La retina y el procesamiento visual temprano

¿Podemos predecir cómo se debe procesar la infomación sensorial, en base a algún principio adecuado?

derivan teorías a partir de postular principios

Network 3 (1992) 213–251. Printed in the UK

REVIEW ARTICLE

Could information theory provide an ecological theory of sensory processing?

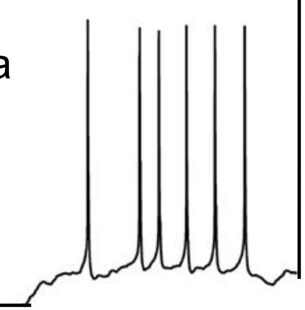
animales se adaptan al entorno, sobreviven los más eficientes

Joseph J Atick†
School of Natural Sciences, Institute for Advanced Study, Princeton, NJ 08540, USA

Un joven físico prodigio que defraudó a los capos del Institute for Advanced Study de Princeton (venía de hacer la tesis de doctorado con Susskind en Stanford a los 18, sin haber hecho la licenciatura), que lo contrataron para hacer cuerdas y se cortó sólo haciendo estudios de neurociencia teórica. Después de dedicó al reconocimiento facial y, en general, al reconocimiento de personas. No se quiso aburguesar, dejó la academia y se dedicó al emprendedorismo tecnológico.

- En general, los estímulos naturales son muy estructurados y redundantes. Si quisiésemos ser eficientes cuando los representamos, deberíamos reducir esa redundancia.

- Dado que el procesamiento sensorial se pudo haber adaptado a las condiciones que le impone el entorno (principio ecológico), la maximización de la eficiencia de la representación puede actuar como principio organizador del diseño del procesamiento de las señales, al menos en las primeras etapas.



La retina y el procesamiento visual temprano

- Una representación eficiente de la información sensorial tiene ventajas evolutivas.

- Este principio de eficiencia, formulado como un problema de optimización, puede utilizarse como un principio de diseño con el cual predecir de qué manera debe proceder el procesamiento neuronal. Esto es, tenemos tales cosas (ya veremos qué), queremos maximizar la eficiencia de la representación, entonces…¿Qué debemos hacer?

- En otras palabras:

  - Supongamos que representamos las señales ambientales simplemente muestreando con un conjunto de células sensoriales. Obviamente, muestreando lo que la transducción nos dice que es importante.

  - El esquema anterior de optimalidad nos indica que debemos encontrar de qué manera RECODIFICAR la información para mejorar la eficiencia de la representación, siempre sujetos a las limitaciones que la biología nos impone.

  - Las distintas etapas necesarias para reacomodar la representación en una forma óptima pueden compararse con las etapas del procesamiento neuronal observado en la vía sensorial correspondiente.

  - Una de las cosas esenciales para tener éxito con este enfoque es que debemos tener un conocimiento cuantitativo profundo de las propiedades (estadísticas) de las señales naturales.

nos interesa como codifican las señales para tener una representación eficiente

La retina y el procesamiento visual temprano

Algunos elementos de Teoría de la Información

The Bell System Technical Journal

Vol. XXVII *July, 1948* *No. 3*

A Mathematical Theory of Communication

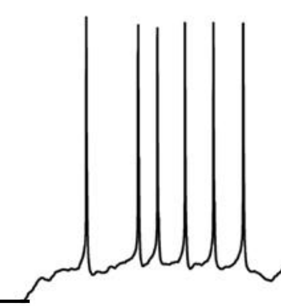
By C. E. SHANNON

- La información puede ser tratada como una cantidad física bien definida, como la masa o la energía.

- La teoría de la información describe y cuantifica aspectos básicos que debe satisfacer cualquier “proceso de comunicación”.

- La utilidad práctica de esta teoría proviene de una multitud de teoremas que se pueden aplicar para computar límites fundamentales de eficiencia en cualquier proceso de comunicación, las cuales sirven como guías en el diseño de mejores sistemas de información.

- Daremos un pantallazo sobre la teoría, más que nada enfocados en un aspecto: **El efecto de las regularidades estadísticas sobre la eficiencia de la representación de la información** (no vamos a interesarnos en el efecto deletéreo del ruido o en la fidelidad de la representación, etc).



