

CT 系统参数标定及反投影重建成像

摘要

CT 技术在当代社会已广泛应用在临床医学、工业工程等领域。在本题中首先通过建立离散模型并对其简化从而对 CT 仪器参数进行了标定；建立平行束滤波反投影重建模型，通过 Radon 变换及 R-L 滤波器解决了成像问题，并通过对平行束滤波反投影重建模型进行优化，使模型具有降噪能力，从而得到了更精确符合实际的图形与吸收率值。

对问题一，由于附件 2 中的数据存在系统增益，通过对附件 2 数据作消除增益（增益系数为 1.776974）处理后，建立**离散化模型**，由于方程组模型难于求解，故建立一种**简化离散模型**，且通过 MATLAB、Mathmatica 等软件对方程进行求解，解得 180 个方向的精确角度（结果见表 5.1）。通过 Excel 对附件 2 数据使用条件约束进行色阶处理，可以一定程度上将小圆与椭圆的扫描情况清晰地显示。我们利用附件 2 中的数据与模板存在的几何关系，求得探测器单元间距范围为(0.2759, 0.2796)，以椭圆几何中心为原点建立的坐标系 xoy 中，解得旋转中心坐标为(- 9.2996mm,5.5520mm)。

对问题二，由于传统反投影重建算法会引入星状伪迹，我们决定使用基于吸收率的 Radon 变化及 R-L 滤波器构成的**平行束滤波反投影重建模型**。由于系统旋转中心和几何中心不重合，使用 Radon 变换时会造成数据缺失，故我们对正方形托盘进行了“**镶边**”处理。在对数据除去增益（此处增益系数为 2.0033）处理并且在滤波结束后对“**镶边**”进行去除后，我们对被检测物体实现了重建并且得到题目所需十个点的吸收率分别为：**0.000、0.9722、0.0036、1.1761、1.0426、1.4652、1.2849、0.0007、0.0000、0.0175**，其对应的坐标见表 5.2。

对问题三，我们对平行束滤波反投影重建模型进行了优化，加入了降噪处理函数。使用问题二中模型对附件 5 进行重建后发现所得重建图像存在边界模糊不清等问题。通过对模板进行数据反演后与标准值对比，发现吸收率数据会受非系统因素影响，存在一定波动。所以本文中通过多项对比选取**自适应滤波函数**这一最优降噪方法对数据进行降噪处理后，减小了波动范围，并拟合出了边界更为清晰的图形（见图 5.17），实现了重建并且得到题目所需十个点的吸收率分别为：**0.0126、2.2902、5.9159、0.0163、0.0823、3.1336、6.0333、0.0000、7.7184、0.0861**，其对应的坐标见表 5.3。。

对问题四，首先我们基于标定 CT 的各项参数，建立**归一化均方差评价模型**从而对精度和稳定性进行分析。此外基于原模板存在的精度与稳定性的问题，我们**建立了新的模板**（见图 5.20、5.21），新模板具有更高的精度与稳定性，能够对该 CT 进行更精确地参数标定。

本题中我们所建立的一系列模型均能够满足题目要求，且层层递进、环环相扣，具有较高的精度与稳定性。其中本文建立的平行束滤波反投影重建模型还可以由二维推广至三维，可以用于太空垃圾的形状确定与分类，航空器在太空中对未知天体的形状确定等领域。

关键词：离散模型、二维平行波反投影重建、Radon 变化、R-L 滤波器、降噪处理

一、问题重述

CT 可以在不破坏样品的情况下，利用样品对射线能量的吸收特性对生物组织和工程材料的样品进行断层成像，由此获取样品内部的结构信息。本题 X 射线的发射器和探测器的相对位置固定不变，整个发射-接收系统绕位于正方形托盘下方某处旋转中心逆时针旋转 180 次。对每一个 X 射线方向，发射接收装置装有 512 个等距单元探测器，用于测量位置固定不动的二维待测介质吸收衰减后的射线能量，并且通过增益等处理方式得到 180 组接收信息。然而由于存在系统误差，所以需要安装好的 CT 系统进行参数标定，通过已知模板对 CT 系统的参数进行标定，并根据标定的参数对未知结构的样品进行成像。

具体问题重述为下：

- (1) 在正方形托盘上放置两个均匀固体介质组成标定模板，模板的几何信息如图 2 给出，相应的数据文件见附件 1，其中每一点的数值反映了该点的吸收强度“吸收率”。对应用于模板的接收信息见附件 2。问题一要求根据模板及其接收信息对 CT 系统进行参数标定，确定出此 CT 系统实际的旋转中心在正方形托盘中的位置、探测器单元间距以及该 CT 系统使用的 X 射线的 180 个方向。
- (2) 利用问题一所标定的 CT 系统相关参数以及所建立模型，使用附件 3 所给未知介质的接收信息，确定出该未知介质在正方形托盘中的位置、几何形状以及吸收率等信息。另外利用附件 4 中数据给出图 3 中所给 10 个位置处的吸收率。
- (3) 附件 5 为利用该 CT 系统得到了另一未知介质的接收信息。同样利用问题 1 中的标定参数与模型，给出未知介质的系列相关信息并给出图 3 中 10 个位置处的吸收率。
- (4) 对问题 1 中参数标定的精度以及稳定性进行分析，并在此基础上建立新模板、建立对应的标定模型，以改进标定精度和稳定性，并说明理由。

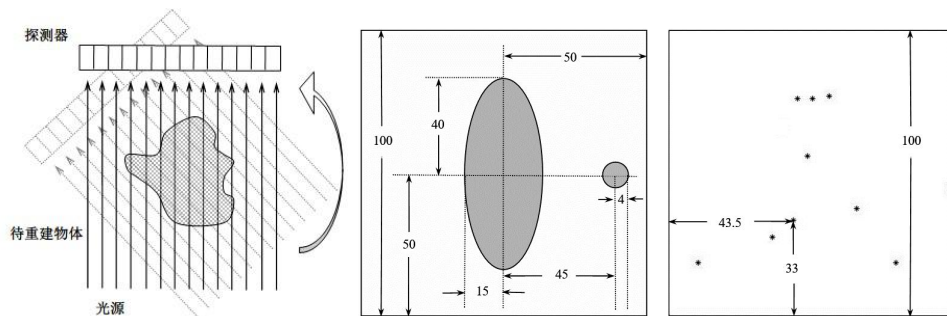


图 1.1 CT 系统示意图 图 1.2 模板示意图 (单位: mm) 图 1.3 10 个位置示意图

二、问题分析

2.1 题目整体分析

本题为典型的 X 射线断层成像[1].问题。通篇分析下来，解决问题一，对题设 CT 系统进行准确的参数标定是求解整个问题的关键。题目中已经给出用于标定的模型，以及使用该 CT 对模型进行扫描后得到的参数。基本思路为建立离散化模型，并利用数学软件对其进行求解。在对该 CT 完成参数标定后，即可使用所得数据及模型对后面的问题进行分析和求解。

2.2 数据的分析与算法处理

由于本题数据量庞大，首先我们要对与数据进行预处理。特别是附件 2 中找出题目所给数据与被测模型之间的关系。利用几何关系及数学原理求出该 CT 机的各项参数：旋转中心位置、探测器单元间距及该仪器使用 X 射线的 180 个方向，并对数据进行优化，对该 CT 机实现参数标定，标定完成后，使用多层面重建[2]方法，对附件中给出的参数进行二维重建。

2.2.1 附件 2 数据处理

由于附件 2 中数据量庞大，首先需要对数据进行预处理。本文将采用 Excel 条件格式对数据进行处理，使用色阶将数据层次化，通过图形特征及颜色变化进行分析。

由题意可以推知附件 2 所给数据为 X 射线的吸收强度，即 X 射线发出与接收时的强度差。根据相关资料可知，X 射线的衰减规律满足衰减系数公式[3]：

$$I = I_0 e^{-\mu L} \quad (2.1)$$

可以看出衰减系数与穿过物体长度存在一定关系，即附件 2 中的数据为对物体长度进行一确定法则的增益得到的。所以在数据处理中首先应先分析出增益函数，找出附件 2 中数据与实际待测物体长度之间的关系，将附件 2 中的数据增益还原，得到长度数据，再进行后面的计算。由于探测器间距未知，本文将在探测器间距求得之后对增益函数进行确定。

2.2.2 平行束滤波反投影重建模型建立

根据题目分析，本文拟建立平行束滤波反投影模型。模型将由 Radon 变换与 R-L 滤波器两部分构成。根据问题一我们可以推测探测器旋转中心与正方形托盘的位置并不重合，势必会造成一定的误差，所以我们将寻求有效的方法，对正方形托盘进行处理，使得处理后的虚拟大托盘能够满足旋转中心与托盘几何中心重合，从而得到较为准确的重建图形。

2.2.3 减噪处理-对模型进行优化

通过题目分析，问题二与问题三的题目问法基本相同，我们由此推测问题三可能存在于由于非测试系统引起的数据波动导致重建图形较为不准确。若根据 2.2.2 中平行束滤波反投影重建模型得到的重建图形较为不准确，我们猜想数据的波动可能由于噪声干扰产生，由此我们可以对模型进行优化，在模型中加入减噪处理函数，使得重建图像更加精确

2.2.4 模型的精度分析与评价

第四问首先要求对第一问中所建立的模型进行评价，即对模型一得到的 CT 参数标定结果进行精度与稳定性的分析，即对于 180 个方向的确定、探测器间距、旋转中心坐标的精度进行分析。此外，在对模型一进行分析之后，需要提供一种新型模板，从而使得精度与稳定性大大提高。

三、模型假设

- 1、题目 CT 机正常运行，质量完好，题中所给数据不存在因机器故障而造成的错误；
- 2、旋转中心出现偏差的来源在于安装误差，而系统本身不存在偏差，又因系统为对称系统，故旋转中心位于接收器中垂线上某点；
- 3、X 射线仅有长度，不存在宽度；
- 4、X 射线强度只在穿透被测物体时发生衰减，空气衰减系数为零；
- 5、X 射线在传播到接收过程中发生的干涉与衍射忽略不计；
- 6、发射与接收装置一一对应。

