

# Laboratorio 2 - ????

Pablo Chehade

pablo.chehade@ib.edu.ar

Métodos Numéricos en Fluidos I, Instituto Balseiro, CNEA-UNCuyo, Bariloche, Argentina, 2022

Se estudiaron métodos numéricos para resolver problemas de valores iniciales. En particular, se aplicaron los métodos de Euler implícito, Crank-Nicholson, Runge Kutta 4 y Leap-Frog al problema del péndulo simple y el método de Runge Kutta 4 al del péndulo doble. Para todos los casos se estudió el orden de convergencia global del error de fase y el error de amplitud, **obteniendo resultados similares a los teóricos?**. También se estudió la sensibilidad del péndulo doble a perturbaciones.

## I. INTRODUCCIÓN

1 [¿Por qué es importante estudiar numéricamente PVI? En ciencias físicas es de interés conocer la dinámica de un sistema a partir de sus condiciones iniciales. Dadas las ecuaciones de movimiento, no siempre es posible obtener la dinámica exactamente y es necesario recurrir a métodos numéricos.]

2 [En este trabajo se resolvieron numéricamente dos problemas de valores iniciales, el péndulo simple y el péndulo doble.]

### A. Péndulo simple

3 [Presentar ecuaciones de la dinámica]

$$\theta'' = -\frac{g}{l} \sin(\theta) \quad (1)$$

$$\tau(\theta) = T_0 \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \right)^2 \sin^{2n} \left( \frac{\theta}{2} \right) \right], T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (2)$$

$$\tan^{-1}(\theta'/\theta) \quad (3)$$

$$1/2l^2\theta'^2 - gl \cos(\theta) \quad (4)$$

### B. Péndulo doble

4 [Presentar ecuaciones de la dinámica]

Usando  $l_1 = 1$ ,  $l_2 = 1$ ,  $m_1 = 1$  y  $m_2 = 1$ ,  $g = 10$

$$\begin{cases} 2\theta_1'' + \theta_2'' \cos \Delta\theta = \theta_2'^2 \sin \Delta\theta - 20 \sin(\theta_1), \\ \theta_1'' \cos \Delta\theta + \theta_2'' = -\theta_1'^2 \sin \Delta\theta - 10 \sin(\theta_2) \end{cases} \quad (5)$$

donde  $\Delta\theta = (\theta_2 - \theta_1)$

$$\theta_1'^2 + \frac{1}{2}\theta_2'^2 + \theta_1'\theta_2' \cos(\theta_2 - \theta_1) - 20 \cos \theta_1 - 10 \cos \theta_2 \quad (6)$$

## II. MÉTODO NUMÉRICO

Para resolver numéricamente el problema de valores de contorno es necesario discretizar el dominio y proponer un esquema numérico que permita obtener la solución aproximada. El dominio se discretizó con puntos equiespaciados  $xi = ih$  donde  $i = 1, \dots, N$  y  $h = 1/(N + 1)$

### A. Discretización del dominio

5 [Ecuación vectorial del péndulo simple]

La ecuación diferencial de orden 2 se puede convertir en 2 ecuaciones diferenciales de orden 1 mediante el cambio de variable  $y_1 = \theta$ ,  $y_2 = \theta'$ . De este modo, el problema ?? se convierte en

$$\frac{d\vec{y}_S}{dt} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ -\frac{g}{l} \sin y_1 \end{pmatrix} = \vec{f}_S(\vec{y}_S, t) \quad (7)$$

6 [Ecuación vectorial del péndulo doble]

Haciendo el cambio de variables  $y_1 = \theta_1$ ,  $y_2 = \theta_2$ ,  $y_3 = \theta_1'$  y  $y_4 = \theta_2'$ , el problema ?? se convierte en

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{y}_D}{dt} &= \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \\ \frac{y_4^2 \sin \Delta - 20 \sin y_1 + y_3^2 \sin \Delta \cos \Delta + 10 \sin y_2 \cos \Delta}{2 - \cos^2 \Delta} \\ \frac{-2y_3^2 \sin \Delta - 20 \sin y_2 - y_4^2 \sin \Delta \cos \Delta + 20 \sin y_1 \cos \Delta}{2 - \cos^2 \Delta} \end{pmatrix} \\ &= \vec{f}_D(\vec{y}_D, t) \end{aligned}$$

