La retina y el procesamiento visual temprano

Retomando

$$\mathcal{R} = 1 - H(M)/C$$

Redundancia de Shannon

$$\mathcal{R} = \frac{1}{C}\left(C - \sum_{i=1}^{l} H(i)\right) + \frac{1}{C}\left(\sum_{i=1}^{l} H(i) - H(M)\right)$$

- Redundancia debido al uso desigual del alfabeto. $\sum_{i=1}^{l} H(i) = l \times \log_2 N = C$

  En general, $\sum_{i=1}^{l} H(i) < C$ y este término contribuye positivamente a la redundancia

- Redundancia debido a las dependencias entre símbolos. $H(M) = \sum_{i=1}^{l} H(i)$

  Típicamente, existen relaciones estadísticas entre los símbolos y este término también contribuye positivamente a la redundancia

$$\sum_{i=1}^{l} H(i) > H(M)$$

Códigos eficientes: Estrategias neuronales

➢ **Remoción de ineficiencias debidas al uso desigual de los niveles de respuesta neuronal**

A Simple Coding Procedure Enhances a Neuron's Information Capacity

Simon Laughlin

Z. Naturforsch. **36 c,** 910–912 (1981)

- Células LMC (large monopolar cells) en el ojo compuesto de la mosca. Son interneuronas que responden a las señales de **contraste**.

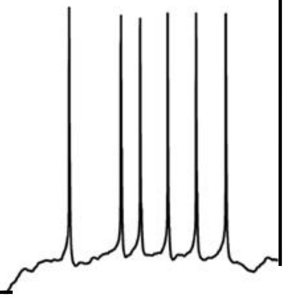
- Como todas las células del sistema visual temprano, estas células se enfrentan a un serio problema: tienen un rango finito de respuestas (rango dinámico); esto es, tienen un número pequeño de niveles de respuesta distinguibles.

- Dado un mapeo estático (función I/O: señales de contraste -> niveles de respuesta), ¿cómo debe ser la ganancia de estas células (cuán sensibles deben ser al contraste) de modo de generar una representación de salida lo más eficiente posible?

- Para lograr una codificación eficiente, debemos seleccionar una ganancia que utilice en forma pareja el alfabeto de salida (niveles de respuesta).

$$\max_{ss}(H(M)) = \max_{\{P(m_i)\}}\left(\sum_{i=1}^{l} H(i)\right) = l\log_2 N \equiv C$$

$$\boxed{\{P(m_i) = 1/N,\ \forall\ m_i\}}$$



La retina y el procesamiento visual temprano

Códigos eficientes: Estrategias neuronales

- **Remoción de ineficiencias debidas al uso desigual de los niveles de respuesta neuronal**

  - Denotemos

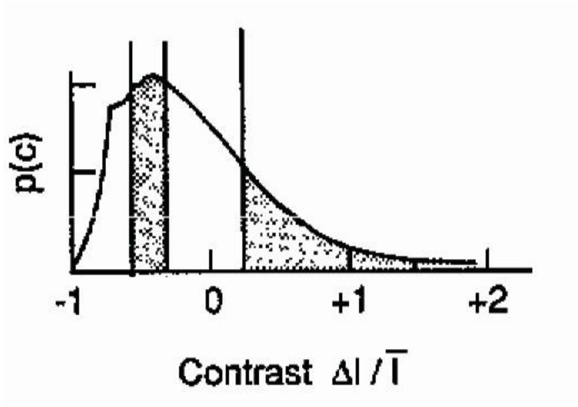
    $c \longrightarrow$ Señal de contraste (entrada)

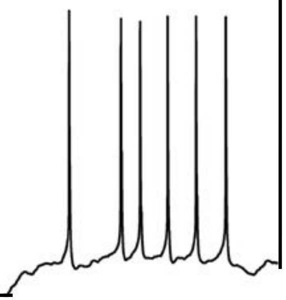
    $o \longrightarrow$ Nivel de respuesta (salida)

    $o = g(c) \longrightarrow$ Mapeo

  - Regularidades estadísticas en la entrada (contraste) $\Rightarrow$ La única estructura está dada por la distribución de probabilidad

  - Laughlin midió muestras de contraste en el ambiente natural de la mosca y obtuvo su distribución de probabilidad.





Códigos eficientes: Estrategias neuronales

- **Remoción de ineficiencias debidas al uso desigual de los niveles de respuesta neuronal**

  - Para lograr una codificación óptima, la función g debería elegirse de modo que la distribución de salida, P(*o*), sea uniforme: P(*o*) = α.

  - Matemáticamente, el mapeo no deja de ser un cambio de variables. Las distribuciones de probabilidad transforman manteniendo el área (la probabilidad):

$$\overbrace{P(o)}^{\text{salida}}\ \mathrm{d}o = \overbrace{P(c)}^{\text{entrada}}\ \mathrm{d}c$$

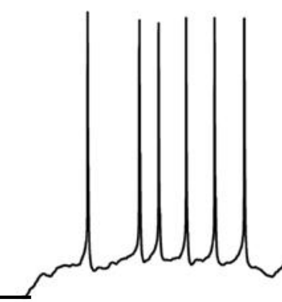
  - Pidiendo que P(*o*) = α, e integrando:

$$o = g(c) = \frac{1}{\alpha}\int_{-1}^{c} \mathrm{d}c'\, P(c')$$

$$\frac{o}{o_{\max}} = \int_{-1}^{c} \mathrm{d}c'\, P(c')$$

$\Rightarrow$ El mapeo sigue a la **distribución acumulada**

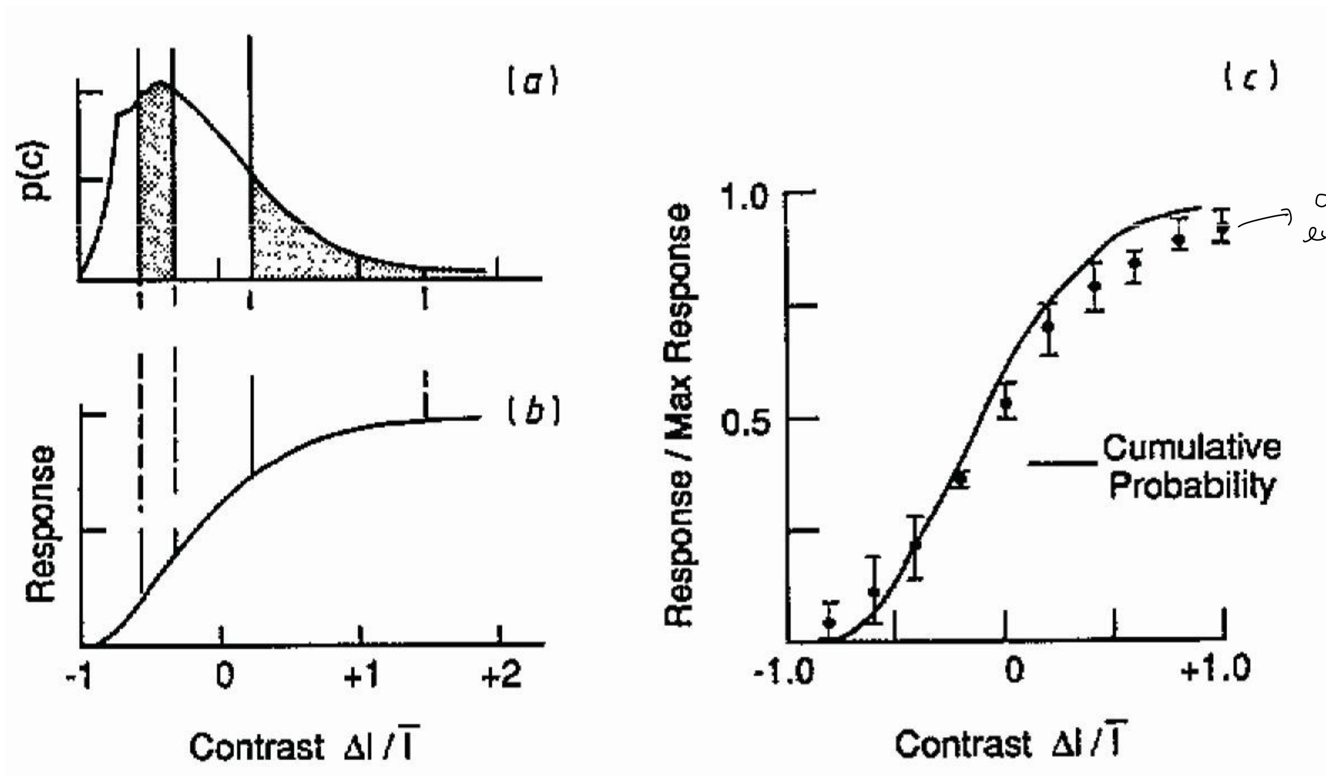
  - Por otro lado, la sensibilidad es d*o*/d*c* $\propto$ P(*c*), con lo cual la neurona es más sensible alrededor del contraste más probable (moda).



