

# 月球卫星轨道设计优化

林胜勇<sup>1,2</sup> 李珠基<sup>2</sup> 和兴锁<sup>1</sup>

<sup>1</sup>(西北工业大学工程力学系 西安 710072)

<sup>2</sup>(上海宇航系统工程研究所)

## 摘 要

利用带谐项  $J_2$  和  $J_3$  对月球卫星轨道进行了优化设计. 首先分析了月球卫星轨道摄动因素对轨道的影响, 其次推导了对应于  $J_2$  和  $J_3$  项的冻结轨道计算公式, 并通过对仅包含月球引力场模型的运动微分方程, 直接积分计算轨道的变化进行了验证. 最后, 通过合理选择初始轨道的偏心率  $e_0$  和近月点幅角  $\omega_0$ , 对月球卫星极轨道进行了优化设计, 给出了设计公式并进行了仿真. 结果表明, 这种优化设计方法是很有效的.

**关键词** 月球卫星; 摄动; 冻结轨道; 轨道设计; 优化

## 1 引言

月球周围没有大气, 因此理论上月球卫星可以在尽可能低的轨道上工作. 但是实践表明, 在月球非球形引力、地球和太阳引力以及太阳光压等的作用下, 月球卫星轨道有较大的摄动. 第一颗人造月球卫星“月球 10 号”, 其初始轨道为近月点高度 350 km, 远月点高度 1017 km, 两个月后, 轨道参数变为近月点高度 378.7 km, 远月点高度 985.3 km, 轨道明显变圆了, 即偏心率变小了<sup>[1]</sup>. 相反, 如果在一段时间内偏心率不断地增大, 将使月球卫星的近月点高度降低; 而如果近月点高度降得很低的话, 就有可能使卫星撞毁在月面上. 根据预测, 美国的“月球勘探者”探测器(高度为 100 km 的极圆轨道)如果不进行轨道维持, 大约 150 d 内即撞上月球<sup>[2]</sup>. 另外, 月球卫星轨道高度的剧烈变化, 对星上有效载荷的正常工作(如照相等)也有较大的影响. 因此, 对月球卫星轨道进行优化设计, 使轨道高度变化较平稳, 不但可以减少轨道修正次数和燃料消耗, 还可以保证月球卫星的正常工作.

文献[3]采用  $5 \times 5$  阶次月球引力场模型的子集(包括了 5 个引力参数  $J_2$ 、 $J_3$ 、 $J_5$ 、 $C_{22}$  和  $C_{31}$ )研究了低高度月球卫星轨道的寿命, 以确定月球使命中可使用的停泊轨道. 文献[4]和[5]则通过使用冻结轨道来优化设计月球卫星轨道, 其中文献[5]中为“月球勘探者”探测器设计的准冻结轨道可使轨道修正的时间间隔达到 2 个恒星月( $\approx 55$  d), 轨道高度的变化范围维持在  $\pm 20$  km 之内.

本文将通过合理设计月球卫星轨道的偏心率、近月点幅角和轨道倾角(通常轨道倾角是根据任务已设计好的)之间的关系, 使轨道高度变化在尽可能长的时间内维持在某一给定的范围内.

2003-12-03 收到原稿, 2004-07-12 收到修定稿

## 2 轨道摄动分析

与人造地球卫星的相似, 月球卫星的力学模型对应的仍是一个受摄二体问题, 原则上用于求解人造地球卫星运动方程的各种方法都可用于求解月球卫星运动方程. 与地球卫星相比, 月球卫星所处的力学环境主要有以下不同<sup>[6]</sup>.

(1) 月球为一慢自转天体, 其自转的周期与绕地球公转的周期相等, 都是 27.3 个平太阳日. 这样对于月球引力的非球形带谐项, 其相对于地球引力的相应的摄动项, 就可能由短周期项转变为长周期项.

(2) 相比于地球非球形引力, 月球非球形引力位的各系数的量级比较接近. 例如, 月球的 2、3 阶带谐项  $J_2$  和  $J_3$  仅相差 1 个量级多一点, 而地球的  $J_2$  和  $J_3$  项则相差近 3 个量级.

