

## Laboratorio 2 - Problema de valores iniciales

Pablo Chegade

pablo.chegade@ib.edu.ar

Métodos Numéricos en Fluidos I, Instituto Balseiro, CNEA-UNCuyo, Bariloche, Argentina, 2022

Se estudiaron métodos numéricos para resolver problemas de valores iniciales. En particular, se aplicaron los métodos de Euler implícito, Crank-Nicholson, Runge Kutta 4 y Leap-Frog al problema del péndulo simple y el método de Runge Kutta 4 al del péndulo doble. Para todos los casos se estudió el orden de convergencia global del error de fase y el error de amplitud, **obteniendo resultados similares a los teóricos?**. También se estudió la sensibilidad del péndulo doble a perturbaciones.

### I. INTRODUCCIÓN

#### 1 [¿Por qué es importante estudiar numéricamente PVI?]

En ciencias físicas es de gran interés conocer la dinámica de un sistema a partir de sus condiciones iniciales. Sin embargo, dadas las ecuaciones de movimiento, no siempre es posible obtener la dinámica exactamente y es necesario recurrir a métodos numéricos.

#### 2 [En este trabajo se analizaron dos problemas de valores iniciales]

En este trabajo se analizaron dos problemas de valores iniciales: la evolución del péndulo simple y del péndulo doble. Se resolvieron numéricamente a través de distintos métodos numéricos implícitos y explícitos y se estudió la convergencia de los mismos.

#### A. Péndulo simple

#### 3 [Presentar ecuaciones de la dinámica]

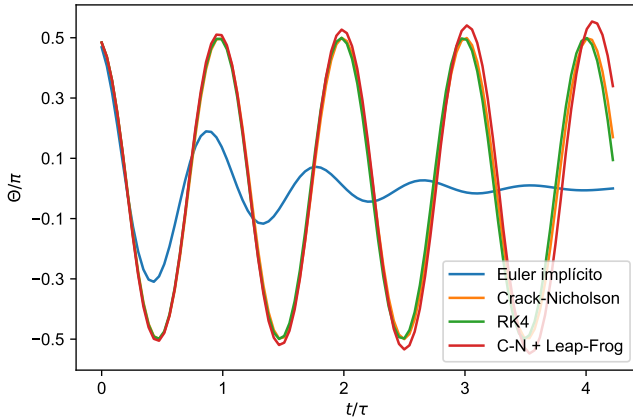


Figura 1: Esquema del péndulo simple. Una partícula puntual de masa  $m$  está suspendida de un punto fijo mediante un hilo de longitud  $l$ . El ángulo  $\theta$  es el ángulo que forma el hilo con la vertical. Figura extraída de **Referencia**

El péndulo simple consta de una partícula puntual de masa  $m$  suspendida de un punto fijo mediante un hilo de longitud  $l$  (ver esquema en figura ??). La partícula se

mueve en un plano y el ángulo  $\theta$  que forma el hilo con la vertical se describe mediante la ecuación diferencial

$$\begin{cases} \theta'' = -\frac{g}{l} \sin(\theta) \\ \theta(0) = \theta_0, \theta'(0) = \theta'_0 \end{cases} \quad (1)$$

donde  $g$  es la aceleración de la gravedad y  $\theta_0$  y  $\theta'_0$  corresponden a las condiciones iniciales. Algunos parámetros importantes de la evolución del péndulo simple son el período de oscilación  $\tau$  dado por

$$\tau(\theta) = T_0 \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \right)^2 \sin^{2n} \left( \frac{\theta}{2} \right) \right], T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (2)$$

la fase  $\phi$  dada por

$$\phi(\theta) = \tan^{-1}(\theta'/\theta) \quad (3)$$

**ESTO ES LA FASE O EL ERROR DE FASE? LA FASE NO ES  $\theta$ ?** y la energía por unidad de masa o amplitud  $A_S$  dada por

$$A^S(\theta) = 1/2 l^2 \theta'^2 - gl \cos(\theta). \quad (4)$$

Debido a que en el sistema actúan solo fuerzas conservativas, la amplitud  $A_S$  se mantiene constante durante la evolución.

