



**UANL**

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



**FCFM**

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

**UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON**  
**FACULTAD DE CIENCIAS FISICO MATEMATICAS**

**Física Computacional**  
**Reporte**

<b>Mario Alejandro Balleza Camargo</b>	<b>1672396</b>
<b>Nayelli Bastida Hernandez</b>	<b>1672639</b>
<b>José Guadalupe Arellano Emiliano</b>	<b>1941509</b>

***06 de Mayo del 2021, Monterrey, Nuevo León, México***

# 1. Abstract

Este artículo proporciona una descripción práctica de soluciones numéricas para la ecuación de calor utilizando la técnica de diferencias finitas por el método de Crank Nicholson. Aquí abordaremos el tiempo de avance espacio centrado (FTCS), el tiempo hacia atrás, el espacio centrado (BTCS), se desarrollaran esquemas de Crank-Nicolson y se aplican a un problema simple que involucra la ecuación de calor unidimensional

## 2. Introduccion

¿Cuál es el objetivo del programa? A partir de la Ecuación de Calor para el calentamiento de una varilla, una temperatura inicial, una predeterminada longitud de varilla, un tiempo determinado y una cantidad finita de saltos de tiempo arrojar una serie de datos graficables e interpretables.

### Ecuacion de calor

La conducción a través de un material se describe mediante la ecuación del calor, una combinación de la ley de Fourier y la conservación de la energía.

En una dimensión son:

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$$

dónde q es la densidad de flujo de calor local,  $\lambda$  conductividad térmica, T es la temperatura. De aquí podemos reestructurar la ecuacion de calor habitual por lo que nos da:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial x}$$

pc es la capacidad calorífica volumétrica, en t tiempo y X dimensiones del espacio

En situaciones sencillas, se pueden encontrar soluciones exactas a través de medios analíticos. En situaciones más complejas o del mundo real donde las condiciones materiales y de contorno varían de manera no uniforme, se requieren otros métodos.

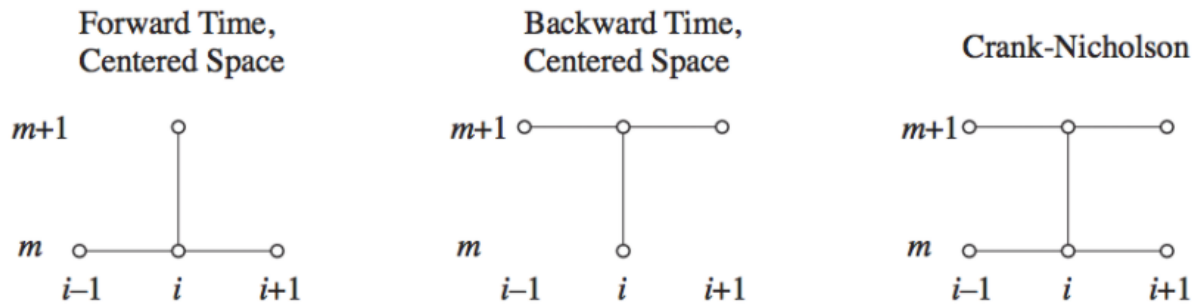
## **Método de diferencias finitas**

Las soluciones de ecuaciones diferenciales parciales se pueden aproximar con métodos de *diferencias finitas* donde una función continua se discretiza en derivadas aproximadas y se resuelve numéricamente, por ejemplo:

$$\frac{\partial T}{\partial x} \approx \frac{T^{t+\Delta t} - T^t}{\Delta t}$$

Las aproximaciones en diferencias finitas incluyen métodos:

- Explícito o FTCS (Forward Time, Centered Space) es el cambio en una sola variable se puede calcular en una sola ecuación, ya que la información relevante se conoce explícitamente y se proyecta hacia adelante. Los métodos explícitos son más fáciles de implementar y computacionalmente eficientes, pero pueden ser inestables cuando las proyecciones superan demasiado el resultado exacto.
- Implícito o BTCS (backward time, centred space) consideran cómo cambiará un sistema durante el intervalo de tiempo en cuestión, por lo que las ecuaciones para cada elemento del sistema deben resolverse simultáneamente. Los métodos implícitos son más difíciles de implementar y calcular, pero siempre son estables, lo que permite intervalos de tiempo arbitrariamente largos.
- Los esquemas semi-implícito o de Crank Nicholson que combinan métodos explícitos e implícitos, mejorando la precisión, pero nuevamente son más difíciles de implementar y calcular, y aún pueden ser inestables dependiendo del grado de explicitación.