La retina y el procesamiento visual temprano

Algunos elementos de Teoría de la Información

- **Fuente de información**: Cualquier dispositivo, sistema o proceso que genera mensajes

  - Cada fuente tiene su propia representación para generar los mensajes.

  - Los mensajes son combinaciones de símbolos, seleccionados de un dado *alfabeto* (conjunto de todos los posibles símbolos que son capaces de producir). Se conocen como símbolos de la fuente o elementos de la representación en la fuente.

    → Ejemplo: Un libro. Es el producto de una fuente de información (idioma), cuyo alfabeto es el correspondiente a ese idioma más los símbolos de puntuación.

    → Ejemplo: Una imagen. Es el producto de una fuente de información (el entorno visual, por ejemplo), cuyo alfabeto son los niveles de gris en cada pixel del mosaico (imágenes en escala de gris). En el caso de imágenes de 8 bits, el alfabeto consta de 2^8 = 256 elementos.

  - Una cosa importante acerca de las fuentes de información "naturales" es que nunca producen mensajes en forma aleatoria. Los mensajes tienden a tener regularidades o lo que se conoce como *estructura estadística*. Es decir, la forma en la que los símbolos se agrupan al construir un mensaje obedece ciertas reglas estadísticas, específicas a la fuente.

    → Ejemplo: Aparición de ciertas letras o combinaciones de letras en un idioma.

La retina y el procesamiento visual temprano

Algunos elementos de Teoría de la Información

➢ Fuente de información

- Estructura estadística de los mensajes: Los símbolos no son utilizados con igual frecuencia. La **frecuencia de ocurrencia** de los símbolos de la fuente está determinada por el conjunto de probabilidades $\{P(m), m = 1, \ldots, N\}$.

- Estructura estadística de los mensajes: La selección de un símbolo es influenciada por los símbolos precedentes. Esto es, los símbolos en un mensaje NO son estadísticamente independientes: Existen dependencias o **correlaciones**.

⟶ Ejemplo: En castellano, a la letra "q" le va a seguir la letra "u". A esta última, probablemente una "e" o una "i". → es redundante tener dos símbolos para $\boxed{qu}$ pues siempre después de q hay una u

Esta influencia estadística puede ser bastante significativa (ejemplo anterior) y puede extenderse hasta muchos símbolos pasados. Matemáticamente, esta estructura es capturada por las probabilidades condicionales o las probabilidades conjuntas. Para mensajes de una longitud de l símbolos, estas probabilidades conjuntas se denotan mediante $\{P(m_1, m_2, \ldots, m_l)\}$, donde m_i es el i-ésimo símbolo en el mensaje.

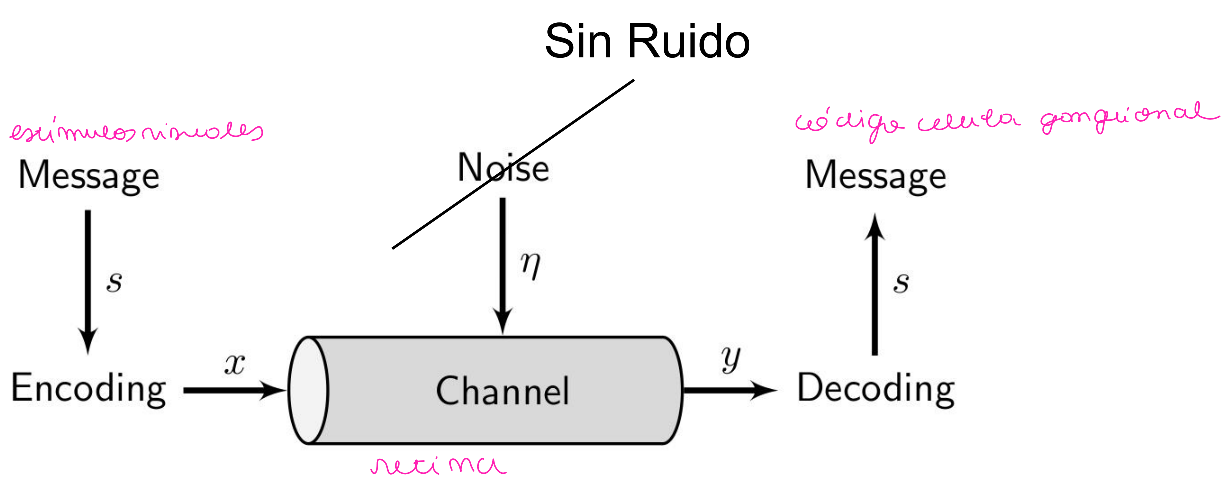
La retina y el procesamiento visual temprano

