Título??

Pablo Chehade
pablo.chehade@ib.edu.ar
Métodos Numéricos en Fluidos I, Instituto Balseiro, CNEA-UNCuyo, Bariloche, Argentina, 2022

- Se estudiaron métodos numéricos espaciales y de evolución temporal para resolver el problema de la cavidad cuadrada hidrodinámica bidimensional.
- Se tiene en cuenta la ecuación de momentos y la de conservación de masa. Este tiene un término advectivo, uno difusivo.
- Se resolvió mediante el método de volumenes finitos y algoritmo simpler calculando presión y velocidades diferidas? con grilla desplazada.
- En primer lugar, se estudió la dependencia de la solución en el estado estacionario con respecto al paso temporal.
- Se planteó un algoritmo para minimizar el costo computacional para encontrar el estado estacionario con un error menor al 5 %
- Se evaluó el efecto de los pasos internos del algoritmo simpler
- En segundo lugar, se estudió el impacto en el estacionario del esquema espacial en el término advectivo empleando distintos números de Reynolds. En particular, se utilizaron diferencias centradas de orden 2, Up-wind de orden uno y el esquema QUICK de orden ?
- Además, se estudió el orden de convergencia espacial de Up-wind de primer orden en referencia al mejor esquema advectivo
- Se estudió el efecto del método de evolución temporal, evaluando el estado transitorio de la solución mediante los métodos Euler Implícito y Crank-Nicholson

I. INTRODUCCIÓN

1 **[¿Por qué es importante resolver problemas de fluidos numéricamente? Rtas en la primera clase]**

- Una gran parte de los problemas de mecánica de fluidos no son resolubles analíticamente
- En algunos de los problemas es posible realizar experimentos. Sin embargo, estos traen aparejados un gran costo operativo y dificultades para realizar las mediciones ref clase 1
- Una alternativa más rápida y de menor costo es resolver estos problemas numéricamente, con las dificultades que esto conlleva. Tal es el caso de los errores de aproximación numérica y el costo computacional, que puede ser aún así más barato que hacer el experimento
- Aun así, en los últimos años la resolución numérica de ecuaciones es aceptada y está ganando preponderancia

2 **[Explicar el problema de la cavidad cuadrada hidrodinámica bidimensional]**

- Un problema muy estudiado desde el punto de vista numérico en mecánica de fluidos es el de la cavidad cuadrada hidrodinámica bidimensional, también conocida como Shear-drien cavity flow
- Consiste en una cavidad cuadrada bidimensional de lado L que contiene un fluido incompresible de viscocidad ν. Las condiciones de borde son de no deslizamiento en todas las paredes excepto en la horizontal superior. Sea $\vec{V}(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$ la velocidad en el punto (x,y), las condiciones anteriores se traducen en $\vec{V}(x,0) = \vec{V}(0,y) = \vec{V}(L,y) = (0,0)$ y $\vec{V}(x,L) = (U_0, 0)$
- En la figura **??** se muestra un esquema del problema

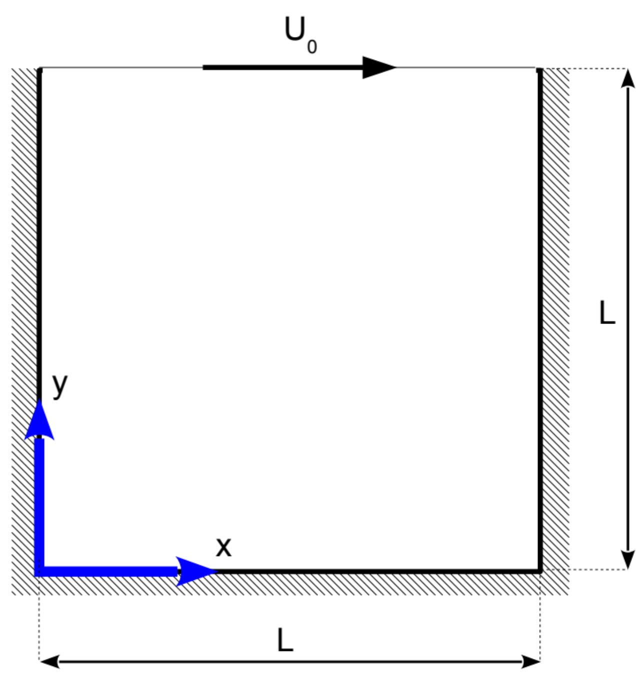
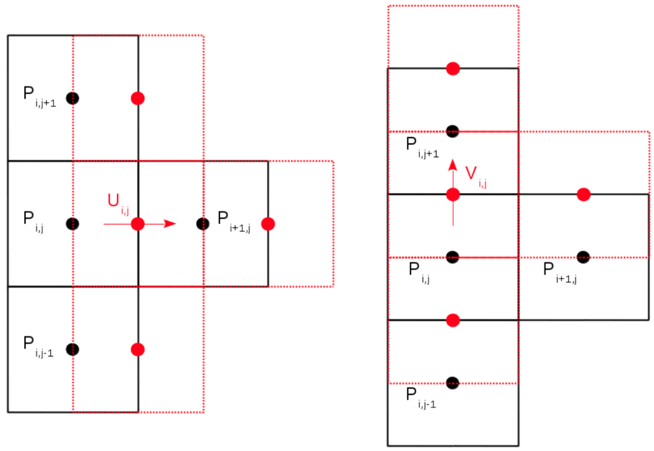


