



INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL



Centro de Estudios Científicos y  
Tecnológicos # 4

“LÁZARO CÁRDENAS”

## **Guía de Estudio**

para preparar el Examen Extraordinario – ETS

De

## **GEOMETRÍA Y TRIGONOMETRÍA**

Basado en el Programa de Estudios de  
la unidad de Aprendizaje.

Para alumnos de SEGUNDO Semestre.

Turno Matutino

Junio 2020

## Presentación.

Esta Guía de Estudio tiene como objetivo principal que el alumno pueda prepararse para su examen extraordinario-ets de Geometría y Trigonometría, además si el alumno no cubrió los contenidos completos de la materia, sea un auxiliar en su nivelación para poder continuar en el aprendizaje de las matemáticas al cursar el cuarto y quinto semestre. Esta materia consta de tres unidades.

Unidad 1. Funciones Exponenciales y Logarítmicas.

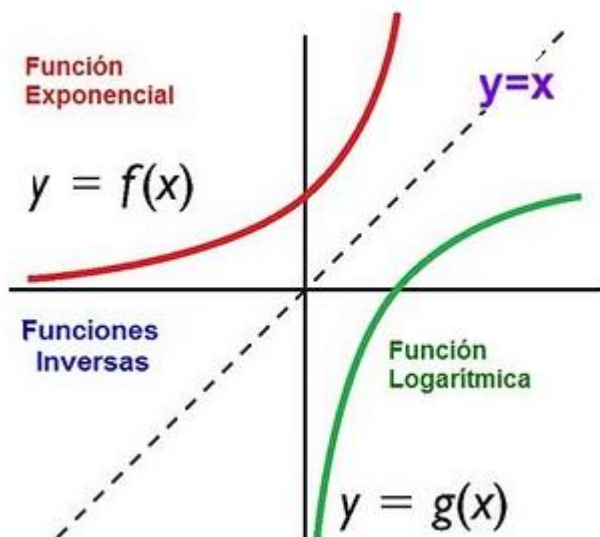
Unidad 2. Geometría Euclidiana.

Unidad 3. Trigonometría.

## UNIDAD 1 FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS

### Propósito:

Estudiar estas funciones trascendentes, cuya forma peculiar de variación permite modelar de crecimiento y decaimiento. Introducir la noción de función inversa. Reforzar la identificación de dominio y rango, así como la relación entre parámetros



### Crecimiento exponencial

#### Objetivo:

Identificar el crecimiento exponencial y sus relaciones o condiciones existentes y analizar la forma en que varían los valores de la función.

Instrucciones:

Llena los espacios y contesta todas las preguntas, más adelante encontraras las respuestas para verificarlas.

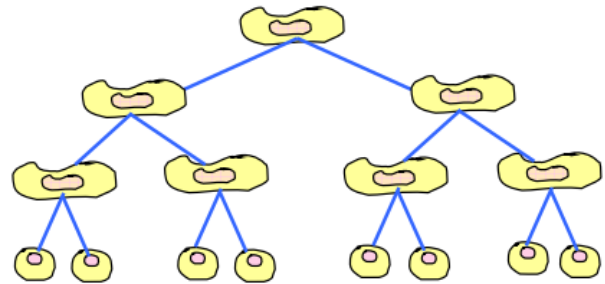
### El caso de las bacterias.

La bacteria al reproducirse se alarga y se estrecha por el centro para finalmente dividirse produciendo dos bacterias similares, como se muestra en la figura.

Este proceso va unido a una velocidad de reproducción muy grande: cada hora se tiene la división en dos y en pocas horas se tiene una población numerosa.

¿Qué tan Numerosa?

Veamos cuanto completando la siguiente tabla:



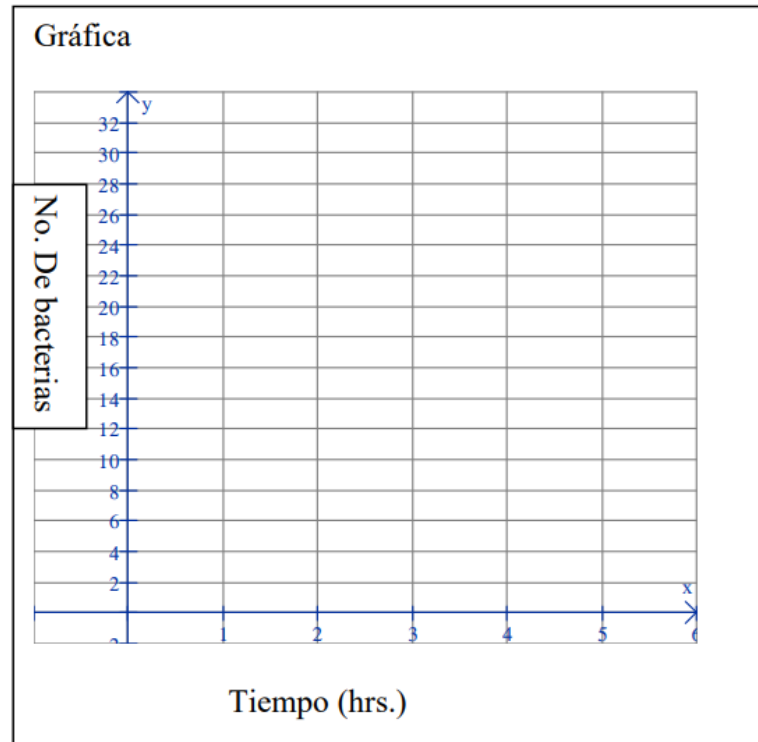
X TIEMPO (EN HORAS)	NUMERO DE BACTERIAS
0	$1 = 2^0$
1	$2 = 2^1$
2	$4 = 2^2$
3	$8 = 2^3$
4	$16 = 2^4$
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
:	:
X	$2^x$

Si traducimos el esquema numérico de la tabla anterior a símbolos algebraicos, descubriremos el modelo matemático que representa el crecimiento de las bacterias.

Escribe en símbolos algebraicos el modelo matemático del crecimiento poblacional de las bacterias.

$$y = \text{-----}$$

Haz la gráfica de los puntos:



Las bacterias crecen en forma exponencial, por lo que se dice que  $y$  es una función exponencial de  $x$ .

$$y = 2^x$$

Une los puntos con una curva e identifica la forma de las funciones exponenciales.

**Nota:** El unir los puntos permite obtener la forma de la función exponencial, pero en el caso de la reproducción de bacterias la variable de la función es discreta, es decir de puntos y saltos de uno a otro.

### Graficas de funciones exponenciales

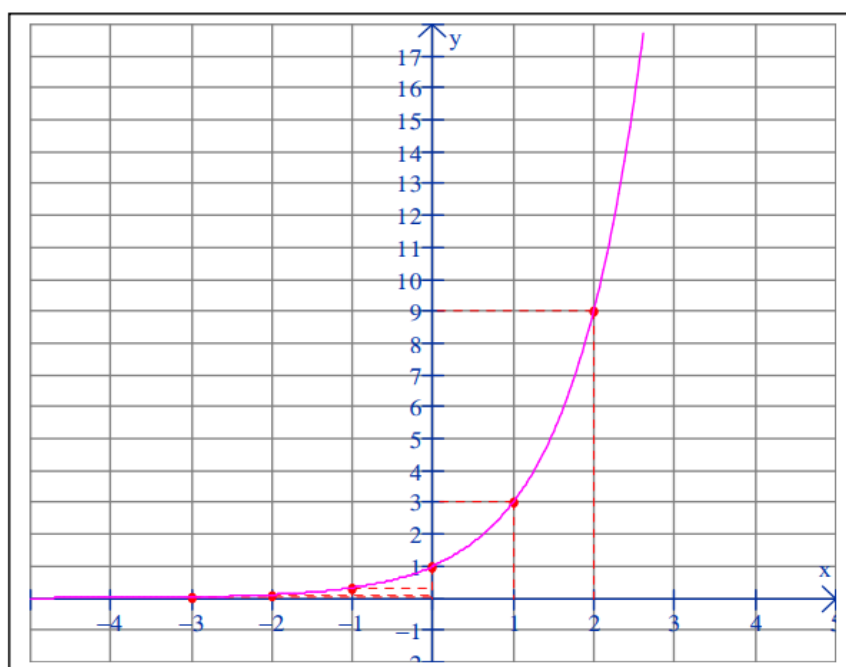
#### Objetivo:

Identificar las funciones exponenciales, la variable independiente está en el exponente. Identificar si las funciones son creciente o decreciente.

Completa la tabla de  $y = 3^x$  y verifica la gráfica y contesta lo que se pide.

$x$	$y = 3^x$
-----	-----------

-4	$y = \frac{1}{81}$
-3	
-2	
-1	$y = \frac{1}{3}$
0	
1	
2	
3	
4	
5	$y = 243$
6	



### Completa:

- que valores le podemos dar la variable independiente?
- ¿Cómo la gráfica sólo abarca la parte positiva, el valor de la variable dependiente es?
- ¿La gráfica es creciente o decreciente?
- ¿A la izquierda del eje y de la gráfica, la función crece rápido o lento?
- ¿A la derecha del eje y de la gráfica, la función crece rápido o lento?

2. Ahora grafica en el mismo plano cartesiano  $y = 4^x$ , usa los valores para  $x$  de -3, -2, -1, 0, 1, 1.5, 1.8 y 2

a) De acuerdo al análisis anterior, en que coinciden las gráficas.

3. De las siguientes funciones, sólo dos tienen las mismas características que las anteriores ¿Cuáles son?

- $y = (-3)^x$
- $y = 1^x$
- $y = (\frac{3}{2})^x$
- $y = (\frac{1}{3})^x$

De acuerdo a lo anterior, se obtiene que:

Una función exponencial con base  $b$  se define como una relación de la forma

$$y = b^x, \text{ donde } b \text{ es un número real, tal que } b > 0 \text{ y } b \neq 1$$

### Ejercicio 1.

Construye las gráficas de:

- $f(x) = (1/3)^x$
- $g(x) = 5^x$
- $h(x) = 2^{-x}$

### Ejercicio 2.

Sin graficar Anota "C" si la función es creciente o "D" si es decreciente.

- $f(x) = (1/4)^x$  ... .. ( )
- $g(x) = 3^x$  ... .. ( )
- $h(x) = e^x$  ... .. ( )
- $p(x) = 4^{-x}$  ... .. ( )

## Comparación de las funciones exponenciales con las funciones potencia.

Objetivo:

Comparar el comportamiento entre este tipo de funciones y obtener conclusiones.

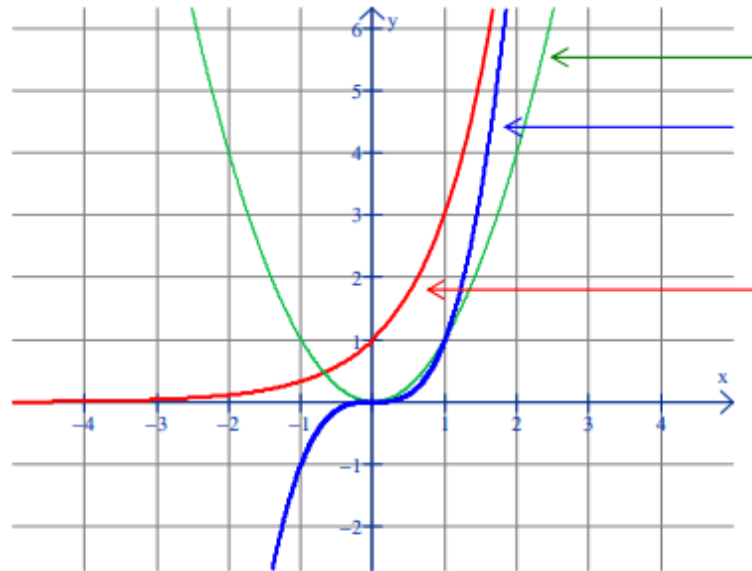
En el plano cartesiano están dibujadas las funciones:

a)  $g(x) = 3^x$

b)  $h(x) = x^2$

c)  $f(x) = x^3$

Identifica cada una de ellas, llena la tabla y contesta las preguntas.



Función	Valores que toma la	Valores que toma la	Abscisas Negativas	Abscisas Positivas
	Variable Dependiente	Variable Independiente	(Creciente o Decreciente)	(Creciente o decreciente)
	(DOMINIO)	(RANGO)		

$g(x) = 3^x$

$h(x) = x^2$

$f(x) = x^3$

1. A la derecha de y, ¿cuál función crece más rápido?

---

2. Para  $x = 5$ , ¿cuál función es mayor? \_\_\_\_\_

3. Escribe las diferencias entre la función exponencial y las funciones potencia \_\_\_\_\_

---

### Aplicaciones de las funciones exponenciales

#### Objetivo:

Aplicar las funciones exponenciales para modelar algunas situaciones en contextos diversos.

Muchas situaciones se pueden representar con una función exponencial, por ejemplo:

#### 1. Interés compuesto continuo.

$$A = A_0 e^{it}$$

Donde:

A es el monto total después de t años de una inversión (\$)

$A_0$  es el capital inicial ( \$ )

i es la tasa de interés en t años.

t es el tiempo que se aplica a la tasa de interés.

La misma fórmula nos sirve para describir el **crecimiento poblacional**, donde  $A_0$  es la población inicial e i la tasa de crecimiento.

#### 2. Desintegración radiactiva.

$$D(t) = m(1/2)^{t/t_0}$$

Donde:

m es la cantidad de material radiactivo al inicio.

$t_0$  es la vida media del material.

t es el tiempo de desintegración.

D es la cantidad que queda después de t tiempo.



### 3. Depreciación de Autos Usados

$$M = M_0(1 - i)^t$$

Donde:

$M_0$  es el valor del carro al momento de la compra.

$i$  es la tasa de depreciación mensual.

$t$  es el número de meses transcurridos.

$M$  es el precio del automóvil después de  $t$  años.

#### Ejercicio 1

El material radiactivo Estroncio 90 tiene una vida media de 28 años, es decir, cada 28 años la mitad de la cantidad de estroncio se transforma en otra sustancia debido a la desintegración radiactiva. Se coloca una barra que contenga 200mg de estroncio 90 en un reactor nuclear, sea  $D$  la cantidad de Estroncio que queda después de  $t$  años.

- ¿Cuál es la función exponencial que describe esta situación?
- ¿Cuánto material queda, después de 50 años?
- Con la ayuda de la calculadora obtén una aproximación de 2 dígitos, para obtener el tiempo que tiene que transcurrir para que queden 40mg de estroncio 90.

#### Ejercicio 2

Se invierten \$8000.00 a cuatro años en certificados que ganan 4% de interés compuesto a pagos continuos.

Emplea la fórmula

$$A = A_0 e^{it}$$

y obtén:

- La inversión después de 4 años.
- El tiempo para que duplique la inversión.

#### Ejercicio 3

Resuelve los siguientes problemas.

- Suponiendo que la vida media de un isótopo radiactivo es de 10 000 años  
¿Cuánto le tomará a esta sustancia decaer hasta 1/16 de su cantidad original?

2. Suponga que se invierten \$6 000 a tres años en certificados de depósitos que ganan 3% de interés compuesto a pagos continuos. Emplea la fórmula:  $A = Pe^{rt}$  y obtén:

- a) La inversión después de 3 años.
- b) El tiempo para que duplique la inversión.

3. Si México duplicará su población pasados 30 años.

- a) ¿Cuál es la tasa de crecimiento poblacional?
- b) Si hay 110 millones de habitantes en el país, ¿cuántos habrá, en 10 años más?

### Ejercicio 3

La leyenda del ajedrez.

“Cuentan los hombres dignos de fe (pero Alá sabe más), que el rey que recibió como regalo el juego del ajedrez de manos de su inventor, le ofreció las riquezas o placeres que él quisiera. A ello, el inventor le respondió que lo único que quería era lo siguiente: que pusiera un grano de trigo en la primera casilla del tablero; en la segunda que pusiera dos granos de trigo, y así sucesivamente, que en la siguiente casilla pusiera el doble de granos de trigo que en la casilla anterior. A lo que el rey respondió afirmativamente y gustoso. Acto seguido, ordenó a sus lacayos que le pusieran el trigo que el inventor demandaba mientras ambos se sentaban a comer. Poco tiempo después de terminar la comida, vino corriendo el contador real a darle la siguiente noticia: Querido rey, lo que el inventor demanda de trigo no puede ser satisfecho por la cosecha completa que tenemos actualmente; pero lo más grave, es que ni siquiera con las siguientes veinte cosechas de trigo de todo el reino se podría satisfacer aquella petición”.

Más o menos, ésta es la leyenda del ajedrez, descrita por *Malba Tahan* en el libro “*El hombre que calculaba*”. Ahora bien, contesta las siguientes preguntas:

**a. Escribe la expresión aritmética correspondiente a cada casilla.**

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16

17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
				$2^{28}$			
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

b. Completa la siguiente tabla.

Tabla 2. La leyenda del ajedrez		
# Casilla	Expresión aritmética	Número de granos de trigo
1	$2^0$	
2		
3		
4		
5		
6	$2^5$	32
7		
8		
9		
10		
15		
20		

25	$2^{24}$	16,777,216
30		
35		
40		
45		
50		
55		
56		
57		
58		
59		
60		
64		
<b>Suma Total de granos de trigo de las 64 casillas.</b>		

Nota: Consulta Internet para la suma total de granos de trigo de las 64 casillas.

c. ¿Cómo obtuviste el número de granos de la casilla # 64?