Algunos elementos de Teoría de la Información

➢ **Fuente de información**

- Modelo de fuente de información: Los modelamos como sistemas estocásticos, en los que se generan secuencias de símbolos (indexadas en tiempo u ordenadas) sujetas a ciertas reglas estadísticas.
  Dado que nuestro conocimiento de las regularidades estadísticas es limitado, en nuestro modelo estocástico de la fuente de información sólo podremos imponer las reglas que hemos caracterizado. Sin embargo, para las primeras etapas de los sistemas sensoriales, esto no debería ser un contratiempo puesto que sólo parte de las regularidades van a ser relevantes. Por ejemplo, sólo pueden ser significativas las correlaciones de a pares (pairwise).

➢ **Canal de información**: Medio por el que se transmite el mensaje



Algunos elementos de Teoría de la Información

- **Eficiencia de la representación de información**

  - En sistemas sin ruido, el mayor interés reside en cuantificar la eficiencia de una representación. La presencia de regularidades estadísticas en una representación disminuye esta eficiencia por dos motivos:

    - La regularidad estadística crea redundancia, de modo que algunas partes del mensaje pueden ser predichas "a priori" a partir de otros pedazos, y de conocer la estructura estadística con la que se construyen los mensajes.

    - La regularidad estadística impone limitaciones a la hora de fabricar los mensajes, de modo que se reducen las posibles combinaciones.

    Ambas características intuitivamente dan cuenta de "ineficiencias" a la hora de representar algo.

  - ¿De qué manera cuantificamos esto?

La retina y el procesamiento visual temprano

Algunos elementos de Teoría de la Información

➢ Eficiencia de la representación de información

Sea el conjunto/ensemble M de todos los mensajes que puede producir una fuente dada. A cada uno de esos mensajes se le asocia una cantidad estadística:

información : mapeo del espacio de prob.

$$I(w) \equiv -\log_2 P(w)$$

Información

Probabilidad de que aparezca el mensaje ◆

Normalización

$$\sum_{w=1}^{N} P(w) = 1$$

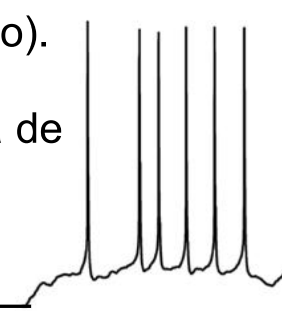
→ *I*(◆) esencialmente es una medida de la **sorpresa** o de la "falta de expectativa" que tenemos respecto de que aparezca ◆

↗ si un evento es altamente probable ⇒ da poca info sobre lo que pasó

P(◆) ~ 1 : Mensaje casi seguro de aparecer. Bajo valor informativo.

P(◆) ~ 0 : Mensaje inesperado. Alto valor informativo.

→ Sin embargo, estamos obviando el contenido del mensaje (valor semántico). Un mensaje puede ser informativo (en el sentido anterior) porque es inesperado, pero puede a su vez ser completamente irrelevante. La teoría de la información no cuantifica el significado del mensaje.



Algunos elementos de Teoría de la Información

➢ **Eficiencia de la representación de información**

Promediando la definición anterior sobre todos los mensajes de la fuente obtenemos la información promedio por mensaje,

$$H(M) = \sum_{w=1}^{\mathcal{N}} P(w)\ I(w) = -\sum_{w=1}^{\mathcal{N}} P(w) \log_2 P(w)$$

Entropía

Este es el objeto matemático que necesitamos para construir una medida cuantitativa de la eficiencia de la representación.

