

Ejercicio 1 - TP 03 - Dinámica discreta

Pablo Chegade

pablo.chegade@ib.edu.ar

Física computacional, Instituto Balseiro, CNEA-UNCuyo, Bariloche, Argentina

En el presente se analizará el mapeo logístico dado por

$$x_{t+1} = rx_t(1 - x_t) \quad (1)$$

donde el parámetro de control r y la condición inicial x_0 determinan la evolución del sistema.

I. TRAYECTORIAS

En primer lugar, se evaluó la trayectoria x_t para $r = 1,5$ y distintas condiciones iniciales x_0 . Se encontró que la solución no diverge si $x_0 \in [0, 1]$. Como se observa en la figura 1, para condiciones iniciales dentro del intervalo $(0, 1]$, el sistema evoluciona al cabo de algunas iteraciones al estado estacionario $x^* = 0,3335$ independientemente de la condición inicial. Este valor es un punto fijo estable, es decir, si la trayectoria comienza en $x_0 = x^*$, $x_t = x^*$ para todo t (en la sección II se dará una definición formal de estabilidad). Además, es un atractor de la dinámica: para distintas condiciones iniciales el sistema evoluciona hacia dicho valor. Por otro lado, $x^* = 0$ es un punto estable pero no es un atractor de la dinámica. Analizando 1 se observa que este comportamiento se cumple para todo valor de r .

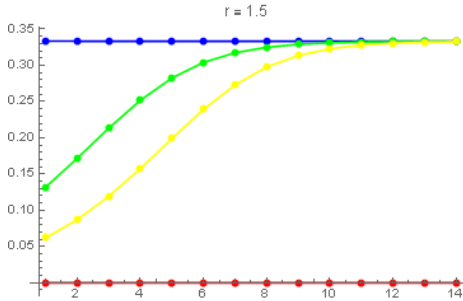


Figura 1: Trayectorias para $r = 1,5$ y distintas condiciones iniciales x_0 . Atractor: $x^* = 0,3335$.

A continuación se evaluó la trayectoria para $r = 2,9$. Como se observa en la figura 2, la evolución es independiente de la condición inicial $x_0 \in (0, 1]$. Además, el sistema tiene dos puntos fijos estables: $x^* = 0$ y $0,6555$, siendo tan solo el segundo un atractor. A diferencia del caso anterior, la evolución hacia el atractor es oscilatoria y amortiguada.

Posteriormente, aumentando a $r = 3,3$, se encontró que la dinámica cambia completamente. Como se verifica en la figura 3, no existe un único punto fijo sino dos que se repiten periódicamente: $x_1^* = 0,4795$ y $x_2^* = 0,8235$. Este

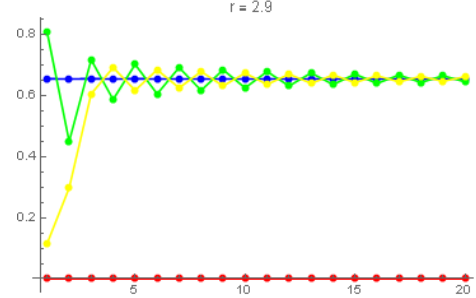


Figura 2: Trayectorias para $r = 2,9$ y distintas condiciones iniciales x_0 . Atractor: $x^* = 0,6555$.

cambio en la dinámica se denomina bifurcación de duplicación del período y la trayectoria se denomina período-2 o p-2. Este comportamiento se repite para valores de r superiores. Este es el caso de $r = 3,5$ con trayectoria p-4 graficada en la figura 4 y de $r = 3,55$ con trayectoria p-8, en la figura 5.

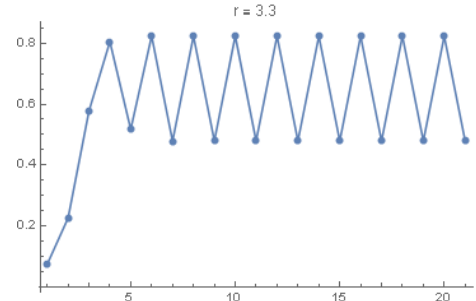


Figura 3: Trayectoria x_t para $r = 3,3$. El estacionario es idéntico para condiciones iniciales en el intervalo $(0, 1]$. Dos atractores: $x^* = 0,8235, 0,4795$.

