

月球软着陆的一种燃耗次优 制 导 方 法^{*}

王大轶 李铁寿 严 辉

(北京控制工程研究所·北京·100080)

马兴瑞

(中国航天科技集团公司·北京·100830)

摘 要 文中的软着陆过程从一条环月停泊轨道开始。一旦选定着陆点, 则通过 ΔV 变轨转入一条椭圆轨道。当到达近月点时, 着陆制动发动机点火, 开始动力下降阶段。参考运载火箭制导过程的分析方法, 假设月球为一均匀引力场, 以燃耗最优性为出发点, 提出了一种用于软着陆动力下降过程的显式制导律。其显式表达式是剩余时间的函数。它不必进行迭代计算, 是一种易于实现的次优闭环制导方法。

主题词 月球软着陆 燃耗最优性 制导

A SUB-OPTIMAL FUEL GUIDANCE LAW FOR LUNAR SOFT LANDING

Wang Dayi Li Tieshou Yan Hui

(Beijing Institute of Control Engineering·Beijing·100080)

Ma Xingrui

(China Aerospace Science Corporation·Beijing·100830)

Abstract The lunar soft landing in this paper begins from a circular lunar parking orbit. Once the landing area has been selected, and it is time to de-orbit for landing, a ΔV burn is performed to establish an elliptical orbit. At perilune the landing thruster is ignited, and a propulsive landing is performed. Similar to the guidance of launch vehicles, a uniform gravity field on lunar surface is assumed. An explicit guidance law for powered descending phase is proposed to minimize the fuel consumption. The law is a function of the time-to-go. Iterative calculation is not needed. It is an explicit easily mechanized sub-optimal guidance law.

Key words Lunar soft landing Fuel optimality Guidance

收稿日期: 1999 年 12 月 1 日, 修回日期: 2000 年 8 月 15 日

^{*} 国家自然科学基金资助项目 (19782004)

1 引言

在月球表面实施软着陆是一项关键性的技术^{[1][2]}。月球软着陆的制导方法可包括标称轨道法和显式制导法。Apollo 11 在月面着陆时用的是前一种制导方法^[3]。而显式制导法是根据着陆器的现时可测运动参数，按控制泛函的显式表达式进行实时计算的制导方法。在大干扰情况下标称轨道法应用起来会很困难，此外在软着陆时一般需要实时测定着陆器的速度和位置。在这些情况下，显式制导具有较大的优越性。

近来有一些关于显式制导问题的研究^{[4][5][6][7]}，但是这些研究大都限于理论分析，并不适合用来解决实际问题。本文提出的燃耗次优制导方法以推力方向角为控制量，它是应用最优控制理论，通过解燃耗最优问题得出的。其显式表达式是剩余时间的函数，而给出的剩余时间表达式只与着陆器运动参数和终端约束有关。它不必进行迭代计算，是一种易于实现的次优闭环实时制导方法。

2 任务概貌

软着陆过程的任务概貌如图 1 所示。图中软着陆任务由轨道器和着陆器共同完成，着陆器由轨道器送入一条高度为 100km 的环月圆轨道，在此轨道上，着陆器与轨道器分离。然后，着陆器调整姿态准备开始软着陆。

按经环月轨道的着陆方式，软着陆可分为如下三个阶段^[6]（如图 2）：霍曼转移段，根据预先选定的着陆位置，着陆器在环月轨道上进行变轨，转入一条椭圆轨道；动力下降段，在近月点，制动火箭点火工作用以抵消着陆器的初始速度，所带燃料的大部分将用于此阶段；垂直下降段，在着陆器水平速度降为零后，调整姿态使其保持垂直向下软着陆到月面。本文中所指的软着陆就是假定按这种方式进行从霍曼变轨近月点开始的过程，研究用于动力下降段的制导控制方法。

