinado n_1 , se hace un barrido en el paso de tiempo, dt , para hallar el valor óptimo de $Ndeltat$ que permite alcanzar el estacionario.



5.1. DC-2

Para $Re = 100$ se consideró a la solución en estado estacionario cuando las derivadas temporales de u y v resultaran menores a 1×10^{-8} . Luego, se obtuvo que el menor n_1 que asegura el error deseado es $n_1 = 20$, para el cual el error es 4,67 %.

Por otro lado, para $Re = 1000$ se consideró a la solución en estado estacionario cuando las derivadas temporales de u y v resultaran menores a 1×10^{-5} , puesto que el tiempo de cálculo en este caso, para un criterio más exigente, resulta excesivo. Luego, se obtuvo que el menor n_1 que asegura el error deseado es $n_1 = 30$, para el cual el error es 4,21 %. A continuación, se hizo un barrido en el paso de tiempo en ambos casos, con el objetivo de minimizar $Ndeltat$. Los resultados se muestran en la Figura 5.

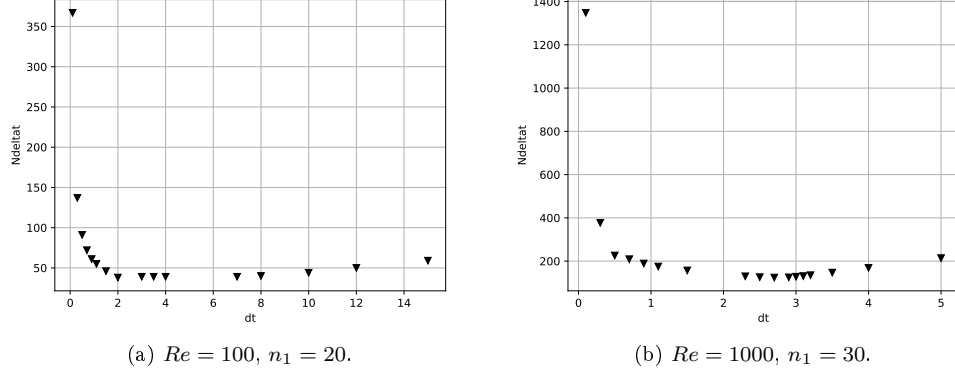


Figura 5: Resultados de la minimización del costo computacional con DC-2.

En ambos casos se encontró un N_{deltat} mínimo. Para $Re = 100$, resultó 38, con $dt = 2$, y para $Re = 1000$ resultó 125, con $dt = 2, 9$.



5.2. UP-1

Para $Re = 100$ se consideró a la solución en estado estacionario cuando las derivadas temporales de u y v resultaran menores a 1×10^{-5} . Luego, se obtuvo que el menor n_1 que asegura el error deseado es $n_1 = 60$, para el cual el error es 4,51 %. Luego, se hizo un barrido en el paso de tiempo con el objetivo de minimizar N_{deltat} . El resultado se muestran en la Figura 6a.

Por otro lado, para $Re = 1000$, no fue posible hallar un n_1 que asegure el error deseado, al menos considerando estado estacionario con \dot{u} y \dot{v} menores a 1×10^{-5} y un tiempo de cálculo menor a una hora. Se hizo un barrido en n_1 y se observó un comportamiento extraño del error obtenido en estado estacionario. El resultado se muestra en la Figura 6b.

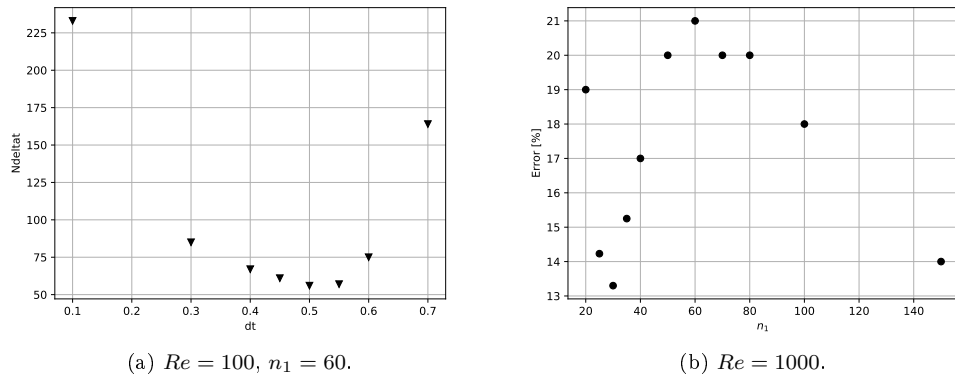


Figura 6: Resultados de la minimización del costo computacional con UP-1.