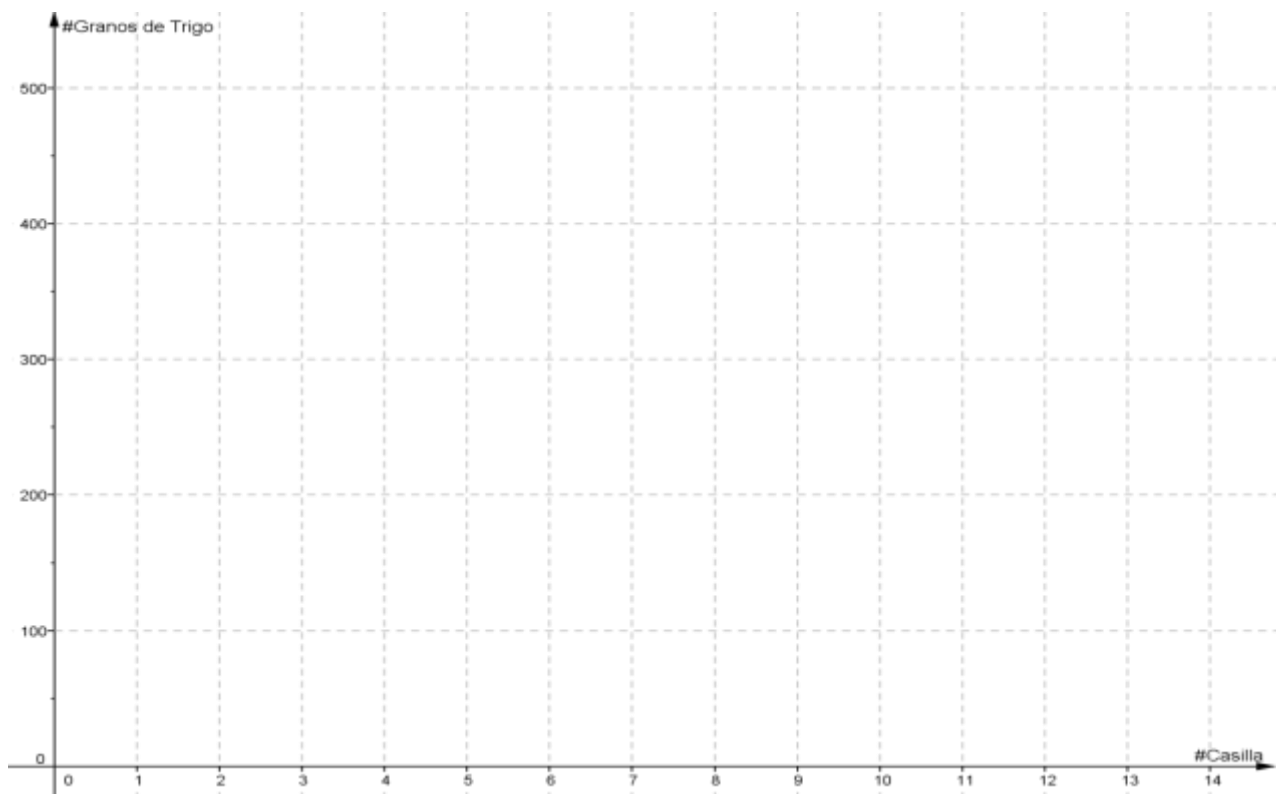
\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

d. Escribe la fórmula con la que se puede calcular el número de granos de trigo para cualquier casilla.

\_\_\_\_\_

e. Gráfica una muestra de parejas #casilla **vs** #granos de trigo (10 casillas) de la tabla 2.



#### Ejercicio 4

**El conejo y la zanahoria.** Un conejo intenta comerse una zanahoria de la siguiente manera. Primero se come la mitad de la zanahoria; después, la mitad de la mitad, y así sucesivamente. De esta manera, el conejo se va comiendo las siguientes proporciones de la zanahoria:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$$

En efecto, al principio se come la mitad de la zanahoria, en el segundo bocado, el conejo deberá comerse la mitad de la mitad, de manera que se come la cuarta parte. En el tercer bocado, el conejo deberá comerse la mitad de la cuarta parte de la zanahoria que queda, por lo que se come la octava parte y así *sucesivamente*.

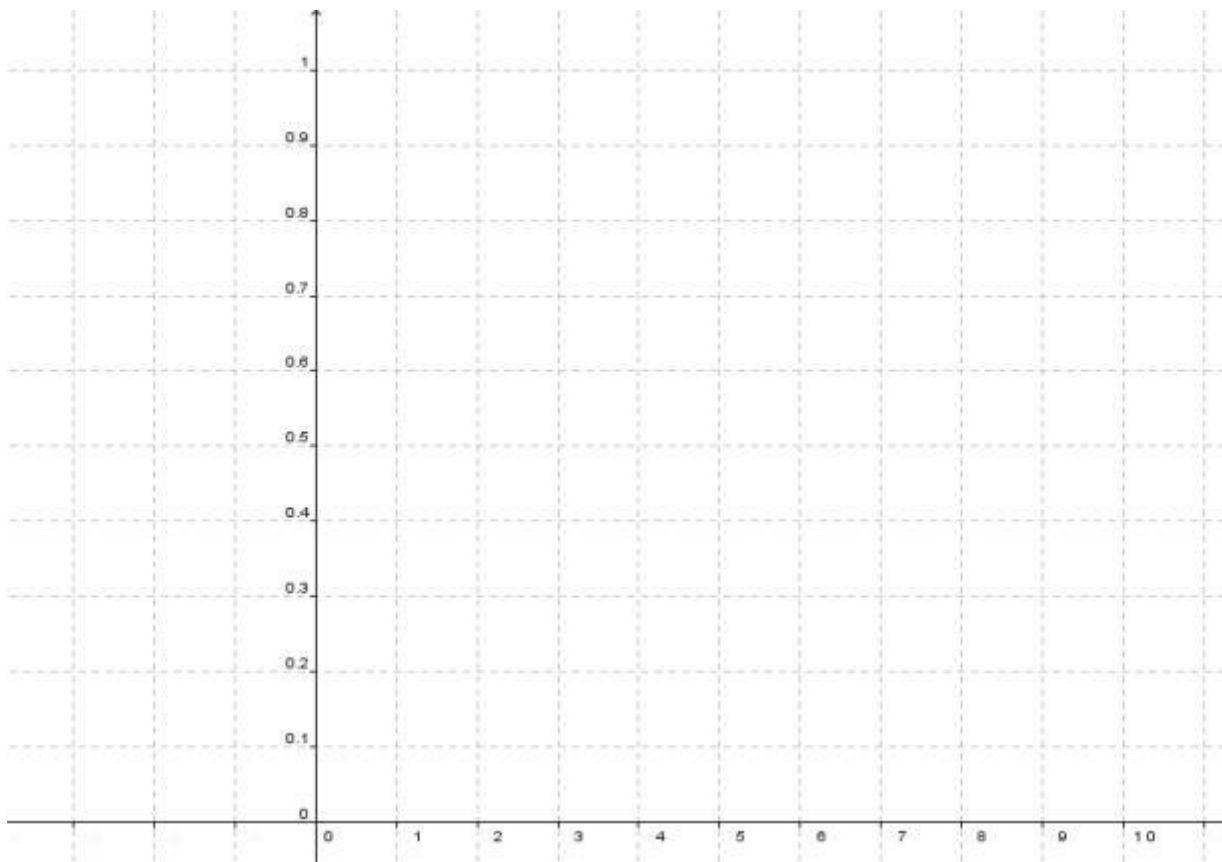
Como podemos observar, en cada nuevo bocado el conejo se come una parte más pequeña a la anterior.

- Se acabará la zanahoria el conejo? \_\_\_\_\_.
- ¿Cuánto tiempo le llevaría? \_\_\_\_\_.
- Completa la siguiente tabla. Grafica los pares de puntos que obtengas del conejo y la zanahoria.

Tabla 3. Pares de puntos del conejo y la zanahoria		
$n$	$g$	$(n,g)$
1	$1/2$	$(1,1/2)$
2		
3		
4		
5		
6	$1/64$	$(6,1/64)$
7		
8		
9		
10		

**Sugerencia. Emplea una calculadora para completar la tabla.**

d) Grafica los puntos obtenidos en la tabla anterior.



**Figura 1.** La gráfica del conejo y la zanahoria tiene por término general al siguiente número:

$$C_n = (1/2) * (1/2)^{(n-1)} = (1/2)^n,$$

e) ¿Están alineados los puntos de esta gráfica? Explica tu respuesta.

---

—.

Los puntos de la figura 1, también cumplen la siguiente *relación exponencial*:

$$y = (1/2) * (1/2)^{(x-1)} = (1/2)^x.$$

## Variación de parámetros en una función exponencial

**A. La forma general de la función exponencial es:**  $f(x) = a^{x+b} + k$

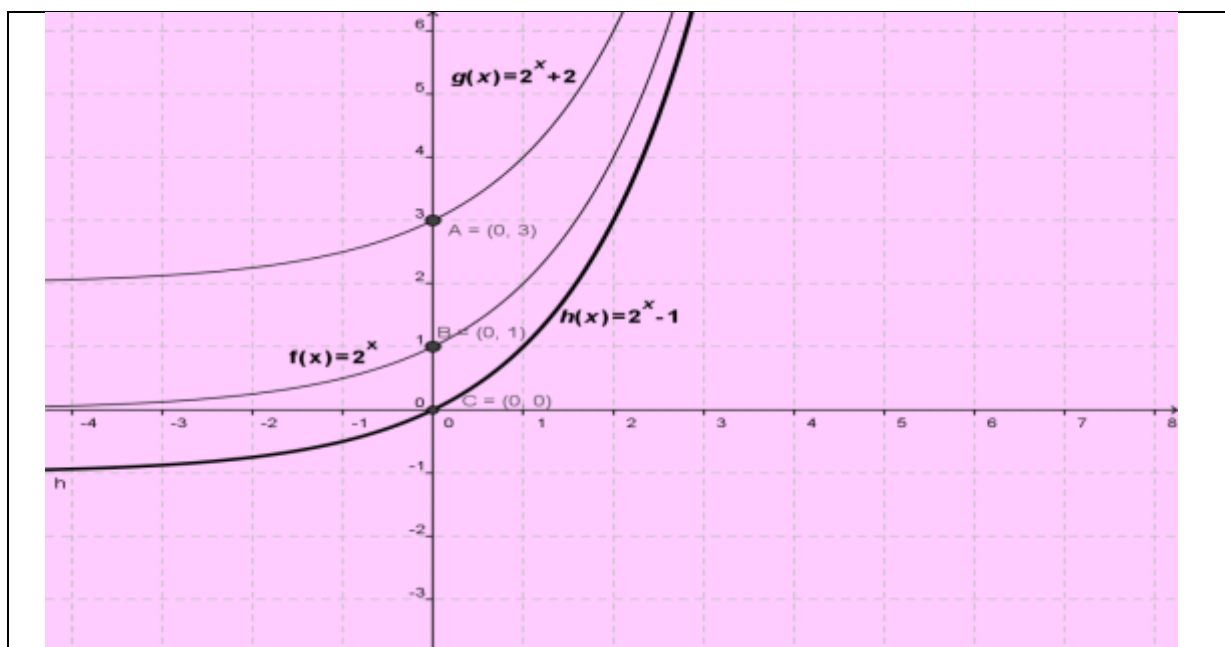
Si  $a = 2$ , , con  $a > 1$ . tenemos la función exponencial:  $f(x) = 2^{x+b} + k$

**Desplazamiento vertical, variación del parámetro  $k$ , con  $b = 0$**

1. Elabora el registro aritmético de las siguientes funciones. Determinado su dominio y su rango.

$x$	-3	-2.5	-2	-1.5	-1	0	1	1.5	2	2.5	3
$f(x) = 2^x$			$\frac{1}{4}$								
$g(x) = 2^x + 2$					$\frac{5}{2}$						
$h(x) = 2^x - 1$					$-\frac{1}{2}$						

2. Elabora el registro gráfico de dichas funciones en el plano cartesiano correspondiente uniendo los puntos discretos finitos con una curva suave de puntos continuos e infinitos. Utiliza GeoGebra.





**Gráfica de la función  $f(x) = a^{x+b} + k$ , con  $b=0$**

3. Describe brevemente, el comportamiento del registro geométrico (gráfica) cuando se hace variar el parámetro  $k$  de la función  $f(x) = 2^x + k$ .

---



---

**B. Desplazamiento horizontal, variación del parámetro  $b$ , con  $k=0$**

$x$	-3	-2.5	-2	-1.5	-1	0	1	1.5	2	2.5	3
$f(x) = 2^{x+1}$			$\frac{1}{2}$								
$g(x) = 2^{x+2}$											32
$h(x) = 2^{x-1}$					$\frac{1}{4}$						
$j(x) = 2^{x-2}$	$\frac{1}{32}$								1		

4. Elabora el registro gráfico de dichas funciones en el plano cartesiano correspondiente uniendo los puntos discretos finitos con una curva suave de puntos continuos e infinitos. Utiliza GeoGebra.

**Funciones logarítmicas.**

Los logaritmos son una herramienta matemática, para resolver fácilmente gran cantidad de problemas de fenómenos naturales y problemas matemáticos como el simplificar los cálculos aritméticos y trigonométricos. Por medio de los logaritmos se pueden hacer representaciones gráficas, que permiten analizar mejor la información cuantitativa y cualitativa que presentan ciertos problemas.

De acuerdo a lo considerado con las potencias de los números reales, se sabe que:

$$3^2 = 9 \qquad 2^3 = 8 \qquad 5^2 = 25 \qquad 7^2 = 49 \qquad 3^3 = 27 \qquad 2^5 = 32$$

En las igualdades anteriores, los números colocados como **potencia** se les reconoce como **exponentes**  $(2, 3, 2, 2, 3, y 5)$  respectivamente y los números que están elevados a dichos exponentes se les llama **BASE**  $(3, 2, 5, 7, 3 y 2)$ .

En forma general, si se representa a la base con la letra “ $b$ ”, al exponente con la letra “ $l$ ” y al resultado de las igualdades anteriores se le denota como “ $x$ ”, se tiene:  $b^l = x$

Usando esta notación, ahora se le llamará al exponente “ $l$ ” **LOGARITMO**.

El número “ $l$ ” es el logaritmo de la cantidad “ $x$ ” en la base “ $b$ ”.

**Ejemplo 1.**  $3^2 = 9$        $l = 2$ ,  $b = 3$  y  $x = 9$       2 es logaritmo de 9 en la base 3.

**Ejercicio 1.** Indique el logaritmo, la base y la cantidad de las siguientes expresiones:

$2^3 = 8$        $l = \underline{\hspace{1cm}}$ ,  $b = \underline{\hspace{1cm}}$  y  $x = \underline{\hspace{1cm}}$        $\underline{\hspace{1cm}}$  es logaritmo de  $\underline{\hspace{1cm}}$  en la base  $\underline{\hspace{1cm}}$

$5^2 = 25$        $l = \underline{\hspace{1cm}}$ ,  $b = \underline{\hspace{1cm}}$  y  $x = \underline{\hspace{1cm}}$        $\underline{\hspace{1cm}}$  es logaritmo de  $\underline{\hspace{1cm}}$  en la base  $\underline{\hspace{1cm}}$

$7^2 = 49$        $l = \underline{\hspace{1cm}}$ ,  $b = \underline{\hspace{1cm}}$  y  $x = \underline{\hspace{1cm}}$        $\underline{\hspace{1cm}}$  es logaritmo de  $\underline{\hspace{1cm}}$  en la base  $\underline{\hspace{1cm}}$

**Ejemplo 2.**  $3^3 = 27$ .      Tres es el logaritmo de veintisiete en la base tres.

**Ejercicio 2.** Indique con letra el logaritmo, cantidad y base de las siguientes expresiones:

$2^5 = 32$        $\underline{\hspace{10cm}}$

$2^4 = 16$        $\underline{\hspace{10cm}}$

$4^2 = 16$        $\underline{\hspace{10cm}}$

$8^2 = 64$        $\underline{\hspace{10cm}}$

### ➤ **Conceptos**

El valor de la base en la expresión  $b^4 = 10000$

Despejando “ $b$ ”, se tiene  $\therefore b = \sqrt[4]{10000} = \sqrt[4]{10^4} = 10$

El valor del logaritmo de la siguiente expresión  $6^l = \frac{1}{36}$ ;  $6^l = 6^{-2}$   $\therefore l = -2$ .

El logaritmo  $l$  en este caso es igual a menos dos ( $l = -2$ )  $6^{-2} = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}$

Por lo cual el logaritmo  $l$ , de una cantidad  $x$ , es el exponente al que se eleva la base  $b$ , para obtener la cantidad  $x$ , matemáticamente se simboliza como:  $l = \log_b x$ .

También se puede expresar matemáticamente como:  $y = \log_b x$ .