四、符号系统

序号	符号	符号说明
1	μ	X 射线吸收率
2	d	探测器间距
3	$y_{ij} = k_i x_{ij} + m_{ij}$	以椭圆中心为直角坐标系时, 编号 j 的探测器在第 i 个方向接收的 X 射线的直线方程
4	y_0	旋转中心纵坐标
5	x_0	旋转中心横坐标
6	R_{ij}	以椭圆中心为直角坐标系时, 编号 j 的探测器在第 i 个方向接收的 X 射线所截物体的实际长度

五、模型建立

5.1 问题一的模型建立与求解

5.1.1 离散模型的建立

对题目分析可知, 附件 1、2 均给出了大量的离散数据, 根据数据 2, 数据由于存在 180 个不同方向而被分为 180 组, 每组中共有 512 个数据, 这些数据与射线穿过物体的长度有关, 由此可以建立 180×512 个方程。且在此题的求解中确认 180 个方向为确认所有参数的重要基础, 由此我们可以建立离散模型, 找到 180 组方向间的关系从而进行方程的联立与求解, 求出方向参数。

首先选取椭圆中心点作为坐标原点, 将椭圆短轴方向为 x 轴, 长轴方向为 y 轴建立 xoy 平面坐标系。

$$\begin{cases} y_{ij} = k_i x_{ij} + m_{ij} \\ \frac{x^2}{15^2} + \frac{y^2}{40^2} = 1 \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, 180 \quad j = 1, 2, \dots, 512) \quad (5.1)$$

根据方程联立可以将方程式的解 (x_{ij1}, y_{ij1}) (x_{ij2}, y_{ij2}) 的分别使用相应的 m_{ij} 表示, 并且我们可以得到由该光线截椭圆所得弦长的表达式为:

$$d_{ij1} = \sqrt{[(x_{ij1} - x_{ij2})^2 - (y_{ij1} - y_{ij2})^2]} \quad (5.2)$$

同理可以求得该光线对截圆所得弦长的表达式:

$$d_{ij2} = \sqrt{[(x_{ij3} - x_{ij4})^2 - (y_{ij3} - y_{ij4})^2]} \quad (5.3)$$

其中 (x_{ij3}, y_{ij3}) , (x_{ij4}, y_{ij4}) 为直线与圆的两个交点。

由附件二中信息可以求出射线截物体的长度, 由此联立得到方程组:

$$R_{ij} = d_{ij1} + d_{ij2} \quad (i = 1, 2, \dots, 180 \quad j = 1, 2, \dots, 512) \quad (5.4)$$

理论上, 由这 180 组方程组即可求出所有 k_i ($i = 1, 2, \dots, 180$), 此时还有三个未知量带求, 即旋转中心坐标 (x_0, y_0) 和探测器单元间距 d 。

5.1.2 模型求解

5.1.2.1 数据处理

在 5.1.1 的分析中我们得到了求解问题的理论模型, 理论上通过对式 (5.6) 进行方程求解即可得到 180 个 X 射线方向, 并且将这 180 个角度作为已知条件与附件 1、2 一

起得出设备旋转中心及探测器单元间距。但由于本题的特殊性，存在庞大的数据量及未知量，实际上无法直接通过方程的求解得到题目所求信息，从而直接对该 CT 系统进行参数标定。所以本文将离散模型进行简化，通过几何分析及数据处理，寻求出能够实际求解的有效简化方法，并给出相应精确的结果。

首先，我们在 Excel 中使用条件格式对数据进行了整体分析，附件 2 中非零的数据进行标记，将数据中为零的数据与非零数据进行区分，缩放后得到了如下图形：

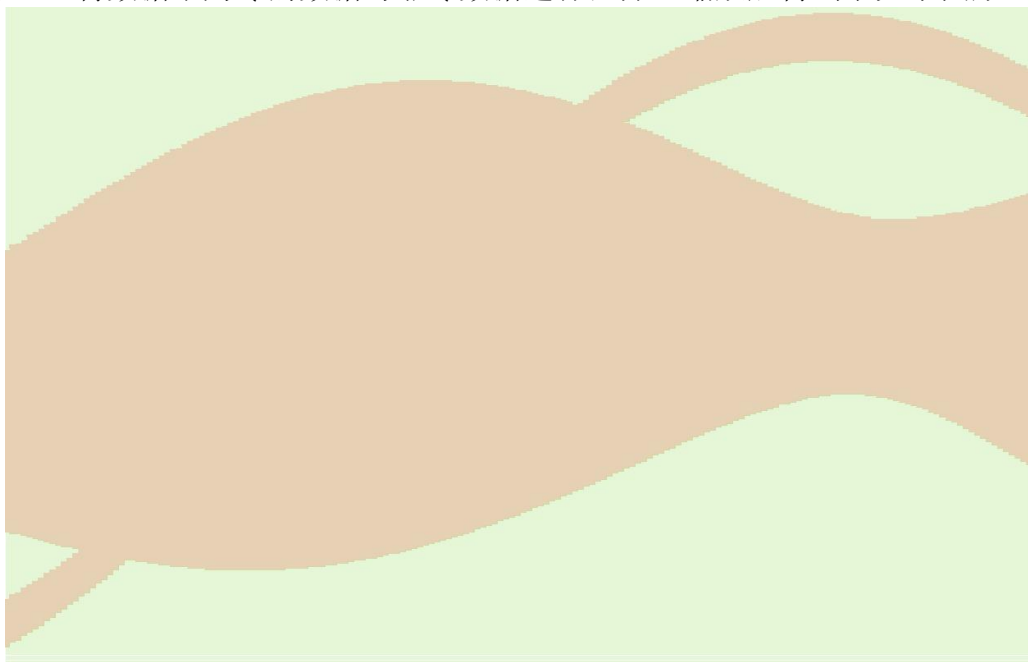


图 5.1 附件 2 非零数据标记后缩略图

5.1.2.2 计算探测器间距 d

结合数据读图 5.1，可以明显的看出在 1-22 列以及 108-180 列时，能清晰的看到两条色带，即在 1-22 组和 108-180 组所对应的探测器照射角度值下，不存在任何一条 X 射线同时穿过圆与椭圆。同时，根据附件 1 及图 1.2 所给的模板尺寸可知宽带处为 X 射线穿过椭圆，窄带为 X 射线穿过小圆。此外，宽带和窄带之间为零的区域表示 X 射线通过椭圆与小圆间的空白区域。由于模型尺寸已知，根据穿过条数即可确定出探测器间距范围。可以下面从小圆、椭圆、宽带和窄带间空白区域三方面共同对探测器间距 d 进行确定，从而缩小范围，使得得到的结果更为精确。

1) 对小圆进行分析

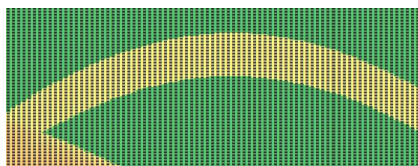
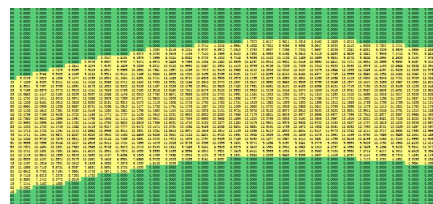


图 5.2 窄带对应小圆的扫描数据图



5.3 窄带部分放大图

不妨将小圆部分取出单独分析（如图 5.2 及 5.3），每一列黄色部分的数据不为零即表示该方向中某些射线穿过了小圆。通过编写程序对数据分析可知，穿过小圆的 X 光条数范围为 28-29 条，28 根时有可能在小圆两边存在两条相切的光线，故可由以下两种穿透情况确定探测器间距的上下界：

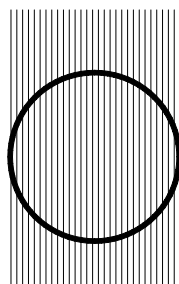
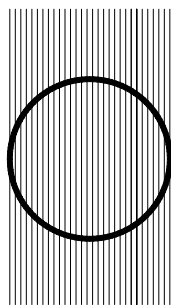


图 5.4 28 根射线穿过小圆且边界相切图 5.5 29 根射线穿过小圆

由图 5.4 和 5.5 可以得到探测器间距与小圆直径 d 的关系如下：

$$27d < 8 < 29d \quad (5.5)$$

化简可得探测器间距 d 的范围为：

$$(0.2759, 0.2963) \quad (5.6)$$

2) 对椭圆进行分析

通过对图 5.1 分析可以直观的看出图中右侧中部出现明显的“颈缩”段。假设颈缩最短处 X 射线与椭圆长轴基本平行，对此情况做如小圆的类似分析，利用处理后的附件 2 的数据得出 X 射线与长轴平行时穿过椭圆的射线条数与椭圆宽度的关系（由于图形过大且上下对称，此处仅做出椭圆的上半部分）：

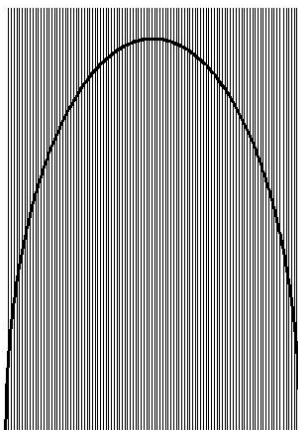


图 5.6 X 射线穿过椭圆示意图

分析同小圆类似，可以得到探测器间距与椭圆短轴的关系如下：

$$107d < 30 < 109d \quad (5.7)$$

化简可得探测器间距的范围为：

$$(0.2752, 0.2803) \quad (5.8)$$

3) 对大圆与小圆间空白距离分析

同样分析“颈缩”段，宽带与窄带之间有一段全部为零的数据，与模板中椭圆与小圆之间的空白距离相对应。由图 1.2 可知椭圆与小圆中心线与椭圆短轴在同一直线上，故当 X 射线与椭圆长轴平行时，也与椭圆与小圆中心线连线垂直。对此区域的数据与模板尺寸做如上相同处理，可以得到探测器间距与空白区域的关系如下：

$$93d < 26 < 95d \quad (5.9)$$

化简可得探测器间距的范围为：

$$(0.2737, 0.2796) \quad (5.10)$$

综上所述，求出式(5.6)、(5.8)、(5.10)的交集即为探测器间距的精确范围：

$$d \in (0.2759, 0.2796) \quad (5.11)$$

为了计算方便，本文取 $d = 0.2776$ 进行后续计算。

5.1.2.3 增益函数的确定

由所阅读的文献，CT 机通常对衰减系数公式做如下处理[3]:

$$P = \ln \frac{I_0}{I} = \mu L \quad (5.12)$$

对此我们猜想，附件 2 所给信息与实际长度成正比，即：

$$R_{ij} = k_r f_{ij} \quad (5.13)$$

其中 R_{ij} 表示实际长度， f_{ij} 表示第 i 行 j 列的数据。

为了验证我们的猜想，我们需要挑选出椭圆与圆分离的数据，为了选定仅通过椭圆而不通过小圆的射线，我们对数据进行了进一步的处理。在 Excel 中对附件 2 的数据进行了条件格式的限定，采用色阶对数据进行整合，得到了如下图像：