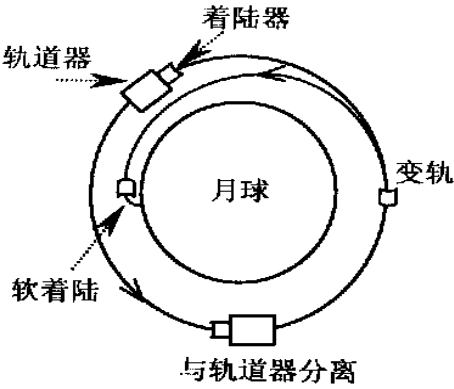


图 1 软着陆任务剖面图

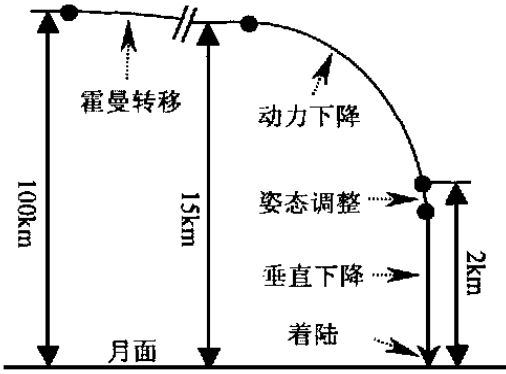


图 2 软着陆阶段示意图

3 软着陆动力学方程

设 $O_{IXIYIzI}$ 为原点在月心的惯性坐标系（图 3）， O_{IXI} 轴指向动力下降起始点， O_{IYI} 轴指向着陆点方向， O_{IzI} 轴按右手系确定。着陆器在空间中的位置可由直角坐标 (x_I, y_I, z_I) 来表示，或者由 (r, α, β) 表示成球坐标的形式， r 为从月心到着陆器的距离。

$O\xi\eta\zeta$ 为原点在着陆器的轨道坐标系, $O\xi$ 轴与从月心到着陆器的矢径方向重合, $O\eta$ 轴垂直于 $O\xi$ 轴指向运动方向, $O\zeta$ 轴按右手系确定。制动推力 F 的方向与着陆器本体轴重合, ψ 、 ϕ 为在轨道坐标系中表示的推力方向角。文中的制动发动机采用常推力液体发动机。忽略月球的自转。下面列写软着陆质心动力学方程:

$$\begin{cases} \ddot{r} - (\dot{\alpha}\sin\beta)^2 r - \beta^2 r = F\cos\psi/m - \mu/r^2 \\ 2\dot{\alpha}\dot{\beta}r - \alpha^2 r\cos\beta\sin\beta = F\sin\psi\cos\phi/m \\ 2\alpha\dot{\beta}\sin\beta + \ddot{\alpha}r\sin\beta + 2\alpha\dot{\alpha}r\cos\beta = F\sin\psi\sin\phi/m \end{cases} \quad (1)$$

式中, μ 为月球引力常数, m 为着陆器质量。用 u , v , w , 分别代表轨道坐标系中的速度分量, 化简方程 (1) 得:

$$\begin{cases} \dot{r} = u \\ \dot{\beta} = v/r \\ \dot{\alpha} = w/(r\sin\beta) \\ u = F\cos\psi/m - \mu/r^2 + (v^2 + w^2)/r \\ v = F\sin\psi\cos\phi/m - uv/r + w^2/(r\tan\beta) \\ w = F\sin\psi\sin\phi/m - uw/r + vw/(r\tan\beta) \\ \dot{m} = -F/C \end{cases} \quad (2)$$

