Forma normal saddle-node

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}(\vec{x}, \alpha) \qquad \alpha = I_{ext} - I_{ext}^{e}$$

$$\bar{\bar{A}}(\alpha) = \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{x}}(\vec{x}_0, \alpha) \qquad Re(\lambda_e(\alpha)) < 0 \quad j \neq e$$

$$\lambda_e(\alpha) < 0 \qquad \alpha < 0$$
$$\lambda_e(0) = 0$$
$$\lambda_e(\alpha) > 0 \qquad \alpha > 0$$

solo sobreviven los componentes ε_e

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{\varepsilon}$$
$$\frac{d\vec{\varepsilon}}{dt} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}(\vec{x}_0, 0) + \bar{\bar{A}}(0)\vec{\varepsilon} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial \alpha}(\vec{x}_0, 0) + \frac{1}{2}\vec{\varepsilon}\frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial \vec{x}^2}(x_0, 0)\vec{\varepsilon} + \dots$$

multiplicando por el autovector u_e

$$\frac{d\vec{\varepsilon}}{dt} = \underbrace{\left[u_e^T \frac{\partial F}{\partial \alpha}(x_0, 0)\right]}_{Q} \alpha + \frac{1}{2} \overbrace{\frac{\partial \vec{F}}{d\vec{x}}(x_0, 0) \Big|_{e,e}}^{M \text{ (números)}} \varepsilon_e^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\varepsilon_e}{dt} = \frac{M}{2}\left[\frac{2Q}{M}\alpha + \varepsilon_e^2\right] \quad \Rightarrow \quad \frac{d\varepsilon_e}{dt} = I + \varepsilon_e^2$$

cambia de signo en el mismo pto que α cambia de signo

$$\varepsilon_e^2 \sim \alpha$$

Sistemas bidimensionales

Uno puede tomar un modelo, simplificarlo a menos dimensiones, y obtener el mismo comportamiento cualitativo

Tenemos:

1) variable que hace crecer el potencial
2) variable que restituye a la primera variable → es más lenta
$\Rightarrow$ 1 puede crecer hasta que 2 hace que baje

Postulado:

$$\frac{dV}{dt} = \underbrace{f(V)}_{\text{asegura que } V \text{ crezca}} - \underbrace{m}_{\text{variable restitutiva, si crece, baja } V} + \overbrace{I}^{\text{parámetro externo}}$$

$$\underbrace{\tau_m}_{\text{cte de tiempo}} \frac{dm}{dt} = -\underbrace{\alpha m}_{\text{si } V=0 \, \Rightarrow m \to 0} + \beta V \qquad \text{donde } \alpha \text{ y } \beta \text{ son constantes positivos}$$

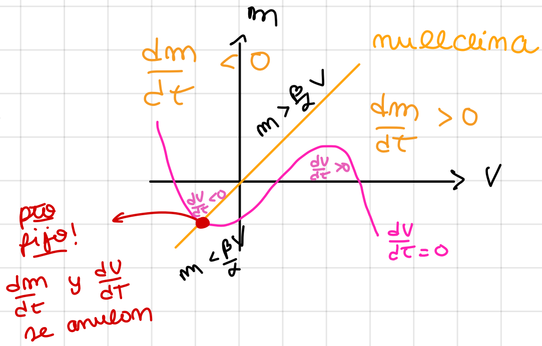
que permite que la dinámica de m sea más lenta que la de m

Un sistema 2D se cuantifica en términos de llamados <u>nullclinas</u>

$\downarrow$ líneas en las que se anulan cada una de las derivadas

$\Rightarrow$ si $\boxed{\frac{dm}{dt} = 0}$ $\Rightarrow$ $\alpha m = \beta V$

$\Rightarrow m = \frac{\beta}{\alpha} V$



si $\boxed{\frac{dV}{dt} = 0}$ $\Rightarrow$ $m = f(V) + I$

tomamos $f(V) \sim -cV^3$

$$\vec{F} = \left(\frac{dV}{dt}, \frac{dm}{dt}\right) \qquad \vec{x} = (V, m)$$

$$\bar{A} = \frac{\partial \vec{F}}{d\vec{x}^2} = \begin{pmatrix} f'(V) & -1 \\ \beta/\tau_m & -\alpha/\tau_m \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $T = f'(V) - \alpha/\tau_m$

