Instituto Politécnico Nacional

Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos #3

"Estanislao Ramírez Ruiz"

Página Web (Proyecto Aula)

Trigonometría y geometría

Primer parcial

Índice

¿Qué es una función?

Observamos que elemento del conjunto “A” le corresponde un elemento del conjunto “B”.

Al conjunto “A” se le llama DOMINIO y al conjunto “B” se le llama IMAGEN o CONTRADICTORIO.

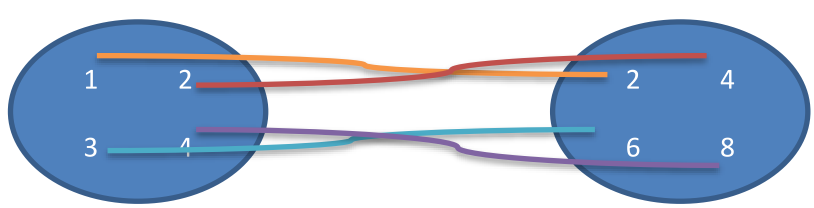
El **dominio** es el conjunto de valores que entran en una función.

El **contradictorio** es lo que posiblemente podría salir de una función.

El **rango** es el conjunto de valores que van saliendo

Ahora analicemos el ejemplo siguiente:

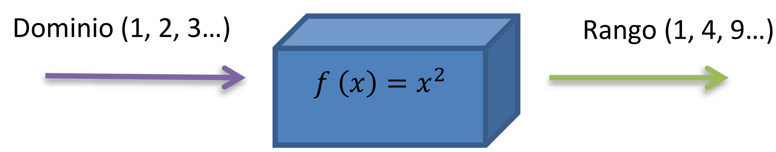
Si el conjunto de A contiene los cuatro primeros números naturales, y el conjunto B contiene los duplos de dichos números, esto es:



A la relación de correspondencia en la cual se señala un criterio para saber que A es igual a B, lo cual se llama función y se simboliza:

$f\colon \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}$ o bien $A \ \rightarrow B$

Ejemplo: Una simple función como $f\ (x) = x^2$ puede tener el dominio de sólo los números naturales (1,2, 3…), y el rango será el conjunto (1, 4, 9…)



Ejercicios:

Calcula las siguientes funciones, sacando los primeros 6 números:

1) $f\ (x) = 8^2$
2) $f\ (x) = 4^2$
3) $f\ (x) = 9^2$
4) $f\ (x) = 3^2$
5) $f\ (x) = 10^2$

Función

Una función es una regla de correspondencia o relación entre dos conjuntos:

Ejemplo de la expresión y = x^2

Función Exponencial

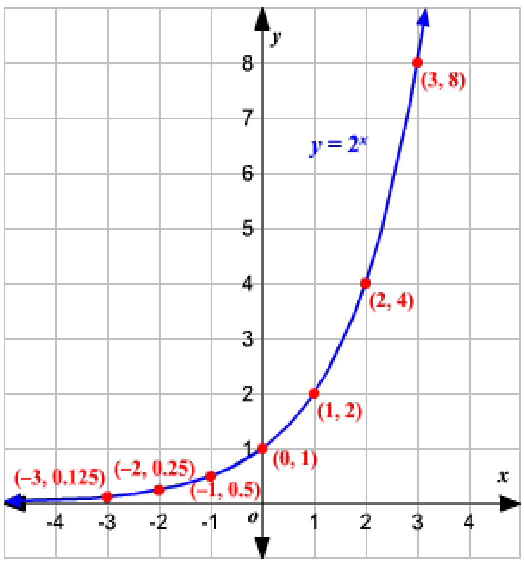
Una función exponencial $f(x)$ con base "a" se expresa por $f(x) = a^x$ donde "a"> 0, "a" $\neq$ 1 y x es cualquier número real.

La base "a" = 1 se excluye, produce $f\ (x) = 1^x$ que es una función constante, no una función exponencial.

Una función exponencial natural es la función $f(x) = e^x$ con base "e" donde "x" es cualquier número real y "e" es el número aproximadamente 2,718281828.

$$y = f(x)$$

Ejemplo gráfico de una función exponencial:



Ejercicios:

Grafica la siguiente función, tomando en cuenta que x vale 1, 2, 3, 4 y 5:

1) $f\ (x) = 9^x$

Función logarítmica

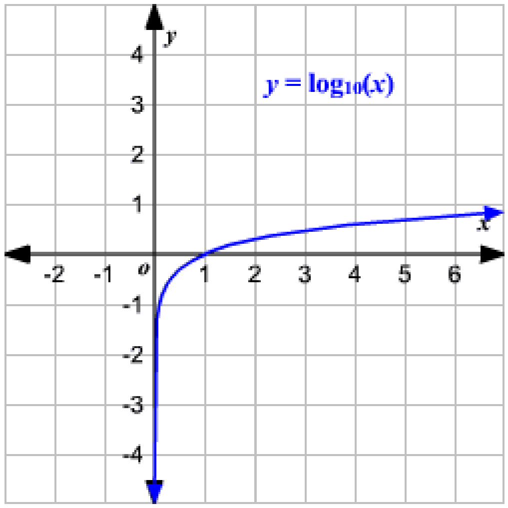
Usamos el concepto de logaritmo para introducir una nueva función cuyo dominio es el conjunto de los números reales positivos.

La función f definida como:

$$f(x) = \log_a x$$

Para todo número real positivo "x" se llama función LOGARÍTMICA de base "a".