7 [Para resolver estos problemas se usaron métodos numéricos]

### B. Métodos numéricos de evolución temporal

8 [Describo cada método (un párrafo por método)]

Los órdenes colocados son los locales **Verificar con la tabla**

### III. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

#### A. Péndulo simple

$$\vec{y}_{n+1} = \vec{y}_n + h\vec{f}(\vec{y}_{n+1}, t_{n+1}) + O_{local}(h^2) \quad (8)$$

$$\vec{y}_{n+1} = \vec{y}_n + \frac{h}{2}[\vec{f}(\vec{y}_{n+1}, t_{n+1}) + \vec{f}(\vec{y}_n, t_n)] + O_{local}(h^3) \quad (9)$$

$$\vec{y}_{n+1} = \vec{y}_n + \frac{1}{6}\vec{k}_1 + \frac{1}{3}(\vec{k}_2 + \vec{k}_3) + \frac{1}{6}\vec{k}_4 + O_{local}(h^5) \quad (10)$$

donde

$$\begin{cases} \vec{k}_1 = h\vec{f}(\vec{y}_n, t_n), \\ \vec{k}_2 = h\vec{f}\left(\vec{y}_n + \frac{1}{2}\vec{k}_1, t_n + \frac{h}{2}\right), \\ \vec{k}_3 = h\vec{f}\left(\vec{y}_n + \frac{1}{2}\vec{k}_2, t_n + \frac{h}{2}\right), \\ \vec{k}_4 = h\vec{f}(\vec{y}_n + \vec{k}_3, t_n + h) \end{cases}$$

$$\vec{y}_{n+1} = \vec{y}_{n-1} + 2h\vec{f}(\vec{y}_n, t_n) + O_{local}(h^3) \quad (11)$$

