Instituto Politécnico Nacional

Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos #3

“Estanislao Ramírez Ruiz”

Página Web

Trigonometría y geometría

Tercer parcial

Integrantes:

Contreras Eustaquio Uriel

Contreras Romero Dylan Enrique

Escudero Velázquez Joa Kaleb- **Representante**

Vargas Figueroa Christian Jesús

Índice

PERIMETRROS AREAS Y VOLUMES DE LAS FIGURAS 3

-Funciones trigonométricas 5

-Funciones trigonométricas reciprocas 6

Ejemplo con solución entender de mejor manera el tema 7

Ejemplos de ejercicios y problemas relacionados con triángulos 8

-Funciones e identidades trigonométricas 9

Identidades trigonométricas 10

Graficas de las otras funciones trigonométricas. 15

Ecuaciones trigonométricas 16

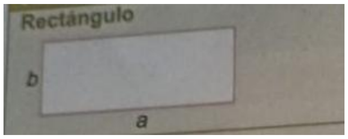
Triángulos oblicuángulos 17

TEOREMA I. "LEY DE COSENOS" 18

Teorema II ley de senos 20

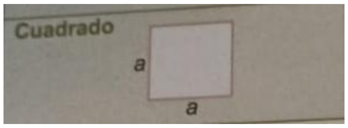
IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS DE SUMA Y RESTA DE DOS ÁNGULOS; DE ÁNGULOS DOBLES Y MEDIA ÁNGULOS 22

PERIMETRRROS AREAS Y VOLUMES DE LAS FIGURAS

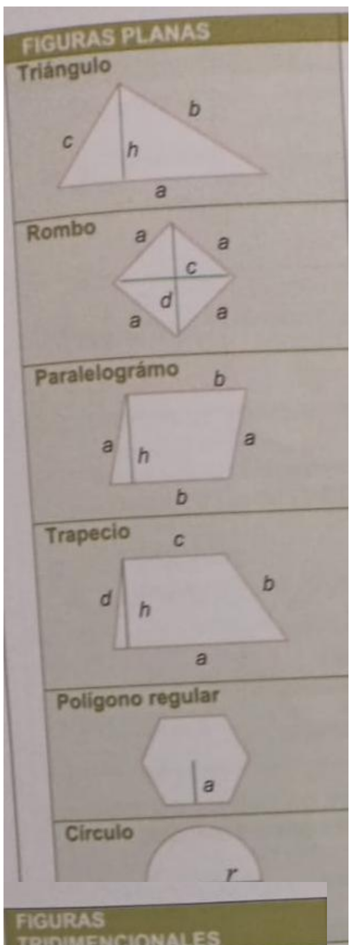


PERIMETRO AREA

P=2a+2b A=a*b



p=4a $A=a^2$



PERIMETRO AREA

P=a+b+c $A = \frac{ah}{2}$

P = 4ª $A = \frac{dc}{2}$

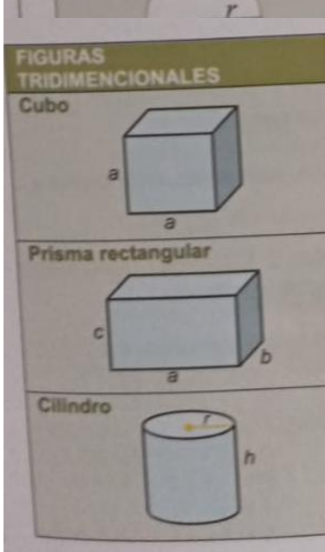
P = 2a + 2b A=a*h

P=a+b+c+d $A = \frac{(a+b)h}{2}$

P = n/a $A = \frac{Pa}{2}$

-número de lados del polígono a-apotema del polígono

P = 2πr $A = \pi r^2$

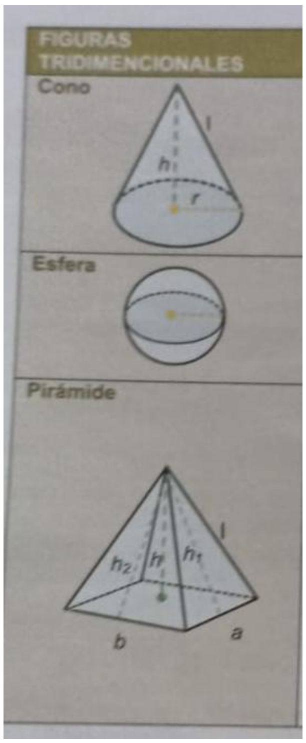


AREA VOLUMEN

$SA = 6a^2$ $\qquad$ $V = a^3$

$SA = 2(ab + ac + bc)$ $\qquad$ $V = abc$

$SA = 2\pi rrn + 2\pi r^2$ $\qquad$ $V = \pi r^2 h$



AREA $\qquad$ VOLUMEN

$SA = \pi vl + \pi r^2$ $\qquad$ $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$SA = 4\pi r^2$ $\qquad$ $V \frac{4}{3}\pi r^3$

$$SA = ab + a\sqrt{h^2 + \frac{b^2}{4}} + b\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}}$$

$V = \frac{1}{3} Abaseh$

$SAab + ah, + bh_2$

Donde los ángulos de la base son h, la altura de la pirámide es h y la altura de los triángulos inclinados es h