(3) 月球表面没有大气, 因而其轨道运动没有相应的能量损耗, 运动方程的求解也更简单一些.

(4) 相对于月球和太阳对人造地球卫星的影响, 因月球的质量远小于地球和太阳的质量, 因而地球和太阳对月球卫星的影响相对更大一些.

对于低高度月球卫星轨道, 其主要摄动是月球的非球形摄动, 尽管地球引力和太阳引力等摄动对月球卫星轨道也有一定的影响, 但是它们与月球的非球形摄动相比还是很小的. 文献 [7] 计算了 200 km 高度的圆轨极月卫星 1031 h 内分别在地球引力摄动、月球非球形摄动、太阳引力摄动和光压摄动作用下其卫星轨道的变化. 结果表明, (1) 长半轴、升交点经度和轨道倾角的变化很小, 基本上可以忽略不计, 而偏心率则有较大的变化; (2) 月球非球形摄动在偏心率的变化中占主导地位, 而地球引力、太阳引力和光压等摄动对其影响则相对小得多.

因此本文仅就月球引力场作用下的低高度月球卫星轨道进行优化设计.

## 3 冻结轨道设计

冻结轨道实际上是各阶带谐项平衡的结果, 即偶次带谐项引起的近地点幅角  $\omega$  的长期摄动被奇次带谐项引起的长期摄动所平衡<sup>[8]</sup>. 因此, 冻结轨道偏心率的计算精度取决于所采用的带谐场的大小, 带谐项取得越多, 精度越高, 但计算的工作量也随之增大. 下面分别针对月球的 2 阶带谐项  $J_2$  和 2、3 阶带谐项  $J_2$ 、 $J_3$  进行了冻结轨道设计.

### 3.1 理论分析

拉格朗日摄动方程中轨道元素  $e$  和  $\omega$  随时间变化的一阶方程为<sup>[3]</sup>

$$J_2\text{项:} \quad \left(\frac{de}{dt}\right)_{J_2} = 0, \quad (1)$$

$$\left(\frac{d\omega}{dt}\right)_{J_2} = \frac{3n}{4} \frac{R^2}{a^2(1-e^2)^2} J_2(4-5\sin^2 i); \quad (2)$$

$$J_3\text{项:} \quad \left(\frac{de}{dt}\right)_{J_3} = \frac{3n}{2} \frac{R^3}{a^3(1-e^2)^2} J_3 \sin i \left(\frac{5}{4} \sin^2 i - 1\right) \cos \omega, \quad (3)$$

$$\left(\frac{d\omega}{dt}\right)_{J_3} = -\frac{3n}{2} \frac{R^3}{a^3(1-e^2)^3} J_3 \left[ \frac{1+4e^2}{e} \sin i \left( \frac{5}{4} \sin^2 i - 1 \right) - e \frac{\cos^2 i}{\sin i} \left( \frac{15}{4} \sin^2 i - 1 \right) \right] \sin \omega. \quad (4)$$

式中,  $a$  为半长轴,  $i$  为轨道倾角,  $R$  为月球赤道半径,  $n$  为平运动速度,  $t$  为时间.

冻结轨道须保持拱线静止不转动 (即近地点幅角  $\omega$  不变) 和偏心率  $e$  不变. 因此当只考虑  $J_2$  项时, 令  $\left(\frac{de}{dt}\right)_{J_2} = 0$  和  $\left(\frac{d\omega}{dt}\right)_{J_2} = 0$ , 可求得

$$i = 63.4^\circ.$$

当考虑  $J_2$  项和  $J_3$  项时, 令  $\left(\frac{de}{dt}\right)_{J_2} + \left(\frac{de}{dt}\right)_{J_3} = 0$  和  $\left(\frac{d\omega}{dt}\right)_{J_2} + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)_{J_3} = 0$ , 略去  $e$  的高阶次项, 可求得  $i = 63.4^\circ$ ; 或者  $\omega = 90^\circ$  或  $270^\circ$ , 且