Códigos eficientes: Estrategias neuronales

- **Remoción de ineficiencias debidas al uso desigual de los niveles de respuesta neuronal**

acumulada



datos experimentales

La retina y el procesamiento visual temprano

Códigos eficientes: Estrategias neuronales

- **Remoción de ineficiencias debidas al uso desigual de los niveles de respuesta neuronal**

  - Control de ganancia en una capa de n neuronas

Sea un conjunto de n neuronas, cada una de las cuales recibe señales de entrada de un conjunto espacial de n células sensoriales que sensan el contraste:

$\{c_i, i = 1, \ldots, n\}$ $\longrightarrow$ Señales de entrada desde células sensoriales (contraste)

$\{o_i, i = 1, \ldots, n\}$ $\longrightarrow$ Respuesta de las neuronas

$o_i = g_i(c_1, \ldots, c_n)$ $\longrightarrow$ Mapeo

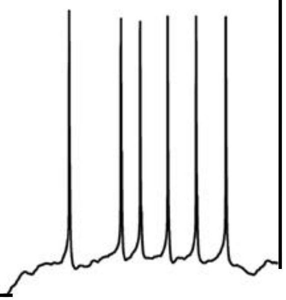
Al igual que antes

$$P(o_1, \ldots, o_n)\ \mathrm{d}o_1 \cdots \mathrm{d}o_n = P(c_1, \ldots, c_n)\ \mathrm{d}c_1 \cdots \mathrm{d}c_n$$

donde pedimos que

$$P(o_1, \ldots, o_n) = \alpha$$

No resulta fácil decir algo con lo que queda.



La retina y el procesamiento visual temprano

Códigos eficientes: Estrategias neuronales

- **Remoción de ineficiencias debidas al uso desigual de los niveles de respuesta neuronal**

  - Control de ganancia en una capa de n neuronas

    Excepto que factoricemos el código previamente!

    Esto es, las señales { c_i } se convierten en señales { γ_i } tales que

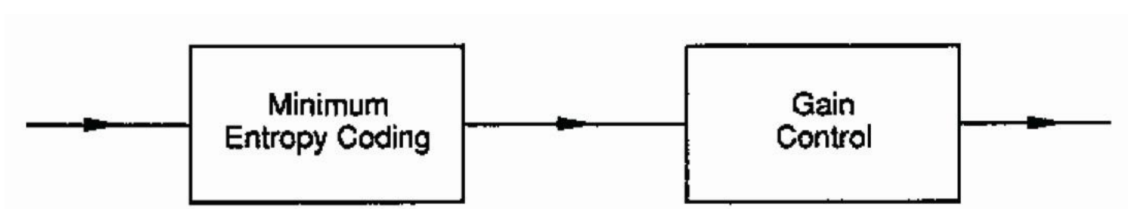
$$P(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) = P(\gamma_1) \cdots P(\gamma_n)$$

En este caso, la ecuación de la transformación de las distribuciones se resuelve análogamente al caso univariado, para cada una de las variables independientes.

$$\frac{o_i}{o_{\max}} = \int_{-1}^{\gamma_i} \mathrm{d}\gamma_i' P(\gamma_i') \quad \Rightarrow$$

Mapeos individuales proporcionales a la distribución acumulada de las variables de-correlacionadas.

  - **Control de ganancia en una capa de n neuronas. Propuesta general.**



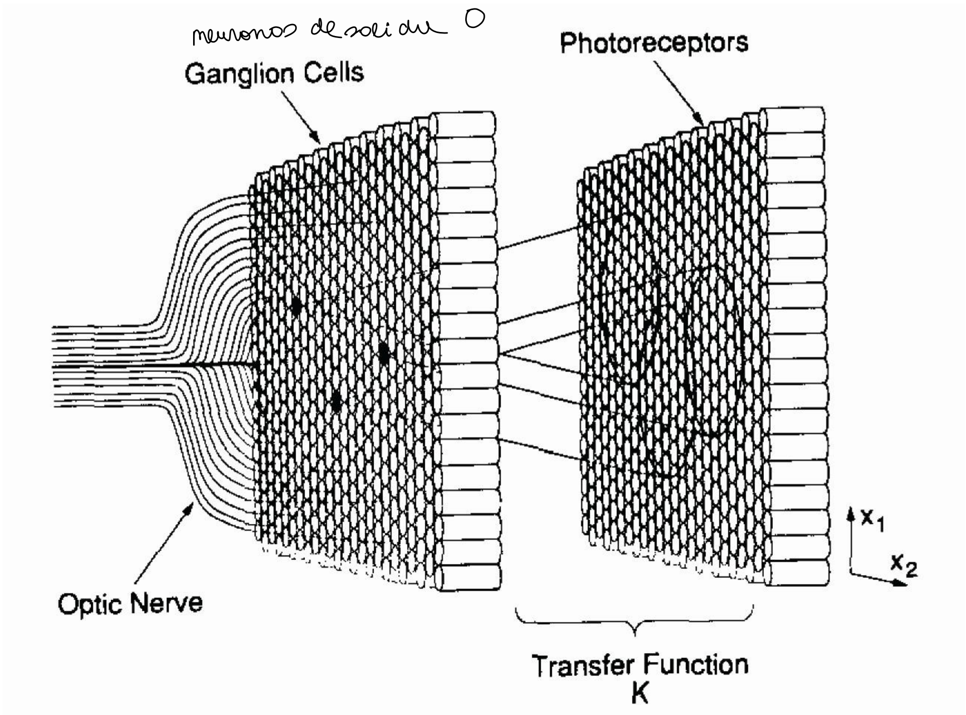
Códigos eficientes: Estrategias neuronales

- **Estrategias de codificación en la retina para el procesamiento espacio-temporal**

  - La retina: Algunos hechos experimentales que nos interesan

    Pensemos en la retina como una caja negra. Tenemos la actividad en los fotorreceptores como una medida directa de la intensidad de luz incidente y la actividad de disparo en las células ganglionares como la representación de salida (código de tasas).