La retina y el procesamiento visual temprano

Algunos elementos de Teoría de la Información

- **Eficiencia de la representación de información**

+ entropía
+ impredecible

$$H(M) = \sum_{w=1}^{N} P(w)\ I(w) = -\sum_{w=1}^{N} P(w)\log_2 P(w)$$

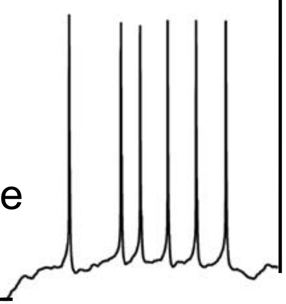
- La **entropía** es una medida de la impredecibilidad del ensemble M (alternativamente, de su contenido de información promedio).

- La **entropía** provee un **límite absoluto** respecto de cuál es la longitud mínima en dígitos binarios (bits) por mensaje que se necesita para, en promedio, representar las salidas de la fuente.

→ Ejemplo: Tirar una moneda (sin sesgo). La entropía de los mensajes generados es de 1 bit. Tirar n veces (en forma independiente): La entropía es de n bits. El logaritmo nos da esa propiedad de aditividad ante sucesos independientes.

- Si esta entropía es menor que la **capacidad del canal**, entonces es posible establecer un canal de comunicación donde los mensajes generados por la fuente pueden comunicarse en forma confiable al receptor.

- Compresión (lossless): Los mensajes se manipulan (codificación) de modo que la cantidad de información de los nuevos mensajes es igual a la original, pero se comunican con menos símbolos.



Algunos elementos de Teoría de la Información

- **Eficiencia de la representación de información**

  - Para ver de qué manera la entropía se puede usar como una medida cuantitativa de la eficiencia, consideremos la siguiente situación.

  Sea una representación en la cual cada mensaje ◆ se fabrica a partir de una combinación de *l* símbolos (cada uno con el mismo alfabeto). De este modo,

$$P(w) = P(m_1, \ldots, m_l)$$

  Analicemos el comportamiento de *H(M)* como función de la estructura estadística de la fuente, manteniendo obviamente el mismo alfabeto de *N* elementos y la longitud *l* fija.

  - Consideremos primero el caso de una fuente en donde los símbolos son **estadísticamente independientes**. Esto es,

$$P(m_1, \ldots, m_l) = P(m_1) \cdot P(m_2) \cdots P(m_l)$$

  de modo que la única estructura estadística presente es la del alfabeto: $\{P(m_i)\}$

  La entropía resulta una suma sobre los símbolos (aditividad de procesos independientes),

$\sum P(w) \log_2 P(w) \rightarrow \sum_i P(m_1^i) \ldots P(m_2^i) \left[\log_2 P(m_1^i) + \ldots \log_2 P(m_2^i)\right]$

$$H(M) = -\sum_{i=1}^{l} \sum_{m_i=1}^{N} P(m_i) \log_2 P(m_i) \equiv \sum_{i=1}^{l} H(i).$$

La retina y el procesamiento visual temprano

Algunos elementos de Teoría de la Información

- **Eficiencia de la representación de información**

  - Consideremos ahora el caso en el que los símbolos no son estadísticamente independientes de modo que P(m_1, … m_l) no se factoriza. En este caso, la entropía total no es igual a la suma de las entropías de los símbolos. En lugar de ello,

$$H(M) \leqslant \sum_{i=1}^{l} H(i)$$

caso ind → la entropía es máxima cuando son ind → las correlaciones bajan la entropía

Prueba: Pizarrón

Con esto, sabemos que una representación con símbolos independientes tiene MAYOR entropía que cuando se introducen correlaciones

  - Ahora nos gustaría decir algo sobre la estructura que debe tener cada uno de los *H(i)* para maximizar completamente la entropía. Esto es, busquemos la distribución de frecuencias que maximiza la entropía de los símbolos individuales:

$$\{P(m_i)\} \quad \text{tq} \quad H(i) = -\sum_{m_i=1}^{N} P(m_i)\log_2 P(m_i) \quad \text{es máxima}$$

Esto sucede cuando la distribución es la uniforme: $\{P(m_i) = 1/N,\ \forall\ m_i\}$

entropía máxima ↓ todos los eventos del alfabeto tienen igual prob.