Ejemplo grafico de una función logarítmica:



Ejercicios:

Grafica la siguiente función logarítmica, tomando en cuenta que x vale 1, 2, 3, 4 y 5:

1) $f\ (x) = \log_{10} x$

Relación entre funciones exponenciales y logarítmicas

Las ecuaciones "$y = \log_a x$" y "$x = a^y$" son equivalentes. La primera se llama forma logarítmica y la segunda—exponencial.

Ahora nos familiarizaremos más con los logaritmos

Retomando la función: $f(x) = b^L$ si $b > L$

Tenemos que, al darle valores positivos a "L" siempre obtenemos un número real tan que:

$$b^L = N$$

Si "N" es cualquier número real positivo, entonces e exponente (único) "L" tal que:

$$L = \log_b N$$

Es conveniente mostrar la relación que existe entre las formas:

$$b^L = N \qquad \text{y} \qquad \log_b N = L$$

Como ya saben a la primera $b^L = N$ se le denomina FORMA EXPONENCIAL

Y la segunda $\log_b N = L$ se le llama FORMA LOGARITMICA

Propiedades de funciones exponenciales y logarítmicas

Leyes de los exponentes

$a^x a^y = a^{x+y}$

$(ab)^x = a^x b^x$

$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

$(a^x)^y = a^{xy}$

$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

Ejercicios:

Resuelve los siguientes ejercicios usando la ley de los exponentes:

1) $5^3 5^7 =$
2) $\frac{7^6}{7^9} =$
3) $(4 * 6)^7 =$

Propiedades de los logaritmos

Cambio de Base

La mayoría de las calculadoras tienen sólo dos tipos de claves iniciales, una para logaritmos comunes (base 10) y una para logaritmos naturales (base e). Aunque los logaritmos comunes y los logaritmos naturales son los más frecuentemente usados, a veces puedes evaluar logaritmos con otras bases.

Fórmula

Deja que "a", "b" y "x" sean números reales positivos de tal manera que $a \neq 1$ y $b \neq 1$. Entonces, $\log_a x$ puede ser convertida a una base diferente del siguiente modo:

Base b

$\boldsymbol{\log_a x} = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

Base 10

$\boldsymbol{\log_a x} = \frac{\log x}{\log a}$

Base *e*

$\boldsymbol{\log_a x} = \frac{\ln x}{\ln a}$

Ejercicios:

Resuelve los siguientes logaritmos usando el cambio de base:

$\mathbf{log_8 6} =$ (Cambio de base b)

$\mathbf{log_4 9} =$ (Cambio de base 10)

Leyes de los logaritmos

I. $\log_a(uw) = \log_a u + \log_a w$
II. $\log_a(\frac{u}{w}) = \log_a u + \log_a w$
III. $\log_a(u)^c = c \log_a u$, para todo número real "c"

Estas propiedades también son válidas para los logaritmos naturales (In)

$\mathrm{In}_a(uw) = \mathrm{In}_a u + \mathrm{In}_a w$

$\mathrm{In}_a(\frac{u}{w}) = \mathrm{In}_a u + \mathrm{In}_a w$

$\mathrm{In}_a(u)^c = c\, \mathrm{In}_a u$

Ejercicios:

Resuelve los siguientes logaritmos usando la ley de logaritmos:

1) $\mathbf{log_9 4 + log_9 7} =$
2) $\mathbf{6 \log_7 5} =$
3) $\mathbf{\log_8 \frac{6}{3}} =$
4)

Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

En ciertas ecuaciones, las variables aparecen como exponentes o como logaritmos, éstas son las ecuaciones exponenciales o logarítmicas.

Existen varias estrategias básicas para la resolución básicas para la resolución entre los logaritmos y las exponentes: $\log_a x = b$ entonces $a^b = x$. Otra en las propiedades uno a uno que se muestran a la izquierda y se utiliza para resolver simples ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

Otra estrategia se basas en las propiedades inversas que se muestran a la izquierda que para a > 0 y $a \neq 1$ son ciertas para toda la “x” y para las cuales $\log_a x$ y $\log_a y$ son definidas.

Ejemplo: Resuelve la ecuación $3^x = 21$

Tomemos el logaritmo de ambos lados de la igualdad

$$\log 3^x = \log 21$$

Apliquemos la propiedad de los logaritmos

$$\mathrm{x}\log 3 = \log 21$$

Despejamos la incógnita

$$x = \frac{\log 21}{\log 3}$$

$$x = \frac{1.3222}{0.4777}$$

$$x = 2.77$$

Ejercicio:

Resuelve la siguiente ecuación, siguiendo los pasos del ejemplo anterior:

$4^8 = 19$

Modelos de crecimiento y decaimiento exponencial

Fórmulas de:

Crecimiento

$A(t) = \mathrm{A}_2\, e^{kt}$

Decaimiento

$A(t) = \mathrm{A}_0\, e^{kt}$

en donde:

t: tiempo

A(t): Cantidad final

Ao: Cantidad inicial

K: La taza

e = Exponencial (2.71828…)

Ejercicios:

Calcula el crecimiento y decaimiento de los siguientes problemas:

La población del mundo en el año 1996 era 6,700 millones y la tasa de crecimiento relativa es de 2% anual. ¿Cuándo alcanzara 67 millones de personas?

Un restaurante sirvió a 5000 clientes el lunes. Hubo una inspección sanitaria y el restaurante obtuvo una baja puntuación, por lo que el martes el restaurante sirvió a 2500 clientes. El miércoles, el restaurante sirvió a 1250 clientes y el jueves sirvió solo a 625 clientes.

¿Cuántos clientes tendrán después de cinco días empezando el lunes?