# Ejercicio 3 - TP 02 - Diferencias finitas - EDP

Pablo Chehade
*pablo.chehade@ib.edu.ar*
*Física computacional, Instituto Balseiro, CNEA-UNCuyo, Bariloche, Argentina*

Se buscó resolver el siguiente sistema de ecuaciones no lineales

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g_1(u, v) \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + g_2(u, v) \tag{2}$$

donde

$$g_1(u, v) = \frac{1}{32}(-7u^2 - 50uv + 57)$$

$$g_2(u, v) = \frac{1}{32}(7u^2 + 50uv - 2v - 55).$$

Las funciones $g_1$ y $g_2$ acoplan las evoluciones de $u$ y $v$, mientras que los coeficientes $\nu$ y $\mu$ condicionan la difusión del sistema.

Para resolver el problema se empleó un método numérico explícito de diferencias finitas en un dominio periódico discretizado con una grilla uniforme en el espacio y el tiempo. En particular, se empleó el método FTCS, asegurando la continuidad del flujo difusivo mediante la implementación de 'nodos fantasmas'. Se utilizaron condiciones iniciales al azar para ambas variables, con amplitud 0,15 alrededor del equilibrio homogéneo $u^* = v^* = 1$, como se verifica en la figura 1. Como coeficientes difusivos se emplearon $\mu = D$, $\nu = D/2$. La grilla uniforme tiene un tamaño total longitudinal $L = 1$, siendo $dx$ la unidad de la misma. Mientras que, temporalmente, tiene un tamaño total $t_{max}$ y unidad $dt$.

En primer lugar, se analizó la solución numérica bajo las condiciones $D = 0{,}01$, $dx = 0{,}01$ y $dt = 0{,}001$. Esta se representa para distintos tiempos en la figura 2. Se observa que rápidamente la condición inicial cambia y evoluciona hacia una estructura periódica con longitud de onda $k = 2\pi$ aproximadamente. Le toma al sistema alrededor de $t_{max} = 17{,}4$ s para llegar al estado estacionario, momento en el que la solución deja de variar significativamente. Cabe aclarar que se determinó $t_{max}$ gráficamente; no se implementó un criterio cuantitativo. Además, se emplearon distintos tamaños de grilla $dx$ y $dt$ y se observó que para determinados valores la solución diverge. Esto se interpretó como un problema del método utilizado, no de la solución del sistema de EDP. En base a ello, en próximas experiencias se emplearon los valores $dx = 0{,}01$ y $dt = 0{,}001$.

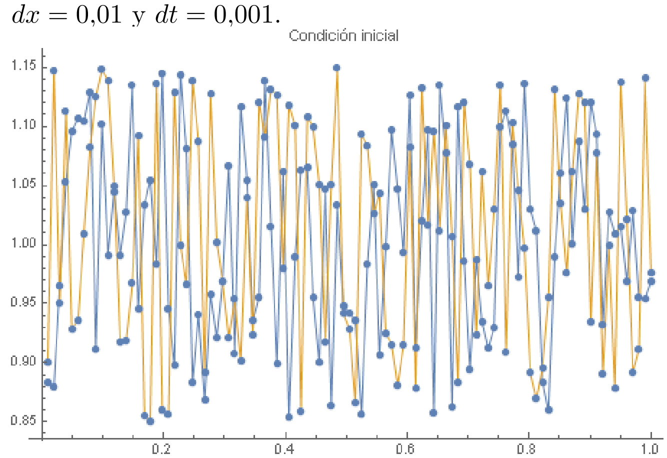
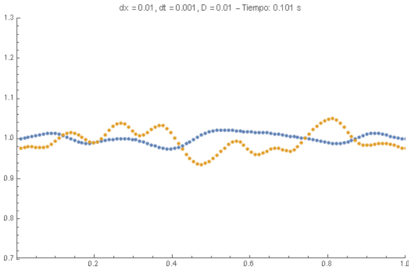


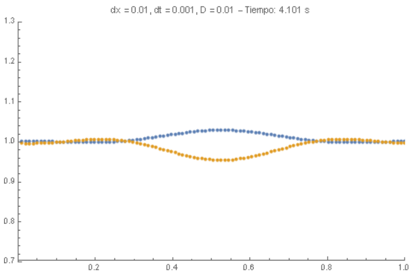

Figura 1: Condición inicial al azar. $u$ en color azul y $v$ en amarillo.