La notación exponencial **(N.E)** de un logaritmo se simboliza como:  $b^l = x$

La notación logarítmica **(N.L)** del logaritmo se simboliza como:  $l = \log_b x$

### **Propiedades de los logaritmos**

$$1. \log_b A * B = \log_b A + \log_b B$$

$$2. \log_b \frac{A}{B} = \log_b A - \log_b B$$

$$3. \log_b A^n = n * \log_b A$$

**Ejemplo 3.** Representar en forma logarítmica las siguientes expresiones:

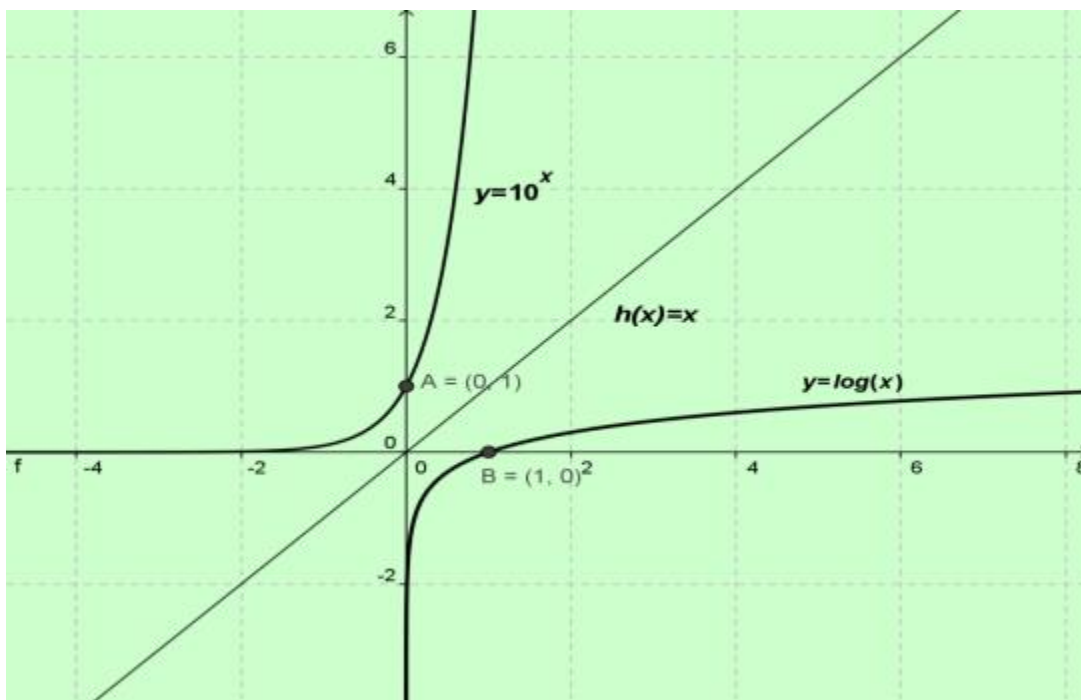
$$\bullet \quad 10^3 = 1000 \quad \text{primero } b = 10, \quad l = 3 \quad x = 1000 \quad \text{después} \\ \therefore \log_{10} 1000 = 3$$

$$\bullet \quad 4^{-2} = \frac{1}{16} \quad \text{primero } b = 4, \quad x = \frac{1}{16}, \quad l = -2 \quad \text{después} \\ \therefore \log_4 \frac{1}{16} = -2$$

**Ejercicio 3.** Representa en la forma logarítmica las siguientes expresiones:

$$9^0 = 1 \quad b = \_, \quad x = \_, \quad l = \_ \quad \log \_ = \_ \quad b^0 = 1 \quad \text{ó} \quad \log \_ = \_$$

➤ En virtud de que las funciones exponenciales y logarítmicas son funciones *mutuamente inversas*, como se muestra en la siguiente figura.



### Funciones exponencial y logarítmica

Se cumple la siguiente relación.

$$y = \log_b x \quad \Leftrightarrow \quad x = b^y \quad \dots\dots\dots (1)$$

Notación logarítmica

Notación Exponencial

- Con la expresión (1) realiza lo siguiente:

**Ejercicio 4.** Expresa la relación de la ecuación usando *notación logarítmica*.

$3^2 = 9$	
$2^3 = 8$	
$\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$	
$5^{-2} = \frac{1}{25}$	
$8^{\frac{2}{3}} = 4$	

**Ejercicio 5.** Expresa la relación de la ecuación mediante *notación exponencial*.

$\log_8 2 = \frac{1}{3}$	
$\log_6 1 = 0$	
$\log_9 \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}$	
$\log_3 81 = 4$	

**Ejercicio 6.** Obtenga el valor de los siguientes logaritmos (la incógnita es  $y$  o  $h$ ).

$\log_7 49$	
$\log_6 \frac{1}{6}$	
$\log_3 81$	
$\log 0.001$	

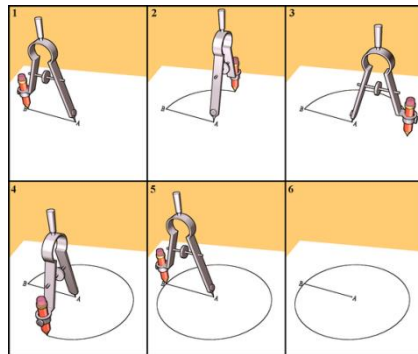
**Ejercicio 7.** Obtenga el valor de la variable  $x$  en las siguientes *ecuaciones exponenciales*.

$a. \ 2^{2x-3} = 5^{x-2}$	
$b. \ 3^{2-3x} = 4^{2x+1}$	

**Ejercicio 8.** Obtenga el valor de la variable  $x$  en las siguientes *ecuaciones logarítmicas*.

$a. \ \log x = 1 - \log(x-3)$	
$b. \ \log_3(5x+1) = \log_3(x-3)$	
$c. \ \log_2(x^2 - x - 6) - \log_2(x+2) = 2$	

## UNIDAD 2. ELEMENTOS BÁSICOS DE GEOMETRÍA PLANA (GEOMETRIA EUCLIDIANA)



### Presentación

La necesidad del ser humano de describir la naturaleza lo llevó a estudiar las propiedades de las figuras que observaba, naciendo de ésta manera la geometría plana. La cual estudia las propiedades de las superficies y figuras planas como los triángulos, las rectas, los polígonos, los cuadriláteros y la circunferencia. Esta geometría también recibe el nombre de geometría euclidiana, en honor del matemático griego Euclides quien, por encargo de Ptolomeo Rey de Egipto, reunió y ordenó los teoremas y demás proporciones geométricas en una obra llamada “Elementos” constituida por 13 libros, por lo cual se le considera el padre de la geometría (Amazonaws, 2010).

### Conceptos claves

**Ángulos:** Se llama ángulo a la región comprendida entre dos segmentos unidos en un solo punto llamado vértice.

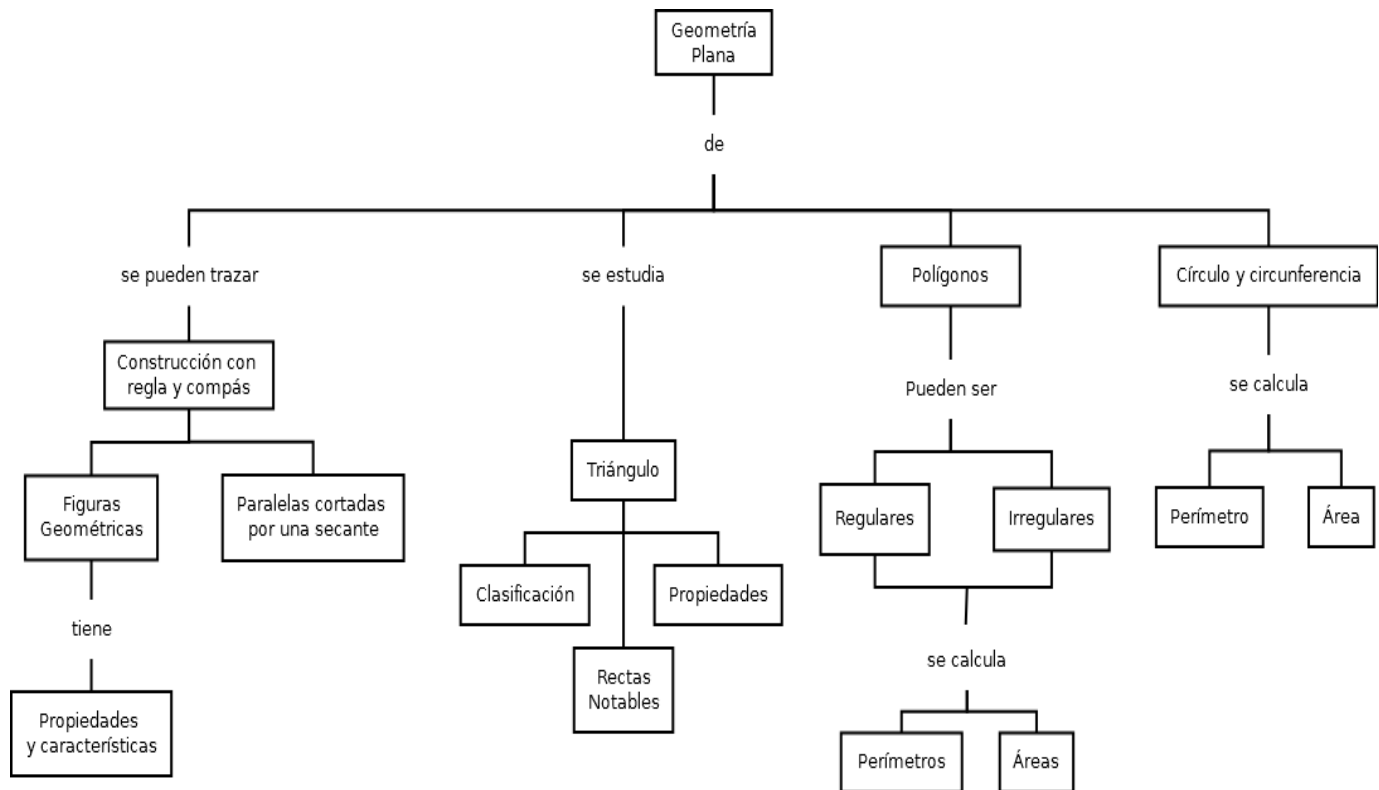
**Círculo:** superficie plana limitada por una línea curva llamada circunferencia.

**Recta:** Es una sucesión continua de puntos alineados en una misma dirección. Si prolongamos el segmento indefinidamente por ambos extremos, obtenemos una recta.

**Perímetro:** Se llama perímetro a la distancia alrededor de cualquier figura en dos dimensiones.

**Área:** Se considera área de una figura a la superficie que es rodeada por el perímetro

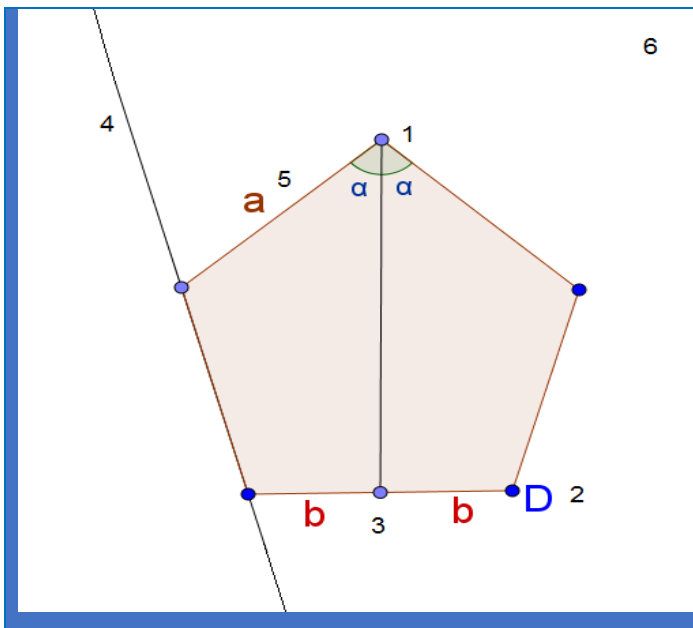
**Polígono:** Es una figura geométrica cerrada que está compuesta por muchos lados. Dichos lados pueden ser todos iguales o desiguales.



## Ejercicio 1

1. En el siguiente recuadro se muestra un pentágono formado por diversos elementos básicos de la geometría. Escribe cada número en los espacios correspondientes al elemento geométrico.

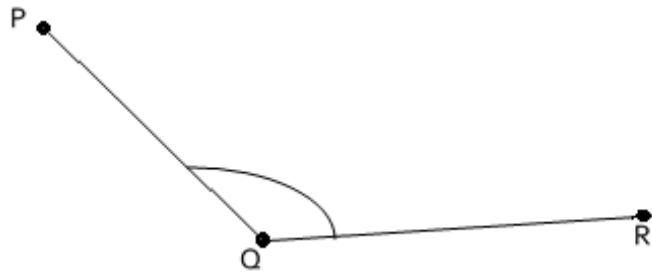
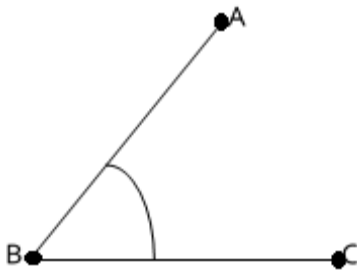




- \_\_\_ Punto
- \_\_\_ Recta
- \_\_\_ Segmento
- \_\_\_ Plano

### Construcción con regla y compás

- Construye la bisectriz del ángulo  $ABC$ , así como la mediatriz de cada segmento que forman al ángulo  $PQR$ .



- Traza un ángulo congruente al ángulo  $ABC$  del ejercicio anterior.

Dos rectas son paralelas si no tienen ningún punto en común, conocido como el quinto postulado de Euclides, del cual se estudiará más adelante.

Por otro lado, dos rectas que se cortan en un punto y dividen al plano en cuatro regiones. Si estas cuatro regiones tienen la misma amplitud, decimos que las dos rectas son perpendiculares.

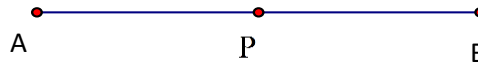
- Usando regla y compás, traza una perpendicular y otra que sea paralela al segmento  $AB$ . La perpendicular que pase por el punto  $P$ , en cada inciso.

a)

• P



b)



## Ángulos

5. Llena la Tabla 3 con la información necesaria, guíate de la terminología, definición o ejemplos dados.

Terminología	Definición	Ejemplos
Ángulo agudo $\theta$	$0 < \theta < 90^\circ$	
Ángulo _____ $\theta$		$95^\circ$ ; $157^\circ$
Ángulo recto $\theta$	$\theta =$	
Ángulos _____ $\alpha, \beta$	$\alpha + \beta = 90^\circ$	
Ángulos suplementarios $\alpha, \beta$		

Tabla 3. Ángulos

## Ejemplo

- a) Halla el complemento del ángulo de  $80^\circ$ .

Justificación:

La condición i) se puede simbolizar como:

$$i) \quad \angle \alpha + \angle \beta = 90 \quad [\text{por ser complementarios}]$$

La condición ii) nos indica que uno de ellos, por ejemplo, el  $\angle \alpha$  mide  $80^\circ$ , por lo tanto, tenemos

ii)  $80^\circ + \angle\beta = 90^\circ$

Despejamos  $\angle\beta$  obteniendo:

$$\angle\beta = 90^\circ - 80^\circ$$

$$\angle\beta = 10^\circ$$

El resultado que se obtuvo, es el complemento del ángulo de  $80^\circ$

**Ejercicio 2.** Resuelve los siguientes ejercicios siguiendo la solución del inciso a).

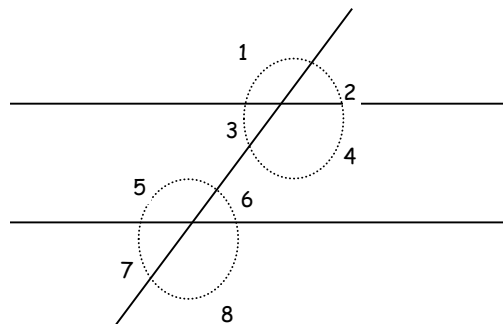
- 1) Halla el suplemento de un ángulo de  $123^\circ$ .
- 2) Si el complemento de un ángulo  $b$  es  $3b$ , encuentra el valor del ángulo  $b$ .
- 3) Halla el ángulo que sea  $16^\circ$  menos que su suplemento.

Como se ha mencionado, dos rectas de un plano son paralelas cuando al prolongarlas no tienen ningún punto en común. Tal definición fue dada por Euclides de Alejandría, matemático griego que vivió alrededor de los 300 a.C. Dentro de los 5 postulados que escribió Euclides, el quinto es uno de los más importantes en la historia de la geometría, en el cual se indica que “por un punto exterior a una recta dada puede trazarse una, y solo una paralela a la recta dada”.

Con lo anterior podemos concluir que, si dos rectas son paralelas a una tercera, entonces las tres rectas son paralelas entre sí (Jiménez Douglas, 2005).

### Ejercicio 3

- 1) En las siguientes rectas paralelas cortadas por una transversal se forman 8 ángulos. Identifica las dos rectas paralelas como  $l_1$  y  $l_2$ , mientras que a la transversal llámala  $m$

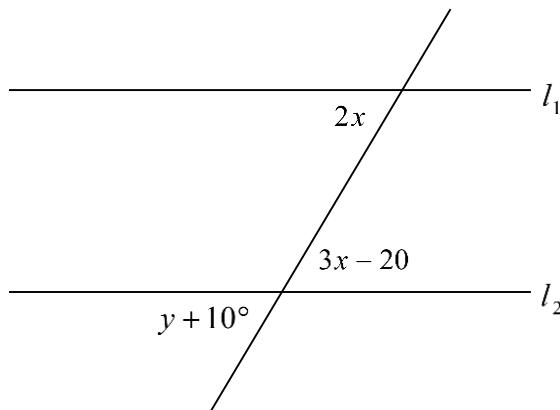


- a) Indica qué nombre se les da a las siguientes parejas de ángulos y cuáles son las propiedades de dichos ángulos.

	Nombre	Propiedad
1 y 4	<u>opuestos por el vértice</u>	<u>congruentes</u>
5 y 3	_____	_____
3 y 6	_____	_____
5 y 8	_____	_____
1 y 8	_____	_____
6 y 7	_____	_____

### Ejemplo

Determinar el valor de  $x$ ,  $y$ .