#### 4 [Ecuación vectorial del péndulo simple]

La ecuación diferencial de orden 2 de ?? se puede convertir en dos ecuaciones diferenciales de orden 1 mediante el cambio de variable  $\vec{y}_S = (y_1, y_2) = (\theta, \theta')$ . De este modo, el problema ?? se convierte en

$$\begin{cases} \frac{d\vec{y}_S}{dt} = \begin{pmatrix} y_2 \\ -\frac{g}{l} \sin y_1 \end{pmatrix} = \vec{f}_S(\vec{y}_S, t), \\ \vec{y}_S^T(0) = (\theta_0, \theta'_0). \end{cases} \quad (5)$$

#### B. Péndulo doble

#### 5 [Presentar ecuaciones de la dinámica]

El péndulo doble es un sistema más complejo que el anterior. Consta básicamente de un péndulo simple con masa  $m_1$ , longitud  $l_1$  y ángulo  $\theta_1$  sobre el que se suspende otro péndulo simple con masa  $m_2$ , longitud  $l_2$  y ángulo  $\theta_2$  (ver esquema en la figura ??). Empleando  $l_1 = l_2 = 1$ ,

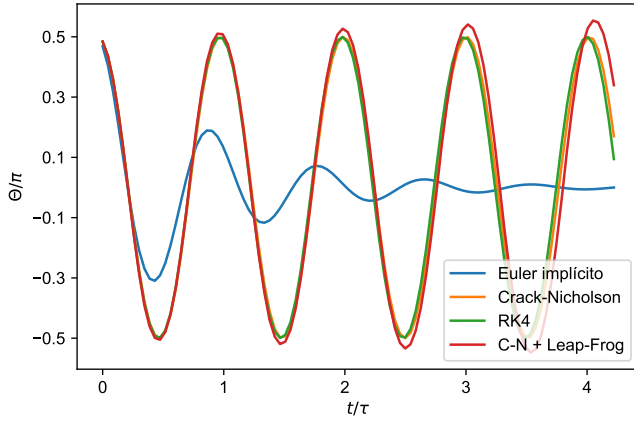


Figura 2: Esquema del péndulo doble. Una partícula puntual de masa  $m_1$  está suspendida de un punto fijo mediante un hilo de longitud  $l_1$ . El ángulo  $\theta_1$  es el ángulo que forma el hilo con la vertical. Sobre esta partícula se encuentra suspendida otra de masa  $m_2$  mediante un hilo de longitud  $l_2$ . El ángulo  $\theta_2$  es el ángulo que forma este último hilo con la vertical. Figura extraída de [referencia](#)

$m_1 = m_2 = 1$  y  $g = 10$ , las ecuaciones de la evolución de los ángulos involucrados son

$$\begin{cases} 2\theta_1'' + \theta_2'' \cos \Delta\theta = \theta_2'^2 \sin \Delta\theta - 20 \sin(\theta_1), \\ \theta_1'' \cos \Delta\theta + \theta_2'' = -\theta_1'^2 \sin \Delta\theta - 10 \sin(\theta_2), \\ \theta_1(0) = \theta_{10}, \theta_1'(0) = \theta'_{10}, \\ \theta_2(0) = \theta_{20}, \theta_2'(0) = \theta'_{20}, \end{cases} \quad (6)$$

donde  $\Delta\theta = (\theta_2 - \theta_1)$ .

Al igual que en el péndulo simple, la energía se conserva y la amplitud  $A_D$  se mantiene constante durante la evolución. En este caso, tal amplitud está dada por

$$A_D = \theta_1'^2 + \frac{1}{2}\theta_2'^2 + \theta_1'\theta_2' \cos(\theta_2 - \theta_1) - 20 \cos \theta_1 - 10 \cos \theta_2 \quad (7)$$

