1 Considere el mapeo logístico:

$$x_{t+1} = r\, x_t\, (1 - x_t).$$

a) Grafique trayectorias x_t para los siguientes valores del parámetro de control:

$$r = 1.5, 2.9, 3.3, 3.5, 3.55, 3.59, 3.83, 4.$$

Para cada valor, use varias condiciones iniciales para descartar el transitorio e identificar los atractores. ¿Qué atractor corresponde a cada caso? Para los atractores caóticos, construya un histograma para caracterizar la distribución de x (observe que el histograma va mejorando a medida que alarga el tiempo de observación).

b) Construya un diagrama cobweb e identifique las primeras bifurcaciones de período (hasta el p-8). Muestre que el p-$2n$ es un punto fijo estable de la iteración f^{2n} (donde $f \equiv f(x)$ es el miembro de la derecha del mapeo). Encuentre analíticamente los valores de r correspondientes a los tres primeros puntos de bifurcación (la desestabilización del 0, la del punto fijo a p-2, y la de p-2 a p-4).

c) Construya un diagrama de bifurcaciones, mostrando los atractores en función del parámetro r, con $r \in (1, 4)$. Observe que, cerca de los puntos de bifurcación, los transitorios son más largos y es más difícil identificar el atractor. Haga ampliaciones del gráfico con:

$$\begin{aligned} r &\in (3, 3.678), & x &\in (0.7287, 0.2722), \\ r &\in (3.45122, 3.59383), & x &\in (0.4105, 0.594), \\ r &\in (3.54416, 3.57490), & x &\in (0.46, 0.5359). \end{aligned}$$

Tendrá que hacer más iteraciones y refinar los valores de r en cada ventana.

d) Calcule y grafique el exponenente de Lyapunov para $r \in (2.5, 4)$.

2 Ya que programó el diagrama de bifurcaciones del mapeo logístico, aquí tiene otros mapeos interesantes para explorar:

a) $x_{n+1} = r \cos x_n$ (lindo, con $r \in (0, 10)$).

b) $x_{n+1} = e^{-r x_n}$ (aburrido, una bifurcación y listo, con $r \in (0, 10)$).

c) $x_{n+1} = r \tan x_n$ (un lío, $r \in (0.5, 2)$).

d) $x_{n+1} = rx_n - x_n^3$ (simétrico, usar más de un x_0 para cada r).

3 Explore cualitativamente los autómatas celulares 1D que obedecen a las siguientes reglas, que dan comportamientos distintos de los que vimos en clase:

a) La celda j se pone (o queda) negra sólo si tanto $j-1$ como j son blancas; si no se queda (o se pone) blanca.

b) La celda j se pone (o queda) negra si dos cualesquiera de la terna $[j-1, j, j+1]$ son negras, o si tanto $j-1$ como j son blancas; si no se queda (o se pone) blanca.

c) La celda j se pone (o queda) blanca si $j-1$ y j son negras, o si la terna $[j-1, j, j+1]$ es toda blanca; si no se queda (o se pone) negra.

d) La celda j se pone (o queda) negra si la celda $j-1$ y al menos una del par $[j, j+1]$ son negras, o si la terna $[j-1, j, j+1]$ es toda blanca; si no se queda (o se pone) blanca.

e) La celda j se pone (o queda) blanca si $j+1$ y j son ambas blancas, o si la terna $[j-1, j, j+1]$ es toda negra; si no se queda (o se pone) negra.

Identifique el número de cada una de ellas de acuerdo a la codificación de Wolfram. Asegúrese de correrlas varios cientos de generaciones y en una red grande (especialmente las dos últimas), a partir de semillas o de condiciones iniciales random. ¿A qué clase pertenece cada una?

4 El modelo de *hormigas* consiste en un agente (la hormiga) que se mueve en una red e interactúa con ella, de acuerdo a la iteración de las reglas:

- Moverse un paso adelante.
- Si el nodo es blanco, pintarlo de negro y girar 90 grados a la derecha.
- Si el nodo es negro, pintarlo de blanco y girar 90 grados a la izquierda.

Explore cualitativamente la dinámica de una hormiga. Comience con una única hormiga en una red cuadrada de varios cientos de nodos blancos, con condiciones periódicas en los bordes. Corra la simulación algunas decenas de miles de pasos, hasta que la hormiga choque con su propio rastro negro. Luego repita la condición inicial, pero en una grilla con algunos cientos de nodos negros desparramados uniformemente al azar.

5 El autómata celular más extraordinario de todos, y el más estudiado, es el Juego de la Vida, inventado por el matemático inglés John Conway (fallecido de covid-19 el año pasado). Consiste en una red cuadrada 2D, periódica, con vecindario de Moore, en la que cada nodo puede estar en uno de dos estados (0 o 1, blanco o negro, activo o inactivo). En cada iteración, la red entera evoluciona de acuerdo a las reglas:

- Si un nodo activo tiene menos de dos vecinos activos, se inactiva (¿de tristeza?).
- Si un nodo activo tiene más de tres vecinos activos, se inactiva (¿de hartazgo?).
- Si un nodo inactivo tiene tres vecinos activos, se activa (¿de alegría?).
- Si un nodo tiene dos vecinos activos, queda igual.

Este autómata puede producir "organismos", estructuras que se preservan en la dinámica, que se mueven, que interactúan de maneras interesantes y pueden reproducirse (si quiere ver ejemplos rápido, revise el artículo en la Wikipedia: https://en.wikipedia.org/wiki/Conway's_Game_of_Life). Además, es capaz de realizar computación universal, en el sentido de Turing.

Programe un Juego de la Vida y córralo a partir de condiciones iniciales aleatorias, para observar los patrones que emergen de manera espontánea. El sitio https://www.conwaylife.com es una wiki mantenida por una comunidad de usuarios con muchísima información sobre la dinámica del Juego de la Vida, y con implementaciones que puede usar para comparar con la suya, para inspirarse, o para perderse. Hay muchísima más información en la web, incluso implementaciones interactivas para correr en el navegador. En un capítulo de Numberphile: https://www.youtube.com/watch?v=R9Plq-D1gEk, John Conway cuenta la historia de cómo inventó el Juego de la Vida inspirado por las máquinas de von Neumann, cómo se lo contó a Martin Gardner, quien lo publicó en Scientific American, donde se convirtió en el éxito más grande de los más de 100 años de la revista (yo lo leí allí en los 80s).