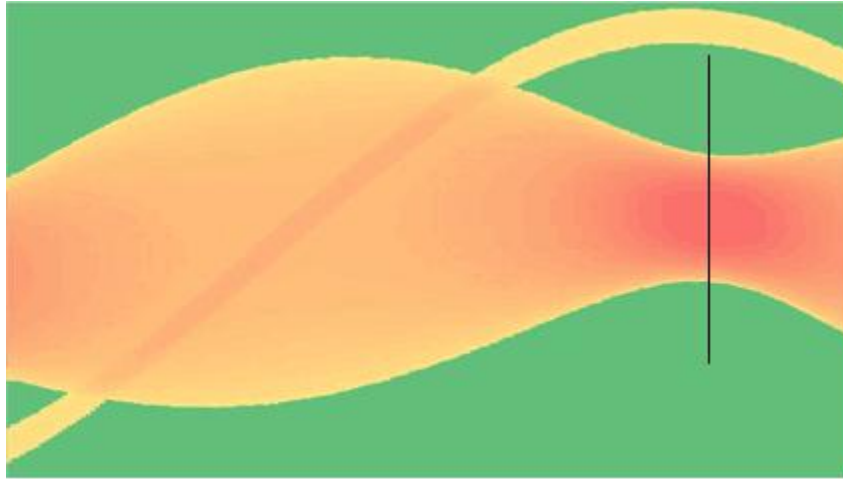


图 5.7 使用色阶处理后的附件 2 缩略图

选取最窄的一列数据，即图中画黑线的一列，认为此时射线束刚好平行于椭圆长轴射入，找到这一列最大的数据，用该值除以椭圆长轴，得到比例系数 k_1 ，再用上方属于圆的数据中的最大值，再除以圆的直径，得到比例系数 k_2 ，两个比例系数非常接近，可近似认为猜想成立。

下面将对该比例系数进行精确求解，单取出圆的数据进行分析。由微积分的思想：

$$S = \sum_{j^*} R_{ij} \Delta x \quad (5.14)$$

其中 j^* 表示圆的数据所在列数

由于间距 d 非常小，令 $\Delta x = d$ ，且 $R_{ij} = k_r f_{ij}$ ，上式即变为：

$$S = \sum_{j^*} k_r f_{ij} \cdot d \quad (5.15)$$

对圆的多列数据进行求值，并取平均，即可得到较为精确的比例系数 k_r 的值。通过计算，我们求得增益系数的值 $k_r = 1.776974$ 。

5.1.2.4 180 个角度的确定

虽然理论上能够对 180×512 的方程进行求解，但由于数据量过于庞大，实际电脑无法进行运算，所以我们对模型进行了改进，提出了简化离散模型：对于每一种角度，随机选取 3 根 X 光线为一组数据作为研究对象，三根 X 射线满足以下条件：1) 跨度较大；2) 等距分布；3) 射线仅通过椭圆而不通过小圆。

为了选定仅通过椭圆而不通过小圆的射线，我们对数据进行了进一步的处理。在 Excel 中对附件 2 的数据进行了条件格式的限定，采用色阶对数据进行整合，得到了如下图像：

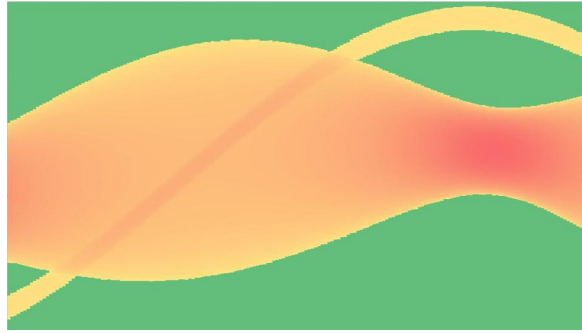


图 5.8 使用色阶处理后的附件 2 缩略图

如图，利用色阶可以明显的看到色带重合部分内存在一条颜色较深的色带，此颜色所对应数据即为 X 射线既通过椭圆又通过小圆后吸收量数据，此部分数据不能够作为数据组中的数据进行运算。

对于每一种角度所选数据组进行如下运算：

假设：

$$\begin{cases} y_{i1} = k_i x_{i1} + m_{i1} \\ y_{i2} = k_i x_{i2} + m_{i2} \\ y_{i3} = k_i x_{i3} + m_{i3} \end{cases} (i = 1, 2, \dots, 180) \quad (5.16)$$

其中：

$$\frac{m_{i1} + m_{i3}}{2} = m_{i2} \quad (5.17)$$

将式(5.16)中的三式分别与椭圆方程联立：

$$\begin{cases} y_{ij} = k_i x_{ij} + m_{ij} \\ \frac{x^2}{15^2} + \frac{y^2}{40^2} = 1 \end{cases} (j = 1, 2, 3) \quad (5.18)$$

根据方程联立可以将方程式的解 (x_{ij1}, y_{ij1}) (x_{ij2}, y_{ij2}) 分别使用相应的 m_{ij} 表示，并且我们可以得到由该组光线截椭圆所得弦长的表达式为：

$$d_{ij} = \sqrt{[(x_{ij1} - x_{ij2})^2 - (y_{ij1} - y_{ij2})^2]} \quad (5.19)$$

弦长可根据附件二中信息求出，记为 R_{ij} ，由此联立式(5.15)得到方程组：

$$R_{ij} = d_{ij} = \sqrt{[(x_{ij1} - x_{ij2})^2 - (y_{ij1} - y_{ij2})^2]} \quad (5.20)$$

同时联系式(5.17)，可以得到 180 组方程式：

$$\begin{cases} R_{ij} = d_{ij} = \sqrt{[(x_{ij1} - x_{ij2})^2 - (y_{ij1} - y_{ij2})^2]} \\ \frac{m_{i1} + m_{i3}}{2} = m_{i2} \end{cases} (i = 1, 2, \dots, 180)(j = 1, 2, 3) \quad (5.21)$$

对于每一个独立方程组进行独立求解，可以求得本组数据所对应的光线斜率 k ，进行反三角运算可得到该组光线的角度值，并且对于每一种斜率取多组数据组进行上述运算，将所得结果求平均值以减小随机带来的误差。并将得到的 180 个数据进行拟合，拟合后的 180 个角度值见下表（与 x 正方向夹角）：

表 5.1：180 个角度值

-60.2152	-58.8587	-58.3008	-57.2081	-56.1751	-55.2026	-54.1989	-53.1945	-52.1913	-51.1883
-50.1841	-49.1784	-48.1748	-47.1711	-46.1670	-45.0092	-44.1559	-43.1498	-42.1464	-41.1399
-40.1346	-39.1288	-38.1194	-37.1142	-36.1026	-35.0940	-34.0861	-33.0800	-32.0708	-31.0575
-30.0481	-29.1362	-28.0209	-27.0104	-25.9942	-24.9819	-23.9634	-22.9444	-21.9239	-20.9011
-19.8815	-18.8563	-17.8288	-16.799	-15.7555	-14.7159	-13.6685	-12.6137	-11.5409	-10.4695

-9.3730	-8.2484	-7.1066	-5.8943	-4.5786	-3.0205	-2.5839	-2.1474	-1.7108	-1.2742
-0.8377	-0.4011	0.0354	0.4720	0.9085	1.3451	3.5747	4.8814	6.2408	7.4525
8.5643	9.73211	10.7974	11.8440	12.9171	13.9890	15.0196	16.0352	17.1078	18.1144
19.1525	20.1918	21.2181	22.2248	23.2439	24.2613	25.1502	26.2951	27.1125	28.3244
29.3300	30.3405	31.3545	32.3644	33.3739	34.3827	35.3912	36.3992	37.4067	38.4139
39.4208	40.4272	41.5339	42.4392	43.4449	44.4501	45.4553	46.4601	47.4650	48.4692
49.4734	50.4776	51.4813	52.4850	53.4886	54.4919	55.4949	56.4980	57.5007	58.5034
59.5059	60.5081	61.5102	62.5120	63.5138	64.5152	65.5166	66.5176	67.5183	68.5188
69.5188	70.5186	71.5179	72.5168	73.5151	74.5128	75.5097	76.5056	77.5004	78.4938
79.4853	80.4743	81.4601	82.4415	83.4162	84.3812	85.3301	86.2507	87.1162	87.8583
88.3061	91.7791	92.3391	93.1286	94.0144	94.9453	95.8998	96.8680	97.8450	98.8278
99.8147	100.8045	101.7966	102.7904	103.7858	104.7818	105.7789	106.7768	107.7753	108.7744
109.7738	110.7737	111.7741	112.7745	113.7751	114.7763	115.7775	116.7791	117.7812	118.7725