### Justificación

i)  $2x = 3x - 20^\circ$  por ser ángulos alternos  
internos son iguales

Despejando  $x$

$$2x - 3x = -20^\circ$$

$$-x = -20^\circ \quad \text{multiplicamos por } -1$$

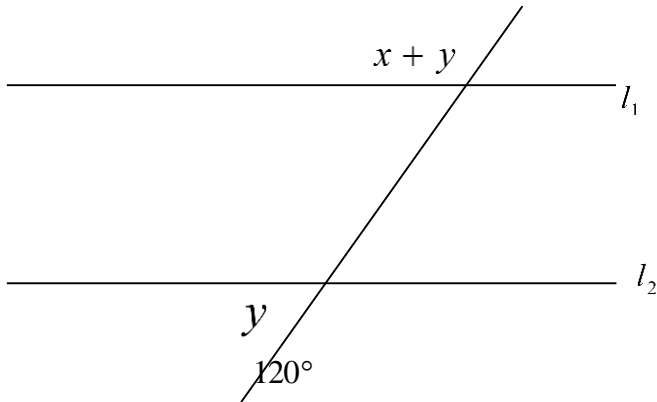
$$x = 20^\circ$$

ii)  $2x = y + 10^\circ$  por ser ángulos  
correspondientes son iguales

**Ejercicio 4.** Resuelve los siguientes problemas sabiendo que las rectas  $l_1$  y  $l_2$  son paralelas, guíate por el ejemplo resuelto.

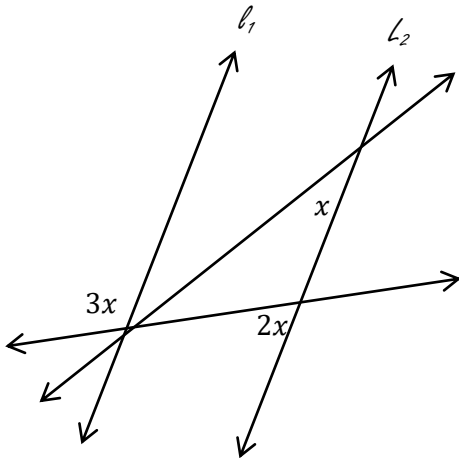
- 1) Determina el valor de  $x$ ,  $y$

**Justificación**



- 2) Determina el valor de  $x$

**Justificación**



## Geometría del triángulo

En la Tabla 4 se muestra la clasificación de los triángulos según la medida de sus lados y ángulos, así como la relación que hay entre ellas. Dibuja los triángulos que falten en los espacios en blanco.

Triángulo	Isósceles	Escaleno	Equilátero
Acutángulo			
Rectángulo			No existe
Obtusángulo			No existe

Tabla 4. Clasificación de los triángulos según sus lados y ángulos.

De acuerdo a la clasificación anterior de los triángulos, llena la Tabla 5.

Según la medida de sus ángulos	Según la medida de sus lados
Acutángulo	
	Equilátero

Tabla 5. Clasificación de triángulos

## Ejercicio 5

1. Indica si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas y justifica tu respuesta.

A) Algunos triángulos acutángulos son isósceles.

V F

---

---

B) Todos los triángulos acutángulos tienen un ángulo obtuso.

V F

---

---

C) Algunos triángulos rectángulos son equiláteros.

V F

---

---

D) Algunos triángulos obtusángulos son equiláteros.

V F

---

---

2. Analiza y reflexiona las siguientes preguntas

A) ¿Existen triángulos que sean al mismo tiempo equiláteros y rectángulos? \_\_\_\_

¿Porqué? \_\_\_\_\_

B) ¿Existen triángulos que sean rectángulos e isósceles a la vez? \_\_\_\_

¿Por qué? \_\_\_\_\_

C) ¿Todo triángulo rectángulo es isósceles? \_\_\_\_

¿Por qué? \_\_\_\_\_

D) ¿Algunos triángulos obtusángulos son escalenos? \_\_\_\_\_

¿Por qué? \_\_\_\_\_

E) ¿Todos los triángulos equiláteros son isósceles? \_\_\_\_\_

¿Por qué? \_\_\_\_\_

F) ¿Todos los triángulos isósceles son acutángulos? \_\_\_\_\_

¿Por qué? \_\_\_\_\_

3. María debe construir un triángulo escaleno como parte de la tarea escolar de matemáticas II. En la papelería hay una oferta en que se venden tres palillos a un precio muy económico, pero ya están cortados. Las medidas de los tres palillos son 4.5cm, 3.6 cm y 8.5 cm respectivamente.

a) ¿Es posible formar un triángulo? \_\_\_\_\_

¿Por qué? \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

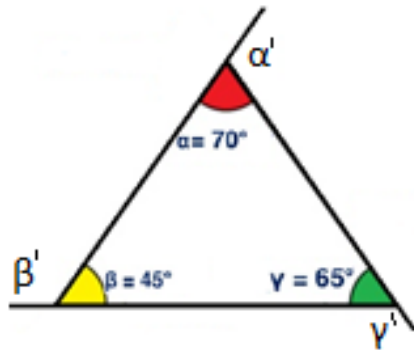
4. ¿Existe alguna regla establecida para la construcción de triángulos? \_\_\_\_\_

Explica: \_\_\_\_\_

### Ejemplo

a) Determinar en la siguiente figura el valor de los ángulos exteriores que se marcan como  $\alpha'$ ,  $\beta'$  y  $\gamma'$





### Justificación

i) Llama a los ángulos exteriores  $\alpha'$ ,  $\beta'$  y  $\gamma'$  respectivamente.

ii) La suma de los ángulos exteriores del triángulo es igual a  $360^\circ$ , por lo tanto,  
 $\alpha' + \beta' + \gamma' = 360^\circ$

iii) Dos ángulos suplementarios suman  $180^\circ$ ,

$$\text{por lo tanto, } \alpha + \alpha' = 180^\circ \rightarrow \alpha' = 180^\circ - \alpha \rightarrow \alpha' = 180 - 70 = 110^\circ$$

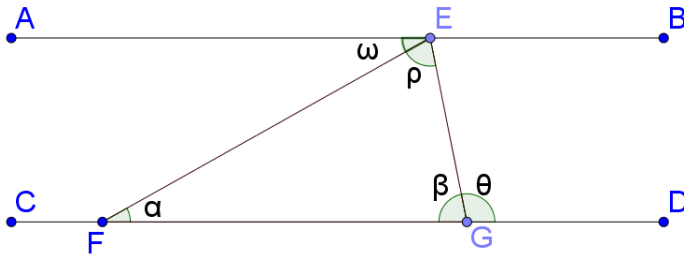
$$\beta + \beta' = 180^\circ \rightarrow \beta' = 180^\circ - \beta \rightarrow \beta' = 180 - 45 = 135^\circ$$

$$\gamma + \gamma' = 180^\circ \rightarrow \gamma' = 180^\circ - \gamma \rightarrow \gamma' = 180 - 65 = 115^\circ$$

**Ejercicio 6.** Resuelve los ejercicios que a continuación se presentan sobre ángulos internos y externos, guíate del ejercicio resuelto.

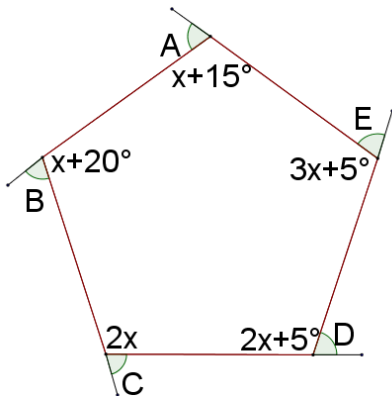
1) En la siguiente figura  $AB \parallel CD$ , si  $\alpha = 30^\circ$  y  $\theta = 100^\circ$ , determina la medida de los ángulos que faltan.

**Justificación:**



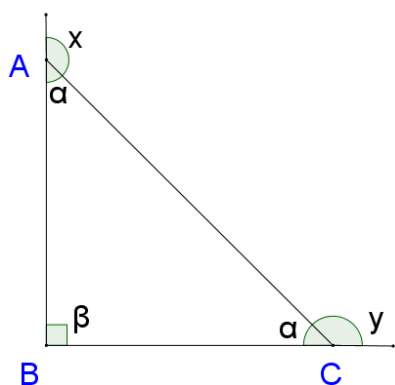
2) Halla la medida de los ángulos exteriores del siguiente polígono irregular.

**Justificación:**



- 3) Con los datos que se proporcionan en la figura calcula el valor de  $x$  e  $y$ .

### Justificación



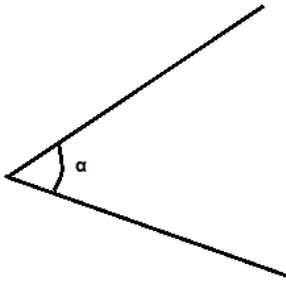
### Ejercicio 7

- 1) Relacionas las siguientes columnas de la Tabla 6 colocando el inciso correspondiente.

___ <b>Mediatriz</b>	a) Segmento de recta que se traza desde un vértice de un triángulo al punto medio de su lado opuesto.
___ <b>Bisectriz</b>	b) Es el punto donde se intersectan las medianas de un triángulo
___ <b>Mediana</b>	c) Se le denomina al punto donde concurren las alturas de un triángulo.
___ <b>Altura</b>	d) Conjunto de puntos del plano que equidistan de los puntos extremos de un segmento
___ <b>Circuncentro</b>	e) Es el punto en el que se cortan las <u>mediatrices de un triángulo</u>
___ <b>Incentro</b>	f) Segmento perpendicular trazado desde un vértice del triángulo al lado opuesto.
___ <b>Baricentro</b>	g) Las bisectrices de los ángulos interiores de un triángulo concurren en un punto que equidista de los lados del triángulo
___ <b>Ortocentro</b>	e) Es el punto de intersección de las mediatrices del triángulo.

**Tabla 6. Los centros del triángulo.**

2. Construye la bisectriz del siguiente ángulo y justifica cómo son los ángulos formados entre ella.

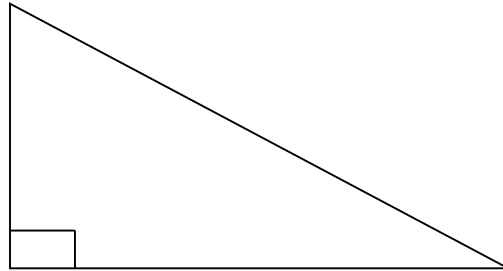


3. En la siguiente figura dibuja el incentro y circuncentro.

a) Describe las similitudes o diferencias que observas entre ambos trazos:

---

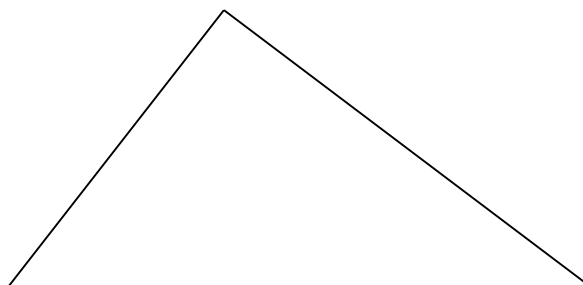
---



- b) Dibuja de nuevo el incentro y el circuncentro en el siguiente triángulo. Observa los resultados obtenidos y compáralos con el inciso anterior, ¿existe alguna similitud con tus nuevos resultados? ¿por qué?

---

---



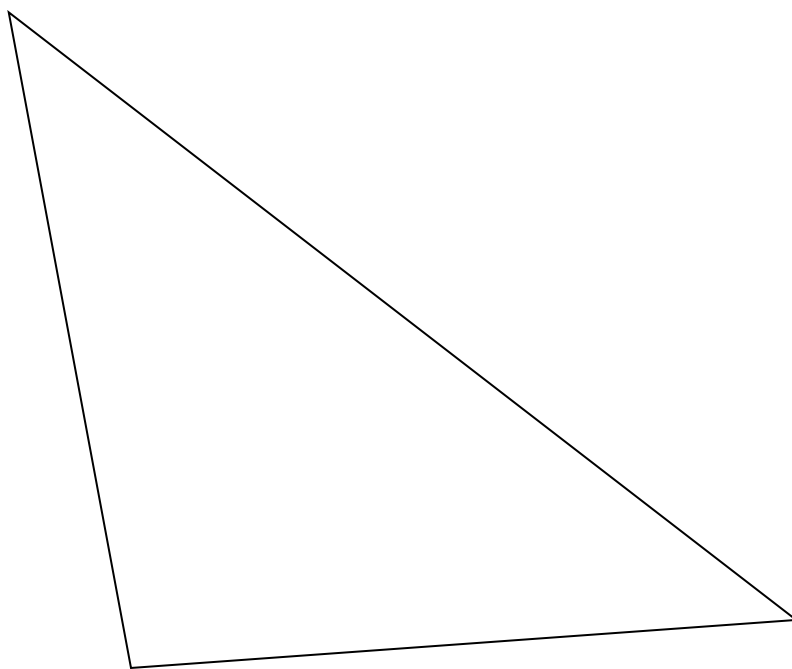
- c) Dibuja en los triángulos del inciso a) y b) un círculo que toque los 3 vértices (círculo circunscrito) y un círculo que toque los tres lados del triángulo (círculo inscrito). ¿Es posible realizar los trazos solicitados? ¿por qué?

---

---

4. En el siguiente triángulo dibuja.

- Con color azul las medianas.
- Con color anaranjado las mediatrices.
- Con color verde las bisectrices.
- Con color café las alturas.



- Une el baricentro, el circuncentro y el ortocentro.

¿Qué observas? \_\_\_\_\_

a esta recta se le llama “Recta de Euler”.

5. Escribe cuáles son las propiedades de los triángulos isósceles.

---

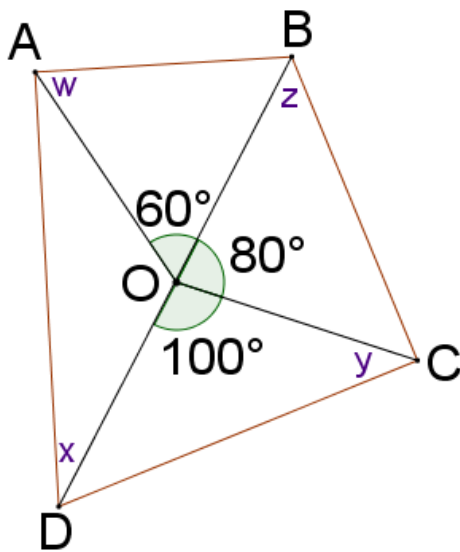
---

---

### Ejemplo

- a) Hallar los ángulos  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $w$ , tomando en cuenta que los triángulos AOB, BOC, COD y DOA son isósceles.

### Justificación



i)  $2w + 60^\circ = 180^\circ$  Por propiedades de los triángulos isósceles

despejamos  $w$ :

$$w = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2}; \quad w = 60^\circ$$

ii)  $2z + 80^\circ = 180^\circ$  Por propiedades de los triángulos isósceles

despejamos  $z$ :

$$z = \frac{180^\circ - 80^\circ}{2}; \quad z = 50^\circ$$

iii)  $2y + 100^\circ = 180^\circ$  Por propiedades de los triángulos isósceles

despejamos  $y$ :

$$y = \frac{180^\circ - 100^\circ}{2}; \quad y = 40^\circ$$

iv)  $60^\circ + 80^\circ + 100^\circ + O = 360^\circ$  Por formar un ángulo perigonal.

despejamos  $O$ :

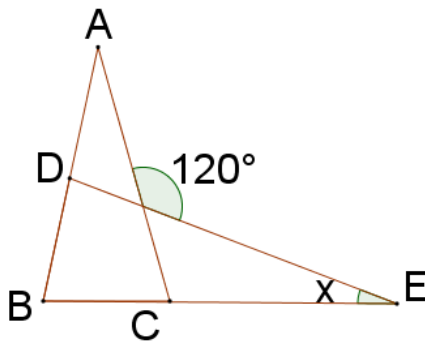
$$O = 360^\circ - 240^\circ$$

$$O = 120^\circ$$

### Ejercicio 8

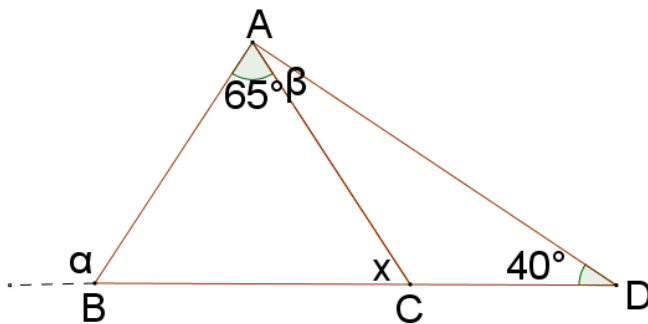
- 1) Empleando las propiedades de los triángulos isósceles, determina el valor de  $x$  si  $\overline{BA}=\overline{CA}$  y  $\overline{DE}=\overline{BE}$ .

**Justificación:**



- 2) Si  $\overline{AB}=\overline{AC}$ , determina el valor de  $x$ ,  $\alpha$  y  $\beta$

**Justificación:**



### Polígonos

Podemos definir a un polígono (*del griego poli y gonos*) como una figura plana delimitada por segmentos de recta y tiene muchos ángulos.

Los polígonos se denotan mediante letras mayúsculas ubicadas en los vértices del mismo y se clasifican en *regulares e irregulares*.