    Entre la entrada y la salida tenemos una **función de transferencia**, que especifica cómo la salida (tasa de disparo) se relaciona con la entrada (intensidad de luz).



La retina y el procesamiento visual temprano

Códigos eficientes: Estrategias neuronales

- **Estrategias de codificación en la retina para el procesamiento espacio-temporal**

  - La retina: Algunos hechos experimentales que nos interesan

La función de transferencia la podemos medir por medio de registros de neuronas individuales. Se encuentra que, luego de un período de adaptación, la tasa de disparo de salida de una célula ganglionar está dada, con buena aproximación, como un promedio pesado de la actividad en los fotorreceptores, sobre una región continua llamada **campo receptivo**.

Matemáticamente,

$$O(\mathbf{x}_i, t) = \int \mathrm{d}\mathbf{x}'\, \mathrm{d}t'\, K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}'; t, t') L(\mathbf{x}', t') \equiv K \cdot L$$

donde,

$L(\mathbf{x}', t') \longrightarrow$ Actividad en el fotorreceptor ubicado en x’, al tiempo t’

$K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}'; t, t') \longrightarrow$ Kernel o función de transferencia

La retina y el procesamiento visual temprano

Códigos eficientes: Estrategias neuronales

➢ **Estrategias de codificación en la retina para el procesamiento espacio-temporal**

○ La retina: Algunos hechos experimentales que nos interesan

Siempre podemos transformar las coordenadas

$$X \equiv (x_i - x')/2 \longrightarrow \text{Posición relativa}$$

$$(x_i + x')/2 \longrightarrow \text{Posición promedio}$$

$$K((x_i - x')/2, \cancel{(x_i + x')/2}; t, t')$$

$\longrightarrow$ Muy poca dependencia de la posición absoluta

En el dominio temporal pasa lo mismo. Luego de un período de adaptación, el kernel depende de la diferencia de tiempos

$$T = t - t'$$

El kernel pasa a depender de las coordenadas relativas:

$$K(x_i, x'; t, t') = K(x_i - x'; t - t')$$

La retina y el procesamiento visual temprano

Códigos eficientes: Estrategias neuronales

➢ **Estrategias de codificación en la retina para el procesamiento espacio-temporal**

- La retina: Algunos hechos experimentales que nos interesan

Transformando Fourier - 2 dominios: espacial (2D/1D) + temporal

$$\boxed{K(\boldsymbol{f}, w) = \int \mathrm{d}\boldsymbol{X}\, \mathrm{d}T\, \exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{X} - \mathrm{i}wT) K(\boldsymbol{X}, T)}$$

Por simetría de rotación

$$K(\boldsymbol{f}, w) = K(|\boldsymbol{f}|, w) \quad \longrightarrow \quad \text{1 escala espacial + 1 escala temporal}$$

Códigos eficientes: Estrategias neuronales

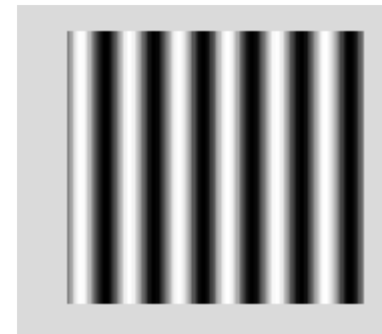
➢ **Estrategias de codificación en la retina para el procesamiento espacio-temporal**

○ La retina: Algunos hechos experimentales que nos interesan

En experimentos, los estímulos de luminosidad suelen ser gratings sinusoidales

$O(x,t) = \int K(x-x', t-t')\, L(x',t')\, dx'dt'$

$O(f,\omega) = K(f-\omega)\, L(f+\omega)$



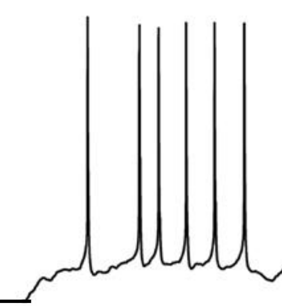
$$L = I_0(1 + m\cos(fx)\cos(wt))$$

Y lo que se hace es que, para un dado nivel medio de luminosidad, se mide el contraste mínimo que se necesita para obtener un cierto nivel de respuesta (a las frecuencias de estimulación).

Dado que, para un kernel con simetrías de translación, la respuesta está dada por una convolución, la amplitud de la misma (por linealidad, estará oscilando con las mismas frecuencias) es fácil de calcular en Fourier

$$I_0 K_{I_0}(|f|, w) = \frac{r_0}{m_{|f|,w,I_0}}$$

Entonces, existe una familia de filtros retinales, para cada nivel de luminosidad media I_0.