Prueba: Pizarrón

La retina y el procesamiento visual temprano

Algunos elementos de Teoría de la Información

- **Eficiencia de la representación de información**

eventos ind

maximizamos cada
por asignarle 1/N a cada evento

○ Resumiendo,

$$\max_{ss}(H(M)) = \max_{\{P(m_i)\}}\left(\sum_{i=1}^{l} H(i)\right) = l\log_2 N \equiv C$$

entropía
máx
posible

En la situación planteada, la máxima entropía se alcanza con una representación sin regularidades estadísticas (símbolos independientes), con un alfabeto con elementos equiprobables.

○ La cantidad *C* representa la **capacidad** de la representación. Define la máxima información disponible en *l* símbolos que usan un alfabeto de N elementos.

○ Ahora, en base al límite impuesto por *C*, podemos definir una medida de la eficiencia:

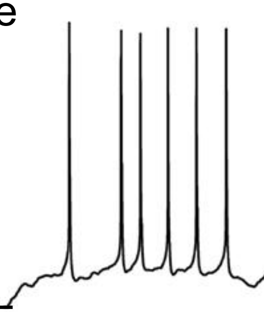
$$\mathcal{R} = 1 - H(M)/C$$

Redundancia de Shannon

si $H(M)=C$
no hay redundancia
si $H(M)=0$
totalmente redundante

○ En general, para mejorar la eficiencia, uno RECODIFICA la salida de una fuente en una representación que coloca a *C* (la capacidad del canal) tan cerca como se pueda de *H(M)*.

En principio, una estrategia de codificación que utiliza todas las regularidades estadísticas puede comprimir la representación hasta una versión mínima; esto es, puede alcanzar el límite *C = H(M)*.



La retina y el procesamiento visual temprano

Algunos elementos de Teoría de la Información

divertido

➢ **El costo de la ineficiencia**

- Supongamos un ADN ficticio donde las bases A T C G (adenine, thymine, cytosine, guanine) tengan la siguiente frecuencia

Symbol	$P(i)$	Code 1	Code 2
A	$\frac{1}{2}$	00	0
T	$\frac{1}{4}$	01	10
C	$\frac{1}{8}$	10	110
G	$\frac{1}{8}$	11	111

- El problema que buscamos resolver es encontrar un código que almacene largas cadenas de ADN en un disco rígido. No tenemos idea si existirán correlaciones entre símbolos, así que no podemos hacer nada con eso. Debemos tratar cada símbolo como si fuera independiente.
- La entropía de un símbolo es: $H(M) = \frac{1}{2}\times 1 + \frac{1}{4}\times 2 + \frac{1}{8}\times 3 + \frac{1}{8}\times 3 = \frac{7}{4}$

→ Esto significa que existirá algún código que representa este símbolo con una longitud promedio MINIMA de 7/4 bits/base.

- Código 1: 2 símbolos binarios. Cada mensaje mide 2 bits. Longitud promedio = 2 bits/base.
- Código 2: Ver tercera columna de la tabla. La longitud promedio es

$$\frac{1}{2}\times 1 + \frac{1}{4}\times 2 + \frac{1}{8}\times 3 + \frac{1}{8}\times 3 = \frac{7}{4}$$

Código más eficiente posible

Códigos de redundancia mínima de Huffman (procedimiento general)

- El código 2 es ¼ bits/base más corto, en promedio, que el código 1. Este es el costo de la ineficiencia para el código 1, lo cual se traduce en más espacio en disco en este problema.

Algunos elementos de Teoría de la Información

- **El costo de la ineficiencia**
  - En el ejemplo anterior vemos claro cuál es el costo de ser ineficientes. Necesitamos mayor espacio de almacenamiento, gastamos más energía para operar, los tiempos de transmisión son mayores, necesitamos mayor ancho de banda para transmitir, etc.
  - En los sistemas biológicos, el vínculo no es tan claro. Uno puede argumentar que, dado que el rango de respuestas de una neurona (capacidad o rango dinámico) es limitado, los sistemas que evolucionaron hacia representaciones más eficientes extraen una mayor cantidad de información del ambiente (sin necesidad de ampliar el tamaño) y, por lo tanto, tienen una ventaja evolutiva.