**6 [Ecuación vectorial del péndulo doble]** Haciendo el cambio de variables  $\vec{y}_D = (y_1, y_2, y_3, y_4) = (\theta_1, \theta_2, \theta_1', \theta_2')$ , el problema ?? se convierte en

$$\begin{cases} \frac{d\vec{y}_D}{dt} = \begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \\ \frac{y_4^2 \sin \Delta - 20 \sin y_1 + y_3^2 \sin \Delta \cos \Delta + 10 \sin y_2 \cos \Delta}{2 - \cos^2 \Delta} \\ \frac{-2y_3^2 \sin \Delta - 20 \sin y_2 - y_4^2 \sin \Delta \cos \Delta + 20 \sin y_1 \cos \Delta}{2 - \cos^2 \Delta} \end{pmatrix} \\ = f_D(\vec{y}_D, t), \\ \vec{y}_D^T(0) = (\theta_{10}, \theta_{20}, \theta'_{10}, \theta'_{20}) \end{cases}$$

## II. MÉTODO NUMÉRICO

**7 [Para resolver estos problemas se usaron métodos numéricos. De cada método se analizó el**

**error de fase y el error de amplitud]**

Para resolver numéricamente ambos problemas de valores iniciales es necesario discretizar la variable temporal y proponer un esquema numérico que permita obtener la solución aproximada. En cuanto a lo primero, el dominio se discretizó con puntos equiespaciados  $t_n = nh$  donde  $n = 0, \dots, N$  y  $h = 1/N$ . En cuanto a lo segundo, se utilizaron en total cuatro métodos numéricos, algunos explícitos y otros implícitos. Su objetivo radica en, dado  $\vec{y}_n = \vec{y}(t_n)$ , aproximar  $\vec{y}_{n+1}$ .

Además, es necesario evaluar de alguna manera la convergencia de los métodos numéricos. Para esto se podría emplear el error respecto a la solución exacta a todo tiempo o bien evaluar el error en un tiempo específico sobre cantidades conocidas. En este trabajo se optó por lo segundo. Se evaluó para el péndulo simple el error de fase en  $t = \tau$  dado por

$$e_{fase}(t = \tau) = \phi_{aprox}(\tau) - \phi_{teo}(\tau) = \phi_{aprox}(\tau) \quad (8)$$

pues por definición  $\theta'(\tau) = 0$ , y el error de amplificación en  $t = \tau$  dado por

$$e_{amp}^S(t = \tau) = A_{aprox}^S(\tau) - A_{teo}^S(\tau), \quad (9)$$

donde  $A_t^S$  es constante. En ambos casos, para determinar  $\tau$  se empleó la expresión ?? calculada con un error menor a todos los errores obtenidos en este trabajo. Mientras que para el péndulo doble se evaluó sólo el error de amplitud para todo tiempo

$$e_{amp}^D(t) = A_{aprox}^D(t) - A_{teo}^D(t), \quad (10)$$

donde  $A_t^D$  también es constante en el tiempo.

Cabe preguntarse, ¿qué errores deberían obtenerse teóricamente? Se esperaría obtener el error de fase y el factor de amplificación de cada método numérico. Estos valores se encuentran tabulados y se obtienen al analizar la ecuación diferencial  $y' = \lambda y$  con  $\lambda$  constante con cada método en particular.

En base a lo anterior, a continuación se desarrollan los métodos numéricos utilizados, junto con el orden global de convergencia del factor de amplificación y del error de fase. [referencia?](#). Es necesario aclarar que en el caso de los métodos implícitos se utilizó el método de bisección para resolver el sistema de ecuaciones resultantes, con un error menor a todos los errores obtenidos en este trabajo.

- Euler implícito (EI): este método es implícito, el factor de amplificación converge con orden  $O(h^1)$  y el error de fase, con orden  $O(h^2)$ . Su fórmula es

$$\vec{y}_{n+1} = \vec{y}_n + h\vec{f}(\vec{y}_{n+1}, t_{n+1}) + O_{local}(h^2) \quad (11)$$

- Crank-Nicholson (CN): este método es implícito, el factor de amplificación es 1, por lo que se esperaría  $e_{amp} = 0$  y el error de fase converge con orden  $O(h^2)$ . Su fórmula es

$$\vec{y}_{n+1} = \vec{y}_n + \frac{h}{2}[\vec{f}(\vec{y}_{n+1}, t_{n+1}) + \vec{f}(\vec{y}_n, t_n)] + O_{local}(h^3) \quad (12)$$