其中, $C = I_{sp}g_E$, I_{sp} 为发动机的比推力, g_E 为地球重力加速度常数。

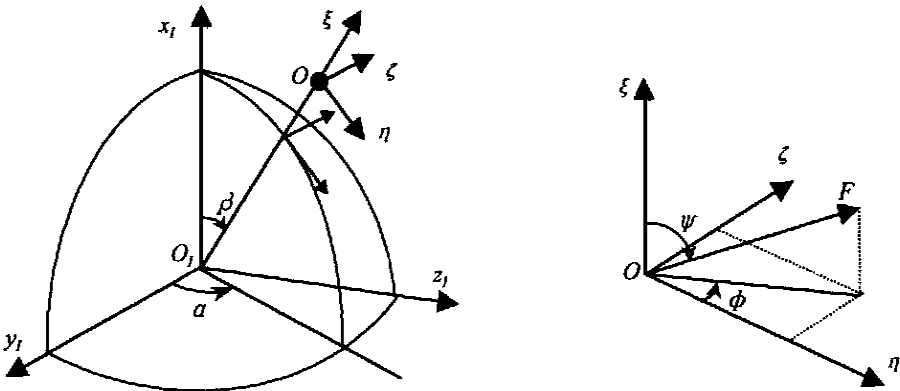


图 3 软着陆坐标系

4 显式制导控制方法

本文提出的制导律中，制动发动机工作于全推力状态，所要求的制导控制量为两个推力方向角 ψ 、 ϕ 的显式表达式。此时，燃烧最优问题就是时间最优问题。

4.1 最优控制问题的描述

由公式 (2) 所示的软着陆动力学方程可以看出，软着陆制导控制系统是一个非线性系统。为求得显式制导律，有必要在一些合理的假设基础上对其进行简化处理。首先假定在软着陆过程中月球为一均匀引力场，引力加速度为常值。经简化的软着陆动力学方程用直角坐标表示为

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_I \\ \ddot{y}_I \\ \ddot{z}_I \end{pmatrix} = \frac{F}{m} \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \cos \phi \\ \sin \psi \sin \phi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} g_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

其中， g_x 表示假设为常值的月球引力加速度。引进状态矢量 $X = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6]^T = [x_I \ x_I \dot{\ } \ y_I \ y_I \dot{\ } \ z_I \ z_I \dot{\ }]^T$ ，为讨论状态反馈控制，以着陆过程任一瞬时点状态为初值 X_0 ，着陆目标点状态为终值 X_f ，将方程 (3) 用定义于时间间隔 $[0, \ t_{go}]$ 上的状态方程表示

$$\dot{x} = f(x, \hat{u}, t) \tag{4}$$

其中， t_{go} 表示剩余时间， $\hat{u} = [\psi \ \phi]^T$ 表示控制量，

$$\frac{F}{m} = \frac{C}{\tau - t}, \quad \tau = \frac{m_0 C}{F} \tag{5}$$

表示在剩余着陆段中 ($t \in [0, \ t_{go}]$)，制动推力产生的加速度估算值。 m_0 为 $t = 0$ 时的质量，它是时变参数，可根据着陆初始质量通过估值得出。将剩余段引力加速度的平均值表示为当前引力加速度

$$g_x = \frac{1}{2}[g_{x0} + g_{xf}] \tag{6}$$

式中 g_{x0} 表示着陆瞬时点引力加速度， g_{xf} 表示着陆目标点引力加速度。定义如下性能指标

$$J = \int_0^{t_{go}} dt \tag{7}$$

这样，由公式 (4)、(7)、初值 X_0 、终值 X_f 组成了一个定义在时间间隔 $[0, \ t_{go}]$ 上的最优控制问题，求解这个最优控制问题，就是寻找一组容许控制 (ψ, ϕ) 能在最短时间 t_{go} 内将着陆器由初值转移到终值，与之相应的状态方程的解 X 就是着陆器由瞬时点至目标点的最优着陆轨迹。

根据最优控制理论中的极大值原理，首先引入哈密顿函数

$$H = \lambda^T f(x, \hat{u}, t) + 1 \tag{8}$$

$\lambda = [\lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3 \ \lambda_4 \ \lambda_5 \ \lambda_6]^T$ 是拉格朗日乘子。伴随方程及横截条件

$$\dot{\lambda} = - \partial H / \partial X \tag{9}$$

$$\delta x_i(t_{go}) \lambda_i = 0 \quad i = 1, \dots, 6 \tag{10}$$

极值条件为

$$[\frac{\partial H}{\partial \psi} \ \frac{\partial H}{\partial \phi}]^T = 0 \tag{11}$$

根据系统初始和终端条件，通过解如上的微分方程和代数方程，式（4），（8），（9），（10），（11），可求得最优控制量 (ψ, ϕ) 。

4.2 最优控制问题的解

将着陆器的空间运动分解为纵向运动和横向运动的组合^[8]，软着陆方程（3）可改写为

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_I \\ \ddot{y}_I \\ \ddot{z}_I \end{pmatrix} = \frac{F}{m} \begin{pmatrix} (F/m) \cos \psi \\ (F/m)_\psi \cos \phi \\ (F/m)_\psi \sin \phi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} g_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{12}$$