5.1.2.4 旋转中心的确定

由题意我们可以知道，旋转中心出现偏差的来源在于安装误差，而系统本身不存在偏差，所以本文将从此处入手求解旋转中心位于方形托盘的位置。首先我们对 512 个探测器标号 1-512 号。由于仪器本身不存在偏差，为使得仪器能够准确的扫描得出结果，该 CT 肯定围绕接收器中垂线上某点旋转。所以将旋转中心投影至接收器上时对应点的应为编号为 256 或 257 的接收器。椭圆的中心点即为正方形托盘的中心，所以接下来对椭圆的扫描情况进行分析。由图 5.7 可以看到椭圆带有明显的最宽处和最窄处。根据几何分析可知，最宽处对应的扫描方式为：X 射线几乎平行于椭圆短轴且从正方形托盘左方进行入射（如图）；最窄处对应的扫描方式为：X 射线几乎平行于椭圆长轴且从正方形托盘下方进行入射（如图）。

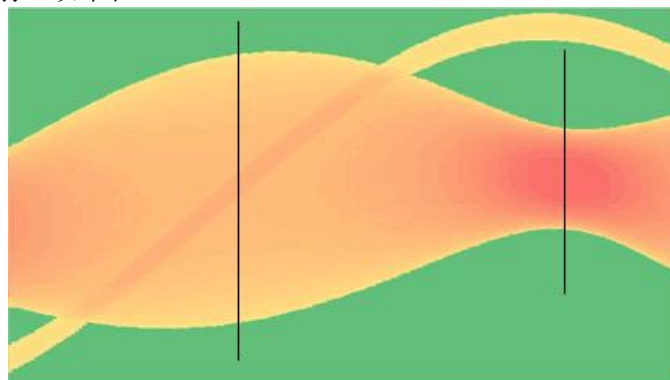


图 5.9 研究对象选取位置

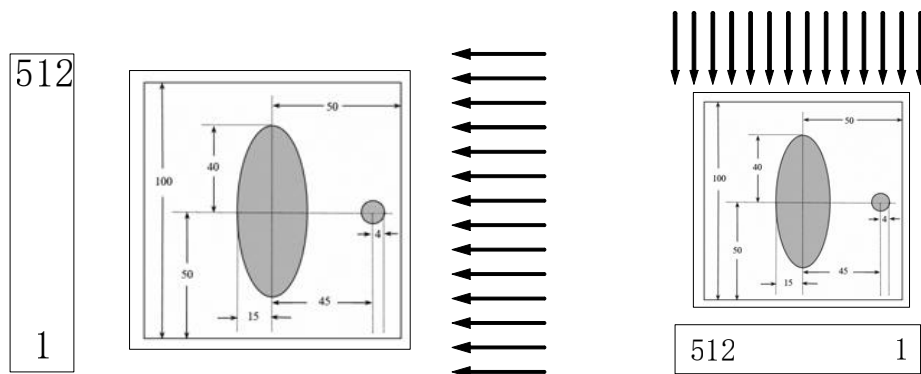


图 5.10 X 射线平行于短轴入射图

5.11X 射线平行于长轴入射

1) 旋转中心 y_0 的确定

当 X 射线以几乎平行于椭圆短轴扫描时，根据附件 2 的数据我们可以根据最大值找到椭圆中心点投影至接收器上对应的接收器编号。如果在安装过程中没有出现误差，理论上该投影应与旋转中心投影重合。然由于存在安装误差，导致了椭圆中心点投影与接

收器中点不重合，而两点之间的距离则为旋转中心 y_0 的值，即椭圆中心点投影所对编号与接收器中心位置编号之差与探测器间距 d 的乘积。

2) 旋转中心 x_0 的确定

当 X 射线以几乎平行于椭圆长轴扫描时，根据附件 2 的数据我们可以根据最大值找到椭圆中心点投影至接收器上对应的接收器编号。如果在安装过程中没有出现误差，理论上该投影应与旋转中心投影重合。然由于存在安装误差，导致了椭圆中心点投影与接收器中点不重合，而两点之间的距离则为旋转中心 x_0 的值，即椭圆中心点投影所对编号与接收器中心位置编号只差与探测器间距 d 的乘积。

具体计算由 MATLAB 进行实现，程序见附录。利用 MATLAB 求得旋转中心的坐标为：

$$(-9.2996, 5.5520)$$

综上所述，我们对此 CT 完成了参数标定。探测器间距为 0.2776mm、旋转中心坐标为 $(-9.2996, 5.5520)$ 。180 个角度值在表 5.1 中进行了全部的罗列，由于数据量过大再此不再重复叙述。

5.2 问题二的建模与求解

5.2.1 平行束滤波反投影重建模型的建立

本题为二维平行波反投影重建问题[4]，在问题一中已将该 CT 各项参数完成标定。为了得出准确的图像，成功实现二维平行波反投影重建，应建立平行束反投影重建模型。传统模型为反投影重建模型，但其存在严重的缺点是会引入星状伪迹，对此需要引入滤波函数，建立平行束滤波反投影模型。建模过程分为两部分：1)对数据进行基于吸收率的 Radon 变换[5]；2)使用 R-L 滤波器[4].进行滤波处理。

5.2.1.1 Radon 变换及其性质

假设 $f(x,y)$ 为待重建物体的密度函数，其 Radon 变换的定义[5]为沿一组平行 X 射线的第一类曲线积分：

$$R(\varphi, r) = \int_{L(\theta, r)} f(x, y) ds \quad (5.22)$$

其中 $R(\varphi, r)$ 是函数 $f(x, y)$ 的 Radon 变换。每一根射线 M 由 θ 和 r 两个参数决定，其中 φ 是射线 M 的垂线和 x 轴的夹角， r 是射线 L 到原点的距离（如图 5.12）。

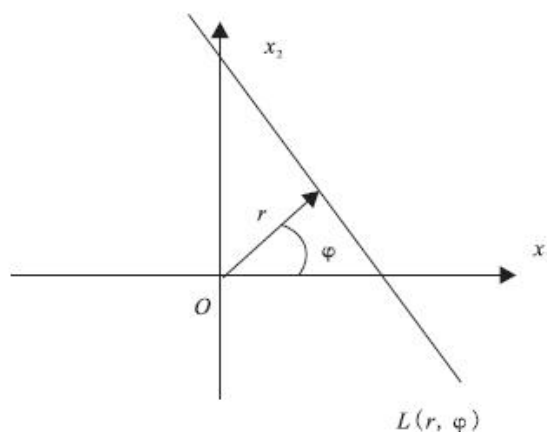


图 5.12 Radon 变换基本参数示意图

对于本题，我们在第一问中已经将全部的 φ 给出。对于每一个 φ 给出二维成像物体 $f(x, y)$ 一维投影的全部集合。利用变量 $r = x \cos \varphi + y \sin \varphi$ 和冲激函数的抽样特性可得：

$$R(\varphi, r) = \iint_{(L^2)} f(x, y) \delta(x \cos \varphi + y \sin \varphi - r) dx dy \quad (5.23)$$

以上为对 Radon 变换定义的叙述。

在本题中题目要求对被扫描物体进行 1:1 重现，即不需要考虑对函数 $f(x,y)$ 进行各项同性的缩放、旋转或平移变换。

假设 $p_\varphi(x_r)$ 为 $f(x,y)$ 在角度 $\varphi - \varphi_0$ 时的平行束投影。理论上投影 $p_\varphi(x_r)$ 和密度分布函数 $f(x,y)$ 在时域上可以使用一维线积分的堆积来表述，但根据线积分寻找投影重建的方法是非常困难的。而傅里叶切片定理[5]在频域上提供了投影与图像之间更简单的数学关系。其数学表达式为：

$$F_1[p_\varphi(x_r)] = F(\rho, \varphi)|_{\varphi=\varphi_0} \quad (5.24)$$

投影图像重建的问题，原则上可按如下流程求解：采集不同视角下的投影，求出各投影的一维傅里叶变换，由傅里叶定理即可得到图像的二维傅里叶变换的各切片，然后汇集成图像的 2D 傅里叶变换，最后求反变换得到重建图像。

5.2.1.2 R-L 滤波器

基于上述原则，我们采用了 R-L 滤波器[4]。R-L 滤波器的离散形式由印度的学者 Ramachandran 和 Lakshminarayanan 提出，其频域函数为：

$$H_{R-L}(\rho) = |\rho|W(\rho) = |\rho|\text{rect}\left(\frac{\rho}{2B}\right) \quad (5.25)$$

式中：

$$\text{rect}\left(\frac{\rho}{2B}\right) = \begin{cases} 1, & |\rho| < B = \frac{1}{2d} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (5.26)$$

其中， ρ 是空间频率， $W(\rho)$ 是窗函数。

相应的时域卷积函数 $h_{R-L}(x_r)$ 为：

$$h_{R-L}(x_r) = 2B^2 \sin c(2x_r B) - B^2 \text{sinc}^2(x_r B) \quad (5.27)$$

以 $x_r = nd$ 带入式 (5.27) 得到 $h_{R-L}(x_r)$ 的离散形式：

$$h_{R-L}(x_r) = \begin{cases} \frac{1}{4d^2} & n = 0 \\ 0 & n = \text{偶数} \\ \frac{-1}{n^2 \pi^2 d^2} & n = \text{奇数} \end{cases} \quad (5.28)$$

R-L 滤波器形式简单实用，重建效果较好，轮廓清楚。

5.2.1.3 平行束滤波反投影重建模型

设需要重建的图像为 $b(x,y)$ ，它的二维傅里叶变换为 $B(\omega_1, \omega_2)$ 。根据傅里叶切片定理， $\hat{B}(\rho, \theta)$ 可通过 $b(x,y)$ 在不同视角 φ 下的投影 $p_\varphi(x_r)$ 的一维傅里叶变换求得，即：

$$B(\omega_1, \omega_2) = \hat{B}(\rho, \theta) = F_1[p_\varphi(x_r)] = P(\rho, \varphi) \quad (5.29)$$

需要重建的图像

$$\begin{aligned} \hat{b}(\rho, \theta) = b(x,y) &= F_2^{-1}[B(\omega_1, \omega_2)] = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega_1, \omega_2) e^{j(\omega_1 x + \omega_2 y)} d\omega_1 d\omega_2 \\ &= \int_0^\pi d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} |\rho| P(\rho, \varphi) e^{j2\pi \rho r \cos(\theta - \varphi)} d\rho \end{aligned} \quad (5.30)$$