- Runge Kutta 4 (RK4): este método es explícito, el factor de amplificación converge con orden  $O(h^5)$  y el error de fase, con orden  $O(h^4)$ . Su fórmula es

$$\vec{y}_{n+1} = \vec{y}_n + \frac{1}{6}\vec{k}_1 + \frac{1}{3}(\vec{k}_2 + \vec{k}_3) + \frac{1}{6}\vec{k}_4 + O_{local}(h^5) \quad (13)$$

donde

$$\begin{cases} \vec{k}_1 = h\vec{f}(\vec{y}_n, t_n), \\ \vec{k}_2 = h\vec{f}\left(\vec{y}_n + \frac{1}{2}\vec{k}_1, t_n + \frac{h}{2}\right), \\ \vec{k}_3 = h\vec{f}\left(\vec{y}_n + \frac{1}{2}\vec{k}_2, t_n + \frac{h}{2}\right), \\ \vec{k}_4 = h\vec{f}(\vec{y}_n + \vec{k}_3, t_n + h) \end{cases}$$

- 2 pasos con Crank-Nicholson y uno con Leap Frog (CN + LF). Este último método es explícito, el factor de amplificación es unitario y el error de fase converge con orden  $O(h^2)$ . Su fórmula es

$$\vec{y}_{n+1} = \vec{y}_{n-1} + 2h\vec{f}(\vec{y}_n, t_n) + O_{local}(h^3) \quad (14)$$

El objetivo de combinar ambos métodos de esta forma en particular es que los errores de fase se compensan para dar un orden de convergencia mayor, de al menos  $O(h^3)$ . **Está bien esta afirmación?** Aún más, el factor de amplificación se mantiene unitario.

**8 [Resumen de lo que se hará. Qué se resuelve con qué]** Se resolvió el péndulo simple con los cuatro esquemas numéricos mencionados. Se evaluó el orden de convergencia de  $e_{fase}$  y  $e_{amp}$  y se comparó con los valores teóricos. Además, se resolvió el péndulo doble con **COMPLETAR**

### III. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

#### A. Péndulo simple

Se resolvió el péndulo simple con los cuatro esquemas numéricos mencionados para las condiciones iniciales  $\theta_0 = \pi/2$  y  $\theta'_0 = 0$  con  $h = 0,1$ . La evolución de  $\theta(t)$  se grafica en la figura ???. Por un lado, se observa que la amplitud de variación de  $\theta(t)$ , relacionada con la amplitud  $A^S$ , no es constante para algunos métodos, siendo el caso más notable el de Euler implícito. Por otro lado, para algunos métodos se observa un cambio en la fase, es decir, el tiempo en el que  $\theta(t)$  alcanza su valor máximo no es idéntico para todos. Esto implica que existe un error de fase, como se esperaba a partir del análisis realizado en la sección anterior.

Para todos los métodos se calculó  $e_{fase}$  para distintos valores de  $h$  y se determinó el orden de convergencia.

- La dependencia del error con el tamaño de la discretización para todos los esquemas se grafica en la figura ?? en escala log-log.

**Caption:**

- En todos los casos se obtuvo un comportamiento lineal a partir de un valor de  $h$  suficientemente pequeño. En base a esto, se ajustó una recta para cada caso, obteniendo el orden de convergencia de cada método.

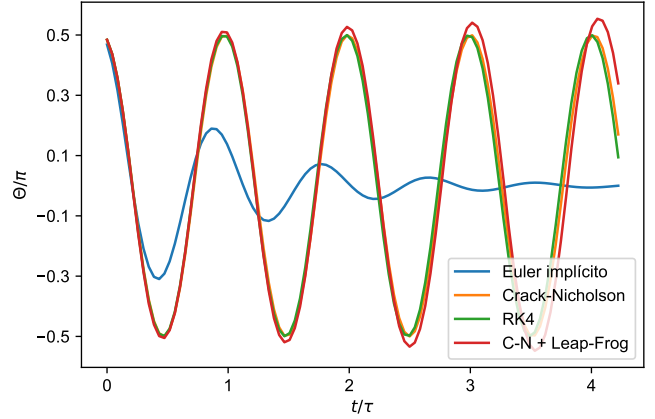


Figura 3: Evolución de  $\theta(t)$  para los cuatro esquemas numéricos ara las condiciones iniciales  $\theta_0 = \pi/2$  y  $\theta'_0 = 0$  con  $h = 0,1$ . Ambos ejes se encuentran normalizados: el eje vertical por  $\pi$  y el horizontal por el período  $\tau$ .