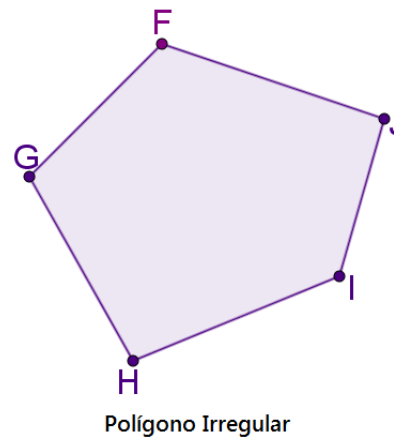
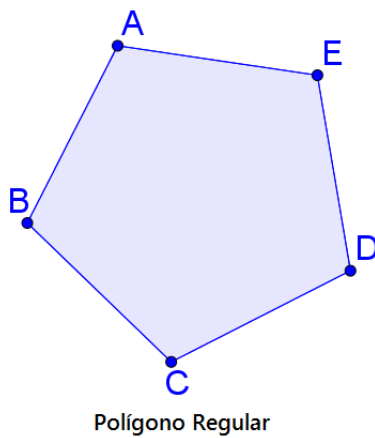


Fig 4. Polígonos

En un Polígono es necesario considerar los siguientes elementos característicos.

- a. **Lado:** cada uno de los segmentos de la línea poligonal cerrada.
- b. **Vértice:** Son las intersecciones de dos lados consecutivos del polígono.
- c. **Diagonal:** Son aquellas rectas que unen dos vértices no consecutivos.
- d. **Ángulos Internos:** Son los que están formados por dos lados consecutivos
- e. **Ángulos externos** Son los formados por un ángulo y la prolongación del lado contiguo y adyacente
- f. **Perímetro (p):** Es la suma de todos los segmentos de recta del polígono.

Además de las características anteriores, en un polígono regular se pueden distinguir:

- g. **Centro:** punto que equidista de todos los vértices.
- h. **Ángulo central:** Es el formado por dos segmentos de recta que parten del centro a los extremos de un lado.
- i. **Apotema (a):** segmento que une el centro del polígono con el punto medio de cada lado.

Se clasifican de acuerdo al número de lados, por ejemplo, un polígono de tres lados es un triángulo, uno de 6 lados es un hexágono, etc. Te invito a investigar al respecto para que puedas conocer más acerca de los polígonos y su clasificación.

## Ejercicio 9

- 1) Dibuja las diagonales de la siguiente figura 5.

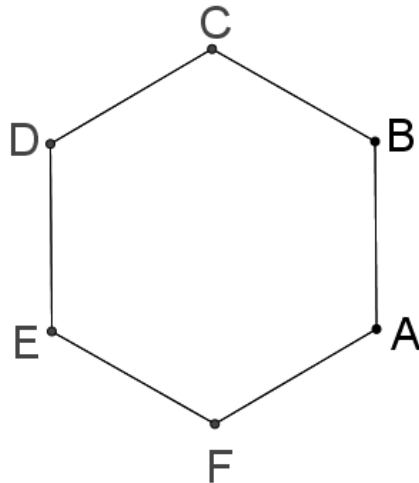


Fig 5. Hexágono

- 2) ¿Existe alguna forma de conocer las diagonales sin dibujarlas?
- 3) ¿Cuántas diagonales tiene un tetra decágono (14)? \_\_\_\_\_
- 4) ¿Y un Triacontágono (30)? \_\_\_\_\_

## Ángulos interiores de un polígono

Para conocer el valor total de los ángulos interiores de un polígono, basta con saber que en un triángulo la suma de sus ángulos internos es de  $180^\circ$ . Por lo tanto, si en un cuadrado se forma dos triángulos como se muestra en la figura 3.2, la sumatoria de sus ángulos internos es de  $360^\circ$

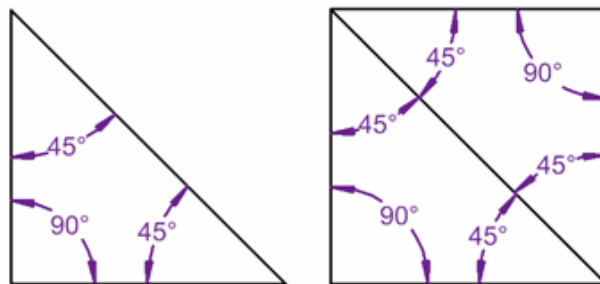


Fig 6. Ángulos interiores de un polígono regular



De tal manera que, para conocer la suma de los ángulos internos de un polígono, es necesario saber cuántos triángulos se forman en la figura y realizar la sumatoria de los ángulos.

### Ejemplo

¿Cuántos triángulos se forman en el siguiente dodecágono al trazar todas las diagonales desde un solo vértice? Indica la sumatoria de ángulos interiores del dodecágono.

- i) Tomamos el vértice A de referencia en el dodecágono y comenzamos a trazar las diagonales desde ese punto.

- ii) Trazamos todas las diagonales desde el punto A, como se observa en la Figura 7.

- iii) En un dodecágono se forman 10 triángulos, ya que la sumatoria de los ángulos internos de un triángulo es de  $180^\circ$ , multiplicamos los 10 triángulos por  $180^\circ$ .

Por lo tanto, la suma de los ángulos internos de un dodecágono mide  $180^\circ$ .

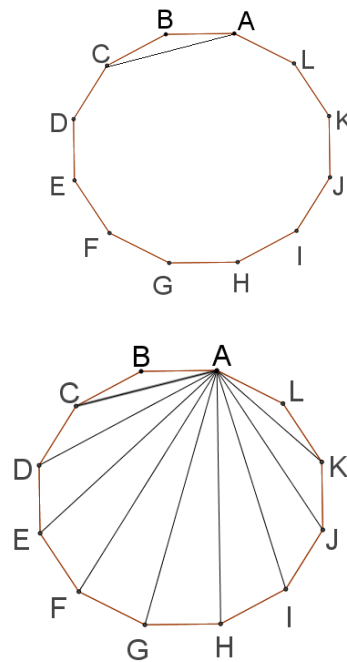
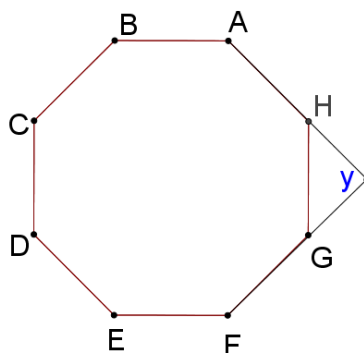
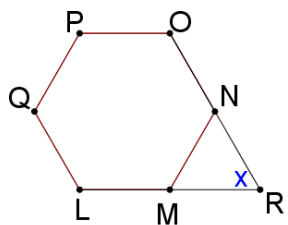


Fig 7.

### Ejercicio 10

- 1) Las siguientes figuras son polígonos regulares: Indica 1) ¿Cuántos triángulos se forman en cada una? 2) ¿Cuál es la suma de los ángulos interiores de cada figura regular? 3) ¿Cuánto suma  $x + y$ ?



### Área de un polígono Regular:

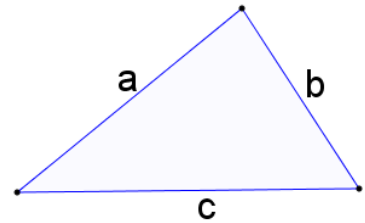
El área de un polígono regular es igual al producto de su perímetro por su apotema dividido entre dos ( $A = \frac{1}{2} p * a$ )

### Área de un polígono irregular:

Para calcular el área de un polígono irregular cualquiera debemos basarnos en métodos indirectos.

Para conocer el área de triángulos irregulares, basta con aplicar la fórmula de Herón.

Herón de Alejandría, quien vivió hacia el siglo III a. de C. Son conocidas varias obras suyas, pero se le recuerda sobre todo por la llamada fórmula de Herón, que nos permite calcular el área de un triángulo conocidos los tres lados. No es necesario por tanto conocer la altura ni ninguno de los ángulos. Si llamamos  $s$  al semiperímetro y  $a, b, c$  a los tres lados [recursostic, 2016]:

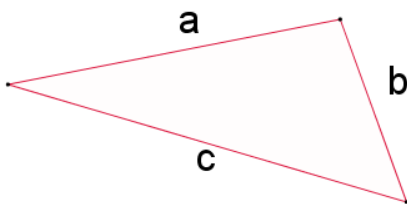


$$s = \frac{a + b + c}{2}. \quad A = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$$

De tal manera que el área de un polígono irregular será la suma de las áreas de sus componentes.

### Ejemplo. Fórmula de Herón.

Determinar el área del triángulo de lados  $a = 5$ ,  $b = 3$  y  $c = 6$



### Justificación

- i) Aplicando la fórmula de Herón determinamos el área del triángulo ya que es un triángulo irregular:

$$S = \frac{a + b + c}{2}.$$

$$A = \sqrt{S(S - a)(S - b)(S - c)}$$

ii) donde **S** es llamado semiperímetro

$$S = \frac{5+3+6}{2} = 7$$

iii) Ya teniendo el semiperímetro, calculamos el área

$$A = \sqrt{7(7 - 5)(7 - 3)(7 - 6)}$$

$$A = 2\sqrt{14}$$

**Ejemplo.** Área de polígonos regulares.

La longitud de un lado de un hexágono regular es 4 cm. Calcular su apotema y su área.

**Justificación**

- i) Dibujamos el hexágono con centro O, trazamos la apotema y dos diagonales como se observa en la Figura 8 A.

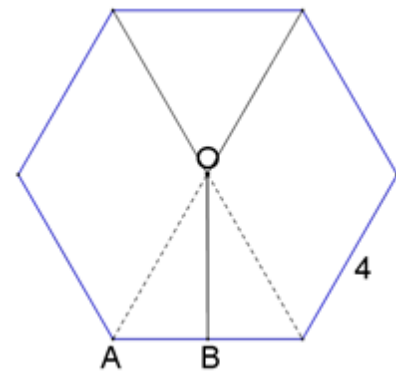


Fig 8 A.

- ii) Por ser un polígono regular, las diagonales miden lo mismo, formándose así dos triángulos equiláteros con lado 4cm y ángulos internos de 60° como se muestra en la Figura 8 B.

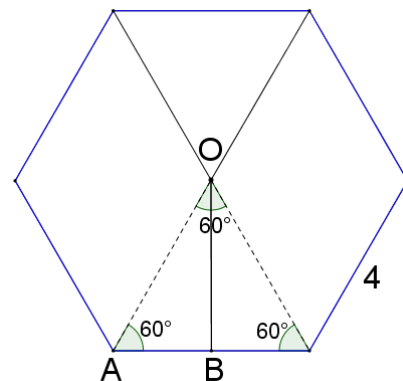


Fig 8 B.

- iii) Por lo que el triángulo AOB tiene ángulos internos de  $30^\circ$ ,  $60^\circ$  y  $90^\circ$  como se muestra en la figura. Por lo tanto,  $AB=2$ ,  $OA=4$  y aplicando el teorema de Pitágoras determinamos el valor de la apotema

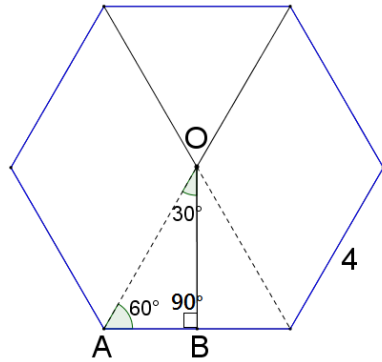


Fig 8 C.

Calculamos la apotema

$$a = \sqrt{OA^2 - AB^2}$$

$$a = \sqrt{4^2 - 2^2}$$

$$a = \sqrt{12}$$

$$a = 2\sqrt{3}$$

- iv) Como es un polígono regular, calculamos el área sabiendo que es igual al perímetro (p) por apotema (a) entre dos.

Calculamos el perímetro

$$p = nxl$$

$$p = 6 \times 4$$

$$p = 24$$

Calculamos el área:

$$A = \frac{1}{2} a * p$$

$$A = \frac{1}{2} (2\sqrt{3})(24)$$

$$A = 24\sqrt{3}$$

## Ejercicio 11

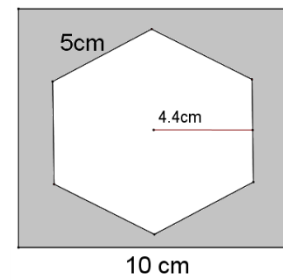
- 1) Si un edificio cuadrado y un edificio con forma de hexágono regular tienen el mismo perímetro (p), ¿Cuál de los dos edificios tiene mayor área?

Nota: Toma como perímetro de ambas figuras el de un cuadrado.

- 2) Si el área de un cuadrado es de 81, calcula:

a) su lado, b) su perímetro, c) su diagonal.

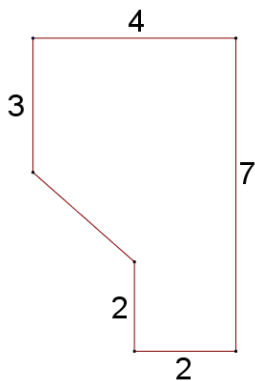
- 3) Determina el área de la parte gris de la siguiente figura.



- 4) Calcula el área de una banqueta de 1.20 m de ancho y que rodea una plaza rectangular de 90 m de largo y 65 m de ancho.

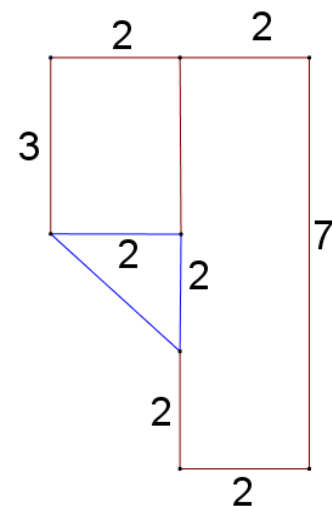
**Ejemplo.** Áreas de polígonos irregulares

Obtén el área de la siguiente figura:



Debido a que no es una figura regular, dividiremos la figura en figuras conocidas.

Hemos dividido la figura en un rectángulo de lado 3 y 2, un triángulo rectángulo y un rectángulo de lado 2 y 7.

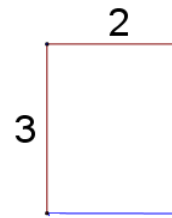


Obtenemos el área de cada figura, comenzando por el rectángulo de base 2 y altura 3

Área del rectángulo 1:

$$A = ba$$

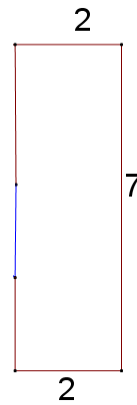
$$A = 2 \cdot 3 = 6 \text{ u}^2$$



Área rectángulo 2:

$$A = ba$$

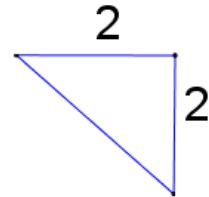
$$A = 2 \cdot 7 = 14 \text{ u}^2$$



Área del triángulo

$$A = \frac{bh}{2}$$

$$A = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2 \text{ u}^2$$



Sumamos las áreas para determinar el área total

Área del rectángulo 1 + área del rectángulo 2 + área del triángulo

$$A_{\text{total}} = 6 \text{ u}^2 + 14 \text{ u}^2 + 2 \text{ u}^2$$

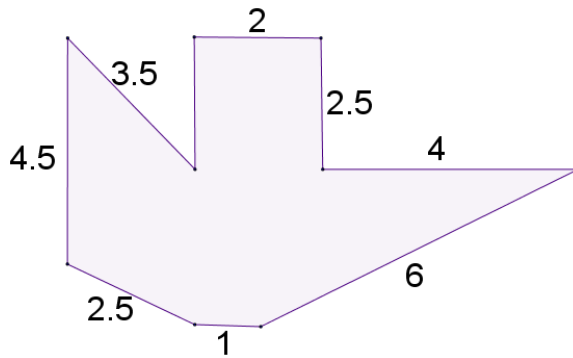
$$A_{\text{total}} = 22 \text{ u}^2$$

### Ejercicio 12

1) Determina el área de las siguientes figuras:

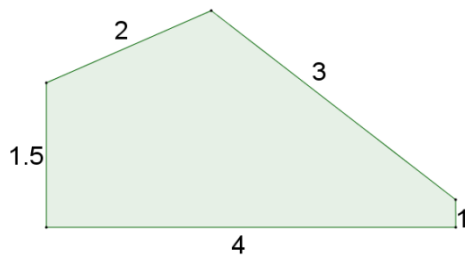
**Justificación**

a)



b)

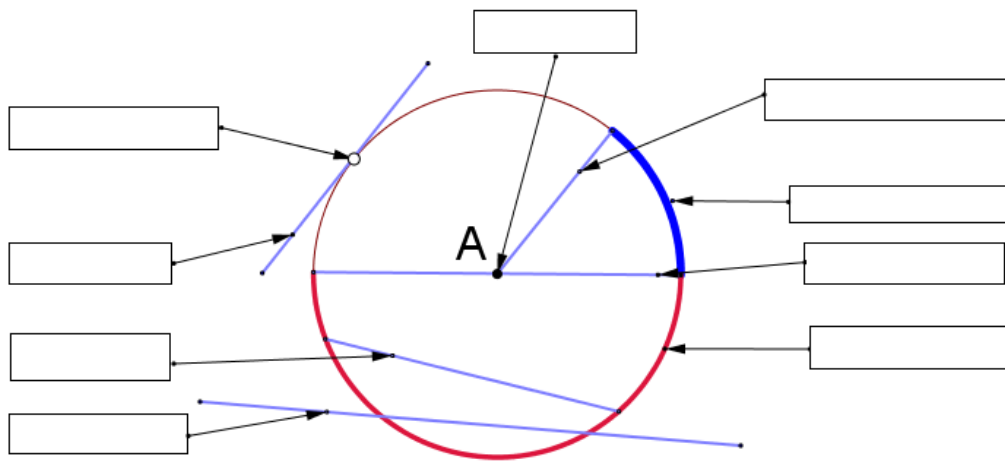
**Justificación**



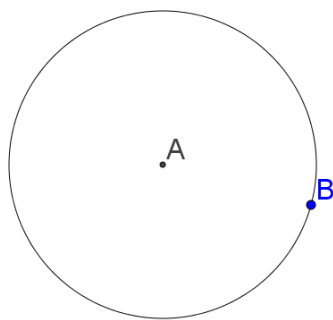
### Círculo y Circunferencia

#### Ejercicio 13

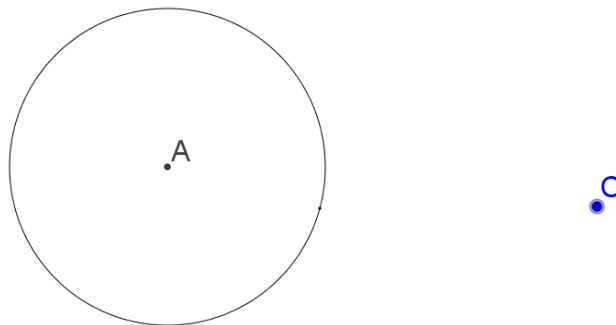
1) En la siguiente figura escribe en el recuadro el nombre de cada una de las rectas y segmentos señalados.



