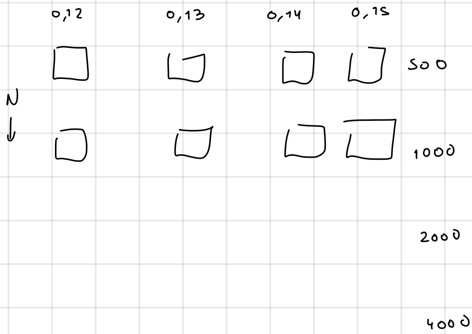
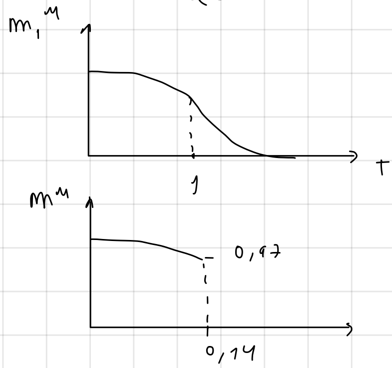


$\alpha = 0$



Modelo de Hopfield

$$h_i(t) = \sum_{j=1}^{N} w_{ij} \, S_j(\tau)$$

$$P(S_i(t+1) = 1) = \frac{e^{\beta h_i(\tau)}}{e^{\beta h_i(\tau)} + e^{-\beta h_i(\tau)}}$$

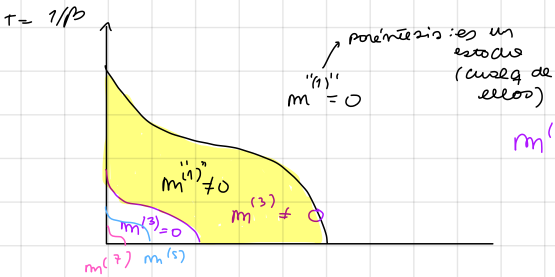
$$= 1 - P(S_i(\tau+1) = -1)$$

$$W_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{\mu=1} x_i^\mu \, x_j^\mu$$

$$m^\mu = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} x_j^\mu \langle S_j^\mu \rangle$$

$$s_j^\mu = \mathrm{sgn}\,(x_j^1 + x_j^2 + x_j^3)$$

$$m^1, m^2, m^3 \sim O(1) \quad , \quad m^\nu \sim O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) \qquad \nu > 3$$



$m^{(3)} = m_1 = m_2 = m_3$

región donde desestabilizo los estados mezcla (= 0) espurios y no al origina ($m_1 \neq 0$)

desventajas Hopfield : - todas las neuronas conectadas con todas (en la realidad está conectada con ~ un 10%)

generalizaciones del modelo de Hopfield

(1) Dilución en las condiciones

consideramos un modelo en el cual

$$W_{ij} = \frac{C_{ij}}{K} \sum_{\mu=1}^{P} x_i^{\mu} x_j^{\mu}$$

con $C_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{prob } K/N \\ 0 & \text{prob } 1-K/N \end{cases}$

si miramos la neurona i

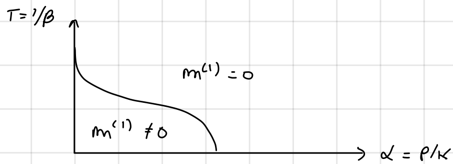
$\Rightarrow$ esta está conectada con N neuronas con una prob K/N

$\Rightarrow$ el # medio de conexiones por neurona es K

se puede elegir C_{ij} / $C_{ij} = C_{ji}$ → se puede hacer la misma cuenta del (*) campo medio

C_{ij} y C_{ji} son independientes → biológicamente más interesante → no hay simetría en las conexiones ⊛

(*) se obtiene el sig. diagrama de fases



→ diagrama similar

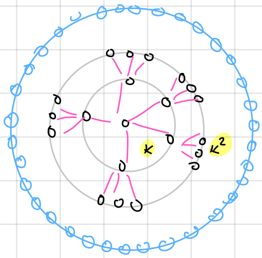
$\Rightarrow$ el modelo es robusto respecto a cortar conexiones, siempre que se respete la simetría de conexiones

⊛ tomamos C_{ij}, C_{ji} ind → consideramos el caso $T=0$, $1 \ll K \ll N$

$$S_i(t+1) = \text{sgn}\left(\sum_{j=1}^{N} W_{ij} S_j(t) \right)$$

Consideremos la neurona i a tiempo t

El estado está determinado por un conjunto de la neuronas que están conectadas con ella



K^+

$t=0$

conexiones

prob conexión

neurona 44

neurona 11

$P(44,1) = \frac{K}{N}$ (neurona 1 tiene K conexiones)

$P(44,2) = \frac{K^2}{N}$ (neurona 2 tiene K^2 conexiones)