- Los resultados se resumen en la tabla **ref tabla**
- Análisis de resultados

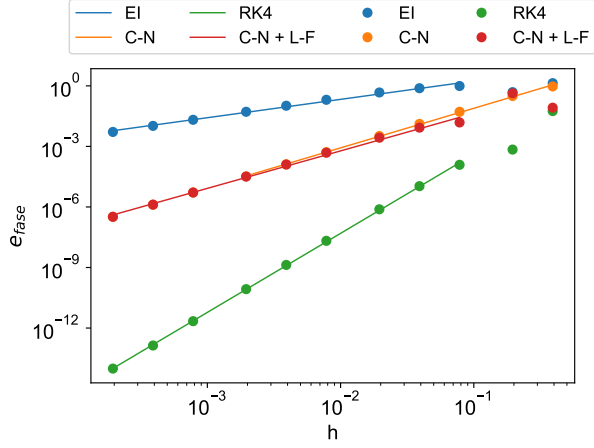
Análogamente, se calculó  $e_{amp}$  en función de  $h$  y se determinó el orden de convergencia. Tal dependencia se grafica en la figura ??. A diferencia del caso anterior, si bien se observa un comportamiento lineal, para  $h$  suficientemente pequeño, los métodos RK4 y CN alcanzan un valor constante, **lo cual puede deberse a errores de punto flotante? En el caso de ángulo pequeño alcanza errores menores.** De todos modos, se realiza un ajuste lineal sobre la zona con comportamiento lineal. La pendiente del ajuste corresponde al orden de convergencia del error y se resumen en la tabla **tabla**.

- Análisis de la tabla
- En ambos casos anteriores no se obtuvieron los valores teóricos. Esto pudo deberse a que los órdenes de convergencia mencionados se calculan en base a un problema lineal  $y' = \lambda y$ . En el caso de la ecuación de movimiento, el problema es no lineal y por lo tanto no se puede esperar que los órdenes de convergencia sean los mismos. Sin embargo, sí se esperaba obtener los mismos valores para  $\rightarrow 0$ , debido a que en este caso la ecuación de movimiento se reduce a un problema lineal.
- En base a esto, se calculó la dependencia de  $e_{fase}$  y  $e_{amp}$  en función de  $h$  para  $\theta = 0,01$ . Los resultados se grafican en las figuras ?? y ??, respectivamente.