Para $Re = 100$, se obtuvo un $Ndeltat$ mínimo de 56, con $dt = 0,5$. En el caso de $Re = 1000$, se observó que el error en estado estacionario tiene un mínimo cercano a 13%, para $n_1 = 30$. Luego, para $n_1 \in (30, 60)$ el error crece con n_1 . Finalmente, para $n_1 > 60$ el error vuelve a decrecer. La última simulación realizada fue con $n_1 = 150$, la cual duró aproximadamente 40 minutos y se obtuvo un error de 14%.

Por otro lado, se destacó que UP-1 requiere de mayor resolución espacial que DC-2 para asegurar el mismo error en estado estacionario. Además, el número mínimo de pasos de tiempo para llegar al estado estacionario también resultó mayor con UP-1.



6. Iteraciones internas y máximo paso de tiempo admisible con DC-2

En esta sección se estudia el máximo paso de tiempo admisible y la influencia que tiene sobre el mismo el hecho de realizar iteraciones internas del algoritmo SIMPLER dentro de cada paso de tiempo. Se resuelve el problema implementando DC-2 en el término advectivo, para $Re = 1000$, con 30 volúmenes por dirección espacial y adoptando como criterio de estado estacionario que \dot{u} y \dot{v} resulten menores a 1×10^{-5} . Luego, se fue aumentando dt hasta obtener una solución inestable, sin realizar iteraciones internas, y realizando 1 y 2 iteraciones internas. Los resultados para el dt máximo, el número de pasos de tiempo y el tiempo de cálculo se muestran en la Tabla 2. Además, en la Figura 7 se muestra el tiempo de cálculo en función del paso de tiempo dt .

	dt_{max}	$Ndeltat$	Tiempo de cálculo [s]
Sin iteraciones internas	6,5	266	122
1 iteración interna	8	255	228
2 iteraciones internas	8.5	130	173



Tabla 2: Resultados para el dt máximo, el número de pasos de tiempo y el tiempo de cálculo.

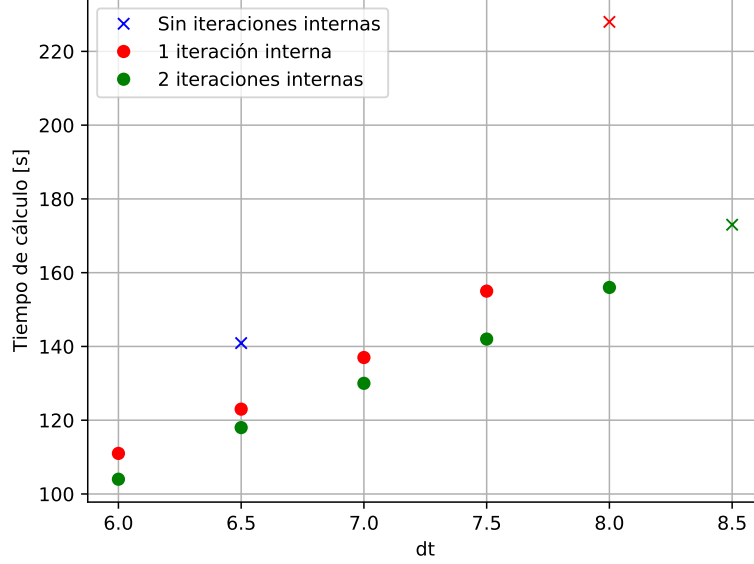


Figura 7: Tiempo de cálculo en función del paso de tiempo. Las \times indican el paso de tiempo máximo antes de que se inestabilice la solución.

En la Tabla 2 se puede ver como al aumentar las iteraciones internas, disminuye la cantidad de pasos de tiempo necesarios para llegar al estado estacionario, lo cual era esperable. Además, mayor cantidad de iteraciones internas admite un paso de tiempo máximo mayor. Sin embargo, se ve que el tiempo de cálculo para alcanzar el estado estacionario aumenta con la cantidad de iteraciones internas, lo cual no es deseable. En este caso, como lo que resulta de interés es el estado estacionario, de nada sirve maximizar dt , ya sea con o sin iteraciones internas, sino hallar el dt que minimice el tiempo de cálculo para llegar al estado estacionario para una dada cantidad de iteraciones internas, como se mostró en la sección anterior.