-Funciones trigonométricas

Seno Es la razón existente entre el cateto opuesto y la hipotenusa

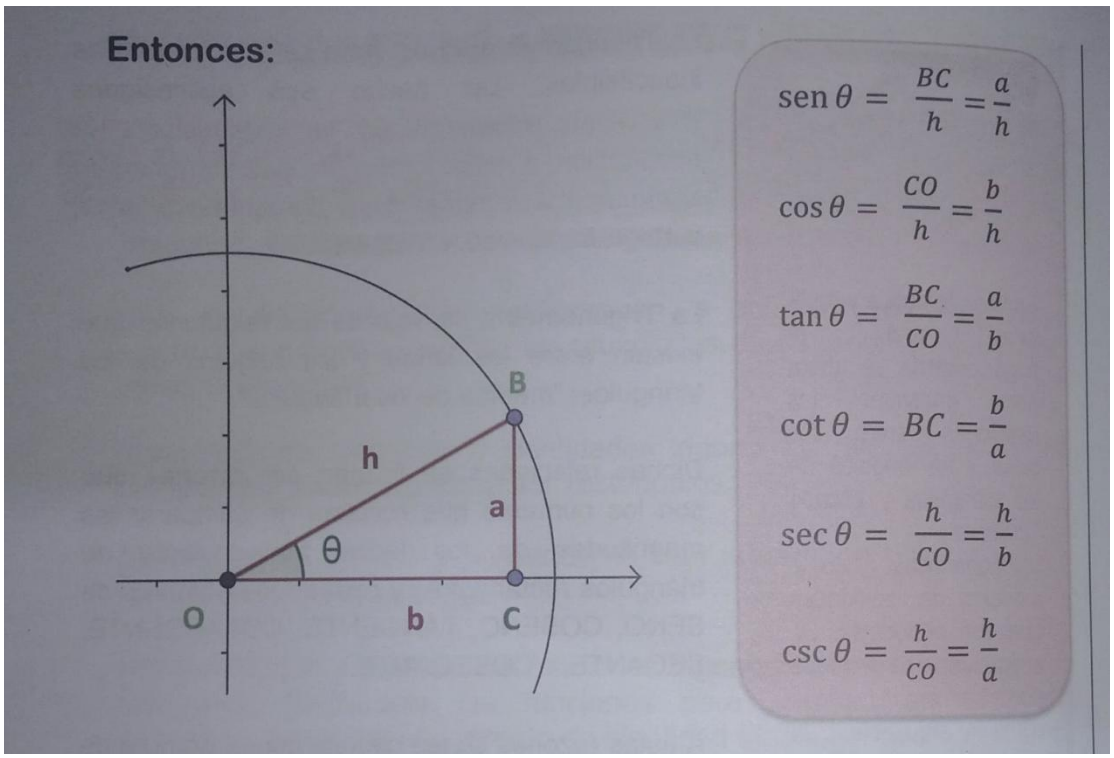
Coseno Es la razón existente entre el cateto adyacente y la hipotenusa

Tangente Es la razón existente entre el cateto opuesto y el cateto adyacente

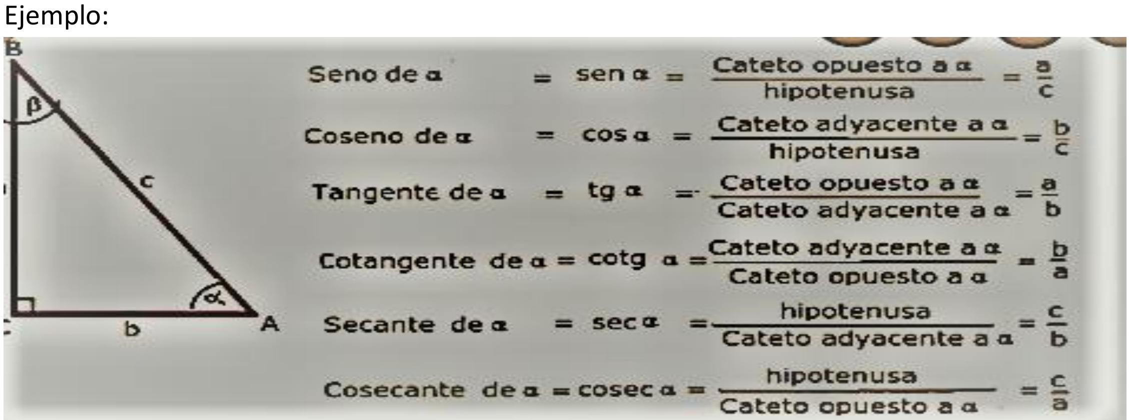
Cotangente Razón existente entre el cateto adyacente y el cateto opuesto

Secante Razón existente entre la hipotenusa y el cateto adyacente

Cosecante Razón existente entre la hipotenusa y el cateto opuesto



Ejemplo:



