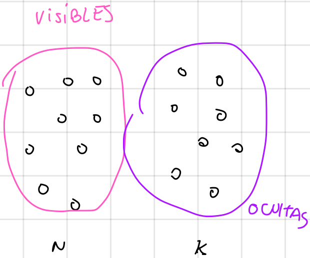
Generalizaciones del modelo de Boltzmman

$S_i = \pm 1 \qquad W_{ij} = W_{ji} \qquad h_i(t) = \sum_{j=1} W_{ij} S_j(t)$

$$P(S_i(t+1) = \pm 1) = \frac{e^{\pm \beta h_i(t)}}{e^{\beta h_i(t)} + e^{-\beta h_i(t)}}$$



n unidades visibles
k unidades ocultas
el objetivo es que los estados de las neuronas visibles
una distribución de probabilidad

$$P(\{S\}) = \frac{e^{-\beta E(\{S\})}}{Z} \qquad Z = \sum_{\{S\}} e^{-\beta E\{S\}}$$

$$E(\{S\}) = \frac{1}{2} \sum W_{ij} S_i S_j$$

$$\langle X(\{S\}) \rangle = \sum X(\{S_i\}) \, E(\{S_i\})$$

X → cualq función que dependa del estado del sistema

indexamos estados por $\alpha\beta$:

N neuronas visibles
2^N estados $\longrightarrow \alpha = 1, \dots, 2^N$
K neuronas ocultas
2^k estados $\longrightarrow \beta = 1, \dots, 2^k$

estado total $S_j^{\alpha\beta}$

$$E_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \sum_{ij} W_{ij} S_i^{\alpha\beta} S_j^{\alpha\beta}$$

$$P(\{S\}) \longrightarrow P^{\alpha\beta} = \frac{e^{-E_{\alpha\beta}/T}}{\sum_{\alpha,\beta} e^{-E_{\alpha\beta}/T}}$$

$$P_\alpha = \sum_\beta P_{\alpha\beta} = \sum_\beta \frac{e^{-E_{\alpha\beta}/T}}{Z}$$

↓ queremos que sea lo más parecida posible a una prob. objetivo r_α

se quiere encontrar W_{ij} / $P_\alpha = r_\alpha$

En el espacio de pesos, hay una dist que conviene minimizar:

$$D = \sum_\alpha R_\alpha \log\left(\frac{R_\alpha}{P_\alpha}\right) \qquad \text{si } R_\alpha = P_\alpha \Rightarrow D = 0$$

$\boxed{D \geq 0}$

$$\log x \geq 1 - \frac{1}{x}$$

long intervalo

$$\log x = \int_1^x \frac{d\tau}{t} \geq \widetilde{(x-1)} \cdot \frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{x}$$

decreciente con valor máximo en x

$$\Rightarrow \log\left(\frac{R_\alpha}{P_\alpha}\right) = 1 - \frac{P_\alpha}{R_\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad D \geq \sum_\alpha R_\alpha \left(1 - \frac{P_\alpha}{R_\alpha}\right)$$

$$= \underbrace{\sum_\alpha R_\alpha}_{=1} - \underbrace{\sum_\alpha P_\alpha}_{=1} \qquad \text{(son probabilidades)}$$

$$\Rightarrow \quad D \geq 0$$

Aprendizaje

$$\Delta W_{ij} = -\eta \frac{\partial D}{\partial W_{ij}}$$

$$= -\eta \sum_\alpha \frac{R_\alpha}{P_\alpha} \frac{\partial P_\alpha}{\partial W_{ij}}$$

$$\frac{\partial P_\alpha}{\partial W_{ij}} = \frac{\sum_\beta \left(\frac{1}{T}\right) e^{-E_{\alpha\beta}/T}}{Z} S_i^{\alpha\beta} S_j^{\alpha\beta}$$

$$- \frac{\sum_\beta e^{-E_{\alpha\beta}/T}}{Z^2} \sum_{\alpha\beta} e^{-E_{\alpha\beta}/T} S_i^{\alpha\beta} S_j^{\alpha\beta}$$

$$= \frac{1}{T}\left[\sum_\beta P_{\alpha\beta} S_i^\alpha S_j^\beta - P_\alpha \underbrace{\sum_{\alpha\beta} P_{\alpha\beta} S_i^{\alpha\beta} S_j^{\alpha\beta}}_{\langle S_i S_j \rangle}\right]$$

