CLASE 3

→ Slide 4

$\rightarrow$ Debe ser constante : $P(o) = \alpha$

$$P(o)\, do = P(c)\, dc$$

$$do = \frac{1}{\alpha} P(c)\, dc$$

Integrando,

$$o = \frac{1}{\alpha} \int_{-1}^{c} P(c')\, dc'$$

↳ Por normalización $1 = \int_0^{G_{max}} P(o)\, do = \frac{1}{\alpha} \cdot G_{max}$

$\therefore \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{G_{max}}$

$$o = \frac{1}{G_{max}} \int_{-1}^{c} P(c')\, dc'$$

→ Slide 16

Queremos ver cuanto vale $H(O_1, \ldots, O_\ell) - H(L_1, \ldots, L_\ell)$; esto es, la diferencia en las entropías entre la entrada y la representación, BAJO UN MODELO/MAPEO LINEAL :

$$O_i = \sum_{j=1}^{\ell} K_{ij}\, L_j$$

→ Las probabilidades transforman según (pasando a vars. CONTINUAS)

$$f(O_1, \ldots, O_\ell) \cdot dO_1 \ldots dO_\ell = f(L_1, \ldots, L_\ell) \cdot dL_1 \ldots dL_\ell$$

$$f(O_1, \ldots, O_\ell) \cdot \det \begin{vmatrix} \frac{\partial O_1}{\partial L_1} & \cdots & \frac{\partial O_1}{\partial L_\ell} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial O_\ell}{\partial L_1} & \cdots & \frac{\partial O_\ell}{\partial L_\ell} \end{vmatrix} = f(L_1, \ldots, L_\ell)$$

↳ donde $\frac{\partial O_i}{\partial L_j} = K_{ij}$

$$f(O_1, \ldots, O_\ell) \cdot \det \mathbb{K} = f(L_1, \ldots, L_\ell)$$

$$f(O_1, \ldots, O_\ell) = \frac{f(L_1, \ldots, L_\ell)}{|\det \mathbb{K}|}$$

→ Calculemos la entropía de salida $H(O_1, \ldots, O_\ell)$ en variable continua, que es lo que asumimos antes al considerar el mapeo como una transformación de coordenadas (diferenciable):

$$H(O_1, \ldots, O_\ell) = - \int \underbrace{f(O_1, \ldots, O_\ell)}_{\text{densidad de probabilidad.}} \cdot \log_2 f(O_1, \ldots, O_\ell) \; dO_1 \ldots dO_\ell$$

→ por conservación de probabilidades:

$$f(O_1, \ldots, O_\ell) \cdot dO_1 \ldots dO_\ell = f(L_1, \ldots, L_\ell) \cdot dL_1 \ldots dL_\ell$$

→ Además, la f que aparece en el logaritmo la reemplazamos por lo que hallamos anteriormente:

$$H(O_1, \ldots, O_\ell) = - \int f(L_1, \ldots, L_\ell) \cdot \log_2 \frac{f(L_1, \ldots, L_\ell)}{|\det \mathbb{K}|} \; dL_1 \ldots dL_\ell$$

$$= - \int f(L_1, \ldots, L_\ell) \cdot \left[\log_2 f(L_1, \ldots, L_\ell) - \log_2 |\det \mathbb{K}| \right] dL_1 \ldots dL_\ell$$

$$= \overbrace{- \int f(L_1, \ldots, L_\ell) \cdot \log_2 f(L_1, \ldots, L_\ell) \; dL_1 \ldots dL_\ell}^{H(L_1, \ldots, L_\ell)}$$

$$+ \int f(L_1, \ldots, L_\ell) \cdot \underbrace{\log_2 |\det \mathbb{K}|}_{\text{sale de la integral}} \; dL_1 \ldots dL_\ell$$

$\therefore$

$$H(O_1, \ldots, O_\ell) = H(L_1, \ldots, L_\ell) + \log_2 |\det \mathbb{K}| \underbrace{\int f(L_1, \ldots, L_\ell) \; dL_1 \ldots dL_\ell}_{1 \text{ (normalización)}}$$

$$\rightarrow H(O_1, \ldots, O_\ell) - H(L_1, \ldots, L_\ell) = \log_2 |\det \mathbb{K}|$$

↓

que se puede escribir como

$$|\det \mathbb{K}|^2 = \det (\mathbb{K}^T \cdot \mathbb{K})$$

$$= \frac{1}{2} \log_2 \det (\mathbb{K}^T \cdot \mathbb{K}) \checkmark$$

→ Slide 17

O es Gaussiana (transformación lineal de una Gaussiana).