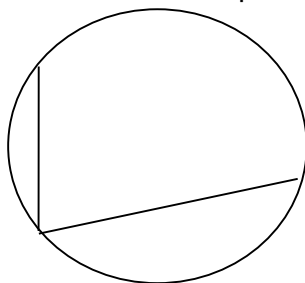
- 2) Construye la recta tangente a la circunferencia en el punto B.



- 3) Construye las rectas tangentes a la circunferencia desde el punto C.



- 4) Traza las mediatrices de las cuerdas que se señalan y localiza el centro de la circunferencia.



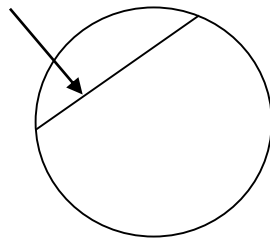


Resultados importantes:

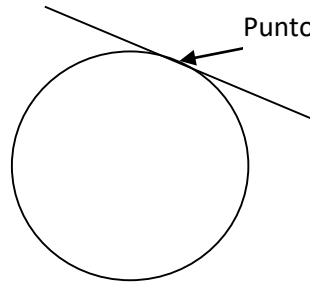
- a. La perpendicular en el punto medio de una cuerda pasa por el centro de la circunferencia.
- b. La perpendicular en el punto de tangencia pasa por el centro de la circunferencia.

5) Para confirmar lo mencionado en el recuadro, dibuja dichos resultados en las siguientes circunferencias.

cuerda

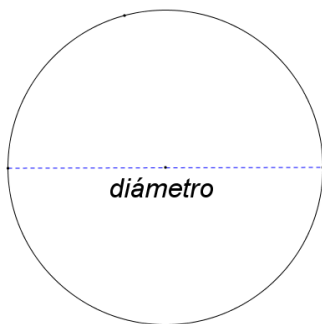


Punto de tangencia



### Ejemplo

Halla el diámetro de un círculo de  $78.5 \text{ cm}^2$  de área.



**Justificación:**

$$A = \pi r^2$$

Área de una circunferencia

Despejando r:

$$r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$$

Sustituyendo valores obtenemos:

$$r = \sqrt{\frac{78.5}{3.1416}}$$

$$r = 5$$

$$d = 2r$$

el diámetro es dos veces el radio

$$d = 2(5)$$

$$d \approx 10 \text{ cm}$$

### Ejercicio 14

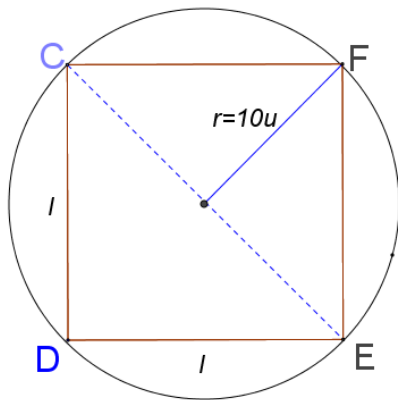
1) En la clase de física se han realizado diferentes mediciones de objetos dentro de los cuales estaba un balón. He rodeado con una cuerda la circunferencia del balón, el cual mide 93.5 cm de longitud. ¿Cuál es el radio del balón?

2) Halla el diámetro de una circunferencia cuya longitud es 12.5 cm

### Ejemplo

Calcula el área de un cuadrado inscrito en una circunferencia de radio  $r = 10 \text{ u}$ .

#### Solución:



$$d = 2r = 2(10) = 20 \text{ u} \quad \text{Por ser el diámetro el doble del radio}$$

$$d^2 = l^2 + l^2$$

Por el teorema de Pitágoras

$$d^2 = 2l^2$$

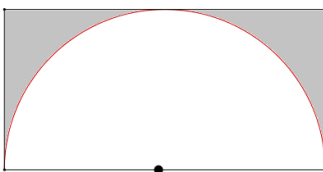
$$2l^2 = (20)^2 = 400$$

$$l^2 = \frac{400}{2} = 200$$

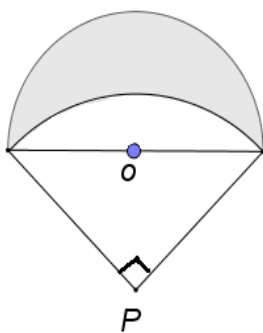
$$A = l^2 = 200 \text{ u}^2$$

### Ejercicio 15

1) Se inscribe un semicírculo en un rectángulo de base 14 cm. Encuentra el área sombreada.



- 2) En la figura se muestra un semicírculo con centro en el punto O, cuyo diámetro es 20 cm y un sector circular con centro en el punto P. Encuentra el área sombreada.



### Resuelve lo que se pide

1. Dado los valores de la terna de los segmentos, determina con cuáles se puede construir un triángulo.

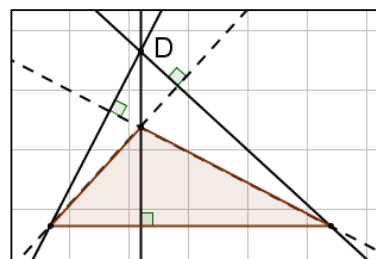
A) 4, 4 y 9      B) 3, 4, 6      C) 5, 6, 12      D) 6, 7, 14

2. Se tienen los ángulos  $A = 3x + 15$  y  $B = 2x - 10$ . ¿Cuánto miden A y B, si son suplementarios?

A)  $125^\circ$  y  $45^\circ$       B)  $35^\circ$  y  $145^\circ$       C)  $120^\circ$  y  $60^\circ$       D)  $65^\circ$  y  $135^\circ$

3. Determina el nombre del punto D de la siguiente figura.

A) Circuncentro      B) Baricentro  
C) Ortocentro      D) Incentro



4. Una altura y una mediana coinciden en todo triángulo

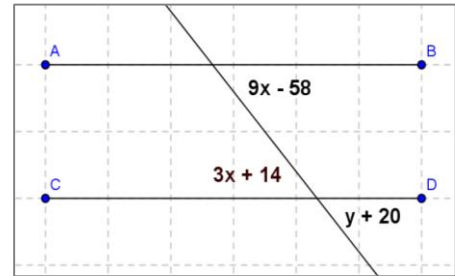
A) isósceles      B) rectángulo      C) escaleno      D) acutángulo

5. En la siguiente figura las rectas AB y CD son paralelas, encuentra el valor de “y”.

- A) -8                      B) -12                      C) 30                      D) 32

6. Calcula el perímetro de un cuadrado si su diagonal mide  $\sqrt{98}$

- A) 19.79                      B) 28                      C) 39.59                      D) 49



7. Calcula el área de una banqueta de 1.20 de ancho que rodea a una plaza rectangular de 90 m de largo y 65 de ancho.

- A) 187.44 m<sup>2</sup>                      B) 377.76 m<sup>2</sup>                      C) 5850 m<sup>2</sup>                      D) 6037.40 m<sup>2</sup>

8. ¿Cuál es área de un tapete en forma de hexágono regular de 40 cm de lado?

- A) 240.0 cm<sup>2</sup>                      B) 2,078.5 cm<sup>2</sup>                      C) 4,156.9 cm<sup>2</sup>                      D) 4,800.0 cm<sup>2</sup>

9. Los catetos de un triángulo rectángulo inscrito en una circunferencia miden 22.2 cm y 29.6 cm respectivamente. ¿Cuánto mide el diámetro circunferencia?

- A) 58 cm                      B) 51 cm                      C) 44 cm                      D) 37

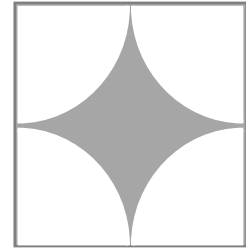
10. En un cuadrado de lado 12 cm, se trazan 4 arcos de circunferencia como muestra la figura. Calcula el área sombreada

A)  $30.9 \text{ cm}^2$

B)  $113 \text{ cm}^2$

C)  $144 \text{ cm}^2$

D) 452.



## CONGRUENCIA, SEMEJANZA

La “Congruencia y semejanza”, se pretende que, a partir del conocimiento básico de conceptos de la Geometría, introducir al alumno al razonamiento deductivo y a la comprensión del porqué de las demostraciones. El Propósito es Aplicar los conceptos de congruencia y semejanza en la resolución de problemas que involucren triángulos. Argumentando deductivamente sobre la validez de algunas afirmaciones geométricas y procesos en la resolución de problemas

El objetivo es que el alumno valore la importancia de proporcionar una argumentación como la vía que otorga validez al conocimiento geométrico. Aplique conceptos, procedimientos y resultados de la Geometría Euclidiana para resolver problemas de congruencia, semejanza.



El mayor mérito de los sabios griegos fue el transformar la geometría al cambiar el enfoque de la misma de empírico a deductivo. Se menciona que uno de los protagonistas de esta transformación fue también Tales de Mileto, filósofo, astrónomo y matemático griego nació en Mileto en el año 624 a. de C. y murió a la edad de 78 años (548-545 a. de C). Entre los resultados más conocidos de Tales se encuentra el teorema que lleva su nombre, relativo a la proporcionalidad de segmentos determinados en dos rectas cortadas por un sistema de paralelas.

Tales de Mileto fue el primer geómetra griego uno de los siete sabios de Grecia y tuvo como discípulo y protegido a Pitágoras posteriormente Platón en su academia lugar donde impartió sus enseñanzas se podía leer la siguiente inscripción: NADIE ENTRE QUE NO SEPA GEOMETRÍA. Platón sostiene en el Timeo que dios dio a todas las cosas la mayor perfección posible componiendo sus elementos (fuego, tierra, aire y agua) por medio de los cuerpos geométricos más perfectos. Platón contempló la geometría más con ojos de poeta que con mirada científica.

## Conceptos claves

**Congruencia:** En matemáticas, dos figuras geométricas son **congruentes** si tienen los lados iguales y el mismo tamaño.

**Congruencia de triángulos:** Dos triángulos son congruentes si sus lados correspondientes tienen la misma longitud y sus ángulos correspondientes tienen la misma medida.

**Criterios de Congruencia:** Las condiciones mínimas que deben cumplir dos triángulos para que sean congruentes se establecen a través de los llamados teoremas de congruencia los cuales son:

- **1° Caso LAL:** Dos triángulos son congruentes si tienen iguales dos de sus lados respectivos y el ángulo comprendido entre ellos.
- **2° Caso ALA:** Dos triángulos son congruentes si tienen iguales dos de sus ángulos respectivos y el lado entre ellos.
- **3° Caso LLL:** Dos triángulos son congruentes si tienen iguales los tres lados.

**Lados homólogos.** Se dicen ángulos homólogos aquellos que son iguales y Lados Homólogos los opuestos a los ángulos homólogos.

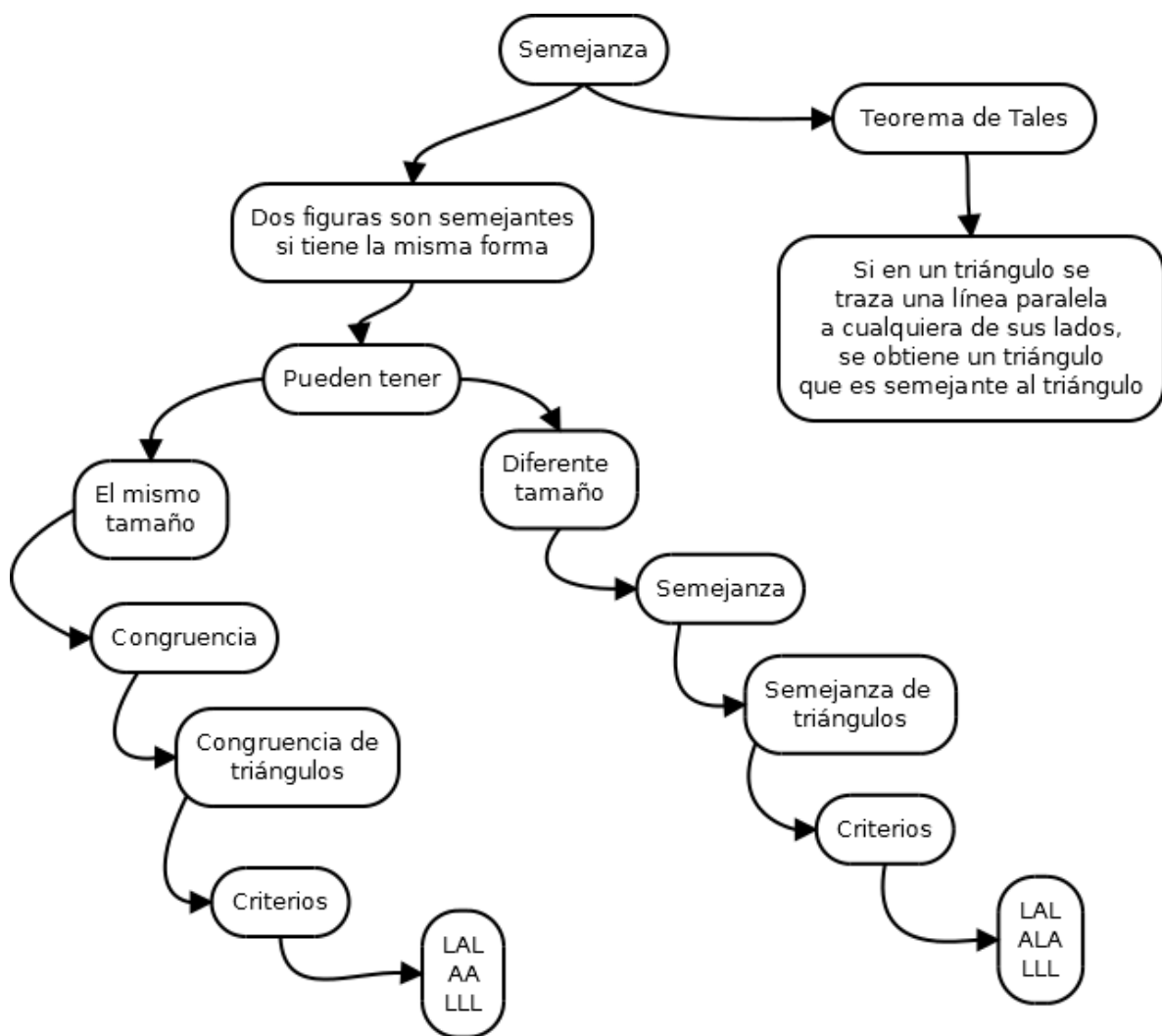
**Razón.** Se llama razón de semejanza (escala) al cociente entre dos longitudes correspondientes.

$$r = a' / a$$

**Proporción.** Se llama proporción a la igualdad de dos razones.

**Cateto.** Un cateto, en geometría, es cualquiera de los dos lados menores de un triángulo rectángulo, los que conforman el ángulo recto.

**Hipotenusa.** La hipotenusa es el lado de mayor longitud de un triángulo rectángulo y además es el lado opuesto al ángulo recto.



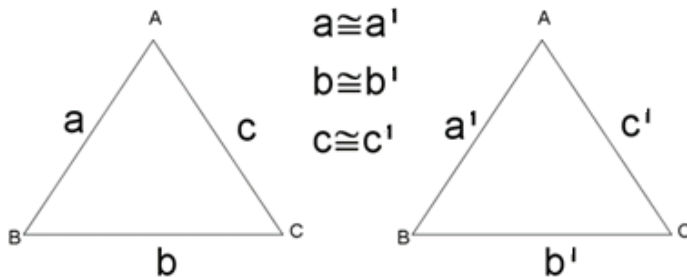
## Congruencia.

La congruencia de triángulos se basa en el estudio de la igualdad entre triángulos, es decir, gracias a esto podemos saber si esos dos triángulos o más son congruentes (iguales) entre sí. Dicho de modo sencillo, nos permite comparar varios triángulos y saber si son iguales (si tienen los mismos ángulos en sus vértices y si sus lados miden lo mismo).