-Funciones trigonométricas reciprocas

sen A = a/c

cos A = b/c

tan A = a/b

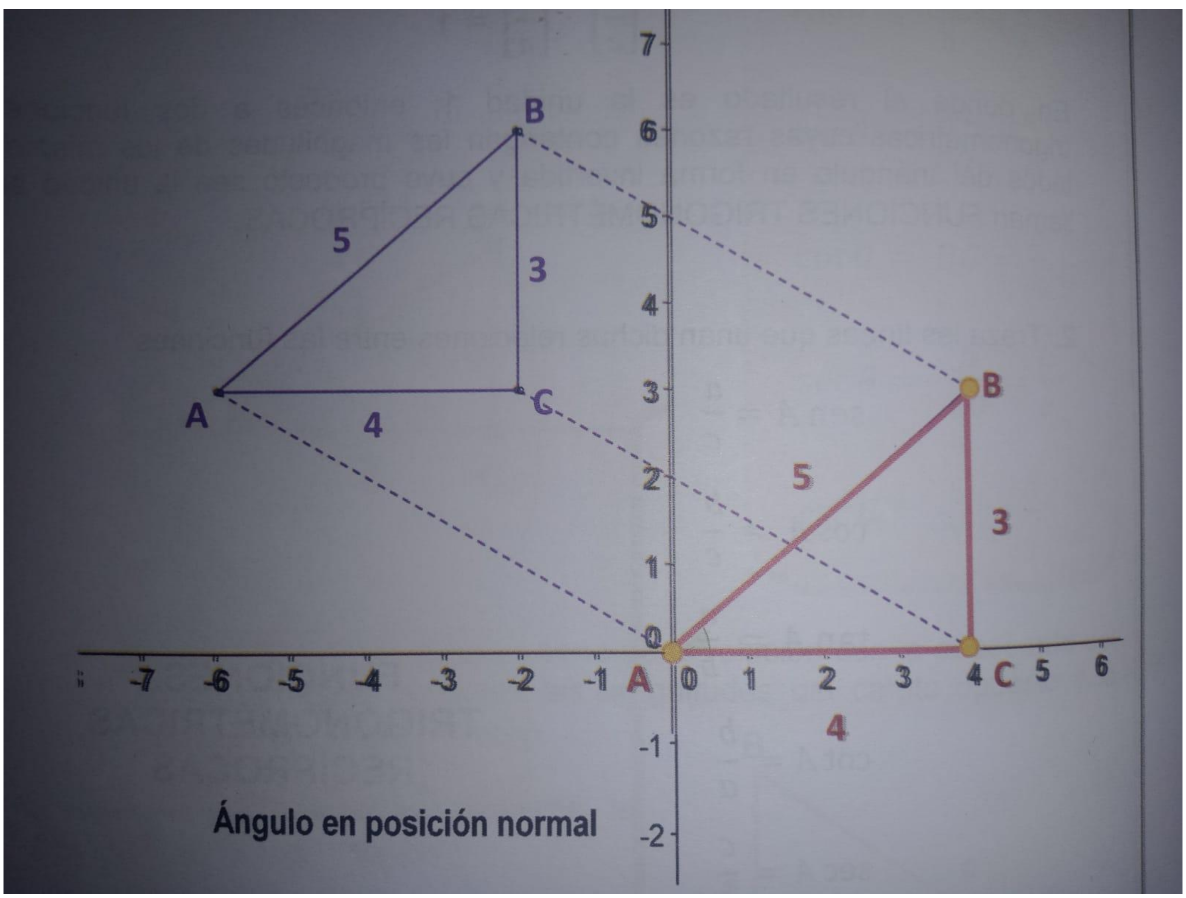
cot A = b/a

sec(A) = c/b

csc(A) = c/a

-Angulo en posición normal

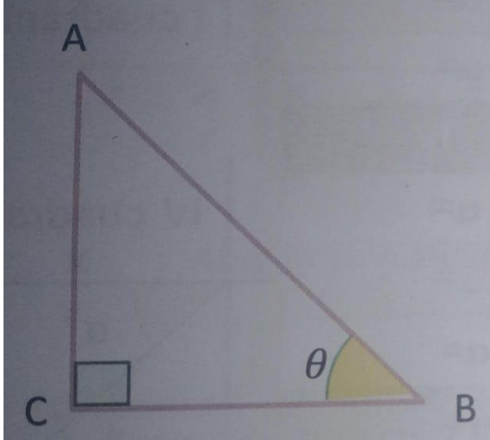
Un ángulo en posición normal es inscribiendo un triángulo rectángulo en un plano coordenado en el primer cuadrante donde unos de sus ángulos agudos coinciden con el origen y uno de los catetos se encuentra en el eje de las abscisas.



Sugerencias(1): Para poder trabajar adelante sería bueno que aprendas las principales funciones de sen,cos y tan ,así como sus opuestos

razon trigonometrica	opuesto multiplicativo
Seno $$\text{sen } \alpha = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$	Cosecante $$\csc \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{opuesto}}$$
Coseno $$\cos \alpha = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$	Secante $$\sec \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{adyacente}}$$
Tangente $$\tan \alpha = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}}$$	Cotangente $$\cot \alpha = \frac{\text{adyacente}}{\text{opuesto}}$$

Ejemplo con solución entender de mejor manera el tema



Solución:

$$\overline{AB} = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$sen\ 45° = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$cos\ 45° = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tan\ 45° = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{1} = 1$$

Ejemplos de ejercicios y problemas relacionados con triángulos

1. Encuentra las funciones restantes, tomando en cuenta los cuadrantes que se indican.

a. $\operatorname{sen}\theta = \frac{5}{7}$ **(I)**

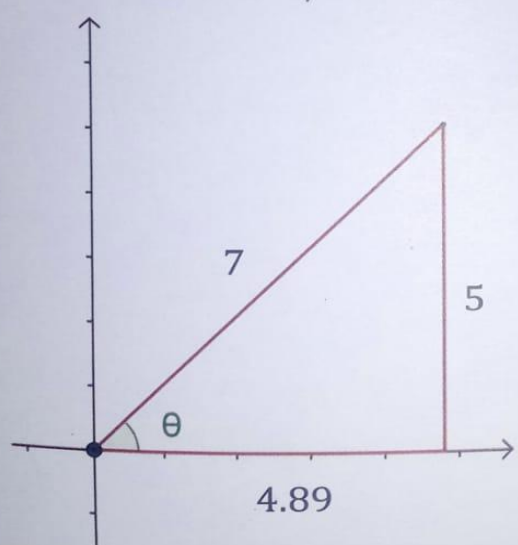
b. $\cot\ \alpha = 1$ **(III)**

c. $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ **(II)**

d. $\cos\beta = -\frac{27}{11}$ **(IV)**

Vamos a ver el primer ejemplo *a.*:

La función $\operatorname{sen}\theta = \frac{5}{7}$ en el primer cuadrante es:



Para obtener la medida del ángulo en posición normal, tenemos que realizar la división de la razón $\frac{5}{7} = 0.7142$.

El número 0.7142 es un valor natural, ya que las magnitudes sean cm, mm o m, al realizar la operación, las unidades se simplifican.

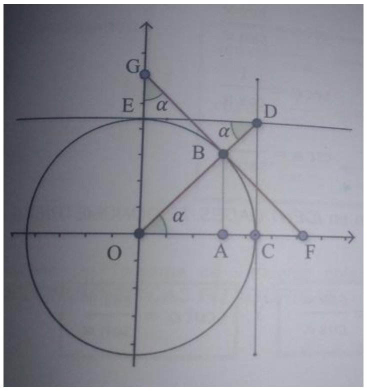
$\frac{5\cancel{m}}{7\cancel{m}} = 0.7142$ valor natural.

Este valor se teclea en la calculadora, posteriormente se presiona la tecla de $\boxed{INV}$ ó $\boxed{2nd}$ + $\boxed{SIN}$, resultando 45.5776 o 45°34'40"

Entonces, $\operatorname{sen}\theta = 0.7142$

$\theta = \text{Arc sen}^{-1}\ 0.7142$

$\theta = 45°34'40''$



-Funciones e identidades trigonométricas

Al trazar una circunferencia tomando el orig-

en de un plano cartesiano como centro y el

radio sea igual a la unidad la figura se llama

CIRCULO UNITARIO O TRIGONOMETRICO

Desde el centro hasta la circunferencia(radio)

el valor es de 1.

Por lo tanto, el valor OB y otros similares val-

en 1.

Ejemplos de todo esto:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{BA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{BA}}{1} = \overline{BA}$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OA}}{1} = \overline{OA}$$

$$\tan\alpha = \frac{\overline{DC}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{DC}}{1} = \overline{DC}$$

$$\cot\alpha = \frac{\overline{ED}}{\overline{EO}} = \frac{\overline{ED}}{1} = \overline{ED}$$

$$\sec\alpha = \frac{\overline{OF}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OF}}{1} = \overline{OF}$$

$$\csc\alpha = \frac{\overline{OG}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OG}}{1} = \overline{OG}$$

Con lo anterior observamos que las funciones trigonométricas se pueden presentar como segmentos (seno y coseno) y las líneas rectilineas (tangente, cotangente, secante y cosecante).

