# Laboratorio 3 - ??

Pablo Chehade
*pablo.chehade@ib.edu.ar*
*Métodos Numéricos en Fluidos I, Instituto Balseiro, CNEA-UNCuyo, Bariloche, Argentina, 2022*

Se resolvió numéricamente la ecuación de onda escalar, homogénea y unidimensional con velocidad dependiente de la posición. En concreto, se empleó el método Runge-Kutta 4 para la evolución temporal y diferencias finitas de orden 2 para la espacial. Se analizó la evolución temporal de una condición inicial para distintas funciones de velocidad. Se estudió la estabilidad de la solución y se determinó la relación entre la velocidad y las discretizaciones espaciales y temporales, de modo de asegurar estabilidad. Esto se realizó mediante el análisis del número de onda modificado y se verificó numéricamente para distintas funciones de velocidad.

## I. INTRODUCCIÓN

La ecuación de ondas es importante en física. Modela muchos fenómenos

En este trabajo se estudió la ecuación de onda escalar, homogénea y unidimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, t \geq 0,\ 0 < x < 4, \tag{1}$$

con condiciones iniciales

$$\begin{cases} u(x,0) = u_0(x) = e^{-200(x-0.25)^2} \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

(2)

y condiciones de contorno Condiciones de contorno con $u$ en lugar de $u(1)$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{x=0} = c(0)\ \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}\,, \\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{x=4} = -c(4)\ \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=4}\,, \end{cases} \tag{3}$$

donde $c(x)$ es la velocidad del sonido en el medio.

## II. MÉTODOS NUMÉRICOS

La ecuación de onda **??** de segundo orden en el tiempo se puede transformar en un sistema de ecuaciones de primer orden en el tiempo mediante el cambio de variables $u_a = u$, $u_b = \partial u/\partial t$

$$\begin{cases} \frac{\partial u_a}{\partial t} = u_b \\ \frac{\partial u_b}{\partial t} = c^2(x)\frac{\partial^2 u_a}{\partial x^2} \end{cases}$$

junto a las condiciones iniciales

$$\begin{cases} u_a(x,0) = u_0(x) \\ u_b(x,0) = 0 \end{cases}$$

y a las condiciones de borde

$$\begin{cases} \frac{\partial u_a}{\partial t}\Big|_{x=0} = c(0)\ \frac{\partial u_a}{\partial x}\Big|_{x=0}\,, \\ \frac{\partial u_a}{\partial t}\Big|_{x=4} = -c(4)\ \frac{\partial u_a}{\partial x}\Big|_{x=4}\,, \end{cases}$$

Para resolver numéricamente el sistema de ecuaciones junto a las condiciones iniciales **??** y a las condiciones de contorno **??**, se necesita discretizar el dominio y proponer métodos numéricos para la parte espacial y temporal, asegurando la estabilidad de la solución.

En cuanto a la discretización del dominio,

$$x_j = \Delta x * j,\ j = 1,\dots,M,\ \Delta x = 1/(M+1)$$

$$t_n = \Delta t * n,\ n = 0,1,\dots,N,\ \Delta t = 1/N$$

En cuanto a los métodos numéricos, en cuanto a la parte espacial, se empleó DC2 (explicar ece) DC2 para los nodos internos

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} = \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

DF adelantada orden 2 Referencia al Moin particularizado para $j = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_0 = \frac{-3u_0 + 4u_1 - u_2}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

DF atrasada de orden 2 en $xj = N+1$ referencia a wikipedia

$$\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{N+1} = \frac{3u_{N+1} - 4u_N + u_{N-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

El sistema de ecuaciones junto a las condiciones de borde se convierten en el sistema semidiscretizado Corroborar la expresión

$$\begin{cases} \frac{\partial u_{aj}}{\partial t} = u_{bj} \\ \frac{\partial u_{bj}}{\partial t} = \frac{c_j^2}{\Delta x^2}(u_{aj+1} - 2u_{aj} + u_{aj-1}) \\ \frac{\partial u_{a0}}{\partial t} = \frac{c(0)}{2\Delta x}(-3u_{a0} + 4u_{a1} - u_{a2}) \\ \frac{\partial u_{aN+1}}{\partial t} = \frac{c(4)}{2\Delta x}(-3u_{aN+1} + 4u_{aN} - u_{aN-1}) \end{cases}$$

donde $c_j = c(x_j)$. Este sistema se puede escribir de la forma definiendo el vector $\vec{z}$ tal que $\vec{z}^T = (u_{a0}, u_{a1}, \ldots, u_{aN}, u_{aN+1}, u_{b1}, u_{b2}, \ldots, u_{bN+1})$ y la matriz $\gamma$