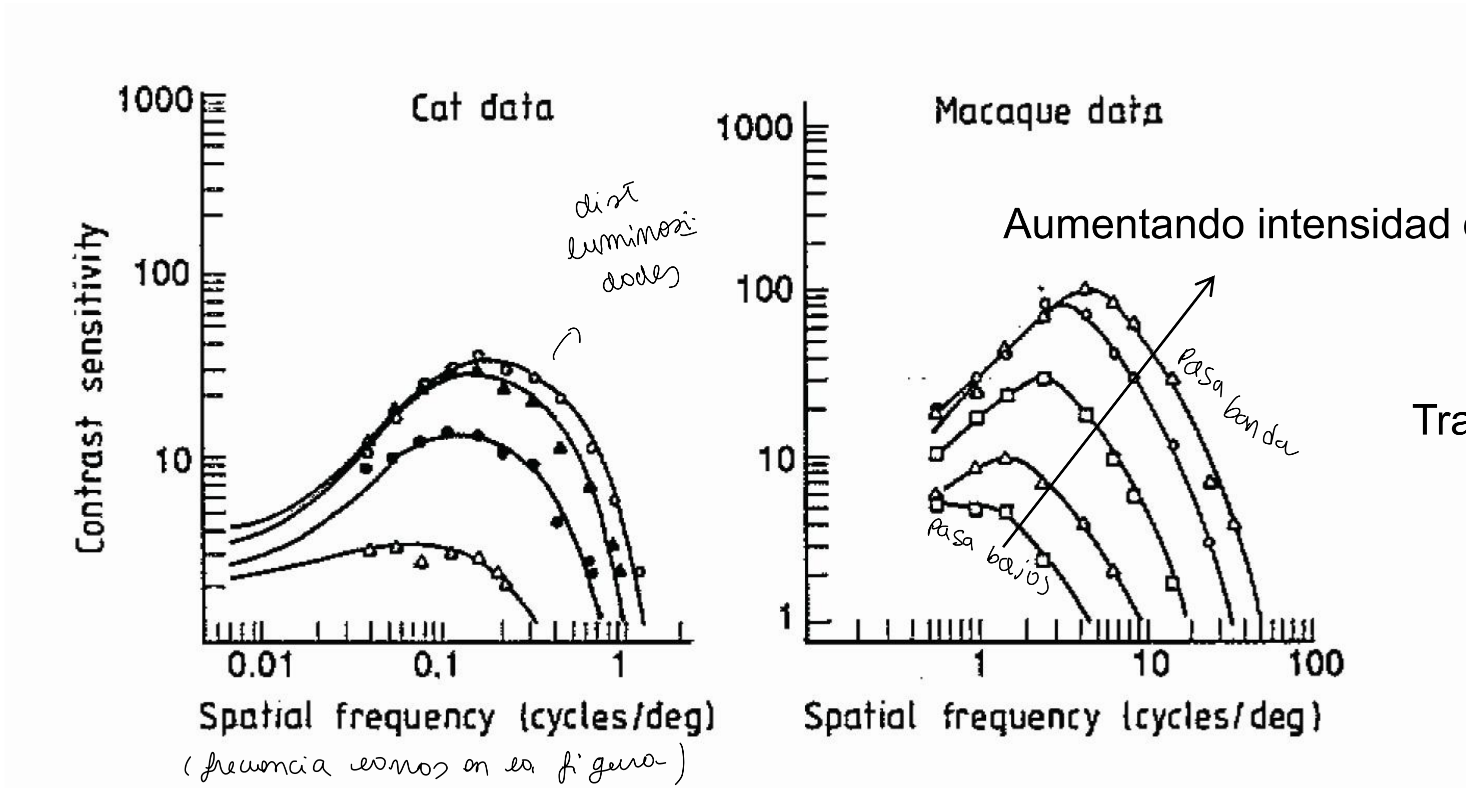


La retina y el procesamiento visual temprano

Códigos eficientes: Estrategias neuronales

➤ **Estrategias de codificación en la retina para el procesamiento espacio-temporal**

- La retina: Algunos hechos experimentales que nos interesan



Aumentando intensidad de fondo

Transición

Midiendo a bajas frecuencias temporales (o, inclusive, gratings estáticos)

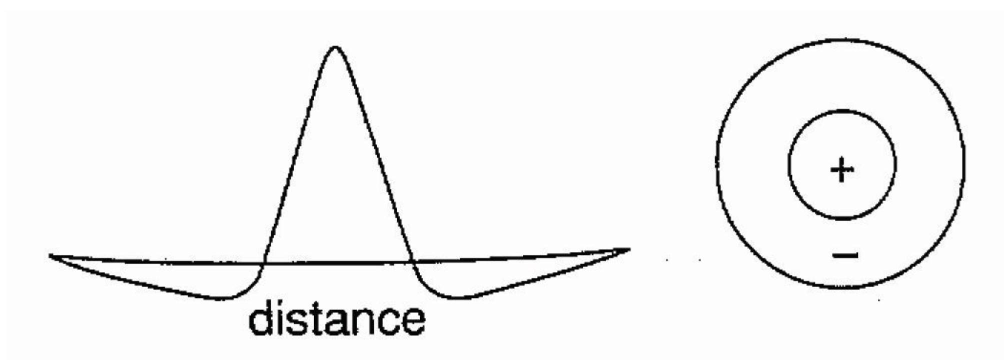
Una transición similar se observa en el dominio temporal, para una frecuencia espacial fija.

Códigos eficientes: Estrategias neuronales

➢ **Estrategias de codificación en la retina para el procesamiento espacio-temporal**

○ La retina: Algunos hechos experimentales que nos interesan

Transformando de vuelta al dominio espacial, el filtro de alta luminancia (pasa-banda) sería algo del estilo

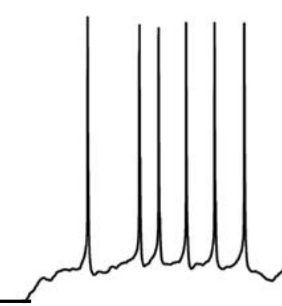


Center-surround organization

Conexiones excitatorias/inhibitorias de los fotorreceptores ubicados en +/-

Una organización parecida (respuesta mono/bi-polar) sucede en el dominio temporal.

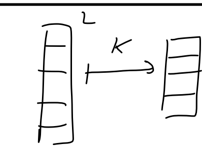
la retina implementa una familia de funciones de tipo lineal



La retina y el procesamiento visual temprano

Códigos eficientes: Estrategias neuronales

Queremos que no se pierda información



- **Estrategias de codificación en la retina para el procesamiento espacio-temporal**

  - Un enfoque teórico sobre el procesamiento espacial en la retina

Hipótesis: El principal objetivo de la retina es construir una **representación de mínima entropía**; esto es, una representación en donde los símbolos son estadísticamente independientes o, dicho de otro modo, están decorrelacionados.

Decorrelación en ausencia de ruido

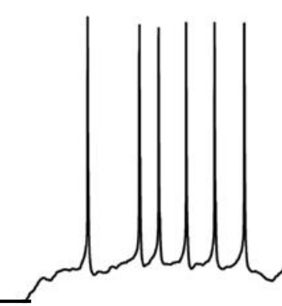
Hemos visto que encontrar códigos de mínima entropía se reduce a encontrar el mapeo

$$O_i = K_i(L_1, \ldots, L_n) \qquad \forall i$$

que minimice una función costo que pese linealmente la suma de la entropía de cada uno de los símbolos, sujeta a una condición de entropía total (multivariada) dada.

$$E\{K_i\} = \sum_{i=1}^{l} H(O_i) - 2\rho[H(O_1, \ldots, O_l) - H(L_1, \ldots, L_n)]$$

$$\frac{\delta E\{K_i\}}{\delta K_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Extremadamente difícil de resolver!}$$



Códigos eficientes: Estrategias neuronales

- **Estrategias de codificación en la retina para el procesamiento espacio-temporal**

  - Un enfoque teórico sobre el procesamiento espacial en la retina

    Nos concentramos en una familia de mapeos (plausibles biológicamente): **transformaciones lineales**. Por simplicidad, nos restringimos a mapeos uno-a-uno (se conserva en número de símbolos), aunque no hace falta para obtener resultados análogos.
    En este caso,

$O_i = \sum_j K_{ij} L_j$ Luminosidad — v.a $\Rightarrow$ O_i es una v.a

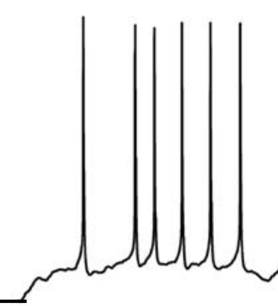
$$E\{\mathbf{K}\} = \sum_{i=1}^{l} H(O_i) - 2\rho\,[H(\mathbf{O}) - H(\mathbf{L})]$$
$$= \sum_{i=1}^{l} H(O_i) - \rho \log \det \mathbf{K}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{K}$$

Pizarrón

Evaluando la entropía sobre los símbolos de salida, $H(O_i)$

$$H(O_i) \equiv -\sum_{O_i} P(O_i) \log P(O_i) \rightarrow -\int \mathrm{d}O_i\, P(O_i) \log P(O_i)$$

donde tratamos los niveles discretos de respuesta como una variable continua



Códigos eficientes: Estrategias neuronales

- **Estrategias de codificación en la retina para el procesamiento espacio-temporal**

  - Un enfoque teórico sobre el procesamiento espacial en la retina

$$H(O_i) \equiv -\sum_{O_i} P(O_i) \log P(O_i) \rightarrow -\int \mathrm{d}O_i P(O_i) \log P(O_i)$$

El i-ésimo símbolo de salida (dado que mantuvimos la cantidad de neuronas, podemos llamarlo pixel también) está dado por

$$O_i = \sum_{j=1}^{l} K_{ij} L_j$$

donde **L** está dada por una distribución de probabilidad Gaussiana con matriz de covarianza **R**

$$P(\mathbf{L}) = [(2\pi)^n \det(\mathbf{R})]^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}\mathbf{L} \cdot \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{L}\right]$$