Para valores superiores del parámetro de control se presentan infinitos atractores como se observa en la figura 6 para $r = 3,59$. En este caso, los atractores son un continuo de puntos agrupados en dos intervalos y reciben el nombre de atractores caóticos. En la sección IV se entrará en más detalle sobre qué se entiende por este último término.

Otro modo de visualizar los datos de la figura 6 es a través de un histograma de x_t hasta un valor de t_{max} predeterminado (ver figura 7). De este modo se logra visualizar fácilmente los valores visitados con mayor frecuencia durante la evolución del sistema y, además, permite visualizar desde otro punto de vista la dinámica caótica.

El mismo procedimiento para r mayores indica un com-

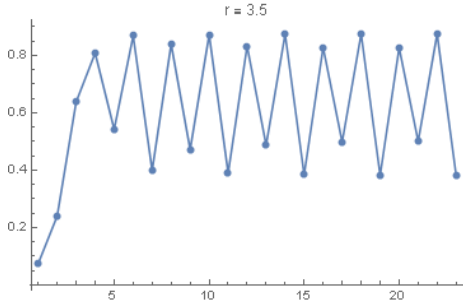


Figura 4: Trayectoria para $r = 3,5$. El estacionario es idéntico para condiciones iniciales en el intervalo $(0, 1]$. Cuatro atractores: $x^* = 0,3825, 0,5005, 0,8265, 0,8745$.

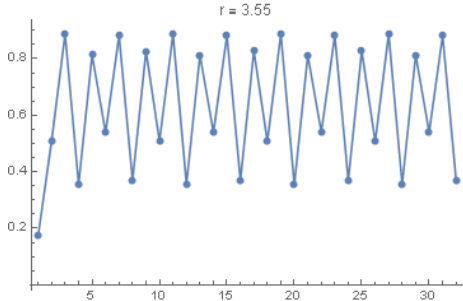


Figura 5: Trayectoria para $r = 3,55$. El estacionario es idéntico para condiciones iniciales en el intervalo $(0, 1]$. Ocho atractores: $x^* = 0,3545, 0,3705, 0,5065, 0,5405, 0,8125, 0,8275, 0,8815, 0,8875$.

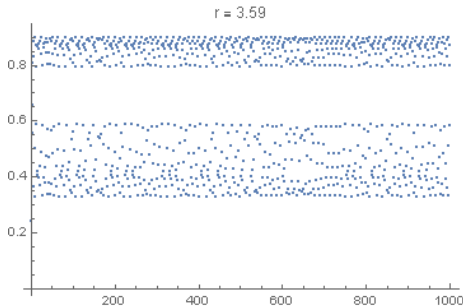


Figura 6: Trayectoria x_t para $r = 3,59$. No se conectaron los puntos de la trayectoria para facilitar la visualización.

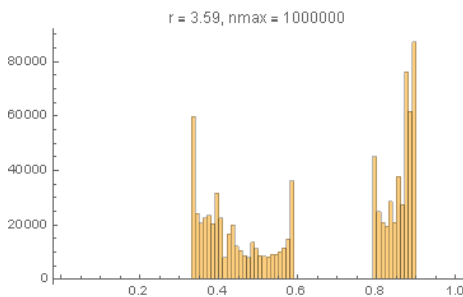


Figura 7: Histograma de x_t para $r = 3,59$.

portamiento similar. Sin embargo, para determinados valores ocurren comportamientos regulares. Este es el caso de $r = 3,83$ con una trectoria p-3 graficada en la figura 8. Esta presenta tan solo tres atractores como se verifica en el histograma de la figura 10. Aumentando ligeramente r se vuelve al comportamiento caótico. r no puede aumentar indefinidamente. El límite está dado por $r = 4$, en el que todos los puntos del intervalo $(0, 1]$ son atractores pero son visitados con distinta frecuencia (trayectoria en la figura 9 e histograma en la 11). Para valores superiores la solución diverge.