De este modo, para nodos internos se tienen dos ecuaciones diferenciales con dos incógnitas ($u_a$ y $u_b$). Mientras que para los nodos de borde se tiene una ecuación diferencial con una incógnita ($u_a$)

En cuanto a la temporal,

En cuanto a la estabilidad de la solución Análisis del n

Resumen de lo que se hará

## III. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Inestabilidad por el paso de tiempo porque las oscilaciones espúreas son acotadas ¿Por qué no obtengo oscilaciones espúreas? Hay oscilaciones espúreas en el caso de pe¿2 si hubiera difusión. PERO NO HAY DIFUSIÓN. Aparecerían si la grilla es grande y la solución es empinada. Usar un $N = 100$.

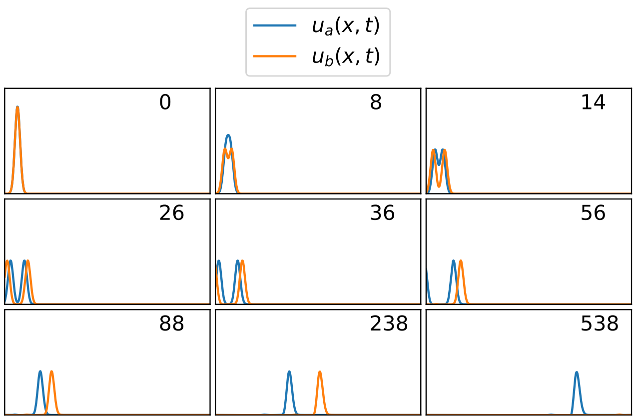



Figura 1: Distintos instantes de la evolución de la solución para distintas funciones de velocidad. $u_a(x,t)$ corresponde a la velocidad constante $c_a(x) = 1$, mientras que $u_b(x,t)$ corresponde a la velocidad constante $c_b(x) = 1.5$. El numerito indica el índice n. Agregar Deltax y deltat

.