$$e = -\frac{J_3}{2J_2} \frac{R}{a} \sin i \sin \omega.$$

月球非球形引力的 2 阶和 3 阶带谐项分别为

$$J_2 = 2.0324485 \times 10^{-4}, \quad J_3 = 8.4759061 \times 10^{-6}.$$

该数据由月球引力场模型 LP165P 中的归一化谐系数  $\overline{C}_{20}$  和  $\overline{C}_{30}$  两项求得. 由于月球的  $J_2$  项和  $J_3$  项符号相同,  $\omega$  只能取  $270^\circ$ , 因此,

$$e = \frac{J_3}{2J_2} \frac{R}{a} \sin i.$$

### 3.2 仿真验证

采用上述冻结轨道的设计方法优化月球卫星轨道设计. 假定月球卫星分别绕 100 km 和 200 km 平均高度 (平均高度  $h = a - R$ ) 的极轨道运行, 升交点赤经取  $0^\circ$ , 冻结轨道和非冻结轨道的相关参数见表 1.

表 1 轨道参数 ( $i = 90^\circ$ ,  $\Omega = 0^\circ$ )  
Table 1 Orbit parameters ( $i = 90^\circ$ ,  $\Omega = 0^\circ$ )

轨道平均	冻结轨道		非冻结轨道	
高度 $h/\text{km}$	$\omega/(\circ)$	$e$	$\omega/(\circ)$	$e$
100	270	0.0209	0	0.00001
200	270	0.0198	0	0.00001

对于表 1 中的 4 种初始状态, 通过直接积分计算 180 d 的月球卫星轨道变化情况. 选取初始时刻的月理坐标系为月心惯性系; 积分方法采用 RKF7 (8) 法, 积分步长为 60 s; 月球引力场模型取 LP165P 中的 60 阶 60 次部分; 月球的自转周期取为 1 个恒星月, 即 27.321 66 个平太阳日. 对仅包含月球引力场模型的运动微分方程直接积分, 得出的月球卫星近月点高度的变化如图 1 和图 2 所示.

由图可以看出, 冻结轨道比非冻结轨道运动更平稳. 由于冻结轨道的偏心率较大, 所以尽管它使近月点高度变化减小, 但卫星轨道高度的相对变化却很大.

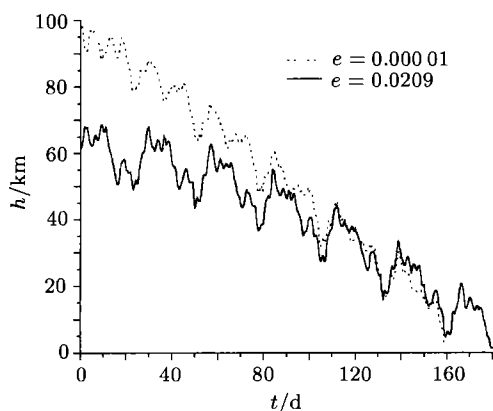


图 1  $a = 1838 \text{ km}$  时近月点高度的变化  
Fig.1 The effects in perilune altitude as  
 $a = 1838 \text{ km}$

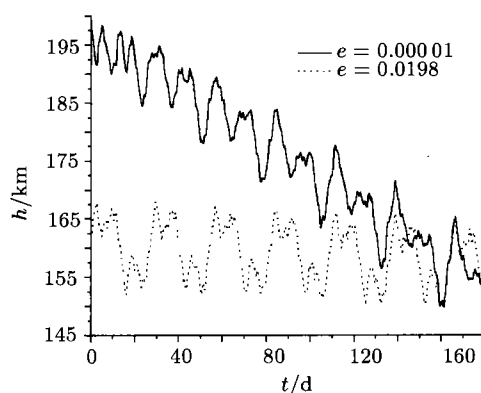


图 2  $a = 1938 \text{ km}$  近月点高度的变化  
Fig.2 The effects in perilune altitude as  
 $a = 1938 \text{ km}$