上式中后半部分积分，可写成空域变量为 x_r 的傅里叶反变换式：($x_r = r \cos(\theta - \varphi)$)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |\rho| P(\rho, \varphi) e^{j2\pi \rho r \cos(\theta - \varphi)} d\rho &= \int_{-\infty}^{\infty} |\rho| P(\rho, \varphi) e^{j2\pi \rho x_r} d\rho \\ &= h(x_r) * p(x_r, \varphi) \\ &= g(x_r, \varphi) \\ &= g(r \cos(\theta - \varphi), \varphi) \end{aligned} \quad (5.31)$$

式中，

$$g(x_r, \varphi) = h(x_r) * p(x_r, \varphi) \quad (5.32)$$

而 $h(x_r) = F_2^{-1}[\rho]$, $p(x_r, \varphi) = F_2^{-1}[P(\rho, \varphi)]$ 。把式(5.30)代入式(5.29)后得到:

$$\hat{b}(r, \theta) = \int_0^\pi g[r \cos(\theta - \varphi), \varphi] d\varphi \quad (5.33)$$

上式的物理意义是: 经过给定点 (r, θ) 的所有滤波后的射线投影在 $0 \sim \pi$ 范围内的累加, 反投影重建, 得出 (r, θ) 点的像素值, 这就是滤波反投影方程, 可以集中表现出滤波反投影算法的各个步骤。

综上所述, 我们将应用平行束滤波反投影重建模型, 对第二问进行求解。

5.2.2 平行束滤波反投影重建模型的实现与问题求解

由 5.2.1 已经分析出算法原理, 而软件 MATLAB 程序中 iradon 函数则正是基于 R-L 滤波器的滤波反投影函数, 所以此模型可直接由 iradon 函数进行实现。

5.2.2.1 比例系数处理

由于题目所给数据经过了增益处理, 所以在进行计算机反投影时需要建立计算机所求得数据与经过增益处理后的数据之间的关系。对此我们先对附件 2 进行反投影计算, 求得各个像素点的吸收率, 对比附件 1 所给出的吸收率, 建立二者之间的关系函数, 分析可知计算机所求得的吸收率与附件 1 所给的吸收率近似成正比, 利用 MATLAB 求得比例系数 $k=2.033$ 。即:

$$X_2 = kX_1 \quad (5.34)$$

其中 X_1 为电脑计算的吸收率, X_2 为附件 1 所给的吸收率。

5.2.2.2 “镶边”处理

根据第一问可知, 由于安装误差, 旋转中心并不在正方形托盘的几何中心, 导致了直接使用 iradon 函数会出现较大的偏差。对此我们将正方形托盘进行了“镶边”处理(如图 5.13 其中“○”为镶边前正方形托盘的几何中心, “×”为旋转中心), 使得镶边后的正方形的几何中心即为旋转中心(即“×”为大正方形几何中心)。

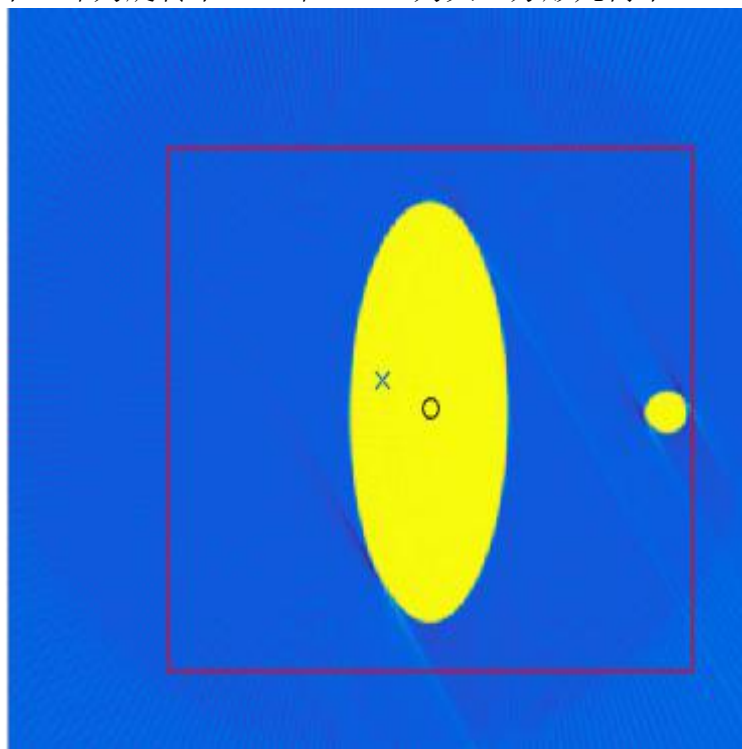


图 5.13 经过镶边处理后大正方形及各组分几何关系图

在对正方形托盘进行“镶边”处理之后, 得到的“新大正方形托盘”满足旋转中心

位于托盘中心，故消除了系统误差，此时可以直接使用 iradon 函数对其进行滤波反投影计算。

5.2.2.3 滤波反投影计算

利用 MATLAB 软件编写对应程序，利用 iradon 函数对附件 3 数据进行滤波反投影计算，计算结果见 problem2。但得到的结果为大正方形下的运算结果（如图 5.14）。

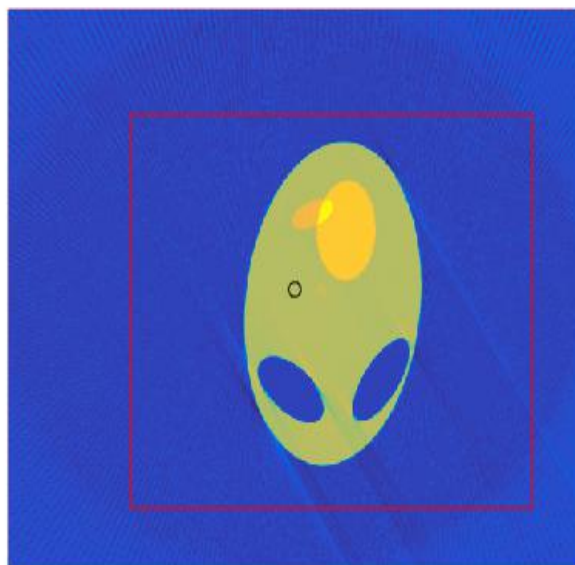


图 5.14 “镶边”后附件 3 反演重建图

要求得真实正方形托盘上被扫描物体的几何形状及其确定位置，还需要进行“去边”处理。去边处理并且乘上比例系数后的运行结果见图 5.15，各个点吸收率的计算结果见文件 problem2.xls。

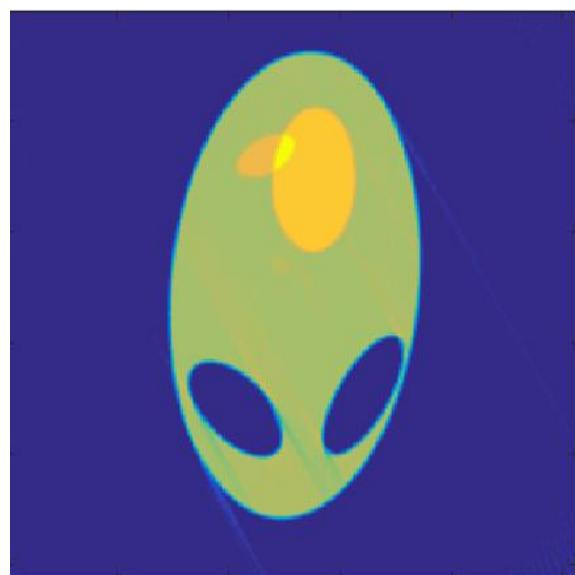


图 5.15 去掉“镶边”后的反演图

十个确定点的参数如下表：

表 5.2 问题二中十个确定点吸收率

X	Y	吸收率
10.0000	18.0000	0.0000
34.5000	25.0000	0.9722
43.5000	33.0000	0.0036

45.0000	75.5000	1.1761
48.5000	55.5000	1.0426
50.0000	75.5000	1.4652
56.0000	76.5000	1.2849
65.5000	37.0000	0.0007
79.5000	18.0000	0.0000
98.5000	43.5000	0.0175

5.3 问题三的模型与求解

5.3.1 平行束滤波反投影重建模型运算

由题设，要求基本与问题二相似，根据问题二求解的思想，我们同样进行镶边等处理，然后使用 iradon 函数编写程序，对问题二的数据实现了滤波反投影重建，得到的图像如下：

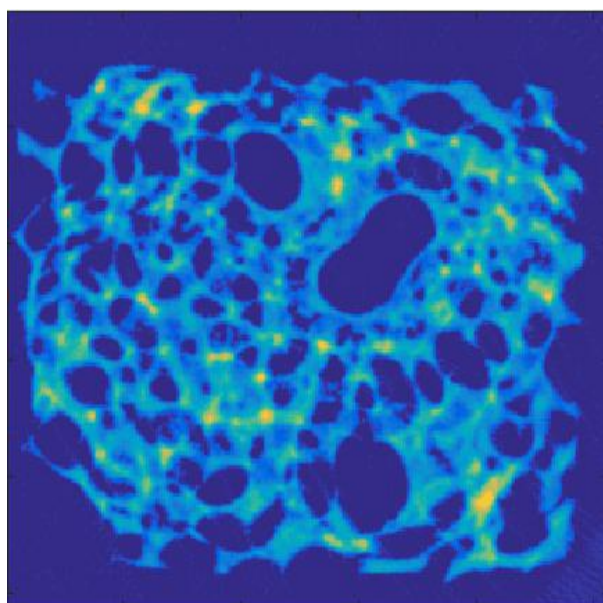


图 5.16 未降噪时的反演图像

十个确定点的参数如下：

表 5.3 问题三中十个确定点未降噪吸收率

X	Y	未降噪吸收率
10.0000	18.0000	0.0114
34.5000	25.0000	2.2530
43.5000	33.0000	5.9306
45.0000	75.5000	0.0169
48.5000	55.5000	0.0410
50.0000	75.5000	3.1343
56.0000	76.5000	5.9507
65.5000	37.0000	0.0000
79.5000	18.0000	7.7646
98.5000	43.5000	0.0551