$P(44,(1,2)) = \frac{K^3}{N} \ll 1$

$K \propto \log(N)$

a tiempo 0 : $S_i(0)$ / $\sum_{j=1}^{N} x_j^1 S_j(0) = m_i(0)$

condición inicial → overlap

Queremos calcular $m_1^{(1)} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_j^1 S_j(1)$

$= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_j^1 \operatorname{sgn}\left(\sum_{k=1}^{N} W_{jk} S_k(0)\right)$

hay un solo overlap significativo en la cond. inicial

$= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_j^1 \operatorname{sgn}\left(\sum_{k=1}^{N} W_{k,} S_k(0)\right)$

$= \langle \operatorname{sgn}(m_1(0) + R(0)) \rangle$

mismos cuentas que antes

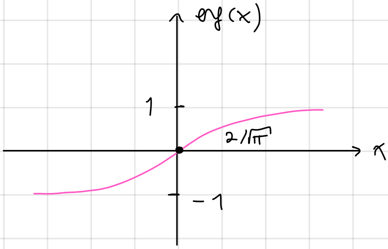
prom respecto al ruido

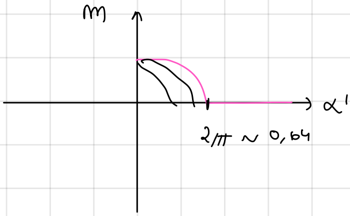
$m_1(t+1) = \langle \operatorname{sgn}(m_1(t) + R(t)) \rangle$

Se puede probar que el hecho que no haya neuronas repetidas, hace que $R(t)$ y $R(t')$ son v.a independientes

$$m_1(t+1) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dR}{\left(\frac{2\pi p}{K}\right)^{1/2}} \, e^{-R^2/(p\ )} \, sgn(m_1(t)+R)$$

$$= erf\left(\frac{m_1(t)}{\sqrt{2\alpha'}}\right) \qquad \alpha' = \frac{p}{K}$$





tenemos conexiones muy diluidas e independientes, si uno calcula el overlap en función de # de conexiones → el comportamiento no es muy diferente

(2) Bajo nivel de actividad

$$W_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^{p} x_i^\mu x_j^\mu$$

teníamos $x_i^\mu = \pm 1$ con igual probabilidad

↓

ahora : $x_i^\mu = \pm 1$ $\begin{cases} P(x_i^\mu = 1) = \frac{1+a}{2} \\ P(x_i^\mu = -1) = \frac{1-a}{2} \end{cases} \Rightarrow \langle x_i^\mu \rangle = a$

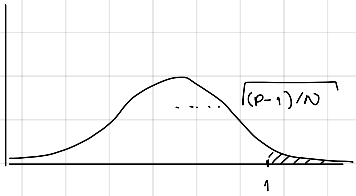
$$S_j(0) = x_j^1$$

$$S_j(1) = sg\left(\sum_{j=1}^{N} W_{ij} S_j(0)\right) = sg\left(\frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^{p} x_i^\mu x_j^\mu x_j^1\right)$$

$$= sg\left(x_1^1 + \underbrace{\sum_{\mu>1}\sum_j \frac{1}{N} x_j^\mu x_j^\mu x_j^1}_{\mathcal{N}\left(\underbrace{(p-1)a^3}_{\text{media grande} \neq 0\,!!},\ \underbrace{\sigma^2 = (p-1)N}_{\text{se puede calcular}}\right)}\right)$$

si ......

$sg = 1$ ind de x_1^1



Cambiamos la regla: $W_{ij} = \frac{1}{N}\sum_{\mu=1}^{p}(x_i^\mu - a)(x_j^\mu - a)$

$$S_i(1) = sgn\left(\frac{1}{N}\sum_{\mu,j}(x_i^\mu - a)\underbrace{(x_j^\mu - a)\, x_i^1}_{x_j^1 x_j^1 - a x_j^1}\right)$$

$$= sgn\left(\frac{1}{N}\sum_j (x_i^1 - a)(x_j^1 - a)\, x_j^1 + \frac{1}{N}\sum_{j,\mu>1}(x_i^\mu - a)(x_j^\mu - a)\, x_j^1\right)$$

$$= sgn\left((x_i^1 - a)(1 - a x_i^1) + \overset{\to\ \text{media } 0!}{R}\right)$$

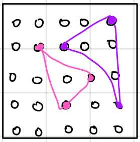
$$= sgn\,(x_i^1)$$

se puede hacer el diagrama de fases, va a depender de T, a

si $\frac{1+a}{2} << 1$ (mayor parte de neuronas en estado -1)

se puede probar que $\alpha_c \simeq \dfrac{1}{\left(\frac{1+a}{2}\right)\left|\log\left(\frac{1+a}{2}\right)\right|}$

de info que se puede almacenar en un patrón es finita cada patrón tiene muy poco info.



patrón 1

patrón 2

si el nº de neuronas por patrón es muy grande, el patrón 1 es ind del patrón 2