Entonces, sabemos que, si dos triángulos tienen tres ángulos y tres lados iguales entre sí, son iguales (o congruentes), ahora bien, es necesario en todos los casos verificar uno a uno todos esos elementos, para ello vamos a utilizar los llamados criterios de congruencia, viendo cada una de las posibilidades por separado:

### 1º LLL (lado, lado, lado)

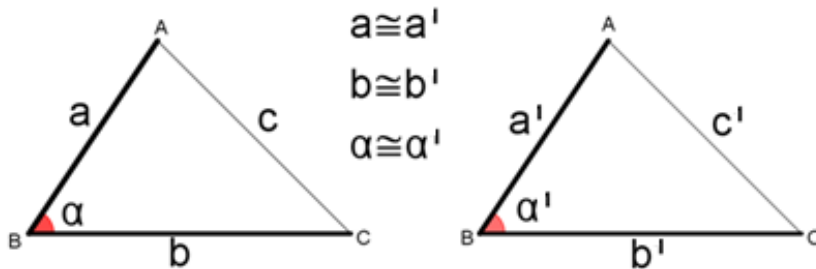
Considerando dos triángulos de lados  $a$ ,  $b$  y  $c$  y  $a'$ ,  $b'$  y  $c'$ , se dice que son congruentes, si sus lados son iguales entre sí, es decir:



### 2º LAL (lado, ángulo, lado)

Considerando los mismos triángulos de lados  $a$ ,  $b$  y  $c$  y  $a'$ ,  $b'$  y  $c'$  respectivamente, se dice que son congruentes si tienen dos lados iguales y el ángulo que se forma con la unión de estos (en el vértice).

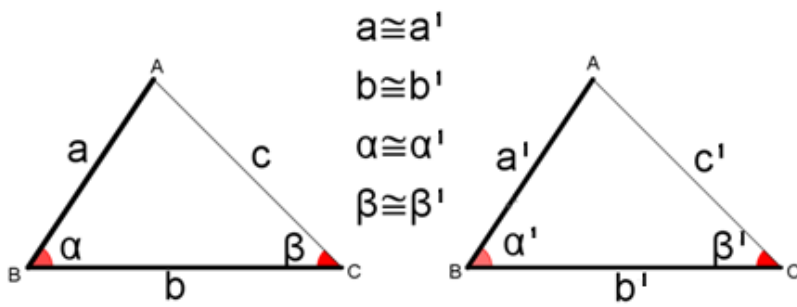
En este caso hemos subrayado en negrita los lados congruentes que forman los ángulos  $\alpha$  y  $\alpha'$ , también congruentes entre ellos, es decir, que tienen la misma amplitud.



### 3º ALA (ángulo, lado, ángulo)

Teniendo un lado igual (que mida lo mismo, es decir, que sea congruente), y con los ángulos que se forman en los extremos de dicho lado también congruentes. A estos ángulos se les denomina adyacentes al lado y los denominaremos  $\alpha$  y  $\beta$  y  $\alpha'$  y  $\beta'$  para los del otro triángulo.

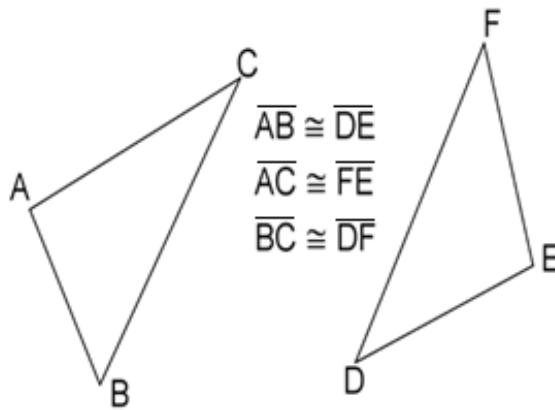




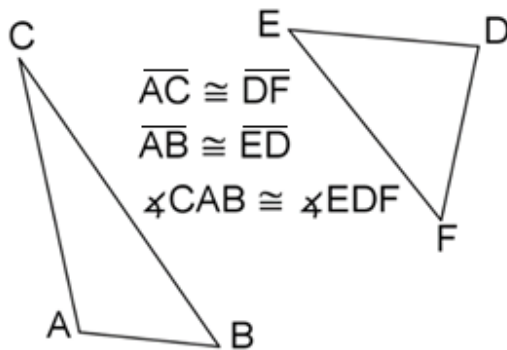
### Ejercicio 1

Considera los siguientes pares de triángulos, en los que se indica los lados o ángulos respectivamente congruentes. ¿En qué casos se puede asegurar la congruencia del par de triángulos? Indica el criterio utilizado en cada caso:

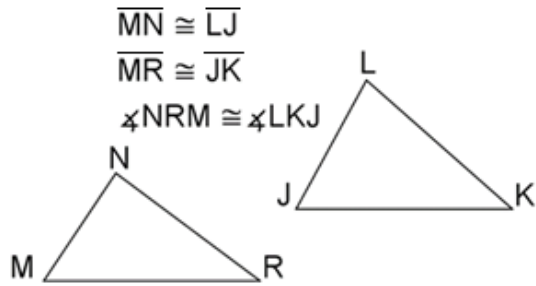
1)



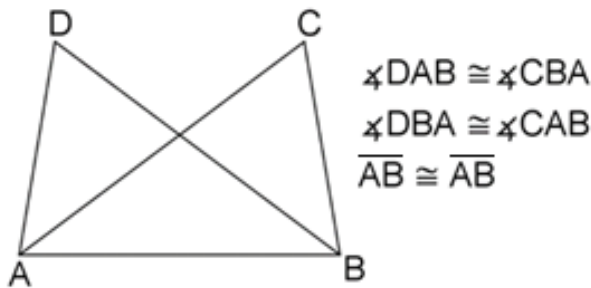
2)



3)

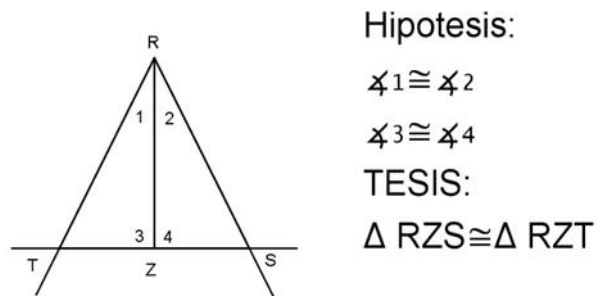


4)



**Ejemplo.** En los siguientes casos demostraremos la congruencia entre triángulos.

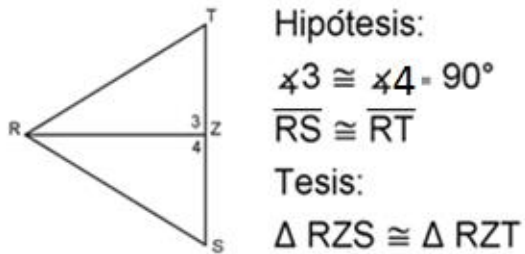
1)



Solución

El  $\overline{RZ}$  es una altura al  $\overline{TS}$  por lo cual se forman 2 triángulos rectángulos por consiguiente el segmento  $\overline{RT} \cong \overline{RS}$  y el  $\hat{T}$  es congruente al  $\hat{S}$ , por lo tanto, el  $\triangle RST$  es un triángulo isósceles y entonces el  $\overline{TZ} \cong \overline{ZS}$ . Aplicando el criterio de LLL de congruencia finalizamos demostrando que el triángulo  $\triangle RZS$  es congruente con el  $\triangle RZT$ .

2)

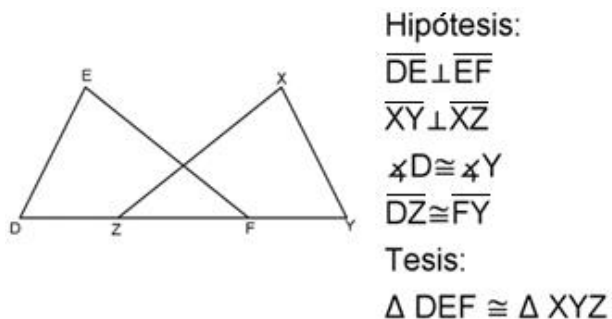


Solución

El  $\triangle RST$  es isósceles por consiguiente el  $\hat{S}$  es igual al  $\hat{T}$ , entonces el  $\overline{RZ}$  es una perpendicular al  $\overline{TS}$  por lo cual se forman 2 triángulos rectángulos, por consiguiente, el  $\overline{RT} \equiv \overline{RS}$  y el  $\hat{T}$  es congruente con el  $\hat{S}$ .

Aplicando el criterio de LLL de congruencia finalizamos demostrando que el triángulo  $\triangle RST$  es un triángulo isósceles y que el  $\triangle RZS \equiv \triangle RZT$ .

3)



Solución

El ángulo con vértice en E es congruente con el ángulo con vértice en X por lo que es igual de  $90^\circ$ . El  $\hat{D}$  es congruente con el  $\hat{Y}$  el  $\overline{DZ}$  es congruente con  $\overline{FY}$  por lo tanto, aplicando el criterio de ALA podemos concluir que  $\triangle DEF \equiv \triangle XYZ$ .

## Ejercicio 2

1) En el siguiente ejercicio establece la definición de congruencia entre dos triángulos.

Explica con tus propias palabras lo que significan los criterios de congruencia LAL, ALA y LLL.

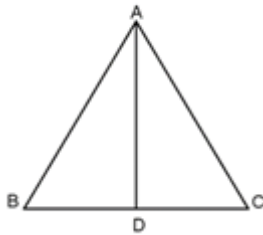
LAL

ALA

LLL

2) En los ejercicios siguientes Analiza la situación e indique cuál de los 3 postulados sobre la congruencia (LLL, LAL o ALA) podrían usarse para probar que los triángulos son congruentes

I.



Datos:

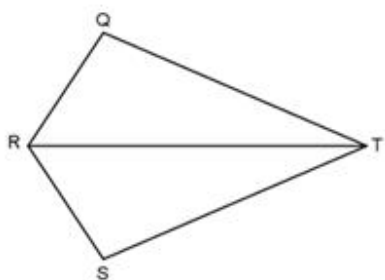
$\overline{AD}$  biseca a  $\overline{BC}$

$\overline{AB} \cong \overline{AC}$

Pruebese:

$\Delta ABD \cong \Delta ACD$

II.



Datos:

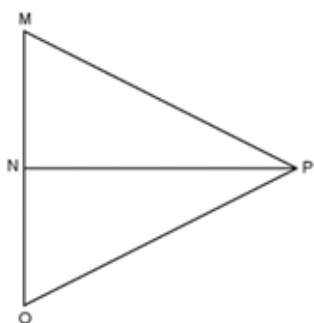
$\overline{RT}$  biseca a  $\angle QRS$

$\overline{RT}$  biseca a  $\angle QTS$

Pruebese:

$\triangle RTQ \cong \triangle RTS$

III.



Datos:

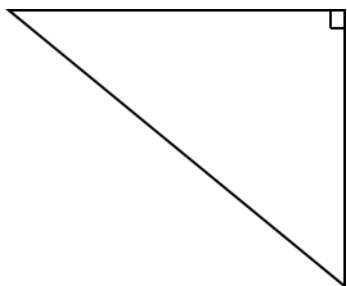
$\overline{NP} \perp \overline{MO}$

$\overline{NP}$  biseca a  $\angle MPO$

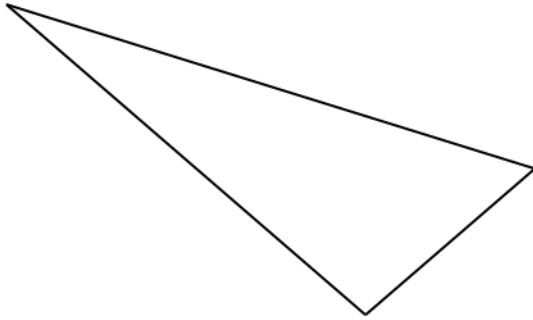
Pruébese:

$\triangle MNP \cong \triangle ONP$

3) Construye un triángulo congruente al siguiente, explicando la forma en que lo construiste



- 4) Con el criterio de congruencia LLL, construye un triángulo congruente al siguiente.

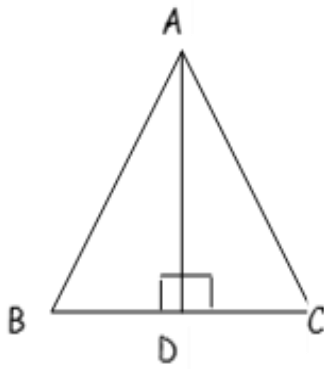


### Ejercicio 3

En los siguientes ejercicios analiza la situación e indica cuál de los tres criterios (LLL, ALA y LAL) se puede utilizar para demostrar que los triángulos son congruentes, como en el ejemplo.

- a) En la figura  $\overline{AD}$  biseca a  $\overline{BC}$ .  $\overline{AB} \cong \overline{AC}$

Justifica que  $\triangle ABD \cong \triangle ACD$



que  $\overline{AD} = \overline{AD}$

Justificación:

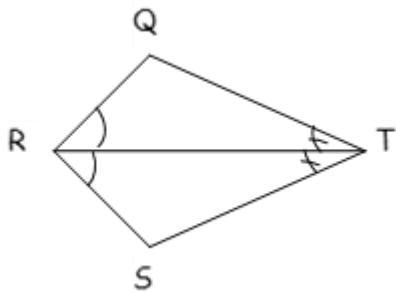
Con los datos que se proporcionan tenemos que:

- \*  $\overline{AD}$  divide en 2 partes iguales (biseca) al segmento  $\overline{BC}$ , por lo que  $\overline{BD} = \overline{DC}$
- \*  $\overline{AB}$  es congruente a  $\overline{AC}$  por lo que  $\overline{AB} = \overline{AC}$
- \*  $\overline{AD}$  es lado común de los dos triángulos que se forman, por lo

Por lo anterior, el criterio mediante el cual se puede justificar que  $\triangle ABD \cong \triangle ACD$  es el LLL

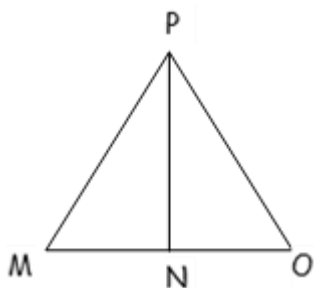
1) En la figura,  $\overline{RT}$  biseca al ángulo  $\widehat{QRS}$  y  $\overline{RT}$  biseca al ángulo  $\widehat{QTS}$ .

Justifica que  $\triangle RTQ \cong \triangle RTS$

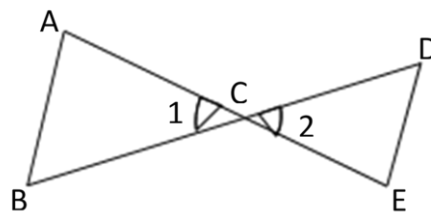


2) En la figura  $\overline{NP} \perp \overline{MO}$  y  $\overline{NP}$  biseca al ángulo  $\widehat{MPO}$  y, por lo tanto,  $\triangle MPO$  es isósceles.

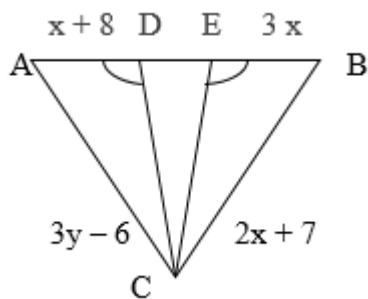
Justifica que  $\triangle MPN \cong \triangle NPO$



3) En la figura  $\overline{AE}$  y  $\overline{BD}$  se bisecan. Justifica que  $\triangle ABC \cong \triangle EDC$



**Ejemplo**



**Justificación**

$$x + 8 = 3x \quad \text{Ec. 1}$$

Por ser lados iguales

$$3y - 6 = 2x + 7 \quad \text{Ec. 2}$$

De la ecuación 1 se tiene que:

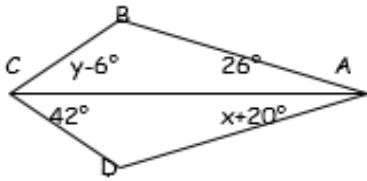
$$3x - x = 8, \text{ de donde}$$

$$x = 4$$

**Ejercicio 4.** En cada una de las siguientes figuras los triángulos son congruentes. Halla el valor de  $x, y$ .

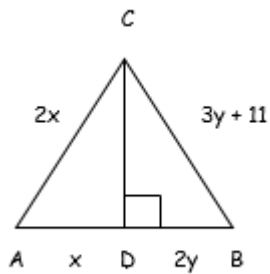
1)

Justificación



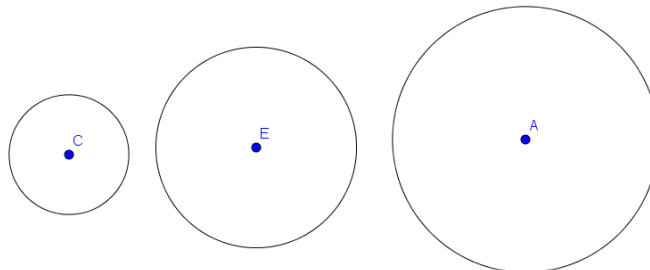
2)

Justificación

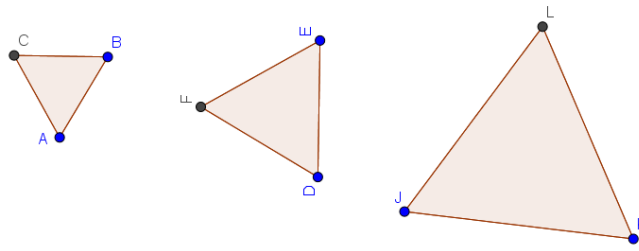


## Semejanza

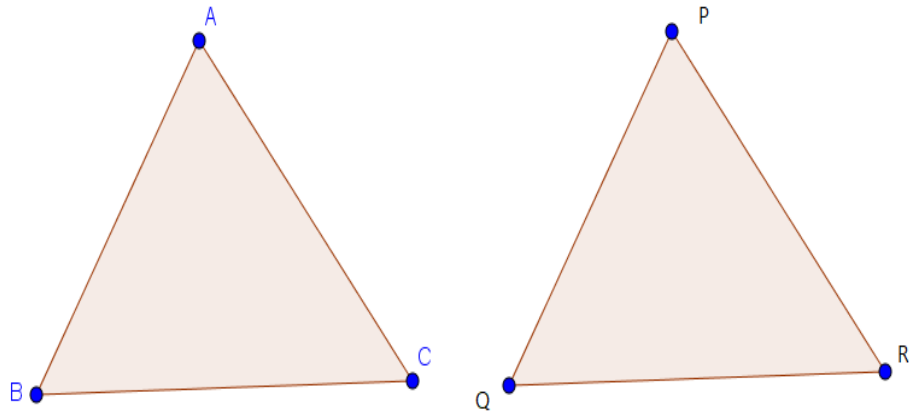
En geometría, el término “semejante” se usa en el sentido de que al comparar dos o más figuras se dice que tienen la misma forma. Entenderemos como figuras semejantes aquellas que tienen la misma forma, pero no necesariamente el mismo tamaño. Así, los círculos que se muestran enseguida son claramente semejantes. Lo mismo sucede con los triángulos equiláteros.