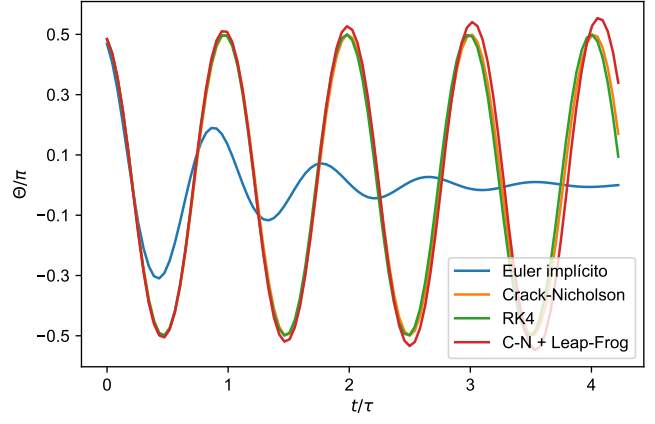


Figura 1: Solución aproximada por los 4 métodos

#### B. Péndulo doble

### IV. CONCLUSIÓN

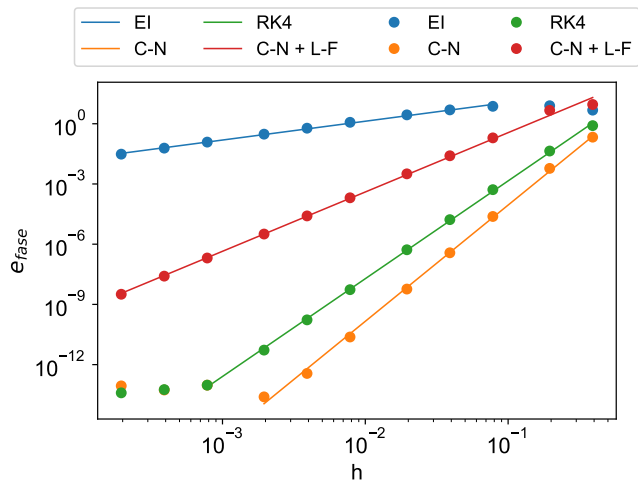


Figura 2: (b) Error de amplitud para los 4 métodos para tita inicial de  $\pi/2$

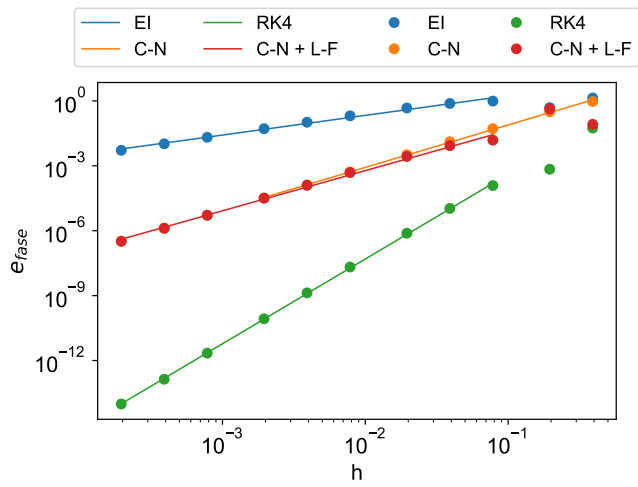


Figura 3: (a) Error de fase para los 4 métodos para tita inicial de  $\pi/2$

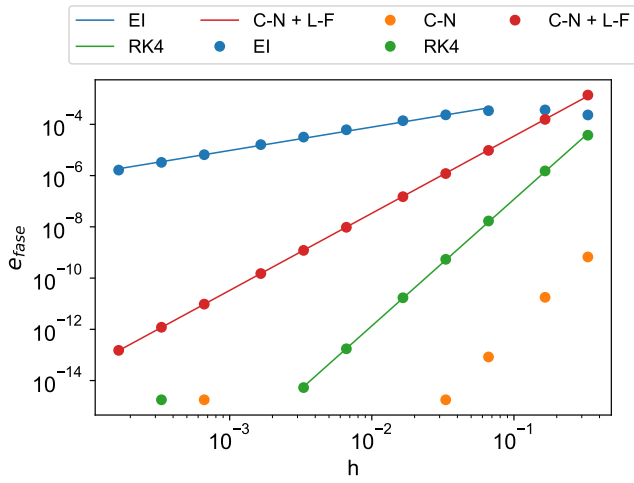


Figura 4: (a) Error de fase para los 4 métodos para tita inicial de  $10e-4$

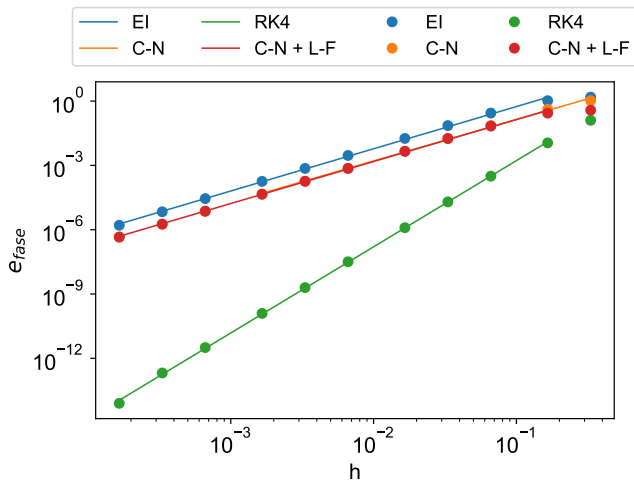