Figura 1

3 **[Explicación de las ecuaciones involucradas]**

- Las variables de interés son la presión y la velocidad vertical y horizontal
- Se cuentan con tres ecuaciones diferenciales:
- En primer lugar, las dos ecuaciones de conservación de momento en direcciones vertical y horizontal que, adimensionales, son

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (uu)}{\partial x} + \frac{\partial (uv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$



(a) (b)

Figura 2: Grillas diferidas. Figuras extraídas de [**?**]

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial (uv)}{\partial x} + \frac{\partial (vv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

donde $Re = U_0 L/\nu$

- Nombrar cada término (temporal, advectivo, de presión y difusivo)
- En segundo lugar, la ecuación de conservación de masa que para fluido incompresible es

$$\bigtriangledown \bullet \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

- en base a esa ecuación se dice que el campo de velocidades tiene ”divergencia libre”
- Las soluciones dependen de Re

II. MÉTODOS NUMÉRICOS

4 **[Resumen]**

- Para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales es necesario discretizar el dominio y plantear esquemas numéricos para las ecuaciones. En cuanto al primero, es necesario diferenciar entre dominio espacial y temporal.
- En cuanto al segundo, se emplearon volúmenes finitos con el objetivo de asegurar la conservación de masa ? y distintos métodos espaciales y temporales para cada término.

5 **[Discretización espacial]**

- El dominio espacial se discretiza ...
- Copiar lo que está en el pdf de la cátedra
- [**?**]

6 **[Grilla desplazada]**

- Copiar lo que está en el pdf de la cátedra

7 **[Discretización temporal]**

- En cuando al dominio temporal, la variable temporal se discretizó en puntos equiespaciados $t_n = n\Delta t$ con $n = 0, 1, \ldots, N$ con $\Delta t = t_{max}/N$

8 **[Costo computacional y elección de dt]**

- Debido a la cantidad de variables involucradas y dependiendo del número de pasos de tiempo a realizar, el costo computacional puede ser alto.
- Un modo de minimizarlo es eligiendo n1 lo suficientemente pequeño para que el error sea menor a una tolerancia determinada, aunque para esto es necesario conocer al menos la solución exacta, lo cual no siempre se tiene
- Otra alternativa es elegir N en base a un criterio de convergencia: si la solución tiende a un estacionario independiente del tiempo, entonces avanzamos la solución hasta que, por ejemplo, CONDICIÓN SOBRE DERIVADAS
- Si solo es de interés la solución en el estado estacionario, otro modo de atacar el problema es eligiendo dt para que el problema converja rápido a pesar de tener un estado transitorio lejos de la solución exacta. Esto último se basa en la hipótesis de que la solución no depende del paso de tiempo
- En este trabajo se estudiaron ambos métodos, eligiendo n1 de modo que el error sea menor a una tolerancia de 1e-5 y proponiendo un algoritmo para elegir dt de modo de minimizar el costo computacional.
- No describir el algoritmo

9 **[Algoritmo simpler simplificadamente]**

- [**?**]
- Es un algoritmo segregado o de paso fraccionado. Esto último en el sentido de que se calculan por separado $\vec{v}$ y p.
- Permite calcular la velocidad con divergencia libre (cumple la conservación de masa) y la presión en cada paso de tiempo a partir de un guess, el cual suele ser la solución del paso anterior. es así, no?
- Se propone que determinados términos de la ecuación se pueden estimar con el paso anterior. Se calcula la presión de modo de que el nuevo campo de velocidades tenga divergencia libre. Luego se calcula el campo de velocidades empleando esta nueva presión, obteniendo un campo que no necesariamente tiene divergencia libre. Posteriormente, se vuelve a calcular la presión de modo que el nuevo campo de velocidades tenga divergencia libre, empleando como guess el campo de velocidades calculado. Este proceso es un paso del algoritmo simpler.
- En el link `https://www.cfd-online.com/Wiki/SIMPLER_algorithm_-_SIMPLE_-_Revised` se explica el procedimiento bien resumido y sin ecuaciones.
- La exactitud de la solución depende del número de pasos internos realizados en el algoritmo, que pueden ser tantos como uno quiera aunque aumenta el costo computacional

Es necesario explicar cómo discretizar las ecuaciones de momento? Sería copiar textual el desarrollo hecho en la penúltima clase. Le pregunté a Federico Plantear lo siguiente luego de que Federico me halla respondido

10 **[Esquemas numéricos posibles para cada término]**

- Para cada término de las ecuaciones de momento, se pueden plantear distintos esquemas numéricos. En este trabajo se estudiaron los siguientes:
  - Para la parte temporal, se emplearon los esquemas de Euler implícito y de Crank-Nicolson.