$$\Rightarrow \Delta W_{ij} = \frac{\eta}{T} \sum_{\alpha} \frac{R_\alpha}{P_\alpha} \left[\overbrace{\sum_{\beta} P_{\alpha\beta}\, S_i^{\alpha\beta} S_j^{\alpha\beta}}^{\text{especie de valor medio } \langle S_i S_j \rangle^{\alpha}_{CLAMPED}} - \underbrace{P_\alpha \langle S_i S_j \rangle}_{\langle S_i S_j \rangle_{FREE}} \right]$$

SUEÑO (destruye conexiones)

experiencia

prob conjunta

$P_{\alpha\beta} = P(\text{ocultos} = \beta,\ \text{visibles} = \alpha)$

$\Rightarrow P_{\alpha\beta} = P_{\beta|\alpha} P_\alpha$

elimina conexiones espurias

$$\langle S_i S_j \rangle_{FREE} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} S_i(t)\, S_j(t)$$

en el eq se reemplaza por el valor medio

$$\langle S_i S_j \rangle^{\alpha}_{CLAMPED} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} S_i(t)\, S_j(t)$$

neuronas estables están fijas en estado α

Almacenamiento de secuencia

Hasta ahora no había ninguna relación específica de orden al almacenar los objetos estáticos

En el experimento de Miyita hay evidencia de que si se muestran patrones ordenados, es más fácil memorizar

parámetro

$$W_{ij} = \frac{1}{N}\sum_{\mu=1}^{p} x_i^{\mu} x_j^{\mu} + \frac{\lambda}{N}\sum_{\mu=0}^{p} x_i^{\mu+1} x_j^{\mu}$$

Pongamos como cond. inicial x_i^1

$$S_j(0) = x_j^1$$

$$S_i(1) = sg\left(\sum_j W_{ij} S_j(0)\right)$$

$$= sg\left(\frac{1}{N}\sum_{\mu} x_i^{\mu} x_j^{\mu} + \frac{1}{N}\sum_{\mu} x_i^{\mu+1} x_j^{\mu} \,\Big|\, x_j^1\right)$$

$$= sg(x_i^1 + R + \lambda x_i^2 + R')$$

$$= sg(x_i^1 + \lambda x_i^2 + R'')$$

↓ si $\lambda < 1 \Rightarrow sg(x_i^1 + \lambda x_i^2) = x_i^1$ → Hopfield normal

$\lambda > 1 \Rightarrow sg(x_i^1 + \lambda x_i^2) = x_i^2$ → en cada paso de tiempo se pasa de un estado a otro

esto no puede funcionar como memoria asociativa

↓ la secuencia es demasiado rápida

↓ no hay tiempo para corregir los errores

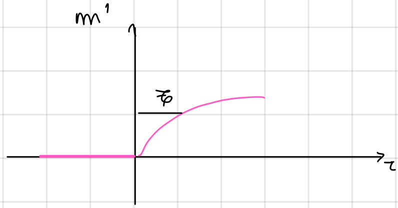
$$S_i(t+1) = sg(h_i(t))$$

$$h_i(t) = \sum_j \underbrace{\left[\frac{1}{N}\sum_\mu x_i x_j^\mu + \frac{\lambda}{N}\sum_\mu x_i^{\mu+1} x_j^\mu\right]}_{W_{ij}} S_j(\tau)$$

$$h_i(t) = \sum_j \left[\frac{1}{N}\sum_\mu x_i^\mu x_j^\mu S_j(\tau) + \frac{\lambda}{N}\sum_\mu x_i^{\mu+1} x_j^\mu \overline{S_j(\tau)}\right]$$

$$\overline{S_i(\tau)} = \int_{-\infty}^{t} \frac{e^{-(\tau-t')/2}}{\tau} S_j(t')\,dt'$$

Veamos cualitativamente la dinámica



$S_i(0) = x_i^1$

$t<0$ $\quad S_i(\tau) = x_i^R \to$ estado aleatorio ↓ no es ninguno de los patrones

$$m^1 = \frac{1}{N}\sum_j x_j^1 \overline{S_i(t)}$$