La retina y el procesamiento visual temprano

Algunos elementos de Teoría de la Información

➢ Tipos de ineficiencias

- En los sistemas que manejan información (sin ruido), hay **dos tipos** de ineficiencias. Cada una de estas motivan diferentes estrategias computacionales.

- Reescribiendo la redundancia de Shannon según,

$$\mathcal{R} = 1 - H(M)/C \quad \Rightarrow \quad \mathcal{R} = (1/C)(C - H(M))$$

sumamos y restamos inf de símbolos ind

$$\mathcal{R} = \frac{1}{C}\left(C - \sum_{i=1}^{l} H(i)\right) + \frac{1}{C}\left(\sum_{i=1}^{l} H(i) - H(M)\right)$$

  - Redundancia debido al uso desigual del alfabeto. $\sum_{i=1}^{l} H(i) = l \times \log_2 N = C$

    En general, $\sum_{i=1}^{l} H(i) < C$ y este término contribuye positivamente a la redundancia

  - Redundancia debido a las dependencias entre símbolos. $H(M) = \sum_{i=1}^{l} H(i)$

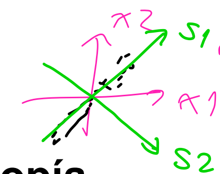
    Típicamente, existen relaciones estadísticas entre los símbolos y este término también contribuye positivamente a la redundancia

$$\sum_{i=1}^{l} H(i) > H(M)$$

La retina y el procesamiento visual temprano

Algunos elementos de Teoría de la Información

se quiere remover las correlaciones sin perder info



(x_1, x_2)
$\downarrow$
(s_1, s_2)

➢ **Códigos de mínima redundancia vs. Códigos de mínima entropía**

$$\mathcal{R} = \frac{1}{C}\left(C - \sum_{i=1}^{l} H(i)\right) + \frac{1}{C}\left(\sum_{i=1}^{l} H(i) - H(M)\right)$$

- Códigos de **mínima redundancia**. Se minimiza *R* como un todo.

- Códigos de **mínima entropía**. Se minimiza la parte de *R* debida a las correlaciones entre símbolos. Por eso también se lo conoce como código **factorial** (se factoriza la probabilidad multivariada). Dos formas de verlo:

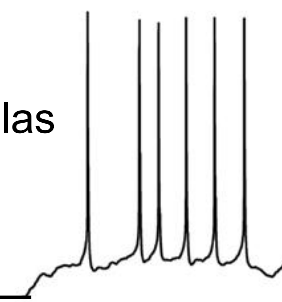
  - Se minimiza la diferencia $\sum_{i=1}^{l} H(i) - H(M)$

  - Se minimiza $\sum_{i=1}^{l} H(i)$ sujeta a la condición de una entropía total fija $H(M)$

Acá se puede ver que no se minimiza la redundancia para nada. Se pasa de redundancia por correlaciones a redundancia por uso desigual del alfabeto.

¿Por qué es interesante entonces? Porque una vez factorizado el mensaje, a posteriori podemos encontrar transformaciones que codifiquen a canales de menor capacidad (ver ejemplo anterior sobre las bases). Ver que en el esquema anterior no hicimos nada sobre *C*.

Es un **buen primer paso** hacia los códigos de mínima redundancia.

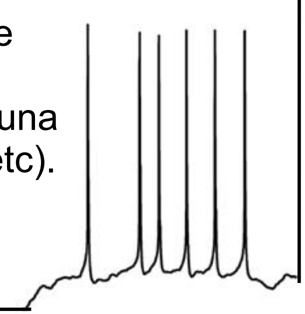


La retina y el procesamiento visual temprano

¿Teoría de la información = Teoría ecológica del procesamiento sensorial?