式中， $(F/m)_\psi = (F/m) \sin \psi$ 。由极值条件(11) 可得控制变量 (ψ, ϕ) 的表达式

$$\begin{cases} \tan(\psi) = \frac{\lambda_4 \cos \phi + \lambda_6 \sin \phi}{\lambda_2} \\ \tan(\phi) = \frac{\lambda_6}{\lambda_4} \end{cases} \tag{13}$$

由伴随方程（9）得

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_2 = \lambda_{20} - \lambda_{40} t \\ \dot{\lambda}_4 = \lambda_{40} - \lambda_{30} t \\ \dot{\lambda}_6 = \lambda_{60} - \lambda_{50} t \end{cases}$$

式中 $\lambda_{i0} \ (i= 1, \dots, 6)$ 为积分常数。可见推力方向角的表达式（13）依赖于积分常值 λ_{i0} 的确定，这是关于拉格朗日乘子的隐式表达式，一般需要解一个两点边值问题通过迭代计算求得。下面对着陆终端值 X_f 进行分类讨论，以获得控制角 (ψ, ϕ) 的显式表达式。

（1）无位置约束。此时，状态变量 $x_1, \ x_3, \ x_5$ 的终端值为不确定，由横截条件（10）可得 $\lambda_{40} = \lambda_{30} = \lambda_{50} = 0$ ，则式（13）成为

$$\begin{cases} \phi = \tan^{-1} \left(\frac{\lambda_{40} \cos \phi + \lambda_{60} \sin \phi}{\lambda_{20}} \right) \\ \phi = \tan^{-1} \left(\frac{\lambda_{60}}{\lambda_{40}} \right) \end{cases}$$

上式表明, 如果只要求着陆器满足终端速度约束, 那么最优控制角是一组瞬时常值。记为

$$[\phi \ \phi]^T = [\phi \ \phi]^T$$

在时间间隔 $[0, t_{go}]$ 上, 根据初值 X_0 、终值 x_{if} ($i = 2, 4, 6$) 对式 (12) 进行一次积分, 可得最优控制角

$$\begin{cases} \phi = \cos^{-1} \left(\frac{x_{2f} - x_{20} + g_x t_{go}}{CD} \right) \\ \phi = \tan^{-1} \left(\frac{x_{6f} - x_{60}}{x_{4f} - x_{40}} \right) \end{cases} \quad (14)$$

式中, $D = \ln(\tau / (\tau - t_{go}))$ 。

(2) 有位置约束。软着陆过程中, 制动推力主要用于抵消着陆器的初始速度。用来满足终端速度要求的控制角 (ϕ, ϕ) 是控制角 (ϕ, ϕ) 的主要部分, 而为满足终端位置要求所形成的控制角仅是其中的小量。假设, 将此时的控制角表示为^[8]

$$\begin{cases} \phi = \phi - k_1 + k_2 t \\ \phi = \phi - l_1 + l_2 t \end{cases} \quad (15)$$

把 $(k_2 t - k_1)$ 和 $(l_2 t - l_1)$ 视作小量, 对 $\cos \phi, \sin \phi, \cos \phi$ 进行一阶泰勒展开, 得

$$\begin{cases} \cos \phi = \cos \phi + k_1 \sin \phi - k_2 t \sin \phi \\ \sin \phi = \sin \phi - l_1 \cos \phi + l_2 t \cos \phi \\ \cos \phi = \cos \phi + l_1 \sin \phi - l_2 t \sin \phi \end{cases} \quad (16)$$

将式 (16) 代入 (12) 式, 在时间间隔 $[0, t_{go}]$ 上, 根据初值 X_0 、终值 X_f , 对其进行一次、二次积分, 可得 k_1, k_2, l_1, l_2 的计算公式

$$\begin{cases} k_2 = \frac{CD(C(Dt_{go} + E)\cos \phi - (x_{1f} - x_{10}) + x_{20}t_{go} - g_x t_{go}^2/2)}{C^2 t_{go}(E + t_{go}D/2)\sin \phi} \\ k_1 = \frac{-k_2 E}{D} \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases} l_2 = \frac{-C_\phi D(C_\phi(Dt_{go} + E)\sin \phi - (x_{5f} - x_{50}) + x_{60}t_{go})}{C_\phi^2 t_{go}(E + t_{go}D/2)\cos \phi} \\ l_1 = \frac{-l_2 E}{D} \end{cases} \quad (18)$$