11 **[Término advectivo. Explicar cada método numérico]**

-

12 **[Término temporal. Explicar cada método numérico]**

-

13 **[Resumen de lo que se va a estudiar]**

- En primer lugar, se estudió la dependencia de la solución en el estado estacionario con respecto al paso temporal.
- Se planteó un algoritmo para minimizar el costo computacional para encontrar el estado estacionario con un error menor al 5 %
- Se evaluó el efecto de los pasos internos del algoritmo simpler
- En segundo lugar, se estudió el impacto en el estacionario del esquema espacial en el término advectivo empleando distintos números de Reynolds. En particular, se utilizaron diferencias centradas de orden 2, Up-wind de orden uno y el esquema QUICK de orden ?
- Además, se estudió el orden de convergencia espacial de Up-wind de primer orden en referencia al mejor esquema advectivo
- Se estudió el efecto del método de evolución temporal, evaluando el estado transitorio de la solución mediante los métodos Euler Implícito y Crank-Nicholson
- En todos los casos se usó una tolerancia para el estado estacionario de 1e-5

III. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

A. Dependencia del estado estacionario con el paso dt

En primer lugar, se analizó la dependencia del estado estacionario en relación al paso de evolución temporal. Se calculó $u(0.5, 0.5)$ y $v(0.5, 0.5)$ para $Re = 1000$, $n_1 = 20$ y distintos Δt entre 0.005 y 20. Como método numérico para el término advectivo se empleó diferencias centradas de orden 2 y como método temporal, Euler implícito. En la figura **??** se grafican los resultados obtenidos respecto al valor correspondiente al menor Δt en valor absoluto. Se observa una diferencia entre los valores obtenidos del orden

Se calculó para cada caso la desviación estándar de la velocidad normalizada por el valor promedio

B. Elección de dt

Describir el algoritmo

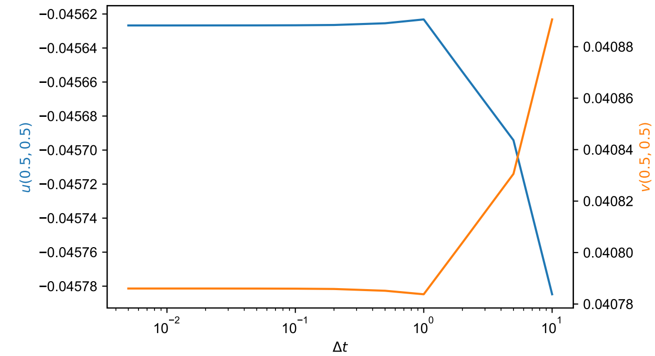


Figura 3

C. dt para distintos lsimpler

Estaría bueno dar para cada caso el máximo dt posible y el que me da mi algoritmo

D. Término advectivo

Se implementó para el término advectivo los esquemas DC2, UP1 y QUICK. Se resolvió el problema para $Re = 100, 1000 \, \mathrm{y} \, 5000$ y para $n1 = 20, 40 \, \mathrm{y} \, 80$. Se calculó para cada caso el error relativo respecto a los resultados de Guia. $tol_e stacionario = 1e - 5$

Tabla con resultados

Duda: es necesario reportar el dt en cada caso?

E. Orden de convergencia espacial de UP1

Se calculó $u(0.5)$ y $v(0.5)$ para $Re = 1$ y $Re = 1000$ con $n1 = 80$ y esquema QUICK. Se consideró este valor como la solución exacta. Luego, se calcularon las mismas velocidades para distintos n1 y se calculó el error respecto a la solución numérica considerada como la exacta

Esquema temporal con solución dependiente del tiempo

Evolución temporal con EI y CN.

IV. CONCLUSIÓN

termino_adv_DC2.pdf

(a)

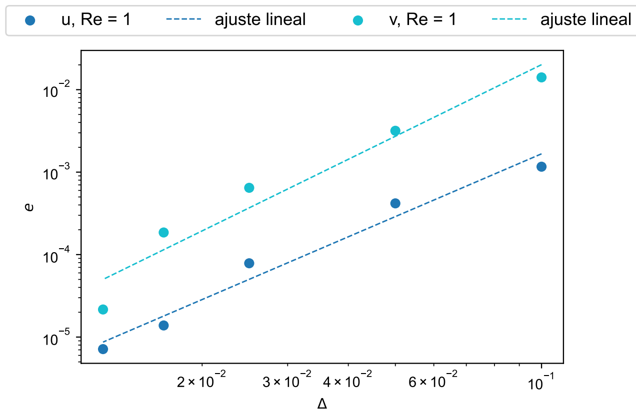
termino_adv_UP1.pdf

(b)

termino_adv_QUICK.pdf

(c)

Figura 4: Termino advectivo



u, Re = 1
ajuste lineal
v, Re = 1
ajuste lineal
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
e
2×10^{-2}
3×10^{-2}
4×10^{-2}
6×10^{-2}
10^{-1}
Δ

Figura 5