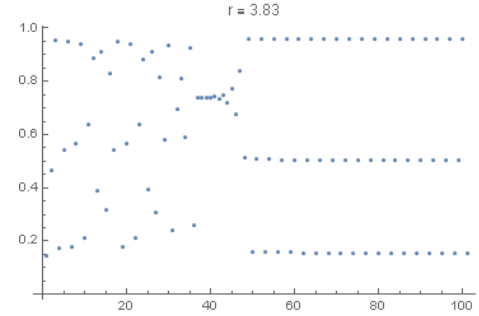


Figura 8: Trayectoria x_t para $r = 3,83$. No se conectaron los puntos de la trayectoria para facilitar la visualización.

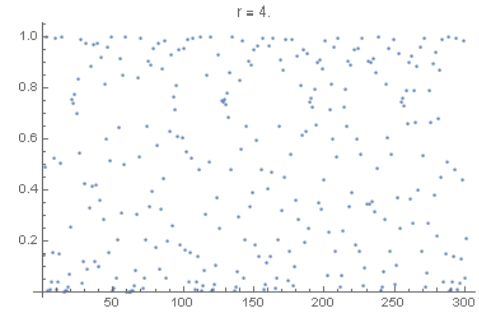


Figura 9: Trayectoria x_t para $r = 4$. No se conectaron los puntos de la trayectoria para facilitar la visualización.

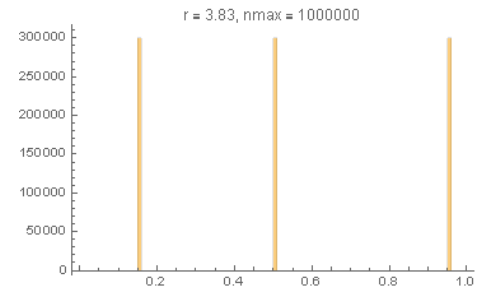


Figura 10: Histograma de x_t para $r = 3,83$.

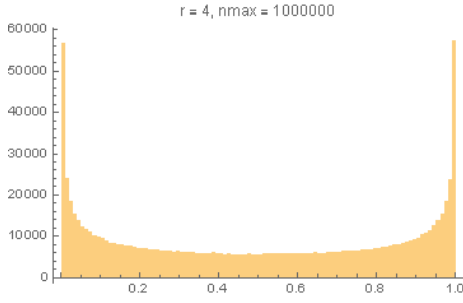


Figura 11: Histograma de x_t para $r = 4$.

II. DIAGRAMA COBWEB

Otro modo de representar la evolución del sistema es el diagrama cobweb. En este se grafica la función

$$f(x) = rx(1 - x),$$

la identidad y una órbita que representa la trayectoria del sistema. Por ejemplo, para $r = 2,22$ se botuvo el gráfico de la figura 12. En este se observa claramente el atractor estable $x^* = 0,5495$. Algebraicamente, el criterio para determinar la estabilidad de un punto fijo x^* en un mapeo f es el siguiente:

- Si $|f'(x^*)| < 1$ el punto es estable.
- Si $|f'(x^*)| > 1$ el punto es inestable.
- Si $|f'(x^*)| = 1$ el criterio no aporta información.

En este caso, $f'(x) = r(1 - 2x)$ y los puntos fijos x^* son aquellos en los que se cumple $x_t = rx_t(1 - x_t)$, en otras palabras $f(x^*) = x^*$.

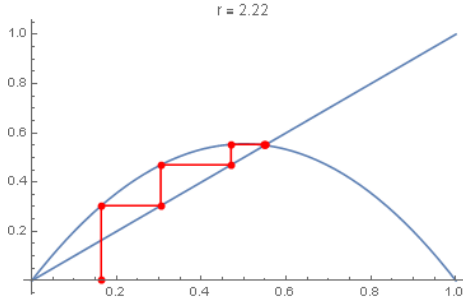


Figura 12: Diagrama cobweb para $r = 2,22$.