式中, $E = t_{go} - \mathcal{T}$, $C_\phi = C \sin \phi$ 。

在燃耗最优的条件下, 制动推力主要用来抵消着陆器的水平初始速度, 由此, 剩余时间的表达式为

$$t_{go} = \sqrt{(x_{4f} - x_{40})^2 + (x_{6f} - x_{60})^2} / a_{FH} \tag{19}$$

其中, a_{FH} 表示制动推力加速度在水平面上的分量, 它可由惯性测量单元 (IMU) 实时测得。

4.3 几点说明

这样, 由公式 (14), (15), (17), (18), (19) 组成了月球软着陆显式制导控制律, 对此制导律作如下几点说明:

(1) 这种显式制导律的推导是建立在月球均匀引力场的假设基础上, 这个假设条件带来的制导误差会随着着陆器接近终端位置而逐渐减小。

(2) 在图 1 所示的软着陆任务中, 着陆器是由轨道器送入停泊轨道, 着陆器和轨道器均配有独立的推进系统, 因此软着陆初始质量等于着陆器原始质量减去 $100 \times 15\text{km}$ 霍曼变轨消耗的燃料质量。

(3) 由剩余时间的计算公式 (19) 可以看出, 它要求着陆器在水平方向作匀减速运动, 这符合燃耗最优控制的实际情况。公式 (19) 其实是剩余时间的估算公式, 当着陆器到达终端位置时, 由公式 (19) 估算出的剩余时间收敛为零。

(4) 由公式 (17), (18) 可见, 我们没有给出指定着陆目标点纵向位置的 l_1 和 l_2 公式。这是由于如果指定着陆的纵向位置, 会出现为引导着陆器在最短时间内到达目标而指向月面飞行, 这不符和软着陆的实际情况。另外, 在燃耗最优着陆的情况下, 如只控制推力方向而不改变推力大小, 是不能同时满足三个终端位置约束的。