Figura 5: (b) Error de amplitud para los 4 métodos para tita inicial de  $10e-4$

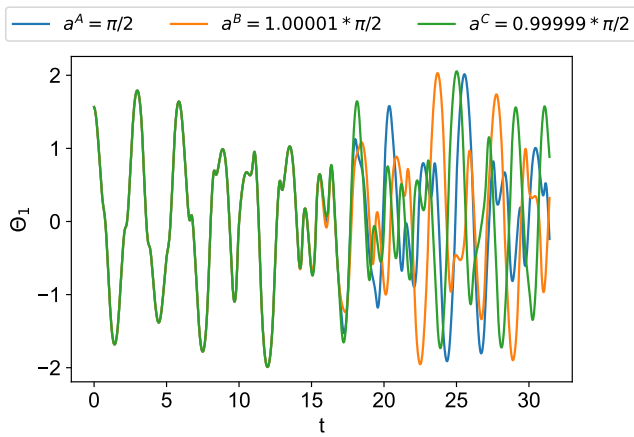


Figura 6: Solución numérica para las 3 distintas condiciones iniciales

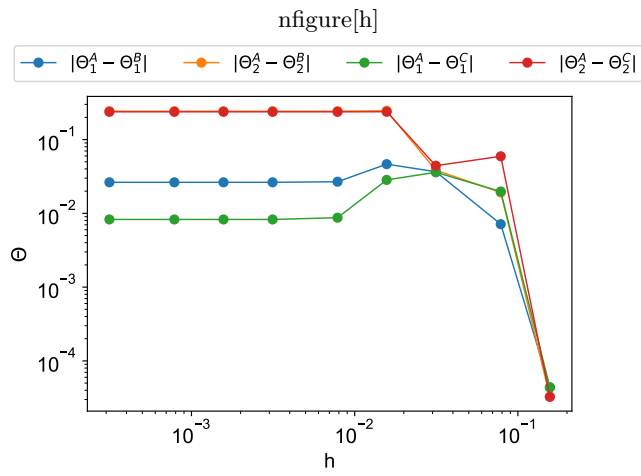


Figura 7: Diferencias entre las soluciones numéricas a tiempo fijo en función de  $h$

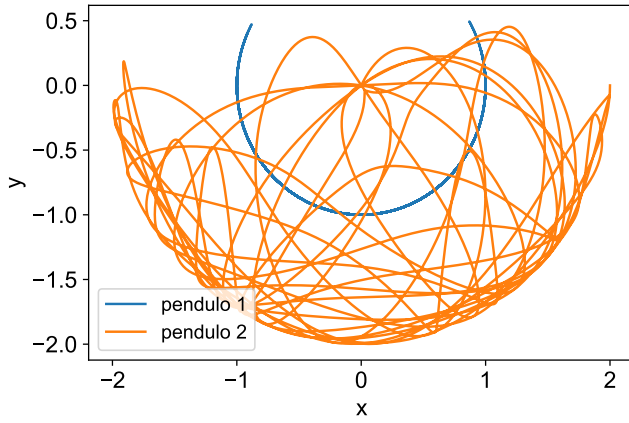


Figura 8: Trayectorias de las 1 condiciones iniciales

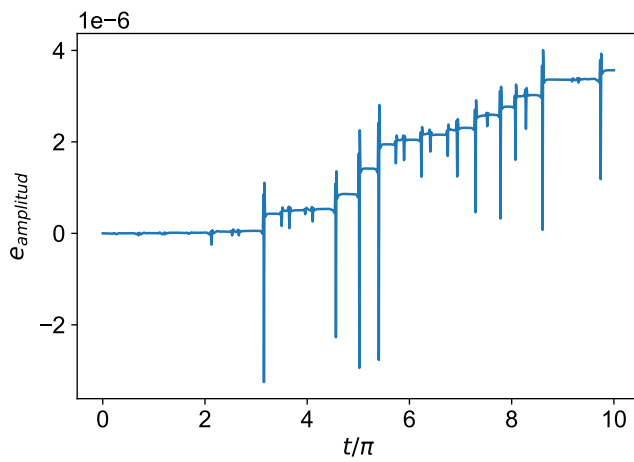


Figura 9: Error de amplitud para todo tiempo

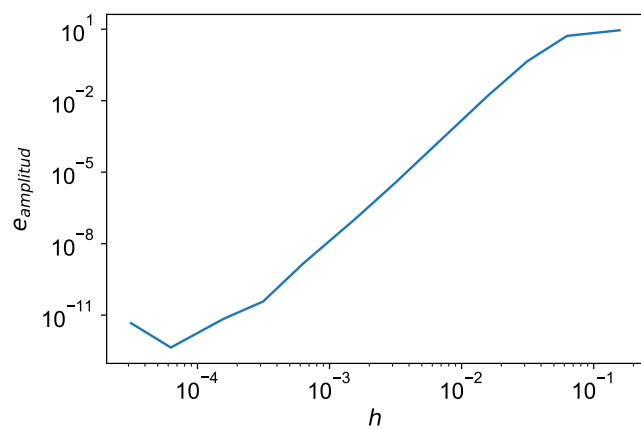


Figura 10: Orden del error de amplitud