Estadística de las imágenes naturales

Luego **O** es Gaussiana (multivariada), con matriz de covarianza transformada según el cambio de base

$$\tilde{\mathbf{R}} \equiv \mathbf{K} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{K}^{\mathrm{T}}$$

$$P(\mathbf{O}) = [(2\pi)^n \det(\tilde{\mathbf{R}})]^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}\mathbf{O} \cdot \tilde{\mathbf{R}}^{-1} \cdot \mathbf{O}\right]$$

Códigos eficientes: Estrategias neuronales

- **Estrategias de codificación en la retina para el procesamiento espacio-temporal**
  - Un enfoque teórico sobre el procesamiento espacial en la retina

$$H(O_i) \equiv -\sum_{O_i} P(O_i)\log P(O_i) \rightarrow -\int \mathrm{d}O_i\, P(O_i)\log P(O_i)$$

Luego, la probabilidad del i-ésimo símbolo de salida, $P(O_i)$, se obtiene marginando

$$P(O_i) = \int \prod_{j\neq i} \mathrm{d}O_j\, P(\mathbf{O})$$

Haciendo las integrales se obtiene

$$P(O_i) = \frac{1}{2\pi \tilde{R}_{ii}} \exp\left(-\frac{1}{2\tilde{R}_{ii}} O_i^2\right)$$ donde $\tilde{R}_{ii} = \langle O_i^2 \rangle$ es el elemento diagonal de $\tilde{R}_{ij} = \langle O_i O_j \rangle$

Sustituyendo esta Gaussiana en $H(O_i)$, obtenemos

$$H(O_i) = \log \tilde{R}_{ii}$$ + constantes

La retina y el procesamiento visual temprano

Códigos eficientes: Estrategias neuronales

- **Estrategias de codificación en la retina para el procesamiento espacio-temporal**

  - Un enfoque teórico sobre el procesamiento espacial en la retina

Sumando las entropías de todos los pixeles de salida

$$\sum_{i=1}^{l} H(O_i) = \log \prod_{i=1}^{l} \tilde{R}_{ii}$$

Por invariancia de translación, los pixeles de salida tienen igual varianza

$$\tilde{R}_{ii} = \langle O_0^2 \rangle$$ para alguna ubicación arbitraria 0

Luego,

$$\sum_{i=1}^{l} H(O_i) = l \log(\langle O_0^2 \rangle)$$

Ahora bien, recordemos que esta suma de entropías las usaba en un funcional a minimizar:

$$E\{K_i\} = \sum_{i=1}^{l} H(O_i) - 2\rho[H(O_1,\ldots,O_l) - H(L_1,\ldots,L_n)]$$

Dado que el logaritmo es una función monótona y el argumento una cantidad definida positiva, podemos minimizar la función minimizando el argumento y listo. Por lo tanto, vamos a minimizar sobre $\langle O_0^2 \rangle$.

La retina y el procesamiento visual temprano

Códigos eficientes: Estrategias neuronales

➢ **Estrategias de codificación en la retina para el procesamiento espacio-temporal**

- Un enfoque teórico sobre el procesamiento espacial en la retina

Explícitamente,

$$\sum_i \langle O^2(\boldsymbol{x}_i)\rangle = \sum_i (\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}\cdot\mathbf{K}^{\mathrm{T}})_{ii} = \mathrm{Tr}(\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}\cdot\mathbf{K}^{\mathrm{T}})$$

Por lo tanto, el funcional a minimizar queda

$$E\{\mathbf{K}\} = \mathrm{Tr}(\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}\cdot\mathbf{K}^{\mathrm{T}}) - \rho \log\det(\mathbf{K}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{K})$$

Transformando en Fourier

$$E\{K\} = \int \mathrm{d}\boldsymbol{f}\, |K(\boldsymbol{f})|^2 R(\boldsymbol{f}) - \rho \int \mathrm{d}\boldsymbol{f} \log |K(\boldsymbol{f})|^2$$ ⟶ Pizarrón

Las ecuaciones variacionales en frecuencia que resultan de minimizar este funcional son fáciles de resolver

$$\delta E\{K\}/\delta K(\boldsymbol{f}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{|K(\boldsymbol{f})|^2 = \frac{\rho}{R(\boldsymbol{f})}}$$

La retina y el procesamiento visual temprano

Códigos eficientes: Estrategias neuronales

➢ **Estrategias de codificación en la retina para el procesamiento espacio-temporal**

○ Un enfoque teórico sobre el procesamiento espacial en la retina

teoría
no introducimos
ruido

$$\boxed{|K(f)|^2 = \frac{\rho}{R(f)}}$$

$$\Downarrow$$

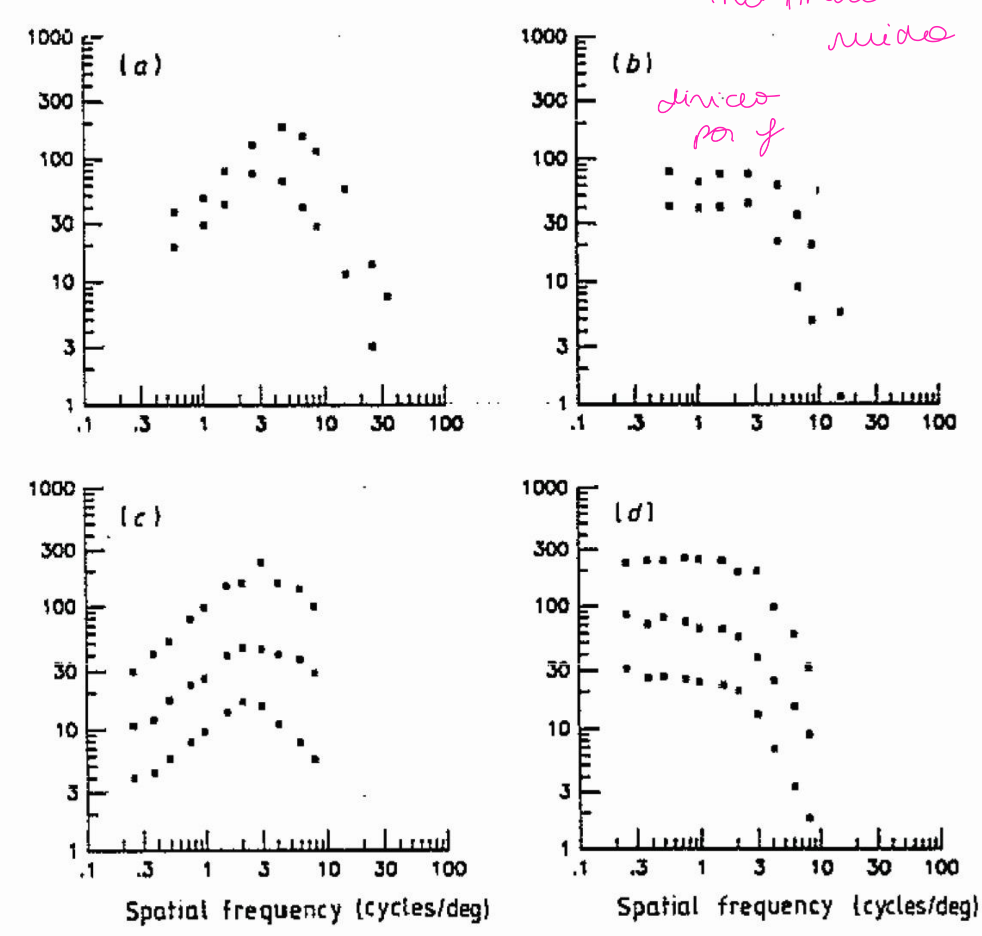
Dado que

$$R(f) \sim 1/|f|^2$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{K(f) = \rho|f|}$$

dividido
por f



Filtros a altas luminosidades (ruido insignificante)