Trazamos un círculo trigonométrico y observemos las relaciones que tienen entre sí las funciones trigonométricas.

sen alpha = y/d = y/1 = y entonces: sen alpha = x

cos alpha = x/d = x/d = x

cos alpha = x

Con las demás funciones tenemos:

$$\tan\alpha = \frac{y}{x} \quad \text{por lo tanto:} \quad \tan\alpha = \frac{\text{sen}\propto}{\cos\propto}$$

$$\cot\alpha = \frac{x}{y} \quad \text{por lo tanto:} \quad \cot\alpha = \frac{\cos\propto}{\text{sen}\propto}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{x} \quad \text{por lo tanto:} \quad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\propto}$$

$$\csc\alpha = \frac{1}{y} \quad \text{por lo tanto:} \quad \csc\alpha = \frac{1}{\text{sen}\propto}$$

Identidades trigonométricas

$$\tan\alpha = \frac{\text{sen}\propto}{\cos\propto}$$

$$\cot\alpha = \frac{\cos\propto}{\text{sen}\propto}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\propto}$$

$$\csc\alpha = \frac{1}{\text{sen}\propto}$$

2 de ellas se clasifican en IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS POR COCIENTE, los cuales son **tan alpha y cot alpha**

Las otras dos de seis IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS RECIPROCAS, al comparar las seis funciones trigonométricas de un ángulo se observa que son recíprocas: El SENO Y COSECANTE, COSENO Y SECANTE, TANGENTE Y COTANGENTE.**sec alpha y csc alpha.**

Análogamente tendremos a cot una vez obteniendo tan a travez del circulo trazado

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{\csc\alpha} \longleftrightarrow \csc\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha} \longleftrightarrow \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha} \longleftrightarrow \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$$

Usando el teorema de Pitágoras obtendremos las IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS PITAGÓRICAS.

Donde d=1, sen a y x= cos α

Sustituyendo= $1^2=(\operatorname{sen}\alpha)^2+(\cos\alpha)^2$

Entonces= $1^2=\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha$

Como pudimos observar, las cantidades anteriores están en función de seno y coseno.

Si a $1 = \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha$, la dividimos entre $\operatorname{sen}^2\alpha$ tenemos:

$1 / \operatorname{sen}^2\alpha = (\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha) / \operatorname{sen}^2\alpha$

por lo tanto

$1 / \operatorname{sen}^2\alpha = \operatorname{sen}^2\alpha / \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha / \operatorname{sen}^2\alpha$

Ahora trataremos de buscar equivalencias con las anteriores identidades a manera de escribir una sola función por cada cociente.

Localicemos la equivalencia de $1 / \operatorname{sen}^2\alpha$, en las identidades recíprocas tenemos:

$\csc \alpha = 1 / \operatorname{sen} \alpha$

elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad:

$(\csc \alpha)^2 = (1 / \operatorname{sen} \alpha)^2$

$\csc^2\alpha = 1 / \operatorname{sen}^2\alpha$

$\operatorname{sen}^2\alpha / \operatorname{sen}^2\alpha = 1$

y en las identidades por cociente:

$\cot \alpha = \cos \alpha / \operatorname{sen} \alpha$

elevamos al cuadrado:

$(\cot \alpha)^2 = (\cos \alpha / \operatorname{sen} \alpha)^2$

y

$\cot^2\alpha = \cos^2\alpha / \operatorname{sen}^2\alpha$

Sustituyendo en

$1 / \operatorname{sen}^2\alpha = \operatorname{sen}^2\alpha / \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha / \operatorname{sen}^2\alpha$

resulta:

$\csc^2\alpha = 1 + \cot^2\alpha$

Ahora, si $1^2 = \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha$ lo dividimos entre $\cos^2\alpha$:

$1 / \cos^2\alpha = (\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha) / \cos^2\alpha$

$1 / \cos^2\alpha = \operatorname{sen}^2\alpha / \cos^2\alpha + \cos^2\alpha / \cos^2\alpha$

Análogamente a la identidad anterior tenemos:

$1 / \cos^2\alpha = \operatorname{sen}^2\alpha / \cos^2\alpha + 1$

Sustituyendo por las identidades obtendremos:

$\sec^2\alpha = \tan^2\alpha + 1$

Ejemplo:

Sea θ un ángulo tal que su sen $\theta = 5/8$. Mediante el uso de identidades trigonométricas encuentra cos θ y tan θ.

Solución:

Usamos la identidad Pitagórica:

$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

Sustituimos 5/8 por sen θ:

$(5/8)^2 + \cos^2\theta = 1$

$\cos^2\theta = 1 - 25/64 = \sqrt{39}/\sqrt{64}$

$\cos\theta = \sqrt{39} / 8$

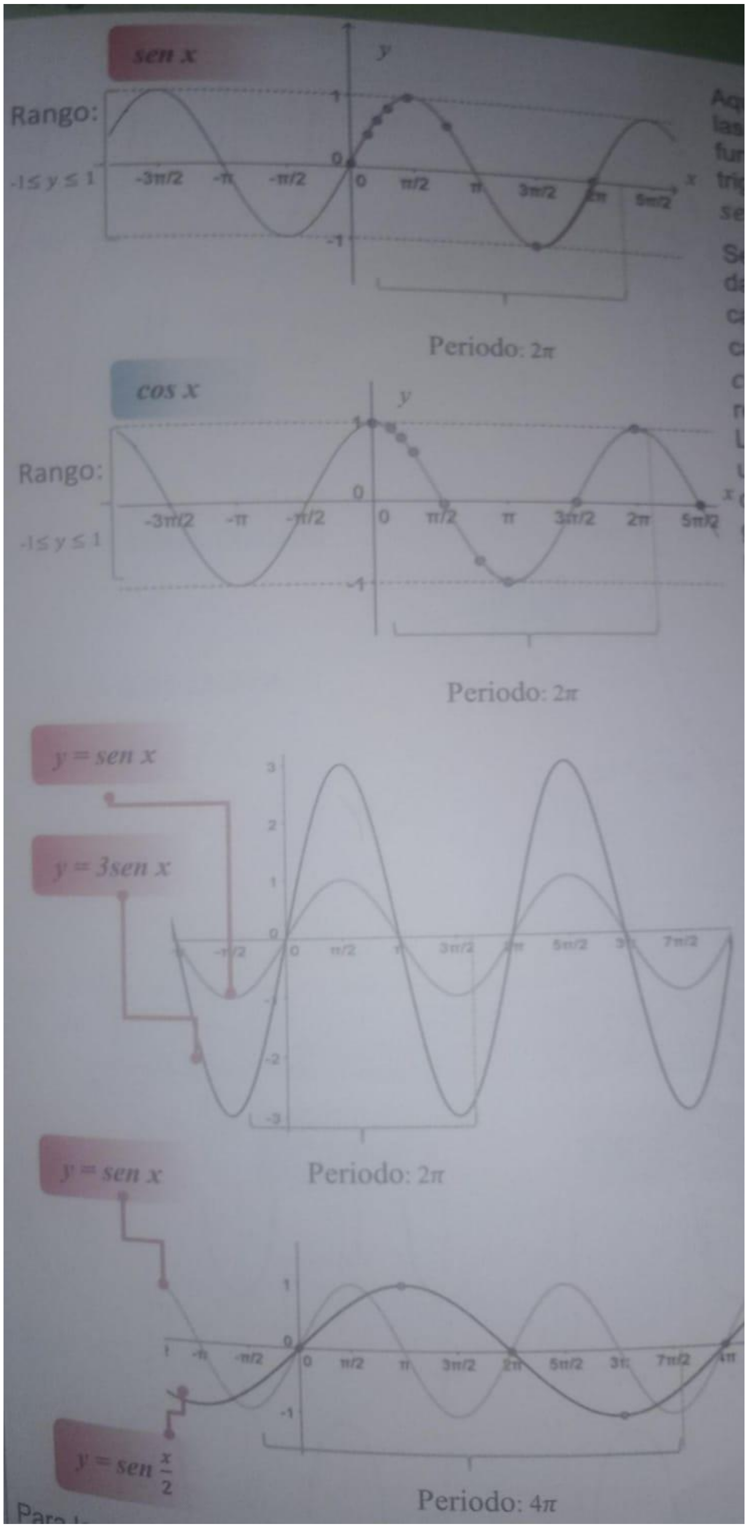
Usando la identidad trigonométrica encontramos tan θ:

$\tan\theta = \text{sen}\,\theta / \cos\theta = 5/8 \div -\sqrt{39}/8 = 5/\sqrt{39} \approx 0.80$

Si quieres encontrar el ángulo debes buscar la condición inversa.

TIP: Para convertir el ángulo 38.682 en grados, minutos y segundos (° ' "), tomaremos los decimales: $0.682 \cdot 60 = 40.92$, multiplicamos $0.92 \cdot 60 = 55$. El ángulo 38°40'55" será.

Utiliza la calculadora, escribe 0.8, oprime las teclas Inv (inverso), después $\tan^{-1}$. El resultado es 38.682° = 38°40'55".



Aquí se muestran las gráficas de las funciones

trigonométricas del sen y cos.

Se pueden obtener dando diferentes cantidades de x y calculando senx o COS X

respectivamente.

Los datos anotar en una tabla y después dibujar los gráficos en un plano cartesiano.

Obsérvalos comenta diferencias. y las

Si se multiplica el sen por un número positivo, la gráfica tendrá la forma como en el ejemplo que se muestra a la izquierda

y = 3senx.

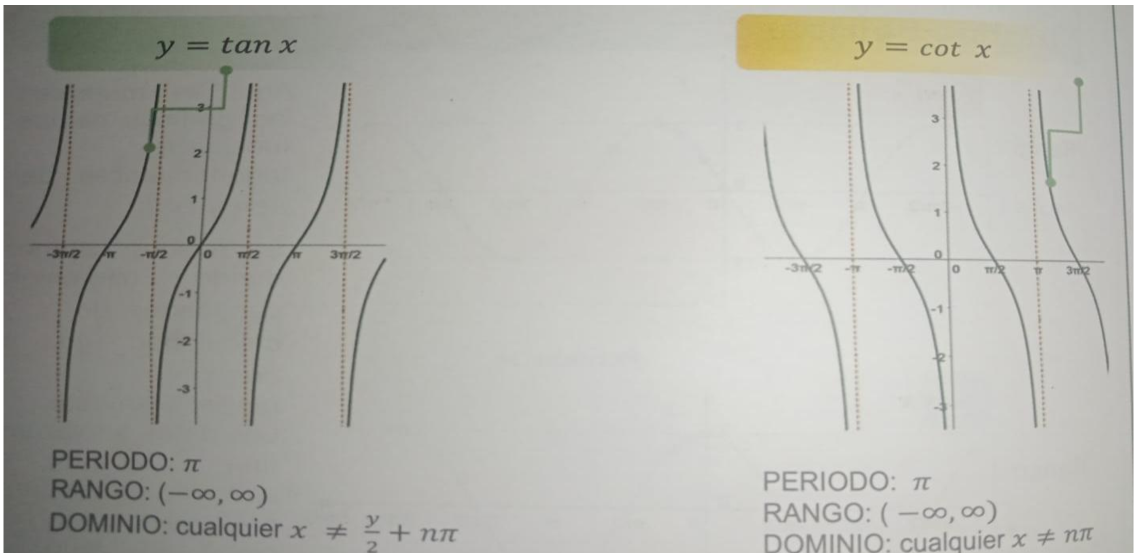
Como puedes ver el período se queda igual y la amplitud aumenta.

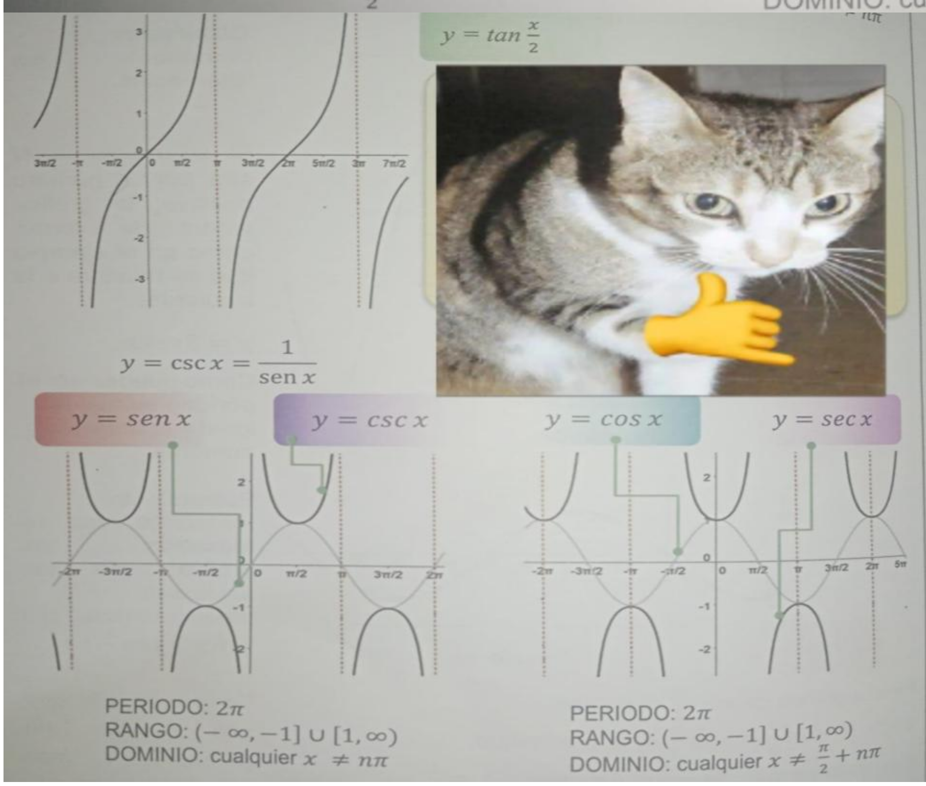
Estiramiento Horizontal Aquí se muestran gráficas funciones las de las trigonométricas del senx y sen x/2

Se puede ver que sen x/2 periodo tiene un más grande que sen x.