5.3.2 平行束滤波反投影重建模型优化

由图 5.16 我们可以看出，利用 5.2 中的平行束滤波反投影重建算法对附件 5 中的进行计算，得到的图像边界存在大量毛刺、边缘不光滑、边界模糊等问题。经过分析我们

推断由于噪点的存在，影响了图像的质量，对扫描数据及处理存在干扰。所以我们着手对数据进行降噪处理。

5.3.2.1 吸收率的波动范围

对于问题三，已知数据只有受噪点影响的数据附件 5，以及根据附件 5 得出的相关数据。仅有这些数据，在没有标准值进行参考的情况下，我们对噪点造成的结果波动无法定量的进行确定。但对于模板试件，我们已知其几何参数及扫描后的得到数据，故本文对附件 2 进行反演，利用 iradon 函数计算出反演矩阵，将反演矩阵和初始矩阵（附件 1）进行比对，从而确定噪点是否存在，及其对图像的影响程度。

我们使用 5.2 中的算法对附件 2 进行了反演，将得到的反演矩阵与附件 1 标准矩阵相减，把得到的差值矩阵中的每个元素求绝对值以后求和，并将其平均分摊到 256*256 个像素点中，得到平均每个像素点的干扰值为 0.0174，即由 iradon 得到的吸收率数值平均波动为 ± 0.0174 。

5.3.2.2 降噪以后吸收率波动范围

根据噪声的概率分情况来看，可分为高斯噪声、瑞利噪声、伽马噪声、指数噪声和均匀噪声。MATLAB 软件中有多种不同的降噪工具函数，但针对不同的噪声，不同的降噪工具函数的降噪效果也有很大区别。在本题中，我们无法确定造成噪点的噪声种类，所以将使用三种处理不同类型噪声的降噪函数对已知参数的模板扫描结果进行降噪处理，分别求出降噪后数据的波动范围，选取最小的波动范围所对应的工具函数作为本题的降噪（滤波）工具。我们初步选取的三种降噪工具函数[6]如下：

1) 均值滤波函数[6]

均值滤波是典型的线性滤波算法。其采用的主要方法为领域平均法，即对待处理的某个像素点(x,y)，选择一个模板，该模板由其近邻的若干像素组成，求模板中所有像素的均值，再把该均值赋予当前像素点(x,y)。作为处理后图像在该点上的灰度 g(x,y)，即
$$g(x,y) = \frac{1}{M} \sum_{(m,n) \in S} f(x,y)$$
，s 为模板，M 为该模板中包含当前像素在内的像素总个数。

2) 自适应滤波函数[6]

它能根据图像的局部方差来调整滤波器的输出,局部方差越大,滤波器的平滑作用越强。它的最终目标是使恢复图像 f(x,y)与原始图像 f(x,y)的均方误差 $e^2 = E[f(x,y) - f(x,y)^2]$ 最小。

3) 中值滤波函数[6]

它是一种非线性平滑滤波函数,其基本原理是把数字图像或数字序列中一点的值用该点的某个领域中各点值的中值代换,其主要功能是让周围像素灰度值的差比较大的像素改取与周围的像素值接近的值,从而可以消除孤立的噪声点,所以中值滤波对于滤除图像的椒盐噪声非常有效。

我们分别使用三种滤波工具，对反演矩阵进行降噪处理，经过同 5.3.2.1 对模板进行数据分析处理后，得到三种工具降噪后噪点造成的数据波动范围为：

表 5.4 降噪工具与其处理后波动值

降噪工具	无	Filter2	Wiener2	Medfilt2
波动值	± 0.0174	± 0.0159	± 0.0152	± 0.0158

根据上表对三种降噪工具进行对比，我们最终将维纳滤波法用于问题三中数据的去噪处理。

5.3.2.3 降噪后问题三的解

经过 Wiener 去噪处理后，我们得出了问题三的优化解。计算结果见文件 problem3.xls。我们对降噪前后得到的吸收率数据表进行了色阶处理，通过对数据左上角区域进行分析