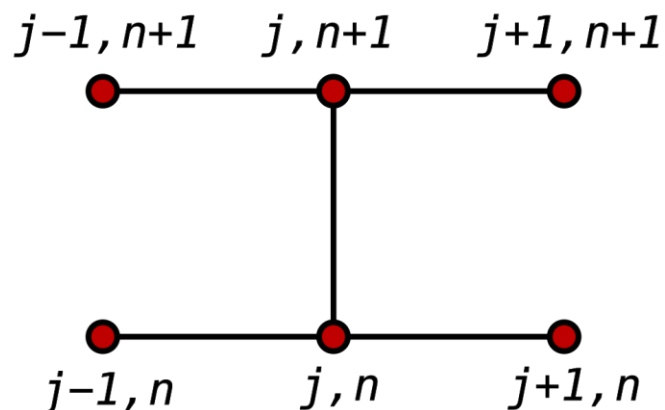


### 3. Solución numérica

#### Método de Crank Nicholson

El método de Crank-Nicolson se basa en la regla trapezoidal, lo que proporciona una convergencia de segundo orden en el tiempo. Para las ecuaciones lineales, la regla trapezoidal es equivalente al método del punto medio implícito

Tengamos en cuenta que este es un *método implícito*: para obtener el "siguiente" valor de  $u$  en el tiempo, se debe resolver un sistema de ecuaciones algebraicas.



Si la ecuación diferencial parcial es no lineal, la discretización también será no lineal, por lo que avanzar en el tiempo implicará la solución de un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales, aunque las linealizaciones son posibles.

## Resolución del problema

Si vamos a representar las ecuaciones de calor en forma discreta, necesitamos aproximar la conductividad y la capacidad de calor en valores efectivos entre nodos. Para la forma implícita, queremos el gradiente de temperatura entre los nodos en el siguiente paso de tiempo ( $m+1$ ) por lo que la ley de Fourier se convierte en:

$$q_k = K_k(T_k^{m+1} - T_{k+1}^{m+1})$$

dónde  $q_k \rightarrow$  es el flujo de calor,  $K_k \rightarrow$  conductancia efectiva entre cada nodo  $k$  y  $k+1$ . Asimismo, la ley de conservación pasa a ser:

$$\frac{C_k}{\Delta t}(T_k^{m+1} - T_k^m) = \{(q(k-1) \rightarrow q_k)$$

dónde  $C_k$  es capacitancia efectiva. Combinando estas ecuaciones, tenemos una ecuación de calor discretizada en forma implícita general:

$$\frac{C_k}{\Delta t}(T_k^{m+1} - T_k^m) = K_{k-1}(T_k^{m+1} - T_{k-1}^{m+1}) - K_k(T_k^{m+1} - T_{k+1}^{m+1})$$

## Resolviendo la forma implícita

Al recopilar términos de la ecuación implícita general, podemos describir el sistema como:

$$a_k(T_k^{m+1}) + b_k(T_k^{m+1}) + c_k(T_k^{m+1}) = d_k$$

dónde  $d$  representa todos los términos restantes, incluida la temperatura actual en el nodo  $k$ . El sistema de ecuaciones se puede representar en una matriz

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_3 & b_3 & c_3 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ddots & \ddots & \ddots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_n & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^{m+1} \\ T_2^{m+1} \\ T_3^{m+1} \\ \vdots \\ T_{n-1}^{m+1} \\ T_n^{m+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

Una matriz tridiagonal de este tipo se puede resolver utilizando el algoritmo de Thomas, un método eficaz de eliminación gaussiana.