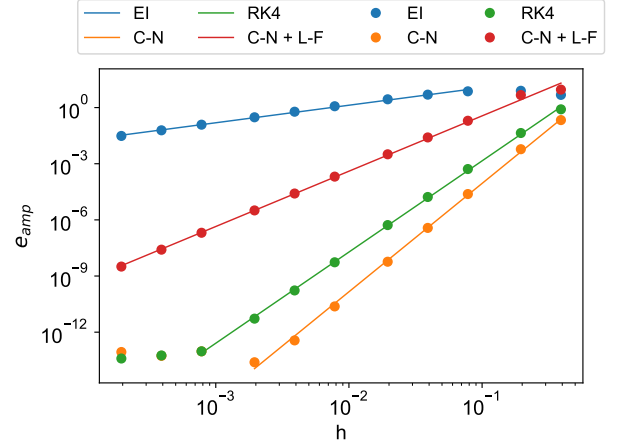
#### B. Péndulo doble

### IV. CONCLUSIÓN

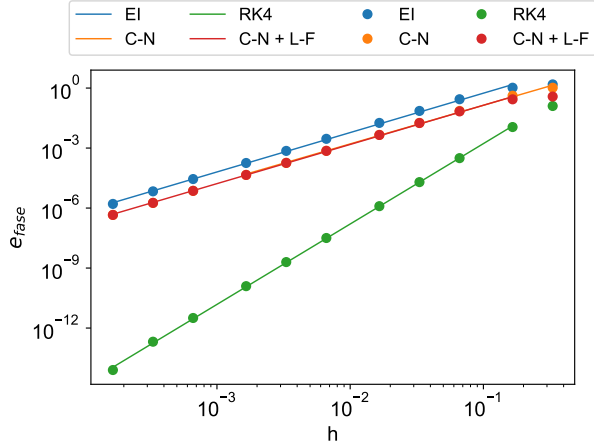
Método	Orden de convergencia de					
	$e_{fase}$			$e_{amp}$		
	teórico	con $\theta_0 = \pi/2$	con $\theta_0 = 0,01$	teórico	con $\theta_0 = \pi/2$	con $\theta_0 = 0,01$
EI	2	$0,91 \pm 0,03$	$1,97 \pm 0,03$	1	$0,94 \pm 0,02$	$0,91 \pm 0,03$
CN	2	$1,96 \pm 0,02$	$1,93 \pm 0,04$	0	$5,79 \pm 0,09$	$4,94 \pm 0,03$
RK4	4	$3,92 \pm 0,02$	$4,02 \pm 0,02$	5	$4,87 \pm 0,04$	$3,010 \pm 0,005$
CN + LF	3	$1,86 \pm 0,05$	$1,96 \pm 0,02$	0	$2,96 \pm 0,05$	0



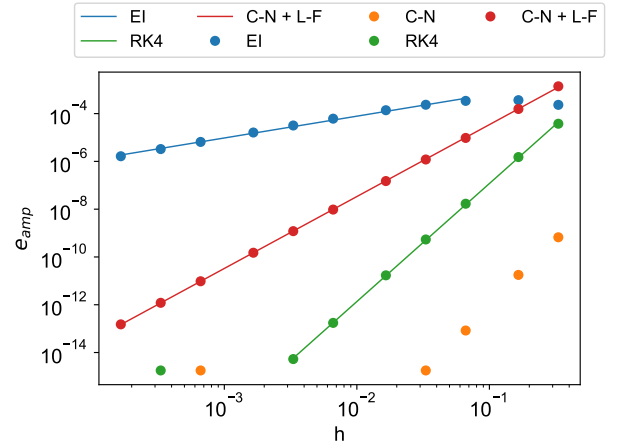
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 4: Error de fase  $e_{fase}$  y error de amplitud  $e_{amp}$  en función del tamaño de la discretización  $h$  para los cuatro esquemas numéricos bajo las condiciones iniciales ?? y ??,  $\theta_0 = \pi/2$  y  $\theta'_0 = 0$ , ?? y ??,  $\theta_0 = 0,01$  y  $\theta'_0 = 0$ . Los puntos corresponden a los valores calculados y las líneas a los ajustes lineales. 'EI': Euler implícito, 'C-N': Crank-Nicholson, 'RK4': Runge-Kutta 4 y 'C-N + L-F': dos pasos con Crank Nicholson y uno con Leap-Frog.