对比可以看出，经过降噪处理后的噪点数量大大减小，图像的边界更为明确，降噪效果较好：

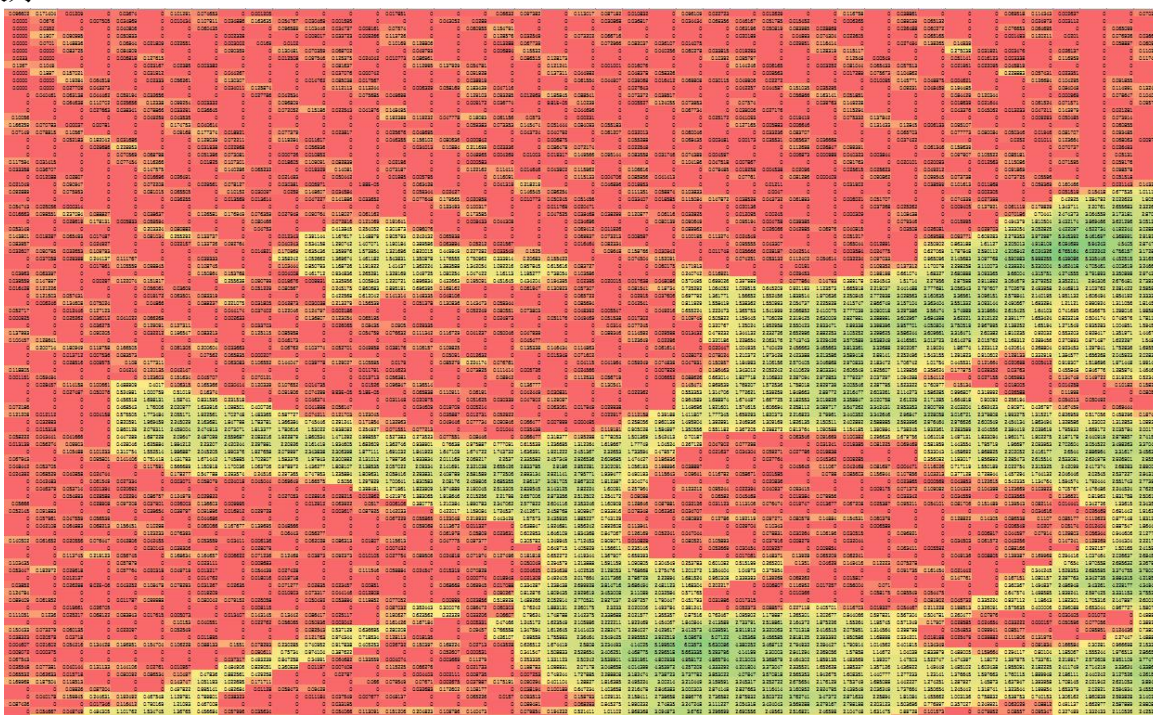


图 5.17 降噪前的数据

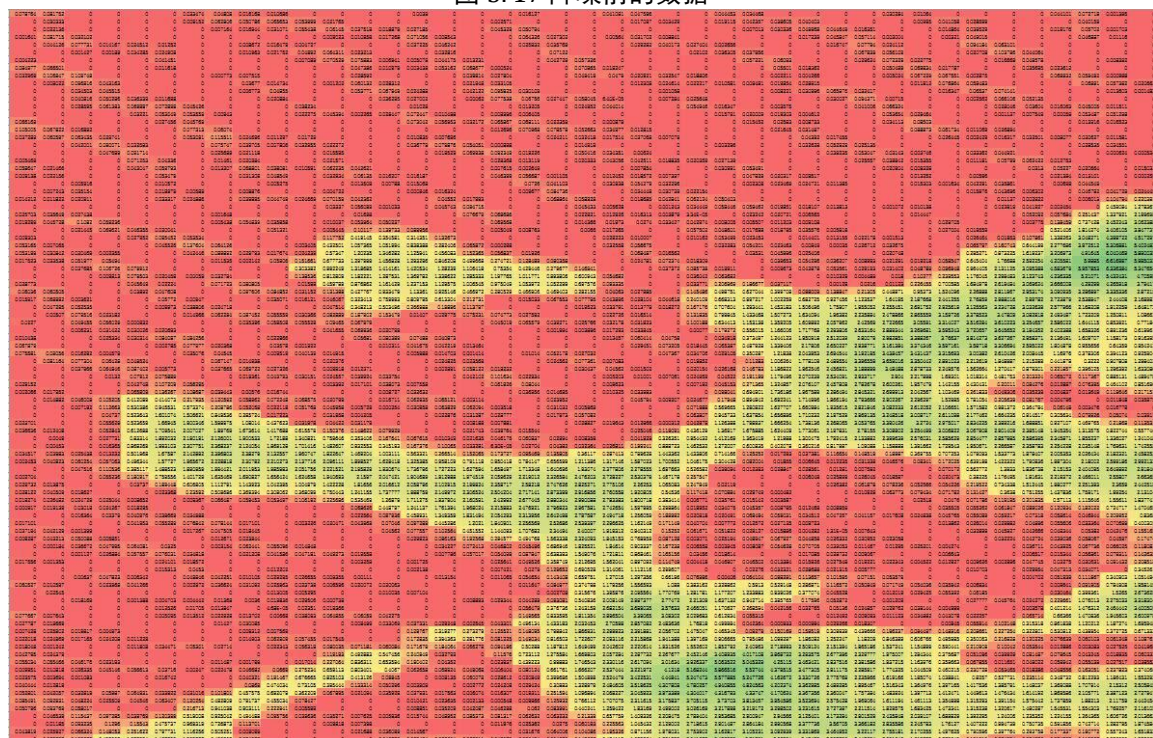


图 5.18 降噪后的数据

经过降噪处理后的图像为：

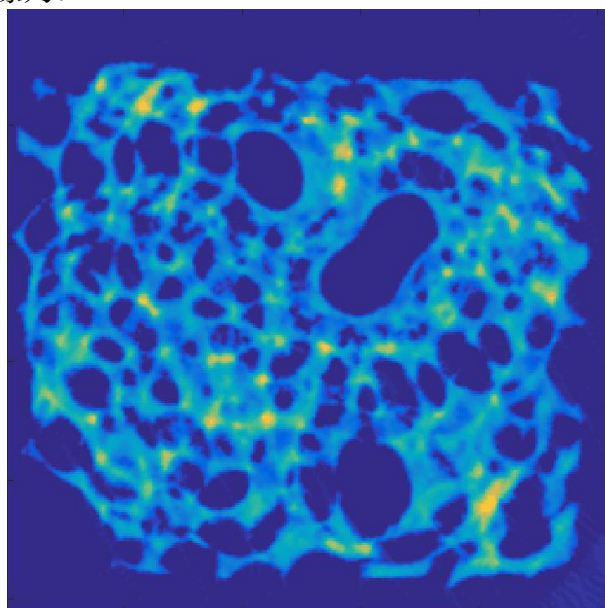


图 5.19 降噪处理后的重建图像

十个确定点的参数为：

表 5.5 十个确定点降噪后吸收率

X	Y	降噪后吸收率
10.0000	18.0000	0.0126
34.5000	25.0000	2.2902
43.5000	33.0000	5.9159
45.0000	75.5000	0.0163
48.5000	55.5000	0.0823
50.0000	75.5000	3.1336
56.0000	76.5000	6.0333
65.5000	37.0000	0.0000
79.5000	18.0000	7.7184
98.5000	43.5000	0.0861

5.4 模型的评价与优化

5.4.1 模型精度和稳定性评价

5.4.1.1 探测器单元之间的距离

归一化均方差评价模型：

归一化是一种无量纲处理手段，使物理系统数值的绝对值变成某种相对值关系。简化计算，缩小量值的有效办法。我们通过计算重建图像与原图像的归一化均方差，即：

$$dIF = 1 - \frac{\sum_i \sum_j [img1(i,j) - img2(i,j)]^2}{\sum_i \sum_j [img2(i,j)]^2} \quad (5.35)$$

其中 $img1$ 表示重建图像的像素矩阵， $img2$ 表示原图像的像素矩阵。

计算所得 dIF 越接近于 1，表明重建图像与原图像差别越小，表明所用参数精度越高；反之，表明重建图像与原图像差别越大，表明所用参数精度越低，以此建立归一化均方差评价模型。

对精度分析，将探测器单元之间的距离进行归一化均方差评价，用我们所采用的间距（ $d=0.2776$ ）进行计算，求得 $dIF = 0.9730$ ，该数值较接近 1，认为该参数精度较高。

对稳定性分析, 在我们得到的间距范围(0.2759,0.2796), 以步长为 0.0001 进行搜索, 求得一系列 dIF 值, 其变化较为平缓, 认为模型的稳定性较好。

5.4.1.2 方向

由于原离散模型数据量过于庞大, 我们采用一种简化的离散模型算法, 即随机选取一部分数据作为计算对象, 但由于数据量小, 算得的角度和遍历所有数据组算出来的角度存在着偏差, 所以, 得到的 180 个方向, 与真实值有差异。为了减小这种差异, 我们认为, 可以适当提高选取数据的组数, 对其求平均值, 并且确定一个误差评价的规则, 当新的一组数据计算时, 得到的角度与前面的平均值的角度相差在一个范围内的时候, 我们认为该平均值可以作为这个方向的角度值。

5.4.1.3 旋转中心位置

在计算旋转中心的时候, 我们认为 X 射线分别平行于短轴、长轴入射, 但计算得到的方向不完全平行。因此得到的旋转中心 y_0 位于实际旋转中心的下侧, 旋转中心 x_0 位于实际旋转中心的下方, 左侧。

5.4.2 新模板的设计

由 5.1.2.2 计算探测器间距, 主要思路是对 180 个角度的生成的 512×180 的矩阵进行一个图形构成、角度对应的分析, 用以限制探测器间的间距。对此, 我们提出这样一个模板

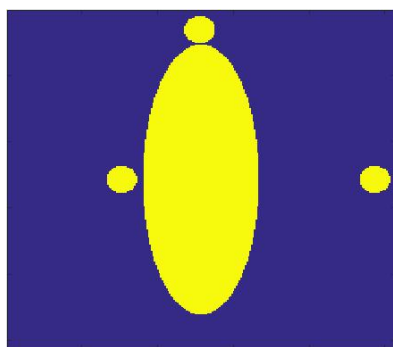


图 5.20 新模板设计方案

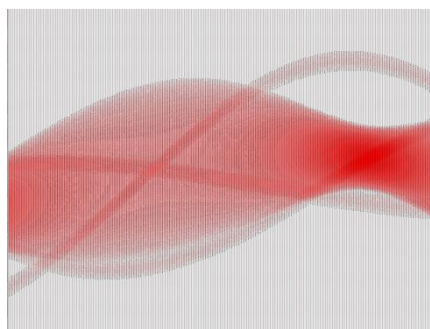


图 5.21 新模板偏心扫描大致图像

其对应的 512 个偏心扫描图像大致形状如图 5.21。使用新模板, 我们能够找到更多可供分析的特征角度, 由于能偶看到明显的四条带分层情况, 我们可以更精确地对探测器间距数值的范围进行缩放, 可以在一定程度上减小误差。

参数标定模型与 5.1.2.2 基本相同, 而由于特定角度下可供分析的数据量大大增加, 在对探测器间距数值的范围进行缩放后, 探测器间距本身的精度得到提高, 而通过探测器间距而计算求得的旋转中心点的坐标以及 180 个方向的值就会更为精确。因此, 新模板可以成功的将该 CT 参数标定的精度和稳定性都大大提高。

六、模型分析

由于第四问即对问题一模型的分析与精度评价, 故在此对第二问的平行束滤波反投影重建模型及第三问中优化后的平行束滤波反投影重建模型进行评价。第二问采用的是平行束滤波反投影重建模型, 在处理附件 3 时, `iradon` 函数已经对这些数据进行了滤波处理, 所得的数据较为准确。而第三问的图形较为复杂, 我们考虑噪声干扰, 因此, 我们在滤波处理以后, 又进行了一次降噪, 得到的图形较为清晰。但我们如果先进行降噪处理, 再使用平行束滤波反投影重建模型, 得到的图像就十分模糊, 如图。因此, 我们认为平行束滤波反投影重建模型再次降噪处理后, 得到的图形更符合要求。

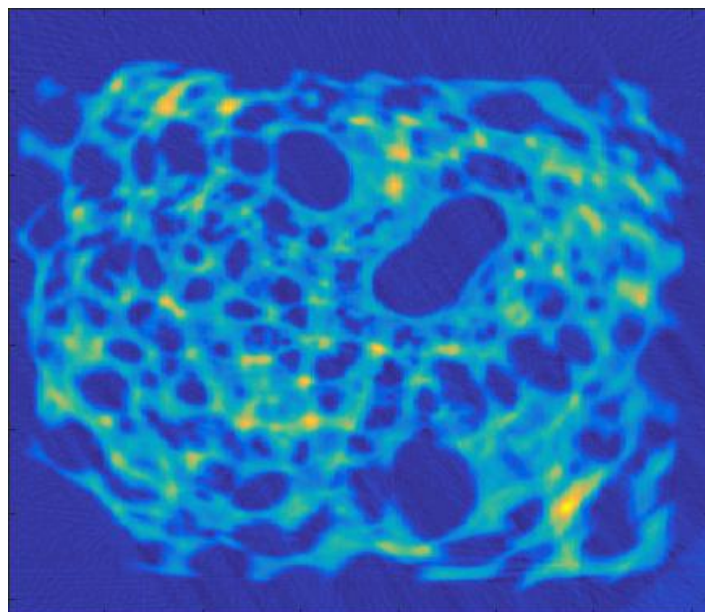


图 6.1 先降噪后进行平行束滤波反投影重建模型所得到的重建图像

七、模型推广

本题所建立的模型为二维条件下的平行束滤波反投影重建模型。但对模型进行改进后我们可以将模型拓宽至三维模型范畴。推广至三维模型后，该模型可用于宇宙航天器对周围天体的探索，或用于太空垃圾的形状确定与种类鉴别。

八、结论

问题一结论，我们建立了离散化模型，求得旋转中心坐标为 $(-9.2996\text{mm}, 5.5520\text{mm})$ ，探测器单元间距范围为 $(0.2759\text{mm}, 0.2796\text{mm})$ ，180个方向的精确角度如下表：

-60.2152	-58.8587	-58.3008	-57.2081	-56.1751	-55.2026	-54.1989	-53.1945	-52.1913	-51.1883
-50.1841	-49.1784	-48.1748	-47.1711	-46.1670	-45.0092	-44.1559	-43.1498	-42.1464	-41.1399
-40.1346	-39.1288	-38.1194	-37.1142	-36.1026	-35.0940	-34.0861	-33.0800	-32.0708	-31.0575
-30.0481	-29.1362	-28.0209	-27.0104	-25.9942	-24.9819	-23.9634	-22.9444	-21.9239	-20.9011
-19.8815	-18.8563	-17.8288	-16.799	-15.7555	-14.7159	-13.6685	-12.6137	-11.5409	-10.4695
-9.3730	-8.2484	-7.1066	-5.8943	-4.5786	-3.0205	-2.5839	-2.1474	-1.7108	-1.2742
-0.8377	-0.4011	0.0354	0.4720	0.9085	1.3451	3.5747	4.8814	6.2408	7.4525
8.5643	9.73211	10.7974	11.8440	12.9171	13.9890	15.0196	16.0352	17.1078	18.1144
19.1525	20.1918	21.2181	22.2248	23.2439	24.2613	25.1502	26.2951	27.1125	28.3244
29.3300	30.3405	31.3545	32.3644	33.3739	34.3827	35.3912	36.3992	37.4067	38.4139
39.4208	40.4272	41.5339	42.4392	43.4449	44.4501	45.4553	46.4601	47.4650	48.4692
49.4734	50.4776	51.4813	52.4850	53.4886	54.4919	55.4949	56.4980	57.5007	58.5034
59.5059	60.5081	61.5102	62.5120	63.5138	64.5152	65.5166	66.5176	67.5183	68.5188
69.5188	70.5186	71.5179	72.5168	73.5151	74.5128	75.5097	76.5056	77.5004	78.4938
79.4853	80.4743	81.4601	82.4415	83.4162	84.3812	85.3301	86.2507	87.1162	87.8583
88.3061	91.7791	92.3391	93.1286	94.0144	94.9453	95.8998	96.8680	97.8450	98.8278
99.8147	100.8045	101.7966	102.7904	103.7858	104.7818	105.7789	106.7768	107.7753	108.7744
109.7738	110.7737	111.7741	112.7745	113.7751	114.7763	115.7775	116.7791	117.7812	118.7725