## El Algoritmo de Thomas

Una matriz tridiagonal sobre  $n$  nodos, se resuelven en los siguientes pasos. Primero, la fase de eliminación hacia adelante: Para este caso Hacemos para  $K=2$  hasta  $m$

$$m = \frac{a_k}{b_{k-1}}$$

$$b_k = b_k - mc_{k-1}$$

$$d_k = d_k - md_{k-1}$$

Luego, el primer paso de la fase de sustitución hacia atrás:

$$T_n^{m+1} = \frac{d_n}{b_n}$$

después de lo cual:

Hacemos para  $k=n-1$  hasta 1

$$T_k^{m+1} = \frac{d_k - c_k T_{k+1}}{b_k}$$

Se abordó la solución numérica para una varilla delgada, con una densidad  $\rho$ , conductividad eléctrica  $\kappa$ , y calor específico  $c$ , dados que son estrictamente mayor que cero. Además, se despreciaron fuentes externas de calor.

Bajo estas condiciones, la ecuación general para la difusión es:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \gamma \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

Para una temperatura  $U(t, x)$  en un tiempo  $t$  y posición  $x$ , la constante de difusividad térmica es:

$$\gamma = \frac{\kappa}{\sigma} = \frac{\kappa}{\rho x}$$

la solución esta basada en el exponencial ansatz, esto es:

$$U(x, t) = e^{-\lambda t} v(x)$$

donde  $v(x)$  depende únicamente de  $x$ .

Derivando parcialmente dos veces y sustituyendo en la igualdad, se obtiene la siguiente ecuación diferencial lineal de segundo orden:

$$-\gamma \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \lambda v$$

En las condiciones iniciales, se tiene una barra de longitud  $L$ , cuyos extremos tienen una temperatura inicial de cero, su temperatura inicial será  $f(x)$ . Las condiciones de frontera son las siguientes:

$$U(t, 0) = 0, \quad t \geq 0$$

$$U(0, x) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L$$

Dado que  $\lambda > 0$ , la solución general para la ecuación diferencial es

$$a \cos(\omega x) + b \sin(\omega x), \quad \omega = \sqrt{\frac{\lambda}{\gamma}}$$

Esto implica que

$$v(L) = b \sin(\omega L) = 0$$

Dado que si  $b = 0$  es la solución trivial, se toma la otra opción que satisface la igualdad, esto es  $\omega$  múltiplo entero de  $\pi$ , lo que implicaría que:

$$\omega = \frac{\pi}{L}, \quad \frac{2\pi}{L}, \quad \frac{3\pi}{L} \dots$$

EL programa imprime en un archivo las variaciones de temperatura de cada

```

! La PDE unidimensional para la ecuación de difusión de calor
!  $u_t = (D(u) u_x)_x + s$  donde  $u(x, t)$  es la temperatura,
!  $D(u)$  es la difusividad y  $s(x, t)$  es un término fuente.
! Tomando  $D(u) = 1$  y  $s(x, t) = 0$  da
!  $u_t = u_{xx}$ 
! región uniforme unidimensional  $|x| < 1$  para  $t > 0$ 
! tamaño de la malla uniforme,  $\Delta x = 0.1$ 
! Condición inicial de calor:  $u(x) = (1+x)(1-x)^2$ 

```

```

program crank_nicolson

```

```

implicit none
real, allocatable :: x(:), u(:), a(:), b(:), c(:), d(:)
real :: m, dx, dt, tmax
integer :: n, j, ni, ji

```

```

print*, 'Ingrese el numero total de pasos de tiempo'
read*, ni
print*, 'Ingrese el tiempo final'
read*, tmax
dt=tmax/ni !El tamaño del paso de tiempo
print*, 'Esto da un tamaño de paso de tiempo dt=', dt
dx= 0.1 !delta x =0.1
ji= 20
m = dt/(2*dx**2)

```

```

!Condicion inicial

```

```

do j=1,ji
  x(j)= -1+j*dx
  u(j)=(1+x(j))(1-x(j))*2 !x=-1+j*dx
end do

```