Para la gráfica de sen x/2 tenemos si x = π sen x/2= sen π/2= 1-amplitud el periodo será 2π /b 2π/ 1/ 2 = 4π, donde b = 1/ 2 =Observa las gráficas y comenta las diferencias.

Graficas de las otras funciones trigonométricas.





Ecuaciones trigonométricas

Una ecuación trigonométrica es una igualdad entre dos expresiones trigonométricas en las que aparecen valores conocidos (los datos) y las incógnitas relacionados mediante operaciones matemáticas.

Ejemplo

1.El numero de horas de luz al día D(t) en una época particular del año se puede aproximar mediante:

$$D(t) = \frac{k}{2}\, sen\left[\frac{2\pi}{365}(t - 79)\right] + 12$$

En la que t esta en días y t = 0, corresponde al día 1 de enero. La constante k determina la variación total de la duración de la claridad diurna y depende de la latitud de la localidad. Por ejemplo: Para CDMX k = 7

$$D(t) = \frac{k}{2}\, sen\left[\frac{2\pi}{365}(0 - 79)\right] + 12$$

$$= 3.5 sen(-1.36) + 12$$

$$= 3.5 sen(-77°55'19") + 12$$

$$= 3.5(-0.9778) + 12$$

$$= -3.42 + 12 = 8.58$$

Respuesta: $D(0) = 8.58$ *horas de luz*

La expresión anterior es una igualdad que contiene una función trigonométrica que solo se satisface para un determinado valor o valores del ángulo, la expresión se llama ECUACIÓN

TRIGONOMÉTRICA. Las ecuaciones trigonométricas pueden tener más de una función trigonométrica. Ejemplos

$$5tanx - 15 = 0, tanx = \frac{15}{5}, tanx = 3;$$

$$2\text{sen}^2\text{A} - 4senA = 0, \text{sen}^2x - 2sen\,x = 0;$$

$$2\cos^2\theta - 1 = 0\ , cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

En cambio, una identidad trigonométrica que también es una igualdad algebraica entre funciones de un mismo ángulo se verifica para cualquier valor que se atribuya a dicho ángulo.

En la solución de ecuaciones trigonométricas aplicamos los mismos métodos estudiados en álgebra.

Triángulos oblicuángulos

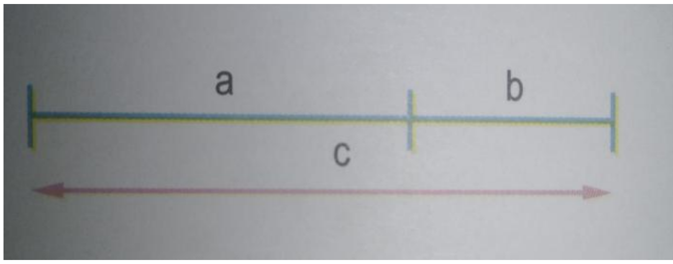
Nuevamente retomamos el tema de los triángulos, en esta ocasión trataremos triángulos, oblicuángulos y como recordarás, los triángulos oblicuángulos formados por los triángulos acutángulos y los obtusángulos, que al igual que el caso del triángulo rectángulo visto en forma particular, el objetivo es la determinación de los elementos de los cuales consta el triángulo como son tres lados y tres ángulos conociendo algunos de ellos.

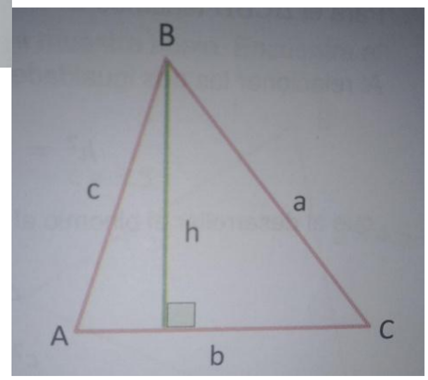
Este conocimiento previo es consecuencia directa de los criterios de la congruencia de triángulos.

Dado que la resolución de los triángulos de la trigonometría se efectúa a través del método analítico, es necesario tener presente lo siguiente:

Si a, b y c son las longitudes de los lados de un triángulo, en donde c es el lado mayor, entonces se tiene $c < a + b$.

En efecto, si la suma de las longitudes de los dos lados más cortos fuese, por ejemplo, del mismo tamaño que c, significaría que los puntos correspondientes vértices son *colineales*, por lo que no se formaría triángulo alguno.





Compara esto con la situación de un triángulo:

La resolución de triángulos oblicuángulos

se divide en tres casos, dependiendo de los

elementos que se conozcan de antemano.

CASO (LLL): Se conocen las longitudes de sus tres lados.

CASO (LAL): Se conocen dos lados del triángulo y el ángulo formado por ellos.

CASO (ALA): Se conocen dos ángulos y un lado del triángulo.

La determinación de los elementos restantes se logrará a través de dos Teoremas:

TEOREMA I. "LEY DE COSENOS"

Considera el triángulo ABC, se verifica que:

$a^2b^2+c^2$ 2bc cos A

DEMOSTRACIÓN:

Sea h la altura que va de B al segmento AC. De esta manera, se forman dos triángulos: Δ ABH У ΔBHC.