Hay dos puntos que cumplen esta condición: $x^* = 0$, $(r-1)/r$. El criterio de estabilidad aplicado al primero de ellos indica $f'(0) = r$. Entonces, este punto será estable para $r < 1$ e inestable para valores mayores. Mientras que para el segundo, $f'((r-1)/r) = 2 - r$ y se concluye que este punto será inestable para $r < 1$ pero estable para $1 < r < 3$. Este comportamiento fue el encontrado al analizar las figuras 1 y 2. Cabe preguntarse qué ocurrirá para r mayores. La figura 3 indica una trayectoria p-2, la cual también se ve reflejada en el diagrama cobweb de la figura 13. En este se observa que la trayectoria p-2 cumple en el estado estacionario una nueva condición: $f(x_1^*) = x_2^*$,

$f(x_2^*) = x_1^*$, es decir, $f(f(x_1^*)) = x_1^*$. La trayectoria es un punto fijo del mapeo $x_{n+1} = f(f(x_n)) = f^2(x_n)$. Consecuentemente, para analizar la estabilidad se deberá aplicar el criterio a f^2 . En primer lugar, hay cuatro valores que cumplen $f^2(x) = x$ dado que es polinomio de grado cuatro. Dos de sus raíces son inestables para $r < 3$ y las otras dos, dadas por la expresión

$$x_{1,2}^* = \frac{0,5(r + r^2 \pm r\sqrt{-3 - 2r + r^2})}{r^2},$$

son estables para $3 < r < 3,4495$: $f^{2'}(x_1^*) = f^{2'}(x_2^*) = -r^2 + 2r + 4$. Para r mayores ocurre el mismo fenómeno: los puntos fijos se vuelven inestables y el diagrama cobweb (figura 14) indica que la trayectoria p-4 cumple en el estado estacionario la condición $f^2(f^2(x)) = f^4(x) = x$. Para r mayores se tiene la trayectoria p-8 (ver figura 15) y sucesivamente. Se puede ver que a modo general la trayectoria p-n es un punto fijo estable de la iteración f^{2n} .

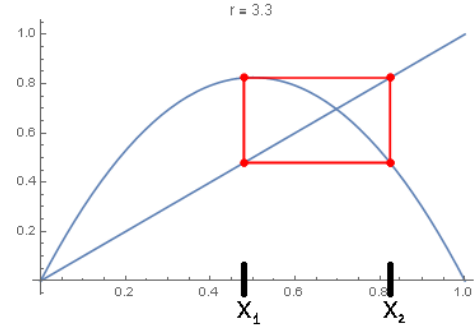


Figura 13: Diagrama cobweb para $r = 3,3$. El transitorio no fue graficado para una mejor visualización.

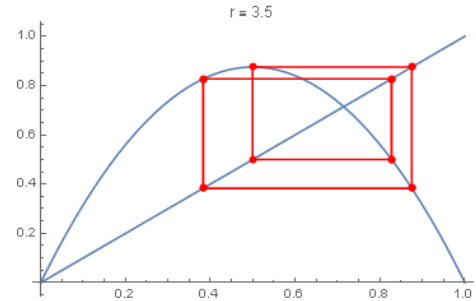


Figura 14: Diagrama cobweb para $r = 3,5$. El transitorio no fue graficado para una mejor visualización.

III. DIAGRAMA DE BIFURCACIONES

En secciones anteriores se identificaron los atractores para determinados valores de r . Sistemáticamente se realizó esta identificación para distintos valores del parámetro en el intervalo $[1, 4]$. Los resultados obtenidos se graficaron en la figura 16. Existen varios fenómenos

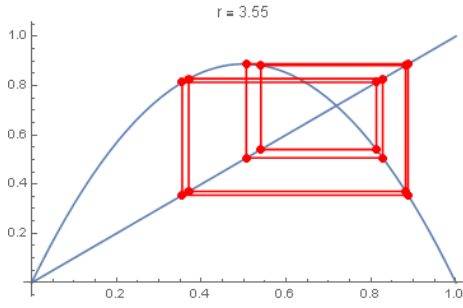


Figura 15: Diagrama cobweb para $r = 3,55$. El transitorio no fue graficado para una mejor visualización.

discutidos anteriormente que se reflejan en este diagrama y aparecen además algunos nuevos. En primer lugar, se observa claramente el fenómeno de bifurcación de período. Por ejemplo, en $r = 3,3$ aproximadamente cuando partiendo de un único atractor, la dinámica cambia, el camino se bifurca y aparece otro atractor. En segundo lugar, los valores r_i donde se dan dichas bifurcaciones de período se acumulan sucesivamente hasta r_∞ donde los atractores se convierten en un continuo. Para valores superiores la dinámica se vuelve caótica con algunas ventanas de comportamiento regular como es el caso de $r = 3,83$. En tercer lugar, cerca de los puntos de bifurcación es complicado identificar los atractores dado que estos cambian rápidamente para valores próximos de r y, además, los transitorios correspondientes son más largos. En cuarto lugar, se observa la presencia estructuras autosemejantes, es decir, el diagrama se repite a distintas escalas. Esto se observa claramente en la figura 17 donde el primer gráfico corresponde al intervalo $r \in (3,3,678)$, el segundo a $r \in (3,45122, 3,59383)$ y el tercero, $r \in (3,54416, 3,57490)$.