La retina y el procesamiento visual temprano

Códigos eficientes: Estrategias neuronales

- **Estrategias de codificación en la retina para el procesamiento espacio-temporal**

  - Un enfoque teórico sobre el procesamiento espacial en la retina

$$R(f) \sim 1/|f|^2$$

Otra forma más intuitiva de llegar al resultado

$$\langle O(f) O^*(f) \rangle = \langle (K(f)L(f))(K(f)L(f))^* \rangle = |K(f)|^2 R(f)$$

Espectro de potencia a la salida. Whitening: $\langle O(f) O^*(f) \rangle = \text{constant}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{K(f) \sim |f|}$$

La retina se comporta de esta manera, hasta que el ruido empieza a ser significativo (altas frecuencias).

⇩

Consideraremos esto incorporando una etapa de **supresión del ruido**, antes de proceder con el blanqueamiento o decorrelación.

La retina y el procesamiento visual temprano

Códigos eficientes: Estrategias neuronales

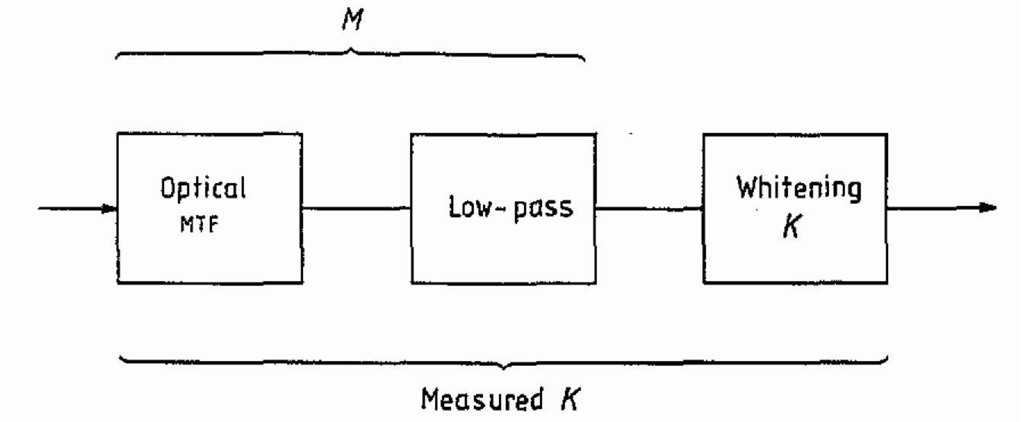
➢ **Estrategias de codificación en la retina para el procesamiento espacio-temporal**

- Un enfoque teórico sobre el procesamiento espacial en la retina

Decorrelación en presencia de ruido

Si el kernel K(f) fuese lineal más allá del límite donde el ruido empieza a ser comparable con la señal, se amplificaría el ruido y, en última instancia, sería lo que dominaría la salida (este ruido tiene un espectro plano, su potencia no decae como $1/f^2$).

Entonces, antes de proceder con la decorrelación, debemos garantizar que el ruido de alta frecuencia no pase a la siguiente etapa.



En este esquema,

$$O = K \cdot (M \cdot (L + n) + n_0)$$

La retina y el procesamiento visual temprano

Códigos eficientes: Estrategias neuronales

- **Estrategias de codificación en la retina para el procesamiento espacio-temporal**

  - Un enfoque teórico sobre el procesamiento espacial en la retina

Ahora el funcional pasa a ser

$$E\{K\} = \int \mathrm{d}f \; |K(f)|^2 \left[M^2(f)(R(f) + N^2) + N_0^2 \right] - \rho \int \mathrm{d}f \log |K(f)|^2$$

$$N^2(f) \equiv \langle |n(f)|^2 \rangle$$
$$N_0^2(f) \equiv \langle |n_0(f)|^2 \rangle$$

→ Potencias espectrales de los ruidos

Resolviendo las ecuaciones variacionales

lo que tenemos acceso experimental.

→ Filtro pasa-bajos a la entrada

$$|K_{\mathrm{expt}}(f)| = |K(f)| \; M(f) = \frac{\sqrt{\rho} M(f)}{\left[M^2(f)(R(f) + N^2) + N_0^2 \right]^{1/2}}$$

↓ Solución de la ecuación variacional

→ Filtro al que uno tiene acceso experimentalmente

Códigos eficientes: Estrategias neuronales

- **Estrategias de codificación en la retina para el procesamiento espacio-temporal**
  - Un enfoque teórico sobre el procesamiento espacial en la retina