问题二结论，我们建立了基于 R-L 滤波函数的平行滤波反投影重建模型。得到十个点的吸收率分别为：0.0000、0.9722、0.0036、1.1761、1.0426、1.4652、1.2849、0.0007、0.0000、0.0175。

问题三结论,我们在问题二模型的基础上加入了降噪处理函数,求得了十个点的吸收率分别为: 0.0126、2.2902、5.9159、0.0163、0.0823、3.1336、6.0333、0.0000、7.7184、0.0861。

问题四结论,我们建立了归一化评价模型对精度和稳定性进行分析,结果表明我们所新建立模型的精度更高,稳定性更好,能够进行更加精确的参数标定。

我们所建立的几个模型能够很好地解决参数标定、图像重建的问题,且适用范围较广,易于推广,针对不同问题可采取不同的滤波函数,以消除不同因素对吸收率的影响。

九、参考文献

- [1]. 郝国防, 浅析 X 射线计算机断层成像的基本原理. 山东工业技术, 2016(15): 第 106 页
- [2]. 张朋与张兆田, 几种 CT 图像重建算法的研究和比较. CT 理论与应用研究, 2001(04): 第 4-9 页.
- [3]. 黄自健, CT 成像原理简述, in 新疆医学工程学会第二届学术年会 1998: 中国新疆乌鲁木齐. 第 5 页.
- [4]. 毛小渊, 二维 CT 图像重建算法研究, 2016, 南昌航空大学. 第 74 页.
- [5]. 李鹏与俞凯君, 使用 Radon 变换进行二维 MRI 图像配准. 上海生物医学工程, 2006(04): 第 229-232 页.
- [6]. 宁媛与李皖, 图像去噪的几种方法分析比较. 贵州工业大学学报(自然科学版), 2005(04): 第 63-66 页.

附录

MATLAB 程序 xzzx.m

```
%此程序用来求解旋转中心
clc
clear
load data2.mat
d=0.2776; % 相邻两线间距
zd=sum(data2>0);
[val1,wz1]=max(zd);
[val2,wz2]=min(zd);

num=find(data2(:,wz1)>0);
y=(256-(max(num)+min(num))/2)*d;
num=find(data2(:,wz2)>0);
num=num(num>100);
x=-(256-(max(num)+min(num))/2)*d;
```

MATLAB 程序 chengxu.m

```
clear,clc
% 此程序用来求解第二问与第三问的反投影图以及 10 个点的吸收率
%%
%读取题目所给数据及第一问所求旋转角
load data1.mat
load data2.mat
loadtheta.mat
load data3.mat
load data5.mat
%%
%此块程序利用模板反演进行校正
xc=0;yc=0;
d=0.2776;
img_1=iradon(data2,theta,512,'Hann');
m=size(img_1,1);
%img_1=medfilt2(img_1); %这三列数据用来计算去噪后的误差值，比较各个去噪函数的优劣
%img_1=wiener2(img_1,[3 3]);
%img_1=filter2(fspecial('average',3),img_1);

%figure(1),imagesc(data2) %绘制附件二中的数据大小分布图;
%figure(2),plot([-256 256 256 -256 -256],[-256 -256 256 256 -256],'black') %绘制大正方形托盘的边框
%hold on
%imagesc([-m/2 m/2],[m/2 -m/2],img_1) %绘制反投影图像
%plot(xc,yc,'x') %绘制旋转中心
%plot([-50+9.2996 50+9.2996 50+9.2996 -50+9.2996 -50+9.2996]/d,[-50-5.5520 -50-5.5520 50-5.5520 50-5.5520 -50-5.5520]/d,'r') %绘制原正方形托盘的边框
%plot(33.5,-20,'ok') %绘制原正方形托盘几何中心
%%
%求解计算机与题目所给数据的比例系数
RED_1=img_1(96:455,110:469);
%figure(3),imagesc(RED_1) %取出原正方形托盘边框内的图像进行绘制
s=sum(RED_1);
ss=sum(s);
```

```

r1=ss/360/360;
r2=12568/256/256;
k=r2/r1;          %此为所求比例系数
RED_1=RED_1.*k;
red_1=imresize(RED_1,256/360);          %降低上图的像素
%figure(4),imagesc(red_1)                %绘制经比例系数放大后的模板的反演图
%%
img_2=iradon(data3,theta,512);
%img_2=wiener2(img_2,[3 3]);
%img_2=medfilt2(img_2);
%img_2=filter2(fspecial('average',3),img_2);
m=size(img_2,1);
figure(5),plot([-256 256 256 -256 -256],[-256 -256 256 256 -256], 'r')
hold on
imagesc([-m/2 m/2],[m/2 -m/2],img_2)
plot(xc,yc,'ok')
plot([-50+9.2996 50+9.2996 50+9.2996 -50+9.2996 -50+9.2996]/d,[-50-5.5520 -50-5.5520 50-5.5520
50-5.5520 -50-5.5520]/d,'r')
RED_2=img_2(96:455,110:469);
RED_2=RED_2.*k;
%figure(6),imagesc(RED_2)
red_2=imresize(RED_2,256/360);
wz=red_2>0;
red_2=red_2.*wz; %将矩阵中小于 0 的项变为 0;
figure(7),imagesc(red_2)                %绘制问题二的图
%%
img_3=iradon(data5,theta,512);
img_3=wiener2(img_3,[3 3]);          %对数据进行维纳滤波，减少噪声的影响
%img_3=medfilt2(img_3);
%img_3=filter2(fspecial('average',3),img_3);
m=size(img_3,1);
figure(8),plot([-256 256 256 -256 -256],[-256 -256 256 256 -256], 'r')
hold on
imagesc([-m/2 m/2],[m/2 -m/2],img_3)
plot(xc,yc,'ok')
plot([-50+9.2996 50+9.2996 50+9.2996 -50+9.2996 -50+9.2996]/d,[-50-5.5520 -50-5.5520 50-5.5520
50-5.5520 -50-5.5520]/d,'r')
RED_3=img_3(96:455,110:469);
RED_3=RED_3.*k;
%figure(9),imagesc(RED_3)
red_3=imresize(RED_3,256/360);
wz=red_3>0;
red_3=red_3.*wz; %将矩阵中小于 0 的项变为 0;
figure(10),imagesc(red_3)              %绘制问题三图
%% 误差计算
cha_1=abs(red_1-data1);
s_1=sum(sum(cha_1));
wucha=s_1/256/256
%%
xishoulv2=[red_2(210,25),red_2(192,88),red_2(172,111),red_2(63,115),red_2(114,125),red_2(63,128),red_
2(61,143),red_2(162,167),red_2(210,203),red_2(145,252)]
xishoulv3=[red_3(210,25),red_3(192,88),red_3(172,111),red_3(63,115),red_3(114,125),red_3(63,128),red_
3(61,143),red_3(162,167),red_3(210,203),red_3(145,252)]

```

自定义 MATLAB 函数 dIF.m

```
function [result]=dIF(img1,img2)
```

```
%dIF 此函数用来计算两个图像的归一化均方差
% 其中 img1 为重建后的图像 img2 为原图像
c=img1-img2;
c=c.^2;
d=img2.^2;
h=sum(sum(c));
hm=sum(sum(d));
result=1-h/hm;
end
```

MATLAB 程序 gyh.m

```
%%
%此程序用来求解一系列间距 d 产生的归一化方差结果在变量 fc 中
clc
clear all
load data1
load data2
load theta
xc=0;yc=0;
fori=1:37
d=0.2758+0.0001*i; % 相邻两线间距
zd=sum(data2>0);
[val1,wz1]=max(zd);
[val2,wz2]=min(zd);

num=find(data2(:,wz1)>0);
y=(256-(max(num)+min(num))/2)*d;
num=find(data2(:,wz2)>0);
num=num(num>100);
x=-(256-(max(num)+min(num))/2)*d;
%%
img_1=iradon(data2,theta,512,'Hann');
m=size(img_1,1);

%figure(2),plot([-256 256 256 -256 -256],[-256 -256 256 256 -256],'black') %绘制大正方形托盘的边框
%hold on
%imagesc([-m/2 m/2],[m/2 -m/2],img_1) %绘制反投影图像
%plot(xc,yc,'x') %绘制旋转中心
%plot([-50-x 50-x50-x -50-x -50-x]/d,[-50-y -50-y 50-y50-y -50-y]/d,'r') %绘制原正方形托盘的边框
x1=-x/d;
y1=-y/d;
%plot(x1,y1,'ok') %绘制原正方形托盘几何中心
%%
%求解计算机与题目所给数据的比例系数
xx=round(256-(50+x)/d);
yy=round(256-(50-y)/d);
RED_1=img_1(yy:yy+359,xx:xx+359);
%figure(3),imagesc(RED_1) %取出原正方形托盘边框内的图像进行绘制
s=sum(RED_1);
ss=sum(s);
r1=ss/360/360;
r2=12568/256/256;
k=r2/r1; %此为所求比例系数
RED_1=RED_1.*k;
red_1=imresize(RED_1,256/360); %降低上图的像素
```

```
%figure(4),imagesc(red_1)
%%
fc(i,1)=d;
fc(i,2)=dIF(red_1,data1);
end
```

%绘制经比例系数放大后的模板的反演图