(5) 这种显式制导律需要当前时刻位置、速度、推力加速度的信息, 这些量都可由惯性测量单元、雷达高度表和多普勒雷达等实时测得。

5 仿真结果

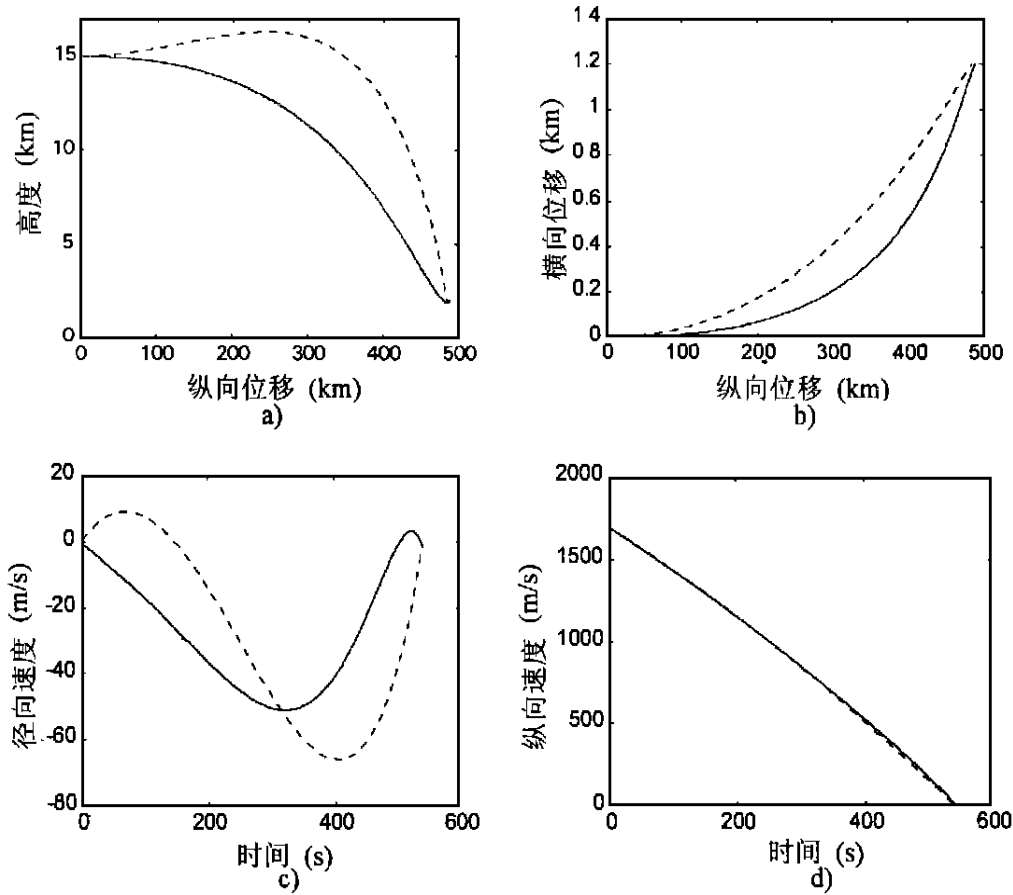
软着陆初始条件由霍曼转移轨道 $100 \times 15\text{km}$ 的近月点给出。假设月球为一规则球体, 其半径 $R_m = 1738\text{km}$, 引力常数 $\mu = 4902.75\text{km}^3/\text{s}^2$ 。给出如下软着陆边值条件: $r_0 = 1753\text{km}$, $r_f = 1740\text{km}$; $u_0 = 0$, $u_f = -1.5\text{m/s}$; $\beta_0 = 0$; $v_0 = 1.692\text{km/s}$, $v_f = 0$; $\alpha_0 = 0$, $(r_f \sin \beta_f) \varphi_f = 1200\text{m}$; $w_0 = 0$, $w_f = 0$ 。制动发动机推力 $F = 1500\text{N}$, 比冲 $I_{sp} = 300\text{s}$ 。着陆器初始质量 $m_0 = 600\text{kg}$ 。

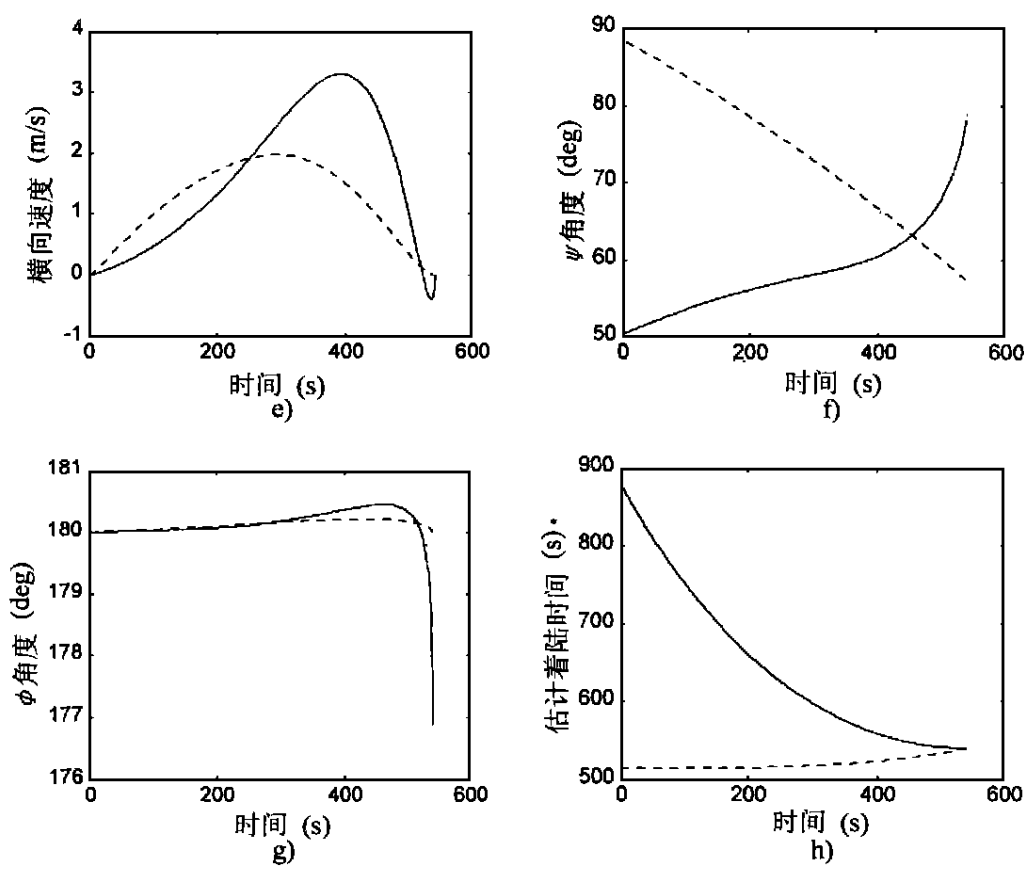
实现最小燃耗软着陆是对制导控制系统的一个基本要求。将本文给出的显式制导着陆曲线与文献^[2]中给出的燃耗最优着陆曲线作一比较, 它需要解两点边值问题, 通过迭代计算求得。仿真结果如图 4 所示。图 4a, b 为空间中软着陆过程曲线, 图 4c, d, e 为径向、纵向和横向速度曲线。从高度-纵向位置曲线图 4a 和径向速度曲线图 4c 可以看出, 采用显式制导的着陆曲线比较“平滑”, 而燃耗最优曲线“起伏”比较大, 如果着陆过程的“起伏”较大, 则势必会增加着陆器的加速度负载, 而且也会增大姿控系统的工作难度, 因此采用这种显式制导方法可改善着陆过程的动态特性。从纵向速度曲线图 4d 可以