## IV. CONCLUSIÓN

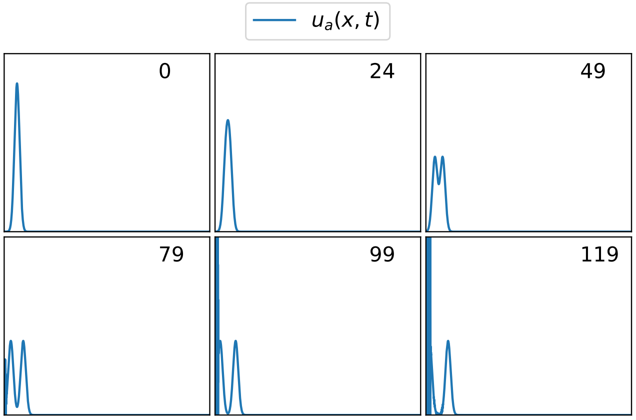



Figura 2

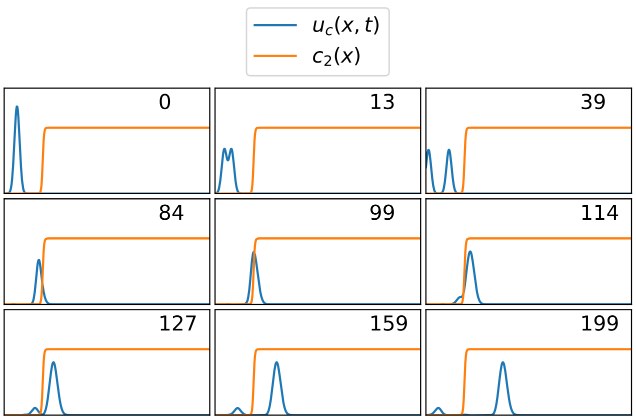



Figura 3

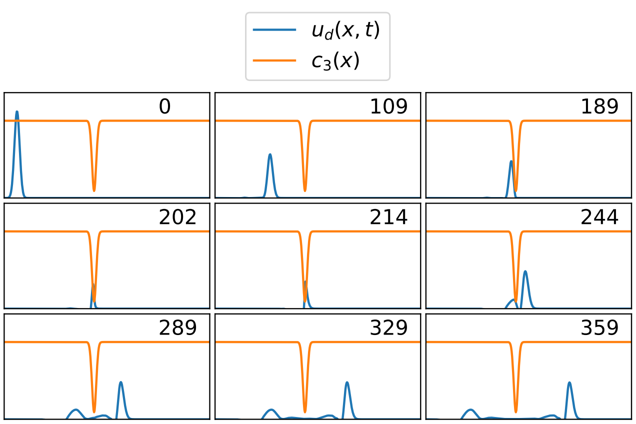
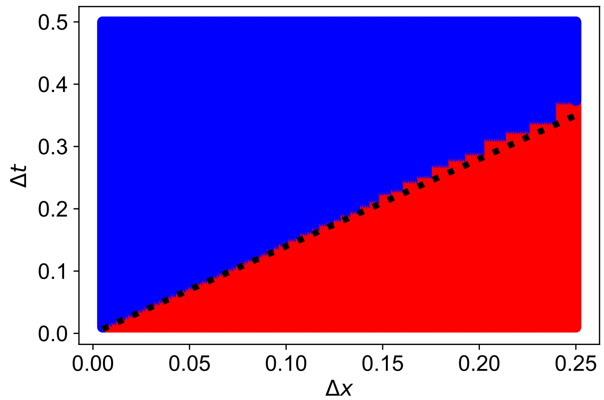
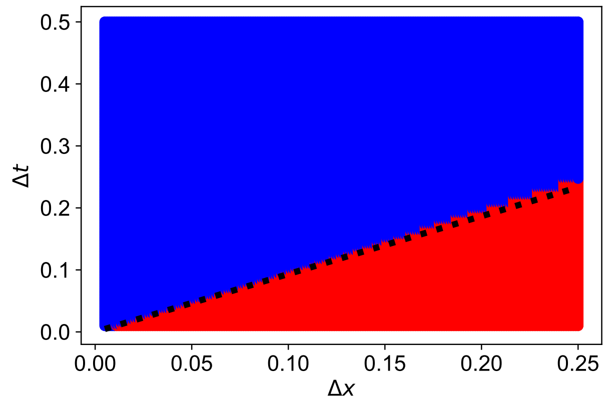


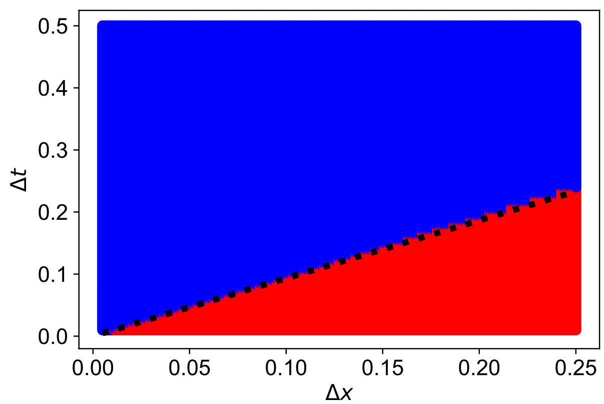

Figura 4



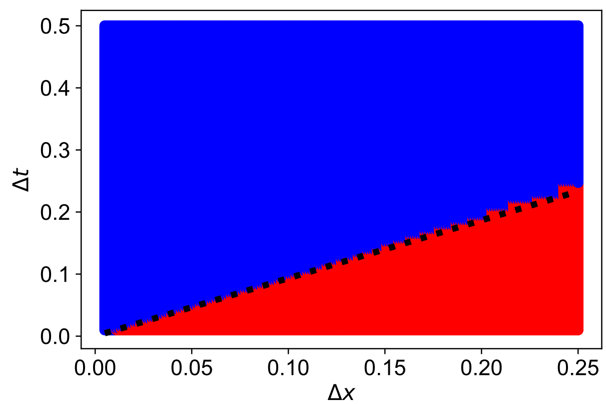

(a)




(b)




(c)




(d)

Figura 5: Divergencias.