Lo que resulta interesante es lo mostrado en la Figura 7, donde puede verse que para un mismo dt , el tiempo de cálculo disminuye con la cantidad de iteraciones internas. Esto, en principio, no tenía por qué ser así ya que si bien la cantidad de pasos de tiempo para llegar al estacionario disminuye, debido a las correcciones internas, cada paso de tiempo tarda más en ejecutarse, justamente por hacer esas correcciones.



Condición de borde no estacionaria y avance temporal con Crank-Nicolson

En esta sección, se estudia un caso en donde no es posible llegar a un estado estacionario. El mismo, corresponde a $U_0(t) = \cos t$, donde U_0 es la velocidad de la frontera horizontal superior de la cavidad. Se resolvió el problema para $Re = 1000$ implementando DC-2 en el término advectivo, con 30 volúmenes por

dirección, un paso de tiempo de 0,4. Se realizó un caso sin iteraciones internas y otro caso con dos iteraciones internas. Para el avance temporal, se utilizó Euler Implícito y Crank-Nicolson, con el objetivo de comparar los resultados.

Para implementar Crank-Nicolson, teniendo implementado Euler Implícito, se hizo uso de las siguientes relaciones [4]:

$$\frac{dy^n}{dt} = \frac{y^n - y^{n-1}}{\Delta t_{EI}} \quad (14)$$

$$\frac{dy^n}{dt} + b^{n-1} = \frac{y^n - y^{n-1}}{\Delta t_{CN}} \quad (15)$$

$$b^n = -b^{n-1} + \frac{y^n - y^{n-1}}{\Delta t_{CN}} \quad (16)$$

donde (14) es la implementación de Euler Implícito, (15) es la implementación de Crank-Nicolson y (16) es la expresión para b^n , con $b^0 = 0$ y $\Delta t_{CN} = \Delta t_{EI}/2$.

En la Figura 8, en la página siguiente, se presentan los resultados obtenidos para la evolución temporal de u y v en el centroide de la cavidad. Se puede ver que la solución para $u(0,5;0,5)$ cambia muy poco ante la realización de iteraciones internas y la implementación de un método más preciso, como lo es Crank-Nicolson. Por lo tanto, podría argumentarse que dicha solución está convergida o muy próxima a hacerlo.

Por otro lado, la solución para $v(0,5;0,5)$ cambia considerablemente, al menos en forma cuantitativa, cuando se realizan iteraciones internas, usando Euler implícito. Además, varía cuando pasa de usarse Euler Implícito a usarse Crank-Nicolson. Así, la solución para v no está convergida. Para llegar a la solución convergida, asumiendo un gran poder de cálculo, resolvería el problema con Crank-Nicolson, más iteraciones internas y un paso de tiempo menor. Lo que espero, para $t > 40$, es una solución oscilante con valor medio constante un poco superior a 2×10^{-2} . Esto se corresponde con la tendencia observada, tanto al aumentar el número de iteraciones internas como al usar un método más preciso.