看出，两种曲线基本重合，说明文中提出的剩余时间估算式 (19) 符合燃耗最优软着陆的实际情况。图 4f 的推力方向角 ϕ 曲线表明着陆器的最终姿态并不理想，因此在垂直下降段开始后要尽快将其姿态调整为垂直向下。图 4h 为着陆时间曲线，由式 (19) 估算的着陆时间随着着陆器到达终端位置而收敛到最优着陆时间。图中最优着陆时间是 538.4s，而显式制导的着陆时间比它大约多 1.3s，因此，应用显式制导控制律可得到一条次最优着陆轨迹。

6 结论

本文提出了一种用于月球软着陆动力下降过程的燃耗次优制导方法。这种制导方法是基于燃耗最优控制得出的显式制导律，可实现燃耗次最优着陆。从仿真结果可以看到，应用该制导律的软着陆过程，动态特性要优于软着陆问题的燃耗最优解，特别这是一个实时闭环制导过程。它无须迭代计算且测量简单，是一种具有一定应用价值的软着陆制导方法。





(实线表示显式制导曲线，虚线为最优着陆曲线)

图 4 显式制导方法软着陆曲线

参 考 文 献

1 Nishio Y, Namura E, Itagaki H, et al. Outline of the Experimental Lunar Lander in SELENE Project. *Advances in the Astronautical Sciences*, 1997, 96: 307-313

2 Wang DY, Li TS, Ma XR, et al. Neuro-optimal guidance control for Lunar Soft Landing. *Journal of Systems Engineering and Electronics*, 1999, 10 (3): 22-31

3 Bennett FV. Lunar Descent and Ascent Trajectories. *Proc. of AIAA 8th Aerospace Sciences Meeting*, USA, 1970, AIAA-70-25

4 Tuckness DG. Future Lunar Landing Navigation Schemes, with Emphasis on Precision Landings. *Navigation*, 1994, 41 (2): 215-228

5 D' Souza CN. An Optimal Guidance Law for Planetary Landing. *Proc. of AIAA GNC Conference*, USA, 1997, AIAA-97-3709

6 Ueno S, Yamaguchi Y. Near-Minimum Fuel Guidance Law of a Lunar Landing Module. *Proc. of 14th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace*, Seoul, 1998: 377-382

7 Finzi AE. Automatic Optimum Moon Landing. *Proc. of 48th Int. Astronautical Congress*, Italy, 1997, IAF-97-A. 7. 05

8 韩祝斋. 用于大型运载火箭的迭代制导方法. *宇航学报*, 1983, (1): 9-20