由于月球卫星冻结轨道的偏心率大小基本上随着所采用的带谐项的阶数的增多而增大的(局部可能有变小,但基本趋势是增大的,一直到 60 阶以上才趋于稳定),所以只考虑  $J_2$  和  $J_3$  项时所计算得到的偏心率基本上是最小的. 实际上,基于  $J_2$  和  $J_3$  项计算的最小偏心率在实际应用中仍然是偏大的. 由此可见,通过使用冻结轨道来优化设计月球卫星的轨道,效果是有限制的. 对此,下面做了进一步的优化,目的是能在尽可能长的时间内把轨道高度维持在某一个给定的范围内.

## 4 极轨道设计优化

对月球进行探测的卫星,往往需要通过对月球表面进行照相和遥感,测绘月球表面地貌和探测月球资源. 而完成这类任务通常采用极轨道,这样可以实现对月球的全球覆盖. 由前面可知,基于  $J_2$  项和  $J_3$  项所设计的冻结轨道,可使近地点高度的变化更为平稳;但由于  $e$  的初始值较大,从而使轨道高度的变化仍然很大,这对月球卫星的正常工作有较大的影响. 下面通过设置一个初始偏心率  $e_0$  及相应的近月点幅角  $\omega_0$ ,优化设计轨道,探讨月球卫星轨道高度可保持的范围,以及如何使轨道高度在尽可能长的时间内维持在某一许可高度变化范围内(或在某一给定的时间内如何使轨道修正的次数最少).

### 4.1 轨道设计优化

由 (2) 式和 (4) 式得

$$\left(\frac{d\omega}{dt}\right)_{J_2} + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)_{J_3} = -3nJ_2 \frac{R^2}{a^2(1-e^2)^2} \left(\frac{5}{4} \sin^2 i - 1\right) \left[1 + \frac{J_3}{2J_2} \frac{R}{a(1-e^2)} \frac{\sin \omega}{e \sin i} \left(\sin^2 i - e^2 \frac{\frac{35}{4} \sin^2 i \cos^2 i - 1}{\frac{5}{4} \sin^2 i - 1}\right)\right].$$

对于小偏心率轨道, 可略去  $e$  的高阶次项, 得

$$\left(\frac{d\omega}{dt}\right)_{J_2} + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)_{J_3} \approx -3nJ_2 \frac{R^2}{a^2} \left(\frac{5}{4} \sin^2 i - 1\right) \left(1 + \frac{J_3}{2J_2} \frac{R \sin \omega \sin i}{a e}\right).$$

对于极轨道 ( $i = 90^\circ$ ), 若  $e \leq \frac{J_3}{2J_2} \frac{R}{a}$ , 令  $\left(\frac{d\omega}{dt}\right)_{J_2} + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)_{J_3} = 0$ , 可求得

$$\sin \omega = -\frac{2J_2}{J_3} \frac{a}{R} e,$$

可知  $\omega$  取值范围在第 3 或第 4 象限, 即  $\omega \in (\pi, 2\pi)$ . 又由 (3) 式可知, 当  $\omega$  属于第 3 象限 (即  $\omega \in (\pi, 3\pi/2)$ ) 时, 有

$$\left(\frac{de}{dt}\right)_{J_2} + \left(\frac{de}{dt}\right)_{J_3} < 0,$$

即  $e$  的值越来越小. 因此, 可以根据许可的高度变化范围预先取最大允许的  $e_0$ , 并同时通过设计相应的  $\omega_0$  使  $e$  的值先变小, 从而实现轨道的优化设计.

假定允许的高度变化为  $\Delta h$ , 则最大允许的  $e_0$  为

$$e_0 = \Delta h/a,$$

相应的  $\omega_0$  为

$$\omega_0 = \pi + \omega_f.$$

式中

$$\omega_f = \sin^{-1} \left( \frac{2J_2}{J_3} \frac{\Delta h}{R} \right).$$

可见  $\omega_0$  的取值只与许可的高度变化范围  $\Delta h$  有关, 与其他因素无关.