- Algunos argumentos a favor -

- En las vías sensoriales, las neuronas están adaptadas al procesamiento de señales provenientes del entorno natural.
- Como ya mencionáramos, estas señales tienen mucha regularidad estadística. Ejemplo: Estímulos visuales. Debido a la consistencia de los objetos, hay continuidad y suavidad en el perfil de luminosidad a lo largo del tiempo, del espacio, y de la composición cromática. Una representación pixel-a-pixel es extremadamente ineficiente (mosaico de fotorreceptores).
- Hay varias razones por las cuales el sistema nervioso podría invertir recursos en recodificar las señales incidentes, de modo de mejorar la eficiencia.
  - Information bottleneck: Es posible que en algún lado de la vía sensorial aparezca un cuello de botella (en términos de información), donde la tasa de transmisión de información hacia regiones profundas se ve limitada. Por ejemplo, limitación física (nervio óptico), limitación del procesamiento (attention bottleneck), etc.
  - Aprendizaje asociativo: Condicionamiento Pavloviano / clásico. Los estímulos (condicionado / no condicionado) se asocian durante el experimento. Un organismo debe comparar la probabilidad de dichos sucesos respecto de la probabilidad a priori. La única forma en que cualquier combinación de eventos esté representada es que sean independientes.
  - Reconocimiento de patrones: Ejemplo. Reconocimiento visual de un objeto. En lugar de reconocer todos los pixels que componen una figura (altamente correlacionados), es más eficiente reconocer una serie de aspectos INDEPENDIENTES (líneas, uniones, etc). Estos elementos son más informativos para el reconocimiento de este patrón y con los cuales es más económico ensamblar la escena visual (natural).



La retina y el procesamiento visual temprano

¿Teoría de la información = Teoría ecológica del procesamiento sensorial?

- Algunos argumentos a favor -

- Independientemente de los argumentos anteriores, podemos tomar un conjunto de estímulos naturales y ver qué es lo que resulta si aplicamos algún proceso de reducción de redundancia o de entropía.

- Recodificación para mejorar la eficiencia como un problema de **optimización**

  - Por simplicidad, nos enfocamos en el procesamiento visual

  - Hipótesis: El sistema visual construye una *representación factorial* (mínima entropía) del mundo natural.

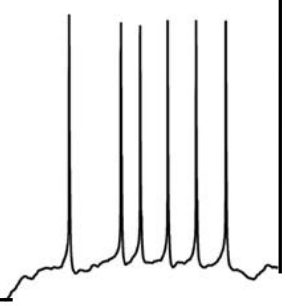
⇩

Debemos mapear las señales provenientes de los fotorreceptores, las cuales están altamente correlacionadas, en una representación en donde los elementos sean estadísticamente independientes.

Probablemente esto no ocurra en un solo paso, sino que se haga en forma iterativa, de modo que se vayan removiendo correlaciones cada vez más complejas.

mensajes que envía una célula ganglionar
son ind de los que genera otra

mensaje   mapeo   células ⇒ según los dist mensajes se requieren
dist mapeos para obtener eventos
independientes



La retina y el procesamiento visual temprano

¿Teoría de la información = Teoría ecológica del procesamiento sensorial?

- Código factorial: Reducción de la entropía como un problema de **optimización**

  - Sean

    luminosidad　　　　　　　　　　mensajes visuales

    $\{L_i, i = 1, \ldots, n\}$ $\longrightarrow$ Actividad de (las) *n* neuronas en la capa de entrada

    mensajes de salida

    $\{O_i, i = 1, \ldots, l\}$ $\longrightarrow$ Actividad de (las) *l* neuronas en la capa de salida

  - La respuesta de las neuronas de salida es alguna función (mapeo) de la entrada

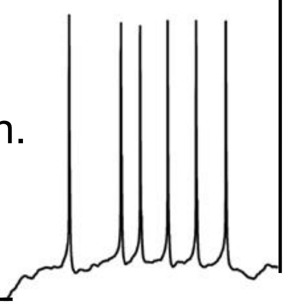
$$O_i = K_i(L_1, \ldots, L_n) \qquad \forall i$$

transformación que da salidas ind

  - ¿Qué $\{ K_i \}$ debemos elegir, de manera de obtener independencia estadística en $\{ O_i \}$?

  - Debemos minimizar la suma sobre la entropía de los símbolos/pixeles , $\sum_{i=1}^{l} H(O_i)$ al mismo tiempo que la entropía total se mantiene fija.

  - Definimos una función costo, $E\{ K_i \}$, que evalúa cuán bien distintas opciones de recodificaciones $\{ K_i \}$, minimizan la suma de entropías sin pérdida de información.



