DEMOSTRACION

$$H(M) = \sum_{i=1}^{l} H(i) \quad \text{para símbolos independientes}$$

Tenemos

$$H(M) = -\sum_{m_1=1}^{N} \cdots \sum_{m_l=1}^{N} P(m_1, \dots, m_l) \log_2 P(m_1, \dots, m_l)$$

La conjunta es el producto

$$= -\sum_{m_1=1}^{N} \cdots \sum_{m_l=1}^{N} P(m_1) \cdots P(m_l) \cdot \log_2 [P(m_1) \cdots P(m_l)]$$

$$= -\sum_{m_1=1}^{N} \cdots \sum_{m_l=1}^{N} P(m_1) \cdots P(m_l) \left[\log_2 P(m_1) + \log_2 P(m_2) + \dots + \log_2 P(m_l)\right]$$

$$= -\Bigg\{ \sum_{m_2=1}^{N} \cdots \sum_{m_l=1}^{N} P(m_2) \cdots P(m_l) \sum_{m_1=1}^{N} P(m_1) \log_2 P(m_1) +$$

$$+ \sum_{m_1=1}^{N} \sum_{m_3=1}^{N} \cdots \sum_{m_l=1}^{N} P(m_1) P(m_3) \cdots P(m_l) \sum_{m_2=1}^{N} P(m_2) \cdot \log_2 P(m_2) +$$

$$\vdots$$

$$+ \underbrace{\sum_{m_1=1}^{N} \cdots \sum_{m_{l-1}=1}^{N} P(m_1) \cdots P(m_{l-1})}_{1} \sum_{m_l=1}^{N} P(m_l) \cdot \log_2 P(m_l)$$

→ y lo mismo para los factores en los otros términos

$$= -\left[\sum_{m_1=1}^{N} P(m_1) \cdot \log_2 P(m_1) + \dots + \sum_{m_l=1}^{N} P(m_l) \cdot \log_2 P(m_l)\right]$$

$$= -\sum_{i=1}^{l} \sum_{m_i=1}^{N} P(m_i) \cdot \log_2 P(m_i) = \sum_{i=1}^{l} H(i) \quad ✓$$

DEMOSTRACIÓN

$$H(M) \leq \sum_{i=1}^{\ell} H(i) \qquad \text{para símbolos correlacionados}$$

Consideremos el caso de 2 símbolos:

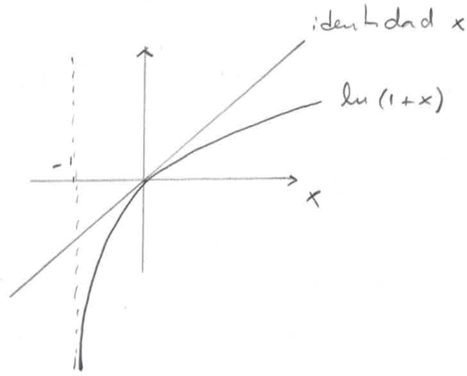
$$\boxed{m_1 \mid m_2} \longrightarrow P(m_1, m_2) \quad \text{donde } m_i = 1, \dots, N$$

(N elementos en el alfabeto)

Definimos la matriz

$$\boxed{D_{ij} = P(m_i)\,P(m_j) - P(m_i, m_j)} \quad : \; N \times N.$$

Por otro lado, tomemos la desigualdad



$$x \geq \ln(1+x)$$

Ahora veamos qué pasa si hacemos que

$$x = \frac{D_{ij}}{P(m_i, m_j)}$$

De la desigualdad,

Reemplazando definición de D_{ij}

$$\frac{D_{ij}}{P(m_i, m_j)} \geq \ln\left[1 + \frac{D_{ij}}{P(m_i, m_j)}\right] = \ln\left[1 + \frac{P(m_i)P(m_j) - P(m_i, m_j)}{P(m_i, m_j)}\right]$$

$$= \ln\left[\frac{P(m_i)\,P(m_j)}{P(m_i, m_j)}\right]$$

$\rightarrow$ Aunque no importa qué logaritmo sea!

$$\therefore \quad D_{ij} \geq P(m_i, m_j)\,\log_2\left[\frac{P(m_i)\,P(m_j)}{P(m_i, m_j)}\right]$$

$\rightarrow$ Sumando ambos miembros en i, j:

$$\sum_{m_i=1}^{N}\sum_{m_j=1}^{N} D_{ij} \geq \sum_{m_i=1}^{N}\sum_{m_j=1}^{N} P(m_i, m_j)\cdot\log_2\left[\frac{P(m_i)\,P(m_j)}{P(m_i, m_j)}\right]$$

$\Rightarrow$ Lado izquierdo:

Por normalización

$$\sum_{m_i=1}^{N}\sum_{m_j=1}^{N} D_{ij} = \sum_{m_i=1}^{N}\sum_{m_j=1}^{N}\left[P(m_i)\,P(m_j) - P(m_i, m_j)\right]$$

$$= \sum_{m_i=1}^{N} P(m_i)\sum_{m_j=1}^{N} P(m_j) - \sum_{m_i=1}^{N}\sum_{m_j=1}^{N} P(m_i, m_j) = 1 - 1$$

$$= 0$$

$\Rightarrow$ Lado derecho:

$$\sum_{m_i=1}^{N}\sum_{m_j=1}^{N} P(m_i, m_j)\cdot \log_2\left[\frac{P(m_i)P(m_j)}{P(m_i, m_j)}\right] = \sum_{m_i=1}^{N}\sum_{m_j=1}^{N} P(m_i, m_j)\cdot \log_2\left[P(m_i)\,P(m_j)\right] \underbrace{-\sum_{m_i=1}^{N}\sum_{m_j=1}^{N} P(m_i, m_j)\cdot \log_2 P(m_i, m_j)}_{H(M)}$$

$$\therefore \quad = H(M) + \sum_{m_i=1}^{N}\sum_{m_j=1}^{N} P(m_i, m_j)\cdot\left[\log_2 P(m_i) + \log_2 P(m_j)\right]$$

$$= H(M) + \sum_{m_i=1}^{N} \log_2 P(m_i) \underbrace{\sum_{m_j=1}^{N} P(m_i, m_j)}_{\substack{\text{Marginacion} \\ \parallel \\ P(m_i)}} + \sum_{m_j=1}^{N} \log_2 P(m_j) \underbrace{\sum_{m_i=1}^{N} P(m_i, m_j)}_{\substack{\text{Marginacion} \\ \parallel \\ P(m_j)}}$$

$$= H(M) + \underbrace{\sum_{m_i=1}^{N} P(m_i)\log_2 P(m_i)}_{-H(m_1)} + \underbrace{\sum_{m_j=1}^{N} P(m_j)\cdot\log_2 P(m_j)}_{-H(m_2)}$$

$$= H(M) - H(m_1) - H(m_2)$$

$\rightarrow$ Juntando:

$$0 \geq H(M) - H(m_1) - H(m_2)$$

$$\therefore \quad H(M) \leq H(m_1) + H(m_2) = \sum_{i=1}^{2} H(i).$$

$\Rightarrow$ La prueba para l símbolos es constructiva: Para 3 símbolos se toma el par (1,2) y el 3 por separado y se procede igual.

... y así sucesivamente.

DEMOSTRACIÓN

Correspondiente a la igualdad

$$H(i) \leq \log_2 N$$

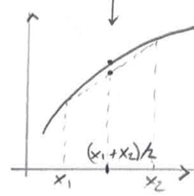
$$\text{Esto es:} \quad H_{max} = -\sum_{i=1}^{N} p(i) \log_2 p(i) \qquad \text{UNIFORM}$$

con $p(i) = \frac{1}{N}$

$$= -\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N} \cdot \log_2 \frac{1}{N} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N} \cdot \log_2 N$$

$$= N \cdot \frac{1}{N} \log_2 N = \log_2 N.$$

⊛ $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$



Tenemos:

$$H(i) = -\sum_{i=1}^{N} p(i) \log_2 p(i) = \sum_{i=1}^{N} p(i) \log_2 \frac{1}{p(i)}$$

Veamos qué nos dice la desigualdad de Jensen:

→ Suponga que f es una función continua estrictamente cóncava sobre el intervalo I y que $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$, con $a_i > 0$, $i = 1 \ldots N$

→ Entonces,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i) \leq f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right)$$

→ Extiende el concepto de ⊛

donde $x_i \in I$.

Apliquemos esta desigualdad. Hacemos

- $a_i = p(i)$ → $\sum_{i=1} a_i = 1$ ✓ (normalización)
  $a_i > 0$ ✓ (son probabilidades)
- $x_i = 1/p(i)$ → punto interior al semieje real.
- f es $\log_2$ → es continua estrictamente cóncava.

Entonces,

$$\sum_{i=1}^{N} a_i f(x_i) \leq f\left(\sum_{i=1}^{N} a_i x_i\right)$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{N} p(i) \cdot \log_2 \frac{1}{p(i)}}_{H(i)} \leq \log_2 \left[\sum_{i=1}^{N} \cancel{p(i)} \cdot \frac{1}{\cancel{p(i)}}\right] = \log_2 \left[\sum_{i=1}^{N} 1\right] = \log_2 N$$

Por tanto,

$$H(i) \leq \log_2 N \quad ✓$$