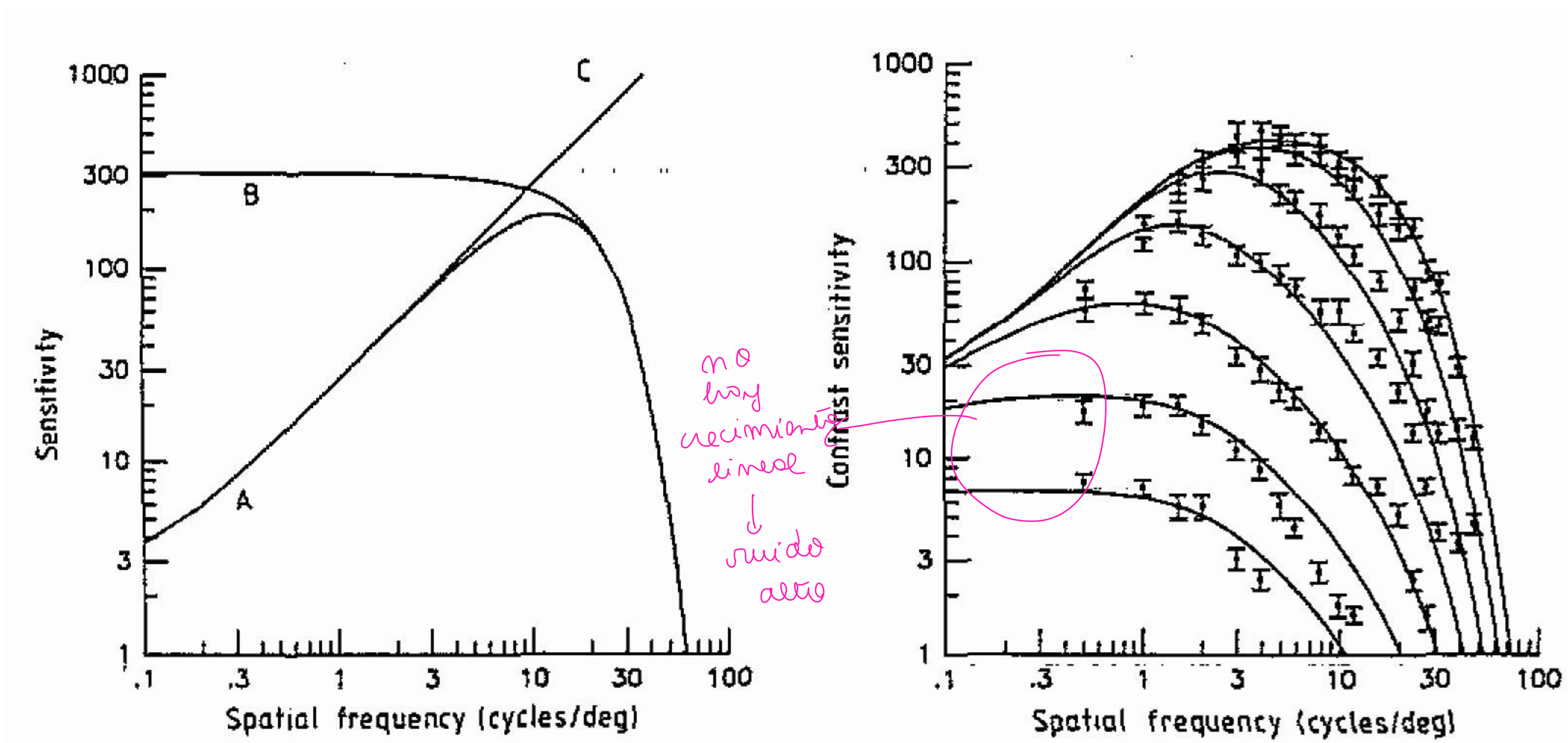
Donde el filtro pasa-bajos debe ser

$$M(f) = \frac{1}{N}\left(\frac{1}{I_0}\frac{R(f)}{R(f)+N^2}\right)^{1/2} \underbrace{\exp\left[-\left(\frac{|f|}{f_c}\right)^{\alpha}\right]}_{\text{Función de transferencia por el camino óptico}}$$

La retina y el procesamiento visual temprano

Códigos eficientes: Estrategias neuronales

- **Estrategias de codificación en la retina para el procesamiento espacio-temporal**
  - Un enfoque teórico sobre el procesamiento espacial en la retina



CLASE 3

→ Slide 4

↱ Debe ser constante : $P(o) = \alpha$

$$P(o)\, do = P(c)\, dc$$

$$do = \frac{1}{\alpha} P(c)\, dc$$

Integrando,

$$o = \frac{1}{\alpha} \int_{-1}^{c} P(c')\, dc'$$

↳ Por normalización $1 = \int_0^{G_{max}} P(o)\, do = \frac{1}{\alpha} \cdot G_{max}$

$\therefore \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{G_{max}}$

$$o = \frac{1}{G_{max}} \int_{-1}^{c} P(c')\, dc'$$

→ Slide 16

Queremos ver cuanto vale $H(O_1, \dots, O_\ell) - H(L_1, \dots, L_\ell)$; esto es, la diferencia en las entropías entre la entrada y la representación, BAJO UN MODELO/MAPEO LINEAL :

$$O_i = \sum_{j=1}^{\ell} K_{ij}\, L_j$$

→ Las probabilidades transforman según (pasando a vars. CONTINUAS)

$$f(O_1, \dots, O_\ell) \cdot dO_1 \dots dO_\ell = f(L_1, \dots, L_\ell) \cdot dL_1 \dots dL_\ell$$

$$f(O_1, \dots, O_\ell) \cdot \det \begin{vmatrix} \frac{\partial O_1}{\partial L_1} & \cdots & \frac{\partial O_1}{\partial L_\ell} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial O_\ell}{\partial L_1} & \cdots & \frac{\partial O_\ell}{\partial L_\ell} \end{vmatrix} = f(L_1, \dots, L_\ell)$$

↳ donde $\frac{\partial O_i}{\partial L_j} = K_{ij}$

$$f(O_1, \dots, O_\ell) \cdot \det \mathbb{K} = f(L_1, \dots, L_\ell)$$

$$f(O_1, \dots, O_\ell) = \frac{f(L_1, \dots, L_\ell)}{|\det \mathbb{K}|}$$

→ Calculemos la entropía de salida $H(O_1, \ldots, O_\ell)$ en variable continua, que es lo que asumimos antes al considerar el mapeo como una transformación de coordenadas (diferenciable):

$$H(O_1, \ldots, O_\ell) = - \int \underbrace{f(O_1, \ldots, O_\ell)}_{\text{densidad de probabilidad.}} \cdot \log_2 f(O_1, \ldots, O_\ell) \quad dO_1 \ldots dO_\ell$$

→ por conservación de probabilidades:

$$f(O_1, \ldots, O_\ell) \cdot dO_1 \ldots dO_\ell = f(L_1, \ldots, L_\ell) \cdot dL_1 \ldots dL_\ell$$

→ Además, la f que aparece en el logaritmo la reemplazamos por lo que hallamos anteriormente:

$$H(O_1, \ldots, O_\ell) = - \int f(L_1, \ldots, L_\ell) \cdot \log_2 \frac{f(L_1, \ldots, L_\ell)}{|\det \mathbb{K}|} \quad dL_1 \ldots dL_\ell$$

$$= - \int f(L_1, \ldots, L_\ell) \cdot \left[\log_2 f(L_1, \ldots, L_\ell) - \log_2 |\det \mathbb{K}| \right] dL_1 \ldots dL_\ell$$

$$= \overbrace{- \int f(L_1, \ldots, L_\ell) \cdot \log_2 f(L_1, \ldots, L_\ell) \quad dL_1 \ldots dL_\ell}^{H(L_1, \ldots, L_\ell)}$$

$$+ \int f(L_1, \ldots, L_\ell) \cdot \underbrace{\log_2 |\det \mathbb{K}|}_{\text{sale de la integral}} \cdot dL_1 \ldots dL_\ell$$

$\therefore$

$$H(O_1, \ldots, O_\ell) = H(L_1, \ldots, L_\ell) + \log_2 |\det \mathbb{K}| \underbrace{\int f(L_1, \ldots, L_\ell) \ dL_1 \ldots dL_\ell}_{1 \text{ (normalización)}}$$

$$\rightarrow \quad H(O_1, \ldots, O_\ell) - H(L_1, \ldots, L_\ell) = \log_2 |\det \mathbb{K}|$$

↓

que se puede escribir como

$$|\det \mathbb{K}|^2 = \det(\mathbb{K}^T \cdot \mathbb{K})$$

$$= \frac{1}{2} \log_2 \det(\mathbb{K}^T \cdot \mathbb{K}) \checkmark$$

→ Slide 17

O es Gaussiana (transformación lineal de una Gaussiana).

↳ Definida por: Media → $\langle \vec{O} \rangle = \langle \mathbb{K} \cdot \vec{L} \rangle$

$$= \mathbb{K} \cancel{\langle \vec{L} \rangle}^{0} = \vec{0}$$

: Matriz de covarianza: $\langle O_i O_j \rangle$

$$\tilde{\mathbb{R}} = \langle \vec{O} \vec{O}^T \rangle = \langle \mathbb{K} \vec{L} \vec{L}^T \mathbb{K}^T \rangle$$

$$= \mathbb{K} \underbrace{\langle \vec{L} \vec{L}^T \rangle}_{\mathbb{R}} \mathbb{K}^T = \mathbb{K} \cdot \mathbb{R} \, \mathbb{K}^T$$ ✓

↳ Matriz de covarianza en luminosidades

→ Slide 18 : Queremos ver cuanto vale $H(O_i)$: Entropía de un símbolo de salida.