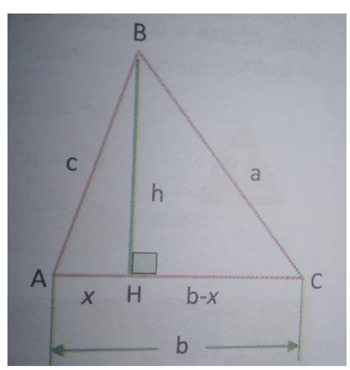
Observa que los catetos son:

Para el ΔABH: x, h

Para el ΔCBH: h, b - x

De manera que AC = b = x + (b-x)

De esta manera, el Teorema de Pitágoras



aplicado a cada triángulo nos lleva a las

siguientes igualdades:

Para el ΔABH tenemos:

$c^2 = h^2 + x^2$ o bien $h^2 = c^2 - x^2$

Para el ΔCBH tenemos:

$a^2 = (b - x)^2 + h^2$ o bien $h^2 = a^2 (b - x)^2$

Al relacionar las dos igualdades anteriores se verifica:

$h^2 = c^2 - x^2 = a^2 - (b - x)^2$

Que al desarrollar el binomio al cuadrado se transforma en:

$c^2 - x^2 = a^2 - [b^2 - 2bx + x^2]$

Después de efectuar reducciones de términos semejantes y reacomodando los términos se llega a:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bx$

Del triángulo ΔABH tenemos:

$\cos A = x/c$ o bien $c (\cos A) = x$

Que al sustituir esta relación en la anterior se llega finalmente a:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

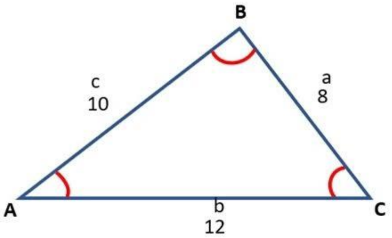
Lo que demuestra el Teorema. De modo que la relación anterior puede generalizarse a cualquiera de los ángulos interiores del triángulo, tal como se ilustra:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \text{ -------- } (1)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \text{ --------- } (2)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \text{ ---------- } (3)$$

Ejemplo:



Para hallar ángulos

$$\text{Cos A} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$\text{Cos B} = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

$$\text{Cos C} = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$\text{Cos A} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$\text{Cos A} = \frac{(12)^2+(10)^2-(8)^2}{2(12)(10)}$$

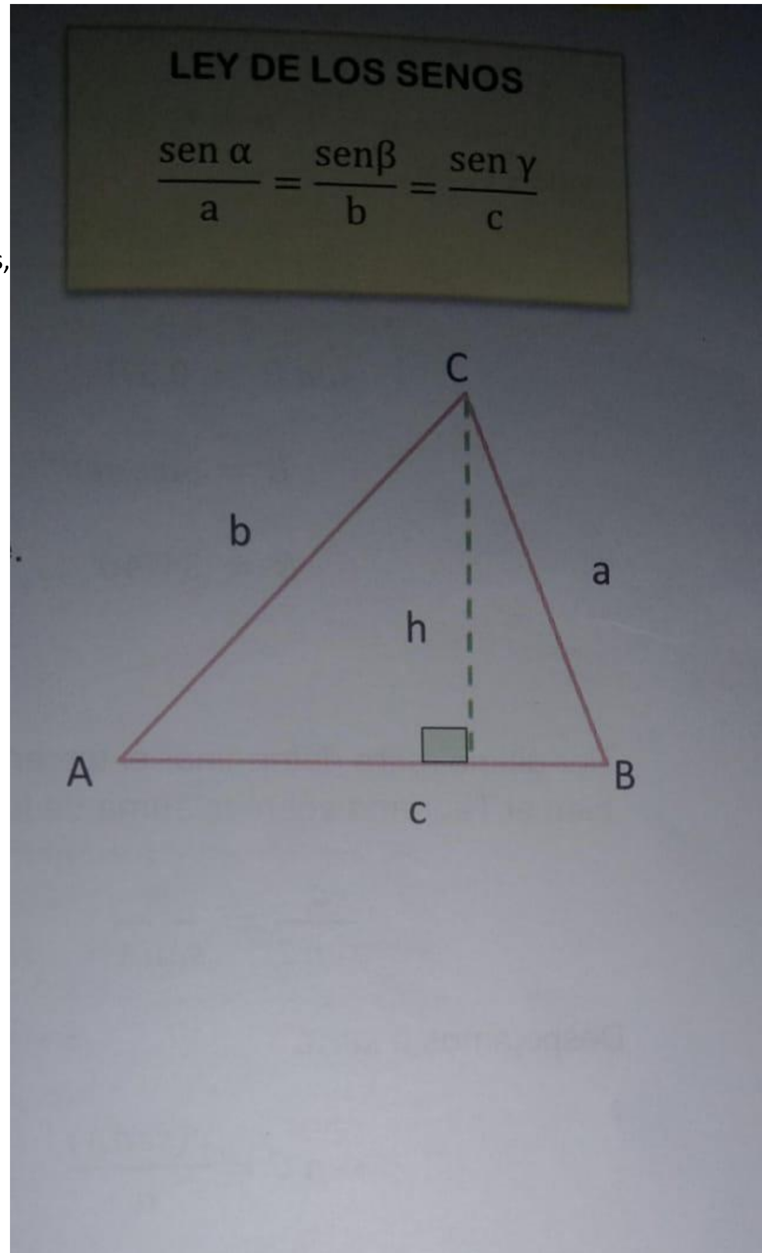
$$\text{Cos A} = \frac{144+100-64}{240}$$

$$\text{Cos A} = \frac{180}{240}$$

$$\text{Cos A} = 0{,}75$$

$$A = cos^{-1}(0{,}75)$$

Teorema II ley de senos



Demostración:

De acuerdo a la figura del triángulo oblicuángulo y

recordando que la altura forma triángulos rectángulos,

tenemos:

sen A = h / b y sen B = h / a

Despejando h, donde se obtiene:

b sen A = h y a sen B = h

Al igualar las alturas (h), obtenemos:

a sen B = b sen A

Por lo tanto:

a / sen A = b / sen B .... (1)

Tomemos otra de las alturas del ΔABC, como se

observa en la figura.

Análogamente tenemos:

sen B = h / c y sen C = h / b

Despejando e igualando h, se obtiene:

b sen C = c sen B

Por lo tanto:

b / sen B = c / sen C .... (2)

Para determinar los ángulos restantes usaremos la Ley de senos que permite mayor facilidad de cálculo.

Recuerda:

b / sen B = a / sen A

Despejamos a sen B:

sen B = (bsenA) / a

Si tenemos b = 4, a = 6, ∠A = 86° 25', entonces sustituimos los valores:

sen B = (4sen 86° 25') / 7

sen B = 0.5703

B = Arc sen^{-1} 0.5703

B = 34° 46'

Por último, para determinar el tercer ángulo utilizaremos la Ley de senos o bien el Teorema sobre la suma de los ángulos interiores de los triángulos.

c / sen C = a / sen A

Despejamos a sen C:

sen C = c(senA) / a

Sustituimos los valores:

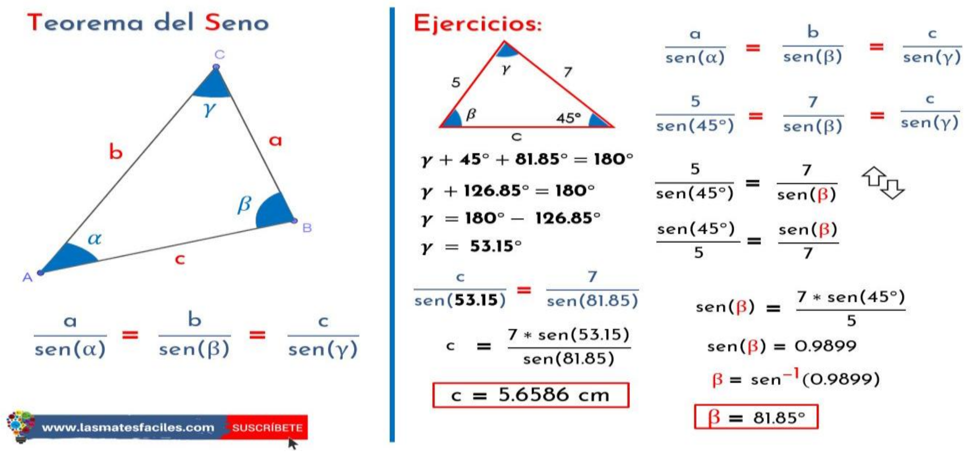
sen C = (6 sen 86° 25') / 7

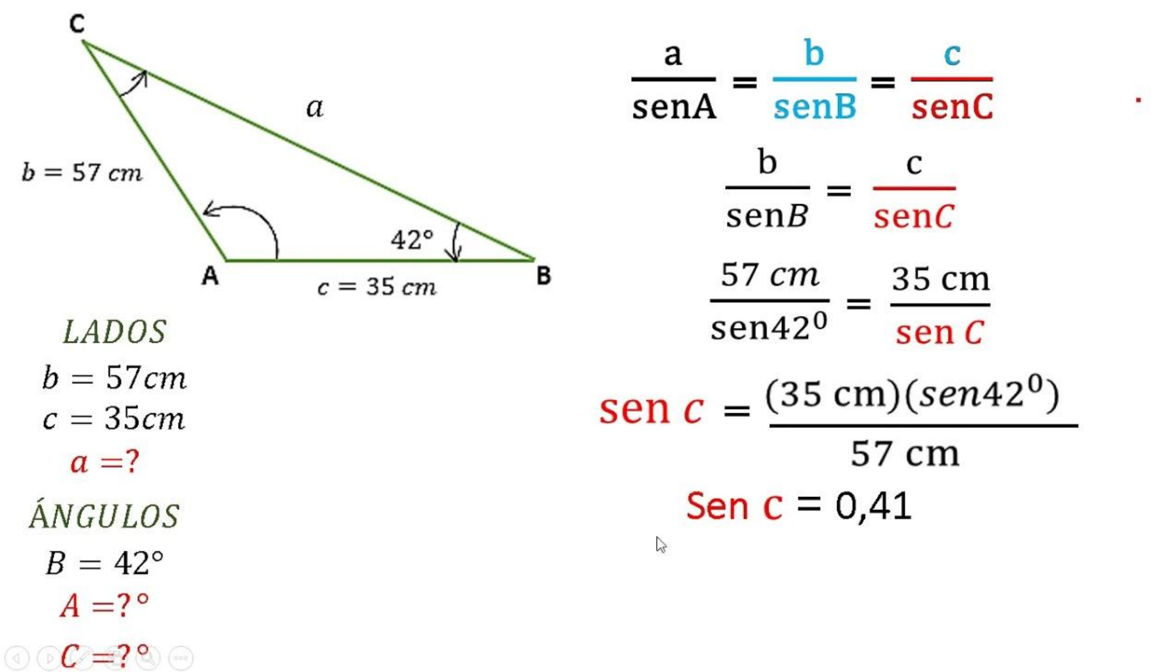
sen C = 0.8555

C = Arc sen^{-1} 0.8555

C = 58° 48'

Ejemplos:





IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS DE SUMA Y RESTA DE DOS ÁNGULOS; DE ÁNGULOS DOBLES Y MEDIA ÁNGULOS

Tenemos el siguiente resultado de los teoremas relacionados con dos ángulos. Si α y ß son dos ángulos cualquiera, entonces siguen las diferentes fórmulas:

Fórmulas de suma y resta:

$$\text{sen}\,(a+\beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\,\beta + \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta$$

$$\text{sen}\,(\alpha-\beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\,\beta - \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta$$

$$\cos\,(\alpha+\beta) = \cos\,\alpha\cos\,\beta - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta$$

$$\cos\,(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\,\beta + \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta$$

$$\tan\,(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan\,(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\cot\,(\alpha+\beta) = \frac{\cot\alpha\cot\beta-1}{\cot+\cot\beta}$$

$$\cot(\alpha-\beta) == \frac{\cot\alpha\cot\beta+1}{\cot\beta-\cot\alpha}$$

Fórmulas de ángulos dobles:

$$\text{sen}\,2\alpha = 2\,\text{sen}\,\alpha\cdot\cos\alpha$$

$$\cos\,2\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$$

$$\cos\,2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\cos\,2\alpha = 1 - 2\text{sen}^2\alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

$$\cot\,2\alpha = \frac{\cot^2\alpha+1}{2\cot\alpha}$$

Fórmulas de medios ángulos:

$$\text{sen}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\,\alpha}{2}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\,\alpha}{2}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\,\alpha}{1+\cos\,\alpha}}$$

$$\cot\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\,\alpha}{1-\cos\,\alpha}}$$

El signo + o – depende del cuadrante del ángulo.

lo que se utiliza en la resolución de muchos problemas.

Ejemplos

1) Dada las funciones: sen a = $\frac{1}{4}$ y $\cos b = \frac{3}{4}$. Hallar sen (a + b)

sen (a + b) = sen a . cos b + cos a . sen b

$$\text{sen}(a+b) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{15}}{4} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\text{sen}(a+b) = \frac{3}{16} + \frac{\sqrt{105}}{16}$$

$$\mathbf{sen\ (a+b) =} \ \frac{3+\sqrt{105}}{16}$$

C.A. 1

$$\text{sen } b = \sqrt{1-\cos^2 b}$$

$$\text{sen } b = \sqrt{1-(\tfrac{3}{4})^2}$$

$$\text{sen } b = \sqrt{\frac{7}{16}}$$

$$\mathbf{sen\ b =} \ \frac{\sqrt{7}}{4}$$

C.A. 2

$$\cos a = \sqrt{1-\text{sen}^2 a}$$

$$\cos a = \sqrt{1-(\tfrac{1}{4})^2}$$

$$\cos a = \sqrt{\frac{15}{16}}$$

$$\mathbf{cos\ a =} \ \frac{\sqrt{15}}{4}$$