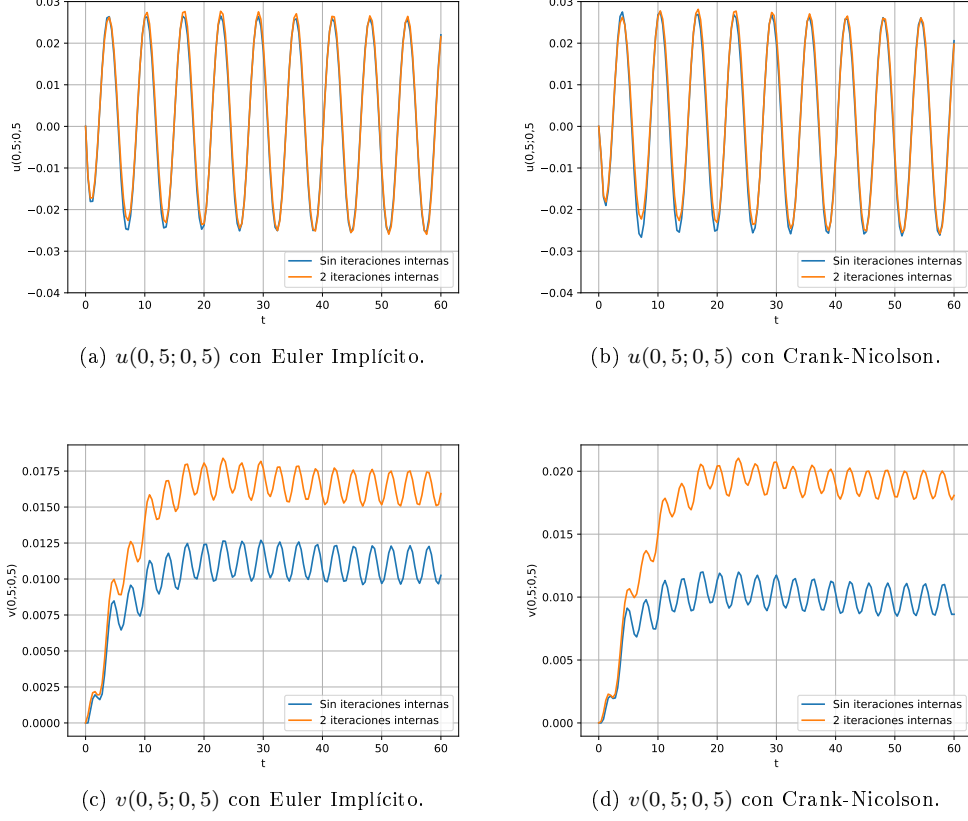


Figura 8: Evolución temporal de las componentes de velocidad en el centroe de la cavidad.

8. Conclusiones

Se resolvió el problema de la Cavidad Cuadrada Hidrodinámica Bidimensional mediante un método numérico que implementa el algoritmo SIMPLER con diferencias centradas de segundo orden en el término difusivo, y para diferentes implementaciones del término advectivo. A saber, se implementó diferencias centradas de segundo orden, up-wind de primer orden y esquema QUICK. Se compararon las soluciones entre sí y con los resultados presentados por Ghia et al. 1982 [2], para distintos números de Reynolds y distintas resoluciones espaciales, resultando satisfactorias las soluciones correspondientes a DC-2 y QUICK y muy difusivas las correspondientes a UP-1.

Por otro lado, se estudió el orden de convergencia espacial de UP-1 para las velocidades en puntos particulares del dominio, considerando como solución exacta la obtenida mediante QUICK. Se obtuvieron ordenes cercanos a 2 para Reynolds bajo y ordenes cercanos a 1 para Reynolds alto, lo cual coincide con lo esperado si se piensa la importancia relativa del término advectivo.

Adicionalmente, se buscó minimizar el costo computacional para acotar el

error en el centroide de la cavidad respecto a la solución de Ghia et al. 1982 [2], notando que el mismo depende únicamente de la resolución espacial. Así, se buscó el mínimo número de volúmenes por dirección que asegure un error menor al requerido y luego se hizo un barrido en el paso de tiempo para hallar el número óptimo de pasos de tiempo que permite alcanzar el estado estacionario. Además, se estudió la influencia de realizar iteraciones internas en el máximo paso de tiempo admisible antes de que se inestabilice la solución. Se obtuvo que realizar iteraciones internas permite aumentar el paso de tiempo máximo, pero que eso lleva a un mayor tiempo de cálculo hasta alcanzar el estado estacionario. Sin embargo, para un mismo paso tiempo y un caso particular estudiado, se puede reducir el tiempo de cálculo para llegar al estacionario si se realizan iteraciones internas.

Finalmente, se estudio un caso con condición de borde no estacionaria. Se implementó Crank-Nicolson para el avance temporal y se comparó el resultado con el obtenido utilizando Crank-Nicolson. Se vio el avance temporal de las componentes de la velocidad en el centroide de la cavidad, y se pudo observar una solución convergida para la velocidad horizontal. Por su parte, se identificó a la solución para la velocidad vertical como no convergida, debido a variaciones considerables entre las soluciones por Euler Implícito y por Crank-Nicolson, y debido a variaciones al aumentar la cantidad de iteraciones internas.

Referencias

- [1] S.Patankar, “Numerical Heat Transfer and Fluid Flow”, Taylor & Francis, 1980.
- [2] U.Ghia, K.N.Ghia, C.T.Shin, “High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method”, 1982.
- [3] T.Hayase, J.A.C.Humphrey, R.Greif, “A Consistently Formulated QUICK Scheme for Fast and Stable Convergence Using Finite-Volume Iterative Calculation Procedures”, 1990.
- [4] Enunciado de la Monografía brindado por la cátedra de Método Numéricos en Fluidos I, Instituto Balseiro, 2021.