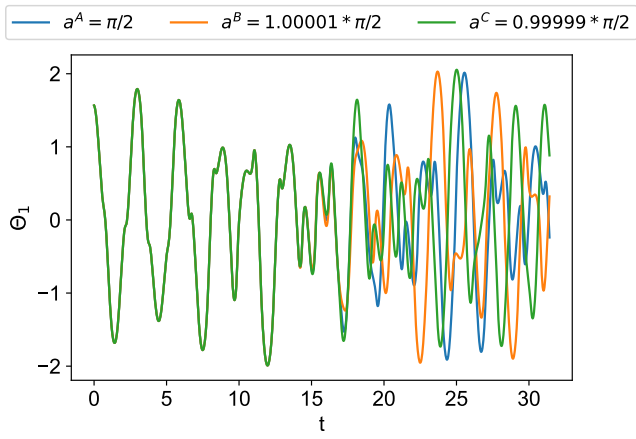


Figura 5: Solución numérica para las 3 distintas condiciones iniciales

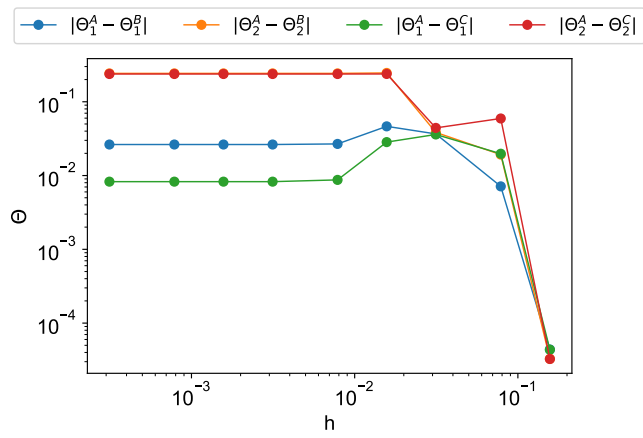


Figura 6: Diferencias entre las soluciones numéricas a tiempo fijo en función de h

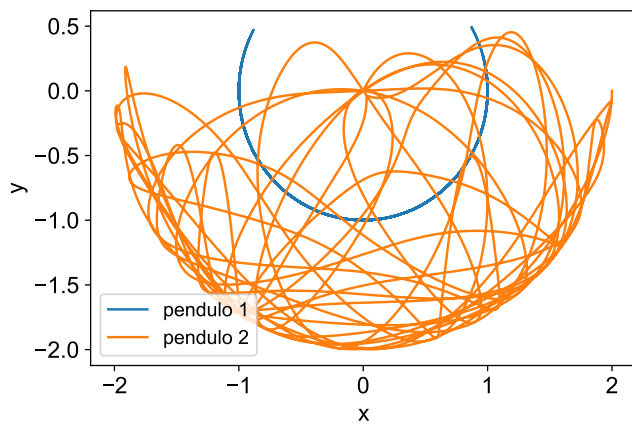


Figura 7: Trayectorias de las 1 condiciones iniciales

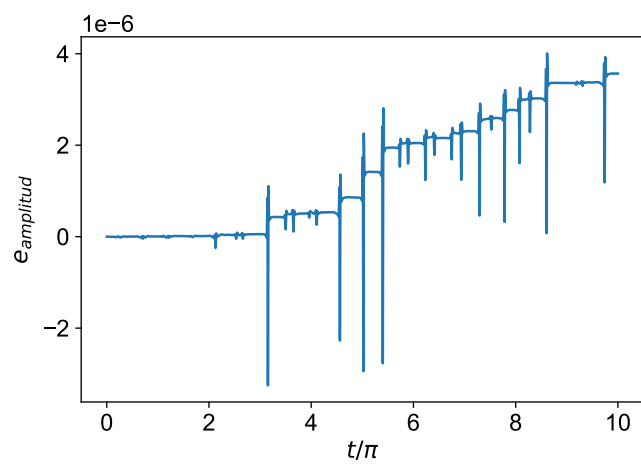


Figura 8: Error de amplitud para todo tiempo

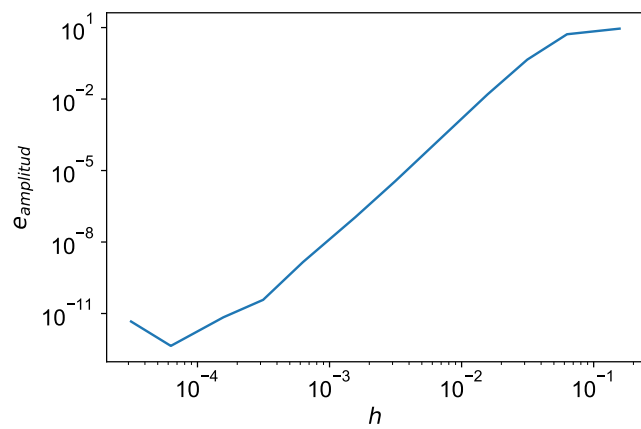


Figura 9: Orden del error de amplitud