↳ Definida por : Media → $\langle \vec{O} \rangle = \langle \mathbb{K} \cdot \vec{L} \rangle$

$$= \mathbb{K} \cancel{\langle \vec{L} \rangle}^{0} = \vec{0}$$

: Matriz de covarianza : $\langle O_i O_j \rangle$

$$\tilde{\mathbb{R}} = \langle \vec{O} \vec{O}^T \rangle = \langle \mathbb{K} \vec{L} \vec{L}^T \mathbb{K}^T \rangle$$

$$= \mathbb{K} \langle \underbrace{\vec{L} \vec{L}^T}_{\mathbb{R}} \rangle \mathbb{K}^T = \underline{\underline{\mathbb{K} \cdot \mathbb{R} \, \mathbb{K}^T}} \checkmark$$

↳ Matriz de covarianza en luminosidades

→ Slide 18 : Queremos ver cuanto vale $H(O_i)$: Entropía de un símbolo de salida.

Tenemos que O_i es Gaussiana,

$$P(O_i) = \frac{1}{2\pi \tilde{R}_{ii}} \exp\left(-\frac{1}{2\tilde{R}_{ii}} O_i^2\right)$$

Entonces,

$$H(O_i) = -\int dO_i \, P(O_i) \log_2 P(O_i) = \int dO_i \, P(O_i) \left[-\log_2\left(\frac{1}{2\pi \tilde{R}_{ii}} \exp\left(-\frac{1}{2\tilde{R}_{ii}} \cdot O_i^2\right)\right)\right]$$

$$= \int dO_i \, P(O_i) \left[\log_2 (2\pi \tilde{R}_{ii}) - \frac{1}{\ln 2} \ln\left[\exp\left(-\frac{1}{2\tilde{R}_{ii}} O_i^2\right)\right]\right]$$

$$= \log_2 (2\pi \tilde{R}_{ii}) \underbrace{\int dO_i \, P(O_i)}_{1} - \frac{1}{\ln 2} \int dO_i \, P(O_i) \left[-\frac{1}{2\tilde{R}_{ii}} O_i^2\right]$$

$$= \log_2 (2\pi \tilde{R}_{ii}) + \frac{1}{\ln 2} \frac{1}{2\tilde{R}_{ii}} \underbrace{\int O_i^2 \, P(O_i) \, dO_i}_{\tilde{R}_{ii}}$$

$$= \log_2 (2\pi \tilde{R}_{ii}) + \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{2\cancel{\tilde{R}_{ii}}} \cancel{\tilde{R}_{ii}} = \log_2 (\tilde{R}_{ii}) + \log_2 (2\pi) + \frac{1}{2\ln 2}$$

$$H(O_i) = \log_2 (\tilde{R}_{ii}) + \text{constantes.}$$

→ Slide 20:

Tengo $E\{\mathbb{K}\} = Tr(\mathbb{K}\cdot R\cdot \mathbb{K}^T) - \rho \log_2 \det(\mathbb{K}^T\mathbb{K})$

Quiero ver qué queda pasando a Fourier.

---

* Primer término:

Pasando al continuo

Sabemos que:

$$Tr(\mathbb{K}\,\mathbb{R}\,\mathbb{K}^T) = \sum_i O^2(x_i) = \int O^2(x)\,dx$$

→ Del teorema de Parseval: $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(\omega)|^2 df$

Entonces,

transf. de señal real

$$Tr(\mathbb{K}\,R\,\mathbb{K}^T) = \int O(f)\cdot O^*(f)\,df = \int O(f)\cdot O(-f)\,df$$

Pero si:

$$\underbrace{O_i = K_{ij}\,L_j \qquad \text{donde } K_{ij} = K(x_i - x_j)}_{\text{CONVOLUCION}}$$

Luego

$$O(f) = K(f)\cdot L(f)$$

Por tanto,

$$Tr(\mathbb{K}\,\mathbb{R}\,\mathbb{K}^T) = \int K(f)\cdot L(f)\cdot K(-f)\cdot L(-f)\,df$$

$$= \int df\ \underbrace{K(f)\cdot K(-f)}_{|K(f)|^2}\cdot \underbrace{L(f)\cdot L(-f)}_{R(f)}$$