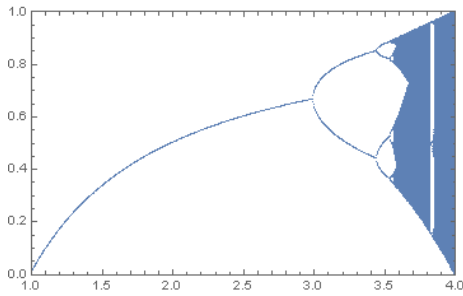


Figura 16: Diagrama de bifurcaciones.

IV. EXPONENTE DE LYAPUNOV

Como se mencionó anteriormente, para $r > r_\infty \approx 3,568$ el sistema es caótico. Esto se caracteriza por la sensibilidad a las condiciones iniciales, es decir, condiciones iniciales cercanas generan trayectorias que se sepa-

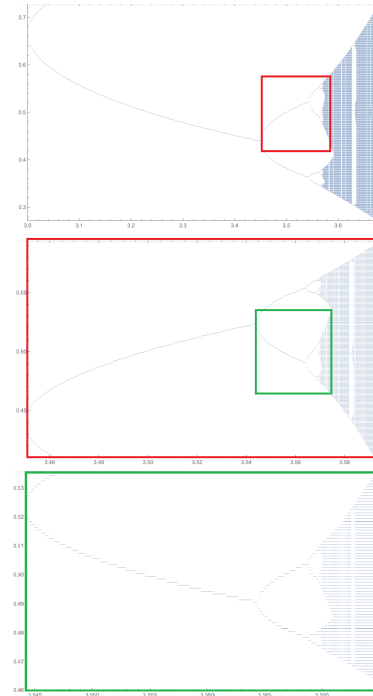


Figura 17: Diagrama de bifurcaciones para distintas escalas.

ran rápidamente. Esta separación se puede caracterizar a través del exponente de Lyapunov λ dado por

$$|\Delta x_t| = |\Delta x_0|e^{\lambda t},$$

donde Δx_t representa la diferencia entre los valores de x_t correspondientes a condiciones iniciales distanciadas en Δx_0 . De este modo, si $\lambda > 0$ las trayectorias se separan y la dinámica es caótica. Mientras que si $\lambda < 0$, se está en presencia de comportamiento regular: trayectorias cercanas son cada vez más cercanas. Por último, si $\lambda \approx 0$, Δx_t varía lentamente y, consecuentemente, el transitorio es lento.

λ se puede determinar explícitamente para distintos valores de r a partir de la expresión

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)|.$$

Los resultados se grafican en la figura 18. En base al valor de λ se pueden reproducir resultados que se obtuvieron en secciones anteriores. En primer lugar, para $r < r_\infty$, $\lambda < 0$ y el comportamiento es regular salvo para algunos puntos donde $\lambda = 0$. Estos últimos corresponden a los puntos de bifurcación de duplicación de período y se caracterizan por un largo transitorio. En segundo lugar, para $r > r_\infty$, $\lambda > 0$ y el comportamiento es caótico salvo para ciertas regiones de comportamiento regular donde ocurre lo contrario.

Ventanas de comportamiento regular

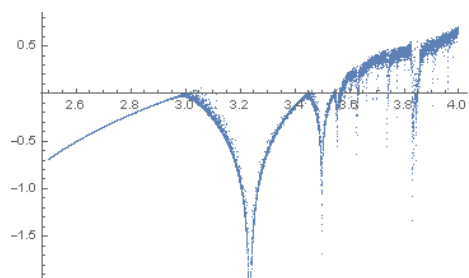


Figura 18: Exponente de Lyapunov λ en función de r .