La retina y el procesamiento visual temprano

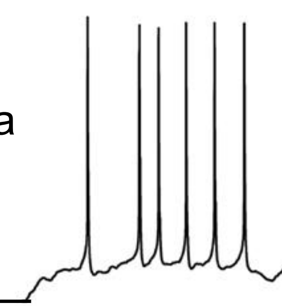
¿Teoría de la información = Teoría ecológica del procesamiento sensorial?

- Código factorial: Reducción de la entropía como un problema de **optimización**
  - Definimos una función costo, $E\{ K_i \}$, que evalúa cuán bien distintas opciones de recodificaciones $\{ K_i \}$, minimizan la suma de entropías sin pérdida de información.

$$E\{K_i\} = \sum_{i=1}^{l} H(O_i) - 2\rho\underbrace{[H(O_1,\ldots,O_l) - H(L_1,\ldots,L_n)]}$$

Penalidad sobre la pérdida de información – Multiplicador de Lagrange.

  - Recodificación óptima – Resolver las ecuaciones de variación $\frac{\delta E\{K_i\}}{\delta K_i} = 0$
  - Para funciones arbitrarias es un problema muy difícil. Sin embargo, la biología no puede implementar lo que sea. Existen familias de funciones plausibles biológicamente. Podemos acotar el espacio de solución.
  - Por ejemplo, la retina podría implementar, aunque sea aproximadamente, transformaciones lineales de las entradas.
  - En todo caso, cualquiera sea la transformación, la minimización dependerá de la estadística de la entrada (o de la salida, vía el mapeo).



La retina y el procesamiento visual temprano

¿Teoría de la información = Teoría ecológica del procesamiento sensorial?

Vamos a trabajar con la estadística de los datos de entrada (imágenes estáticas)

- **La estadística de las escenas naturales**

  - No tenemos un conocimiento acabado de la estadística de las escenas naturales.
  - Correlación espacial: Función de correlación de a pares bidimensional (pairwise).

correlación (*)

$$R(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = \langle L(\boldsymbol{x}_1) L(\boldsymbol{x}_2) \rangle$$

Ensemble averaging
$L(x_i)$: luminosidades sobre la media

  - Por invariancia de translación, esta autocorrelación debe depender de la distancia relativa

$$\boldsymbol{X} \equiv \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 : \; R(\boldsymbol{X})$$

la correlación de a pares es suficiente para estudiar una gran variedad de imágenes

  - Representando en Fourier

$$R(\boldsymbol{f}) = \int \mathrm{d}\boldsymbol{X} \, \exp(\mathrm{i}\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{X}) R(\boldsymbol{X})$$

Espectro de potencia espacial

  - Para señales ergódicas, (supongo, que cumplen (*))

$$R(\boldsymbol{f}) = L(\boldsymbol{f}) L(-\boldsymbol{f})$$

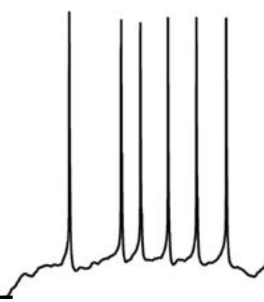
  - Entonces, transformando Fourier sobre las (luminosidades de) las imágenes, obtenemos que

experimental

$$R(\mathrm{f}) \sim 1/|\boldsymbol{f}|^2$$

Invariancia de escala

$$x \rightarrow \alpha x \longrightarrow R(\alpha x) \rightarrow R(x)$$



La retina y el procesamiento visual temprano

¿Teoría de la información = Teoría ecológica del procesamiento sensorial?

- **La estadística de las escenas naturales**
  - Modelo estadístico que adoptaremos para las escenas naturales: La luminosidad sobre los pixeles

$$(L(x_1), \ldots, L(x_n))$$

viene dada por una distribución de probabilidad Gaussiana de la forma

$$\boxed{P(\mathbf{L}) = [(2\pi)^n \det(\mathbf{R})]^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}\mathbf{L}\cdot\mathbf{R}^{-1}\cdot\mathbf{L}\right]}$$

donde $R_{ij} \equiv \langle L(x_i) L(x_j) \rangle \Longrightarrow R(\underline{\mathrm{f}}) \sim 1/|f|^2$

  - Esta distribución es la que da la máxima entropía H(L), dado que conocemos las correlaciones. Esto es, para un **R** conocido.