→ ver clase pasada "Espectro de potencia" es la transf. de Fourier de la correlación espacial

$R(x_1,x_2) = \langle L(x_1)\,L(x_2)\rangle$

↓

$R(f) = L(f)\,L(-f)$

Esto es,

$$Tr(\mathbb{K}\,\mathbb{R}\,\mathbb{K}^T) = \int df\ |K(f)|^2\ \mathbb{R}(f)$$

---

* Segundo término: $\log \det(\mathbb{K}^T \mathbb{K}) = ?$

→ $\mathbb{K}$ es una matriz cíclica: $k_{ij} = k(x_i - x_j)$

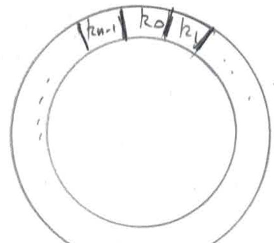
$$\cdots \; x_N \mid x_1 \mid x_2 \mid x_3 \mid \cdots \mid x_{N-1} \mid x_N \mid x_1 \mid x_2 \mid \cdots$$

$k(x_1 - x_1) = k(0)$

$k(x_2 - x_1) = k(1)$

$$\mathbb{K} = \begin{pmatrix} k_0 & k_{n-1} & \cdots & k_1 \\ k_1 & k_0 & \cdots & k_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{n-1} & k_{n-2} & & k_0 \end{pmatrix}$$

↳ Cada columna es una versión "rotada" de la primer columna



→ Estas matrices tienen propiedades MUY ESPECIALES.

En particular, la forma diagonal es:

$$\mathrm{diag}(\mathbb{K}) = \begin{pmatrix} K_0 & & \textcircled{0} \\ & K_1 & \\ & & \ddots \\ \textcircled{0} & & & K_{n-1} \end{pmatrix}$$

donde los elementos diagonales corresponden a la transformada de Fourier de la primera columna de K.

$$K_m = \sum_{l=0}^{n-1} k_l \cdot e^{-\frac{2\pi i}{n} m l}$$

El determinante de $\mathbb{K}$ es, consecuentemente:

$$\det \mathbb{K} = \prod_{m=1}^{n} K_m$$

Dado que nos interesa $\log \det(\mathbb{K}^T \mathbb{K})$, tendremos:

$$\log \det(\mathbb{K}^T \mathbb{K}) = \log[\det(\mathbb{K}^T) \cdot \det(\mathbb{K})] = \log[\det(\mathbb{K})]^2 = \log\left[\prod_{m=1}^{n} K_m\right]^2$$

$$= \log \prod_{m=1}^{n} K_m^2 = \sum_{m=1}^{n} \log_2 K_m^2$$

↓ Pasando al continuo.

$$= \int df \, \log_2 |K(f)|^2 \quad \checkmark$$

Slide 20 → Solución

Tenemos

$$E\{k\} = \int df \, |k(f)|^2 R(f) - \rho \int df \, \log_2 |k(f)|^2$$

Entonces

$$\frac{\delta E}{\delta k} = \left.\frac{\partial E(\{k + \alpha k'\})}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0}$$

$$= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \int df \, |k(f) + \alpha k'(f)|^2 R(f) - \rho \int df \, \log_2 |k(f) + \alpha k'(f)|^2 \right\}_{\alpha=0}$$

$$= \left\{ \int df \; 2 \, |k(f) + \alpha k'(f)| \cdot k'(f) \, R(f) - \rho \int df \, \frac{2}{\ln 2} \, \frac{k'(f)}{k(f) + \alpha k'(f)} \right\}_{\alpha=0}$$

$$= 2 \int df \, k(f) \, k'(f) \, R(f) - \frac{2\rho}{\ln 2} \int df \, \frac{k'(f)}{k(f)}$$

Pero $k'(f)$ puede ser cualquier cosa → función de prueba $k'(f) = \delta(f - f_0)$

Así,

$$\frac{\delta E}{\partial k} = 2 \, k(f_0) \, R(f_0) - \frac{2\rho}{\ln 2} \, \frac{1}{k(f_0)} = 0 .$$

$$\rightarrow \quad |k(f_0)|^2 \propto \frac{1}{R(f_0)}$$

Pero f_0 puede ser cualquier frecuencia!

$$|k(f)|^2 \propto \frac{1}{R(f)}$$