#### 4.2 仿真结果及分析

利用上述公式优化设计月球卫星轨道. 假定月球卫星轨道的初始条件为: 轨道倾角为  $90^\circ$ , 升交点赤经取  $0^\circ$ , 对应于半长轴为  $a = 1838 \text{ km}$  和  $a = 1938 \text{ km}$  时的其他轨道参数见表 2.

表 2 轨道参数 ( $i = 90^\circ$ ,  $\Omega = 0^\circ$ )  
Table 2 Orbit parameters ( $i = 90^\circ$ ,  $\Omega = 0^\circ$ )

$\Delta h/\text{km}$	$\omega_0/(\circ)$	$a = 1838 \text{ km}$	$a = 1938 \text{ km}$
		$e_0$	$e_0$
30	235.87	0.0163	0.0155
20	213.49	0.0109	0.0103
10	196.02	0.0054	0.0052

坐标系、引力场模型和积分方法均同前面. 直接积分求得 180 d 内近月点高度的变化如图 3 和图 4 所示.

由图 3 和图 4 可以看到, 采用优化设计方法后, 卫星的轨道高度可在一定时期内保持在一个较小的变化范围内. 对于 100 km 高度 (对应  $a = 1838 \text{ km}$ ) 的极轨道, 如果不采用优化设计, 如图 1 中  $e = 0.00001$  时的情况, 卫星高度变化可在大约 20 d 内保持在 10 km 范围内, 在 40 多天内保持在 20 km 范围内, 在 60 d 内保持在 30 km 范围内; 而对于采

用了优化设计的轨道, 如图 3 所示, 卫星高度变化可在 50 d 内保持在 15 km 范围内 (对应  $\Delta h = 10$  km), 在 70 多天内基本保持在 20 km 范围内, 在 100 多天内保持在 30 km 范围内. 对于 200 km 高度 (对应  $a = 1938$  km) 的极轨道, 如不采用优化设计, 如图 2 中  $e = 0.00001$  时的情况, 卫星高度变化可在大约 28 d 内保持在 10 km 范围内, 在近 80 d 内保持在 20 km 范围内, 在 100 多天内保持在 30 km 范围内; 而采用优化设计后, 如图 4 所示, 卫星高度变化可在近 80 d 内保持在 15 km 范围内 (对应  $\Delta h = 10$  km), 在近 160 d 内基本保持在 20 km 范围内, 在 30 km 范围内保持时间可超过 180 d.

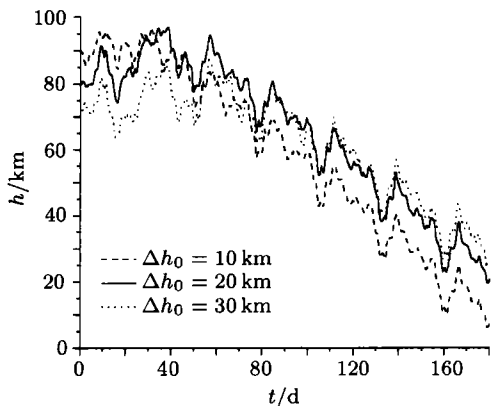


图 3  $a = 1838$  km 时近月点高度的变化  
Fig.3 The effects in perilune altitude as  
 $a = 1838$  km

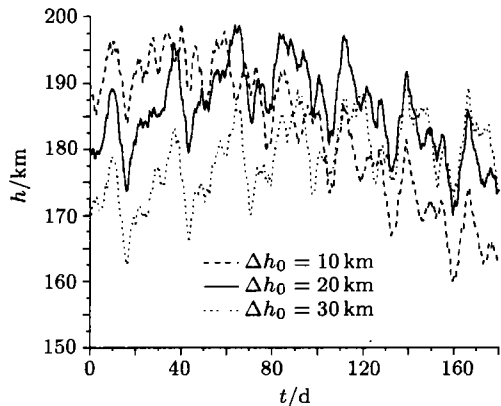


图 4  $a = 1938$  km 时近月点高度的变化  
Fig.4 The effects in perilune altitude as  
 $a = 1938$  km