Tenemos que O_i es Gaussiana,

$$P(O_i) = \frac{1}{2\pi \tilde{R}_{ii}} \exp\left(-\frac{1}{2\tilde{R}_{ii}} O_i^2\right)$$

Entonces,

$$H(O_i) = -\int dO_i \, P(O_i) \log_2 P(O_i) = \int dO_i \, P(O_i) \left[-\log_2 \left(\frac{1}{2\pi \tilde{R}_{ii}} \exp\left(-\frac{1}{2\tilde{R}_{ii}} \cdot O_i^2\right)\right)\right]$$

$$= \int dO_i \, P(O_i) \left[\log_2 (2\pi \tilde{R}_{ii}) - \frac{1}{\ln 2} \ln\left[\exp\left(-\frac{1}{2\tilde{R}_{ii}} O_i^2\right)\right]\right]$$

$$= \log_2 (2\pi \tilde{R}_{ii}) \underbrace{\int dO_i \, P(O_i)}_{1} - \frac{1}{\ln 2} \int dO_i \, P(O_i) \left[-\frac{1}{2\tilde{R}_{ii}} O_i^2\right]$$

$$= \log_2 (2\pi \tilde{R}_{ii}) + \frac{1}{\ln 2} \frac{1}{2\tilde{R}_{ii}} \underbrace{\int O_i^2 \, P(O_i) \, dO_i}_{\tilde{R}_{ii}}$$

$$= \log_2 (2\pi \tilde{R}_{ii}) + \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{2\cancel{\tilde{R}_{ii}}} \cancel{\tilde{R}_{ii}} = \log_2 (\tilde{R}_{ii}) + \log_2 (2\pi) + \frac{1}{2\ln 2}$$

$$H(O_i) = \log_2 (\tilde{R}_{ii}) + \text{constantes.}$$

→ Slide 20:

Tengo $E\{\mathbb{K}\} = Tr(\mathbb{K} \cdot R \cdot \mathbb{K}^T) - \rho \log_2 \det(\mathbb{K}^T \mathbb{K})$

Quiero ver qué queda pasando a Fourier.

---

* Primer término:

Sabemos que:

$$Tr(\mathbb{K}\mathbb{R}\mathbb{K}^T) = \sum_i O^2(x_i) \overset{\text{Pasando al continuo}}{=} \int O^2(x)\, dx$$

→ Del teorema de Parseval: $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(\omega)|^2 df$

Entonces,

$$Tr(\mathbb{K}\mathbb{R}\mathbb{K}^T) = \int O(f) \cdot O^*(f)\, df \overset{\text{transf. de señal real}}{=} \int O(f) \cdot O(-f)\, df$$

Pero si:

$$\underbrace{O_i = K_{ij} L_j \qquad \text{donde } K_{ij} = K(x_i - x_j)}_{\text{CONVOLUCION}}$$

Luego

$$O(f) = K(f) \cdot L(f)$$

Por tanto,

$$Tr(\mathbb{K}\mathbb{R}\mathbb{K}^T) = \int K(f) \cdot L(f) \cdot K(-f) \cdot L(-f)\, df$$

$$= \int df \underbrace{K(f) \cdot K(-f)}_{|K(f)|^2} \cdot \underbrace{L(f) \cdot L(-f)}_{R(f)}$$

→ Ver clase pasada "Espectro de potencia" es la transf. de Fourier de la correlación espacial

$R(x_1, x_2) = \langle L(x_1) L(x_2) \rangle$

↓

$R(f) = L(f) L(-f)$

Esto es,

$$Tr(\mathbb{K}\mathbb{R}\mathbb{K}^T) = \int df\, |K(f)|^2\, \mathbb{R}(f)$$

---

* Segundo término: $\log \det(\mathbb{K}^T \mathbb{K}) = ?$

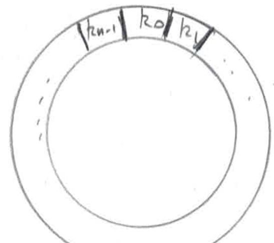
→ $\mathbb{K}$ es una matriz cíclica: $k_{ij} = k(x_i - x_j)$

$k(x_1 - x_1) = k(0)$

$k(x_2 - x_1) = k(1)$

$$\mathbb{K} = \begin{pmatrix} k_0 & k_{n-1} & \cdots & k_1 \\ k_1 & k_0 & \cdots & k_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{n-1} & k_{n-2} & & k_0 \end{pmatrix}$$

↳ Cada columna es una versión "rotada" de la primer columna



→ Estas matrices tienen propiedades MUY ESPECIALES.

En particular, la forma diagonal es:

$$\mathrm{diag}(\mathbb{K}) = \begin{pmatrix} K_0 & & \textcircled{1} \\ & K_1 & \\ & & \ddots \\ \textcircled{1} & & & K_{n-1} \end{pmatrix}$$

donde los elementos diagonales corresponden a la transformada de Fourier de la primera columna de $\mathbb{K}$.

$$K_m = \sum_{l=0}^{n-1} k_l \cdot e^{-\frac{2\pi i}{n} m l}$$

El determinante de $\mathbb{K}$ es, consecuentemente:

$$\det \mathbb{K} = \prod_{m=1}^{n} K_m$$

Dado que nos interesa $\log \det(\mathbb{K}^T \mathbb{K})$, tendremos:

$$\log \det(\mathbb{K}^T \mathbb{K}) = \log[\det(\mathbb{K}^T) \cdot \det(\mathbb{K})] = \log[\det(\mathbb{K})]^2 = \log\left[\prod_{m=1}^{n} K_m\right]^2$$

$$= \log \prod_{m=1}^{n} K_m^2 = \sum_{m=1}^{n} \log_2 K_m^2$$

↓ Pasando al continuo.

$$= \int df \log_2 |K(f)|^2 \quad ✓$$

Slide 20 → Solución

Tenemos

$$E\{k\} = \int df\ |k(f)|^2\ R(f) - \rho \int df\ \log_2 |k(f)|^2$$

Entonces

$$\frac{\delta E}{\delta k} = \frac{\partial E(\{k+\alpha k'\})}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0}$$

$$= \frac{\partial}{\partial \alpha}\left\{ \int df\ |k(f)+\alpha k'(f)|^2\ R(f) - \rho \int df\ \log_2 |k(f)+\alpha k'(f)|^2 \right\}_{\alpha=0}$$

$$= \left\{ \int df\ 2\,|k(f)+\alpha k'(f)| \cdot k'(f)\ R(f) - \rho \int df\ \frac{2}{\ln 2}\ \frac{k'(f)}{k(f)+\alpha k'(f)} \right\}_{\alpha=0}$$

$$= 2\int df\ k(f)\ k'(f)\ R(f) - \frac{2\rho}{\ln 2}\int df\ \frac{k'(f)}{k(f)}$$

Pero $k'(f)$ puede ser cualquier cosa → función de prueba $k'(f) = \delta(f-f_0)$

Así,

$$\frac{\delta E}{\partial \alpha} = 2\ k(f_0)\ R(f_0) - \frac{2\rho}{\ln 2}\ \frac{1}{k(f_0)} = 0.$$

$$\rightarrow \quad |k(f_0)|^2 \propto \frac{1}{R(f_0)}$$

Pero f_0 puede ser cualquier frecuencia!

$$\underline{\underline{|k(f)|^2 \propto \frac{1}{R(f)}}}$$