$D = -f'(V)\,\alpha/\tau_m + \beta/\tau_m$

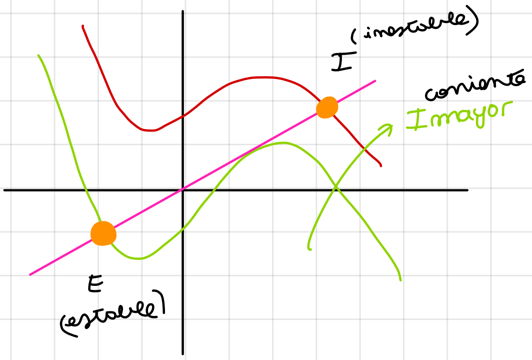
$\downarrow$ evaluamos en el pto fijo (V_0, m_0)

$T = \overbrace{f'(V_0)}^{<0} - \alpha/\tau_m < 0$

$D = -f'(V_0)\,\alpha/\tau_m + \beta/\tau_m > 0$

$\Rightarrow$ en el pto fijo
$T < 0$
$D > 0$
$\Downarrow$
punto fijo estable

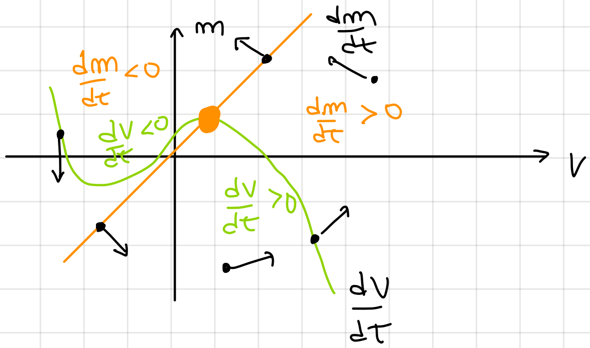
Si aumentamos I:



● $\rightarrow$ punto fijo

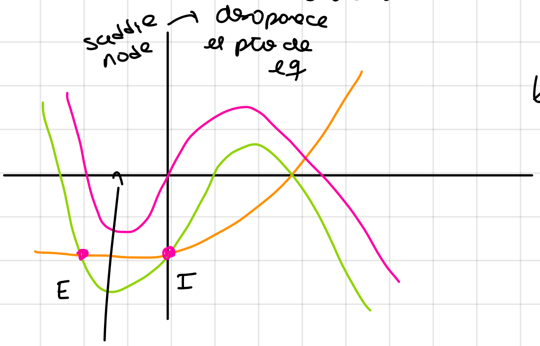
aumentando la corriente I (cambiando el parámetro de control) el pto fijo cambia su estabilidad

Hacemos flechas a donde apunta



modelos: Fitz - Hugh-Nagumo — el que vimos con $f(V) \sim V^3$

Morris - Lecar



Sistemas unidimensionales

En un sistema 1D no se pueden tener oscilaciones

↓ Si se pueden tener si se tiene "algo más"

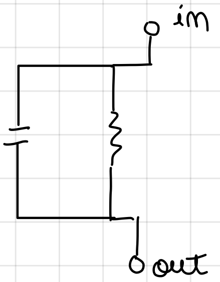
Esta idea es tuvo Lapicque principios del siglo XX.
En esta época ya se conocía el comportamiento eléctrico de las neuronas. Se sabía que $V_{int} \neq V_{ext}$
int a la neurona

Modelaba a la membrana como un capacitor.
En un capacitor real, los capacitores se pueden cargar hasta cierto punto antes de romperse.

Lapic decía que tiene que haber algún procedimiento fisiológico que al romper la neurona debido a pasar el threshold apto dada su capacitancia, tal que luego se regenere

Quería explicar la periodicidad del potencial periódico al tener un input cte

modelos integrate and fire



$$\begin{cases} C\dfrac{dV}{d\tau} + \dfrac{V}{R} = I \\ V(\tau) > V_T \Rightarrow V(t^+) = 0 \end{cases}$$

si el potencial supera cierto umbral, se rompe el capacitor y rápidamente $V \to 0$

$$\Rightarrow \quad CR\frac{dV}{d\tau} + V = i \nearrow (i = IR) \quad \Rightarrow \quad \tau_0 \frac{dV}{d\tau} + V = i$$

ecuación de primer orden no homogénea

Busquemos la solución a la ec. homogénea

$$\tau_0 \frac{dV}{d\tau} + V = 0 \quad \Rightarrow \quad V(\tau) = A e^{-\tau/\tau_0}$$