## 5 结论

月球卫星通常可在一个月球自转周期内实现 1 次对月球的全球覆盖 (考虑到光照问题), 时间大约为 27.3 d. 以对月球全球重复覆盖 1 次所需要的时间 (大约 55 d) 为最少轨道修正时间间隔, 设计低高度月球卫星极轨道时, 由前面的分析可知, 允许的最小轨道高度变化范围需设计在 10—20 km 范围内; 若允许的轨道高度变化范围为 20 km, 则可以每隔 70 d 以上修正一次轨道. 由此可见, 采用上述的优化设计方法来设计月球卫星轨道, 可以较好地解决一些工程问题.

## 参 考 文 献

- [1] Blowell D, Clemense G M. Celestial Mechanics Method. Translated by Liu Lin, Ding Hua. Beijing: Science Press, 1986, 430—437. in Chinese (D 布劳威尔, G M 克莱门斯. 天体力学方法. 刘林, 丁华译. 北京: 科学出版社, 1986, 430—437)
- [2] Lozier D, Galal K, Folda D, Beckman M. Lunar Prospector Mission Design and Trajectory Support. Paper AAS 98-323, 1998, 1—15
- [3] Meyer K W, Buglia J J, Desai P N. Lifetimes of Lunar Satellite Orbits. NASA Technical Paper 3394, 1994, 1—35
- [4] Antonio E, Martin L. Frozen orbits about the moon. *J. Guid. Cont. Dyn.*, 2003, 26(2):238—243

- [5] Folda D, Galal K, Lozier D. Lunar Prospector Frozen Orbit Mission Design. AIAA 98-4288, 1998, 1—11
- [6] Liu Lin, Wang Jiasong. Analytical solution for the orbital variation of a lunar satellite. *Acta Astron. Sinica*, 1998, **39**(1):81—102. in Chinese (刘林, 王家松. 月球卫星轨道变化的分析解. 天文学报, 1998, **39**(1):81—102)
- [7] Xi Xiaoning, Zeng Guoqiang, Ren Xuan, Zhao Hanyuan. Lunar Probe Orbit Design. Beijing: Defense Industry Press, 2001, 112—122. in Chinese (郗晓宁, 曾国强, 任萱, 赵汉元. 月球探测器轨道设计. 北京: 国防工业出版社, 2001, 112—122)
- [8] Yang Jiachi. Spacecraft Orbit Dynamics and Control. Beijing: China Astronautics Publishing House, 2001, part 1, 266—272. in Chinese (杨嘉辉. 航天器轨道动力学与控制 (上). 北京: 宇航出版社, 2001, 266—272)

## OPTIMIZATION OF ORBIT DESIGN FOR LUNAR SATELLITE

LIN Shengyong<sup>1,2</sup>    LI Zhuji<sup>2</sup>    HE Xingsuo<sup>1</sup>

<sup>1</sup>(Department of Engineering Mechanics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072)

<sup>2</sup>(Aerospace System Engineering Shanghai)

### Abstract

Orbit design of lunar satellite is optimized by using zonal harmonics  $J_2$  and  $J_3$ . First, the effects of perturbation factors are analyzed. The result shows that the primary perturbation on a low-altitude lunar satellite orbit is the moon's nonspherical gravity field. Second, the formula of frozen orbit are derived in response to  $J_2$  and  $J_3$  and verified by direct integration of differential equation including only lunar gravity model. In this analysis, all other perturbations (third body perturbation, solar radiation pressure, etc.) are neglected. Finally, polar orbit design is optimized by proper selection of  $e_0$  and  $\omega_0$ , and simulated. As a numerical result, initial values of  $213.49^\circ$  for argument of perigee and approximately 0.0109 for eccentricity ( $80 \times 120$  km orbit) can limit excursions beyond the  $\pm 20$  km range within about 70 d on the orbit of  $a = 1838$  km. It shows that the optimization method is very useful.

**Key words**    Lunar satellite, Perturbation, Frozen orbit, Orbit design, Optimization