En segundo lugar, se analizó la influencia del factor $D$ en la solución numérica. Se consideraron los valores $D = 0{,}0025$, $0{,}001$, $0{,}0015$, $0{,}00075$. No se consideraron valores menores de $D$ debido ineficiencias del código y por no contar con suficientes recursos computacionales. Por ejemplo, el caso $D = 0{,}00075$ tomó más de una hora y media de ejecución. La solución inmediata sería aumentar $dx$ y $dt$ para que la grilla tenga menos puntos y la ejecución sea más rápida, pero no se encontraron valores tales que a tiempos grandes la solución no divergiera. Las soluciones en el estado estacionario se grafican en la figura 3. Se observa que el número de onda $k$ cambia dependiendo del parámetro $D$, siendo aproximadamente $4\pi$ para $D = 0{,}0025$, $5\pi$ para $D = 0{,}0015$ y $10\pi$ para $D = 0{,}001$ y $D = 0{,}00075$. Realmente el número de onda para los últimos dos casos debería es distinto, pero dado que se midió $k$ gráficamente, el error asociado es grande y los valores se consideraron indistinguibles. Además, el parámetro $t_{max}$ aumenta a medida que disminuye $D$. Esto se debe a que la evolución es más lenta para coeficientes de difusividad menores.

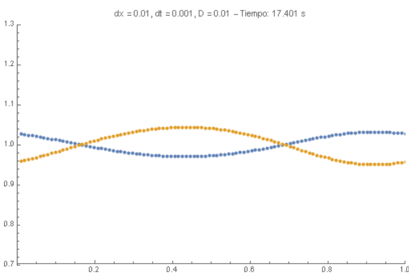
[1] No se consideraron valores menores de $D$ debido ineficiencias del código y por no contar con suficientes recursos computacionales. Por ejemplo, el caso $D = 0{,}00075$ tomó




(a)



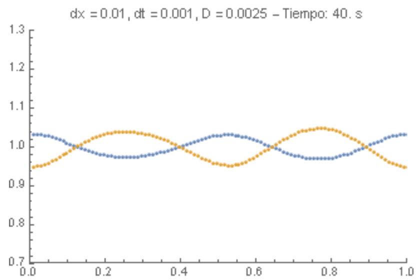

(b)



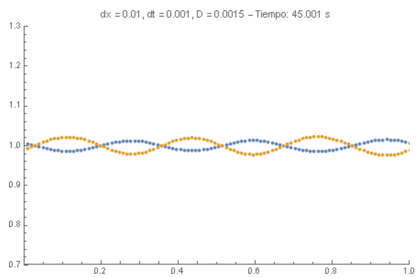

(c)

Figura 2: Solución numérica para distintos tiempos bajo las condiciones $D = 0{,}01$, $dx = 0{,}01$ y $dt = 0{,}001$. $u$ en color azul y $v$ en color amarillo.

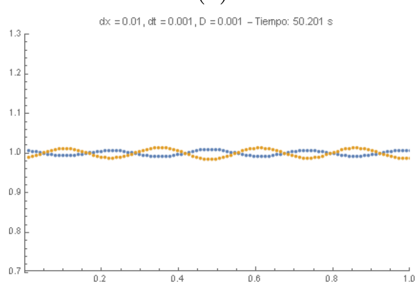
más de una hora y media de ejecución. La solución inmediata sería aumentar $dx$ y $dt$ para que la grilla tenga menos puntos y la ejecución sea más rápida, pero no se encontraron valores tales que a tiempos grandes la solución no divergiera.



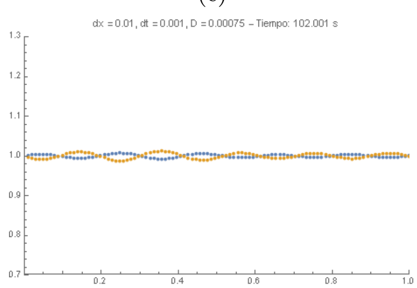

(a)




(b)




(c)




(d)

Figura 3: Solución numérica para distintos valores de $D$ bajo las condiciones $dx = 0{,}01$ y $dt = 0{,}001$. $u$ en color azul y $v$ en color amarillo.