ahora por variación de parámetros $A \to A(\tau)$

$$\Rightarrow \quad i = \tau_0 \frac{dA(\tau)}{dt} e^{-t/\tau_0} - \cancel{\frac{\tau_0}{\tau_0} e^{-t/\tau_0}} A(\tau) + \cancel{\underbrace{A(\tau) e^{-\tau/\tau_0}}_{V(\tau)}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{i}{\tau_0} = \frac{dA(\tau)}{d\tau} e^{-t/\tau_0} \quad \Rightarrow \quad A'(\tau) = e^{\tau/\tau_0} \frac{i}{\tau_0}$$

$$\Rightarrow \quad A(t) = i\left(e^{\tau/\tau_0} - 1\right) + B$$

$$\Rightarrow \quad V(t) = B e^{-t/\tau_0} + i\left(e^{t/\tau_0} - 1\right) e^{-t/\tau_0}$$

$$= e^{-\tau/\tau_0}(B - i) + i$$

tomo $V(0)$ (V en $t=0$)

$$\Rightarrow \quad \boxed{V(\tau) = (V(0) - i)e^{-t/2} + i}$$

hay disparo cuando $V(\tau) = V_T$

tenemos que si $i < V_T \Rightarrow f = 0$ (frecuencia de oscilación)

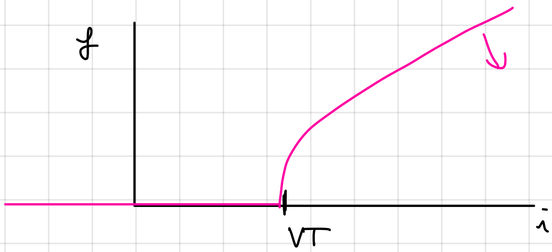
si $i \geq V_T$

$$\Rightarrow \quad V(T) = -ie^{T/2} + i = V_T \quad \Rightarrow \quad T = 2\ln\left(\frac{i}{i - V_T}\right)$$

$$\Rightarrow f = \frac{1}{2\ln\left(\frac{i}{i-V_T}\right)}$$

$$\ln\left(\frac{i}{i-V_T}\right) = \ln\left(\frac{1}{1-V_T/i}\right) \underset{i \text{ grande}}{\approx} \ln\left(1+\frac{V_T}{i}\right) \sim \frac{V_T}{i}$$

$$\Rightarrow f \simeq \frac{i}{\tau V_T}$$



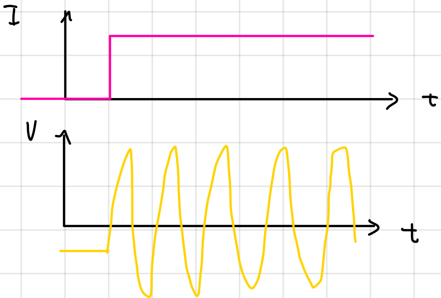
comportamiento lineal para i grande

en la bifurcación arranca de una manera dif.

cada neurona tiene una sola ecuación diferencial
↓ ampliamente utilizado si interesan las conexiones entre muchas neuronas

supongamos que en una neurona $I=0$ y le inyectamos corriente en un dado tiempo. En HH, el potencial comenzaría a oscilar con frecuencia dada por I.

HH



algunas neuronas empiezan a oscilar rápidamente y luego bajan en frecuencia

adaptación!

ahora tiene unidades de V pero inicialmente era i

$$\begin{cases} \tau \dfrac{dV}{dt} + V + A(t) = i \\ V(t) = V_T \Rightarrow V(t^+) = 0 \end{cases}$$

modelo tipo integrate and fire con corriente adicional (corriente de adaptación)

donde $\tau_A \frac{dA}{dt} = -A + A_0\,\delta(t - t_{spike})$

τ_A: cte de tiempo de la adaptación

QIF : $\tau \frac{dV}{dt} = V^2 + I$ → saddle node

$V(\tau) = \infty \to V(t^+) = -\infty$

si $I < 0$ $\quad f = 0$

$I > 0$ $\quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dV}{V^2+I} = \int_0^{t} \frac{d\tau}{2} = \frac{T}{2}$

$\frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dV}{V^2+1}$ $\quad t = \frac{2\pi}{I^{1/2}}$

$f = \frac{I^{1/2}}{2\pi}$

se puede escribir $V = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \nearrow \begin{cases} V = \infty \Rightarrow \theta = \pi \\ V = -\infty \Rightarrow \theta = -\pi \end{cases}$

neurona theta

LIQ $\quad \tau \frac{dV}{dt} = -V + I$ $\quad V(t) = V_T \Rightarrow V(t^+) = 0$

EIF $\quad \tau \frac{dV}{dt} = (e^V - 1) + I$