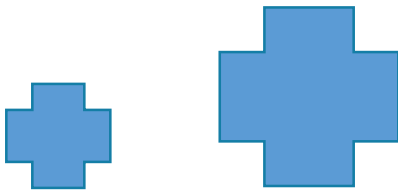


¿Dos triángulos congruentes como el  $\triangle ABC$  y el  $\triangle PQR$  son semejantes? Explica tu respuesta.

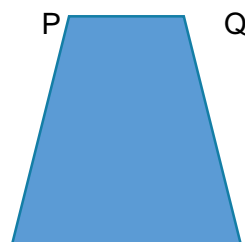
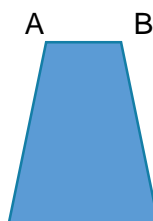


### Ejemplo

Dadas las figuras siguientes, indica si son semejantes, y explica por qué.



Las cruces son figuras semejantes pues tienen la misma forma, aunque diferente tamaño.



C

D

R

S

El trapecio ABCD es semejante al trapecio PQRS, pues tienen la misma forma, aunque diferente tamaño.

Nótese que los ángulos correspondientes del trapecio ABCD son iguales a los ángulos correspondientes del trapecio PQRS, es decir,  $\hat{A} = \hat{P}, \hat{B} = \hat{Q}, \hat{C} = \hat{R}, \hat{D} = \hat{S}$  Y que los lados correspondientes del trapecio ABCD son más pequeños que los lados correspondientes del trapecio PQRS.

### Ejercicio 5

- 1) Explica cuando dos figuras son semejantes.

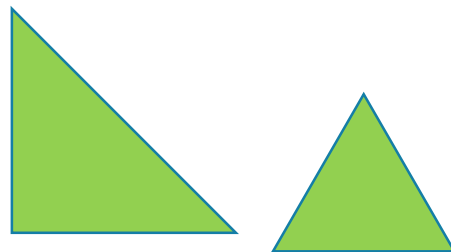
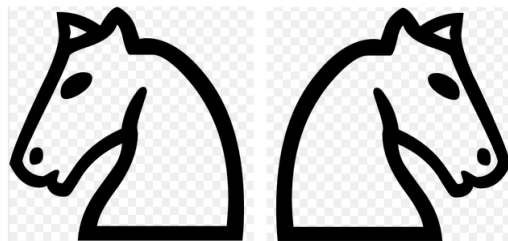
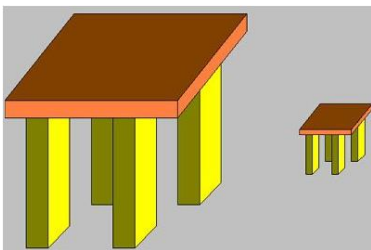
---

---

---

---

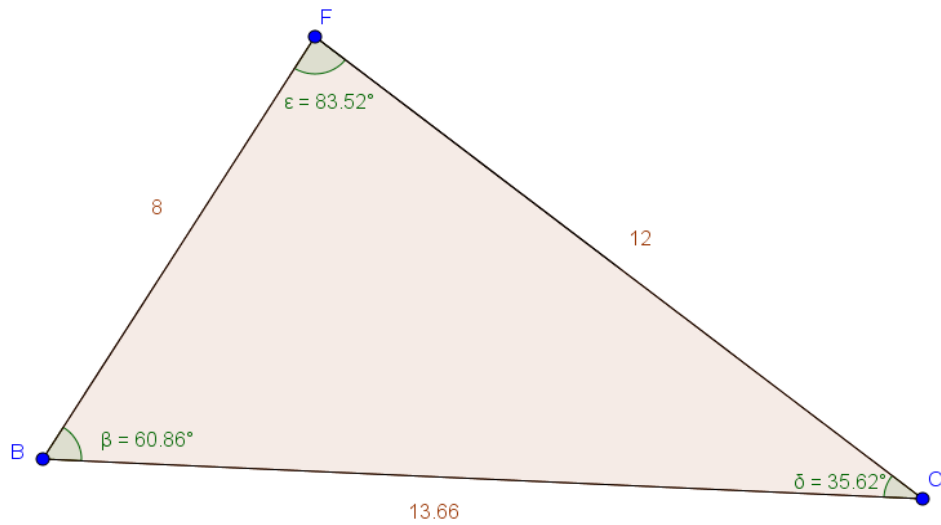
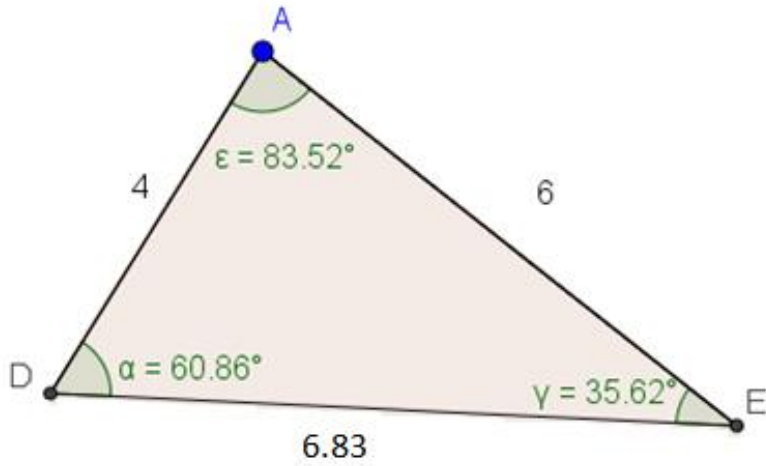
- 2) Figuras semejantes: En las siguientes figuras indica cuales son semejantes y cuales no lo son y explica por qué.



## Semejanza de triángulos

La semejanza está identificada a la proporcionalidad, dado que los lados correspondientes de polígonos semejantes son proporcionales y sus ángulos, iguales.

Por ejemplo, consideremos los  $\triangle ADE$  y  $\triangle FBC$  de la siguiente figura.



Observa que sus ángulos respectivos son iguales y que cada lado del triángulo FBC mide el doble que el respectivo del  $\triangle ADE$ . Los triángulos anteriores son semejantes, lo que se denota como  $\triangle FBC \approx \triangle ADE$ . A los pares de lados, uno de cada triángulo que se oponen a los ángulos congruentes (también uno en cada triángulo) se les llama lados homólogos o correspondientes; así,  $\overline{FB}$  es el lado homólogo de  $\overline{AD}$ ,  $\overline{BC}$  es el lado homólogo de  $\overline{DE}$ , y  $\overline{FC}$  es el lado homólogo de  $\overline{AE}$ .

Asimismo, observa que sus lados son proporcionales esto es,

$$\frac{\overline{FB}}{\overline{AD}} = \frac{8}{4} = 2 ; \quad \frac{\overline{BC}}{\overline{DE}} = \frac{13.66}{6.83} = 2 ; \quad \frac{\overline{FC}}{\overline{AE}} = \frac{12}{6} = 2$$

la razón de semejanza es 2

O bien si comparamos los lados del triángulo ADE con los lados homólogos del triángulo FBC obtenemos;

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{FB}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} ; \quad \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}} = \frac{6.83}{13.66} = \frac{1}{2} ; \quad \frac{\overline{AE}}{\overline{FC}} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

la razón de semejanza es  $\frac{1}{2}$

La razón de semejanza de los lados homólogos o correspondientes se llama también razón o constante de proporcionalidad.

### Ejercicio 6.

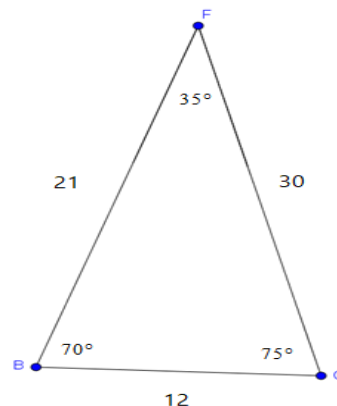
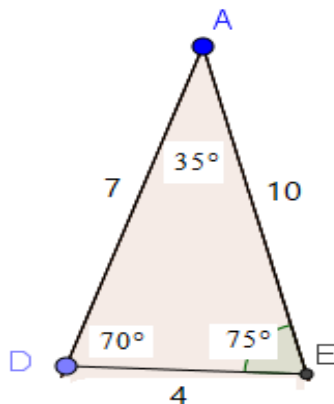
1) Dos triángulos son semejantes cuando \_\_\_\_\_

---



---

2) Justifique la semejanza de los siguientes triángulos haciendo uso de la definición



## Criterios de semejanza de triángulos

### Ejercicio 7

- 1) Explica lo que significan los criterios de semejanza LAL, AA y LLL.

LAL \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

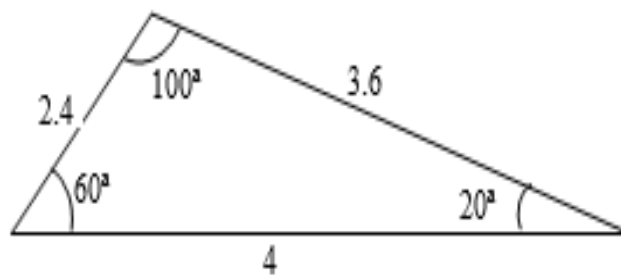
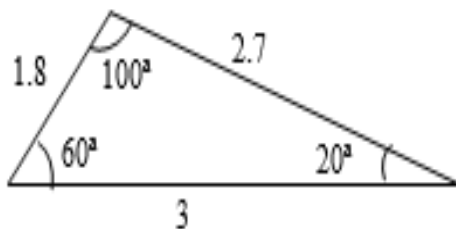
AA \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

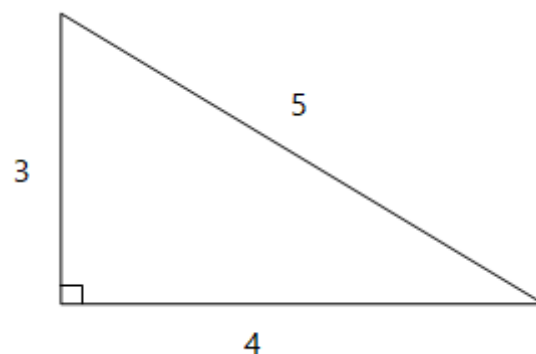
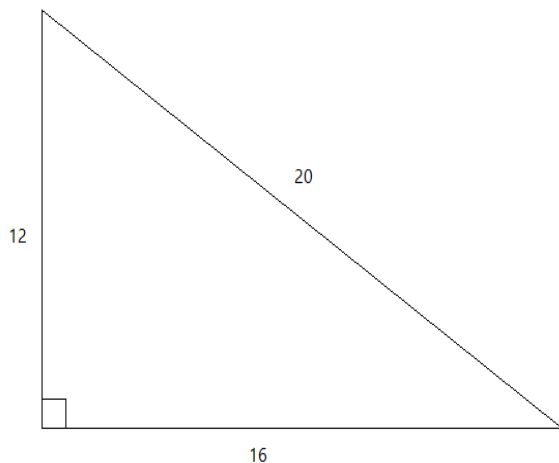
LLL \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

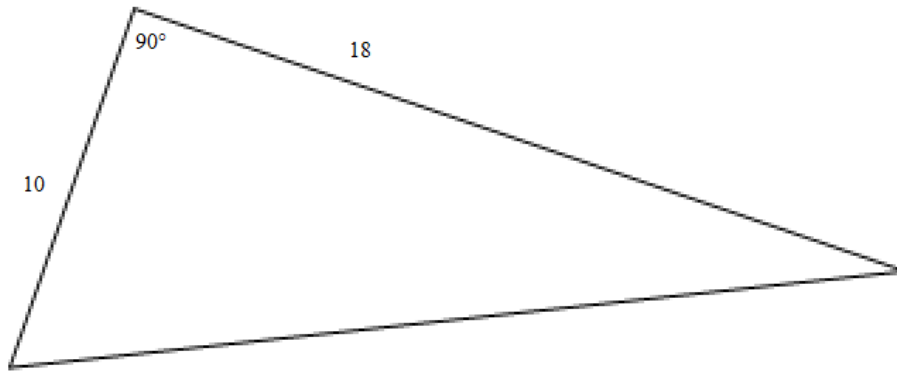
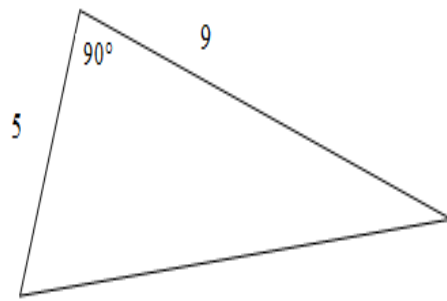
- 2) Los siguientes triángulos son semejantes. Encuentra la razón de semejanza al comparar el triángulo pequeño con el grande.



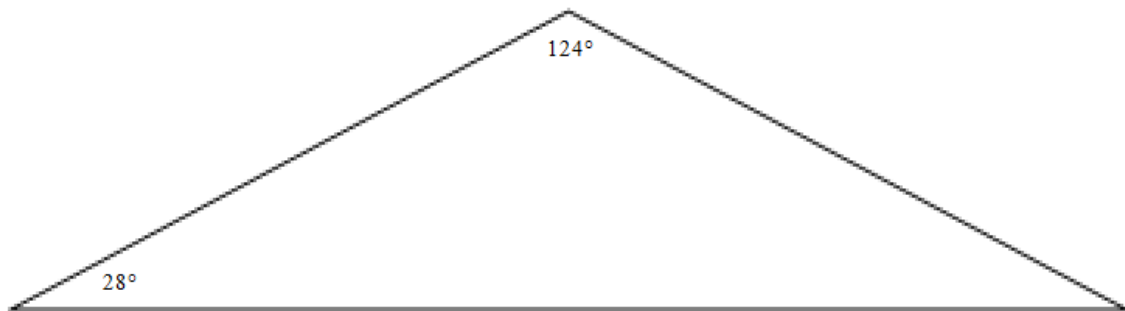
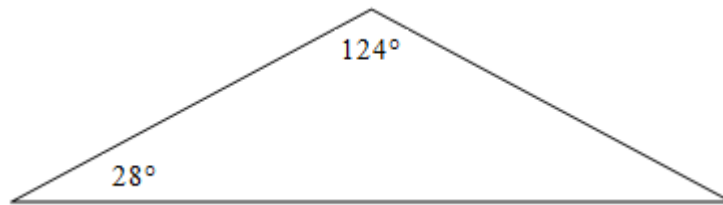
- 3) Indica por qué criterio los siguientes triángulos son semejantes. Justifica tu respuesta.



b)



c)



## Razón entre perímetros y entre áreas de triángulos semejantes

### Ejercicio 8

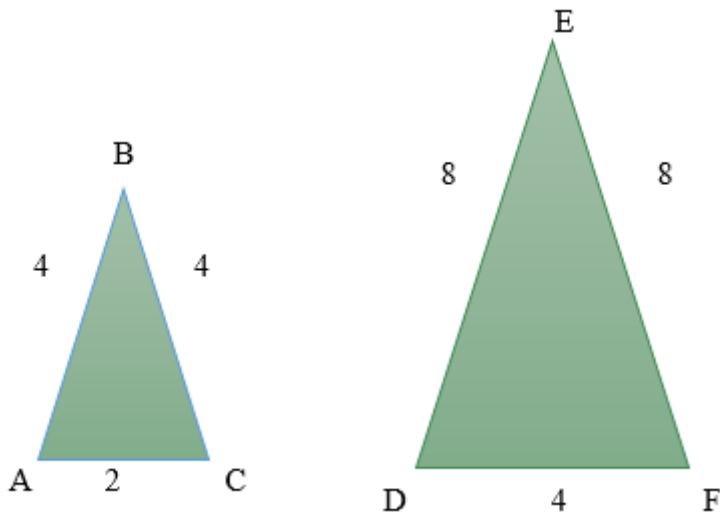
- 1) Explica cómo es la razón entre los perímetros de triángulos semejantes y la razón de semejanza.

---

---

---

- 2) Los triángulos ABC y DEF son semejantes encuentra el perímetro de cada triángulo y la razón entre sus perímetros. Explica cómo es la razón entre los perímetros y la razón entre los lados de los triángulos.



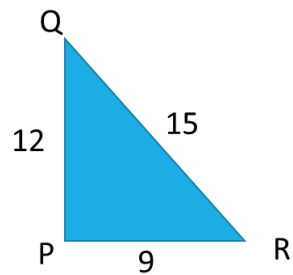
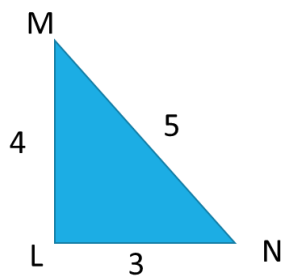
- 3) Explica cómo es la razón entre las áreas de triángulos semejantes.

---

---

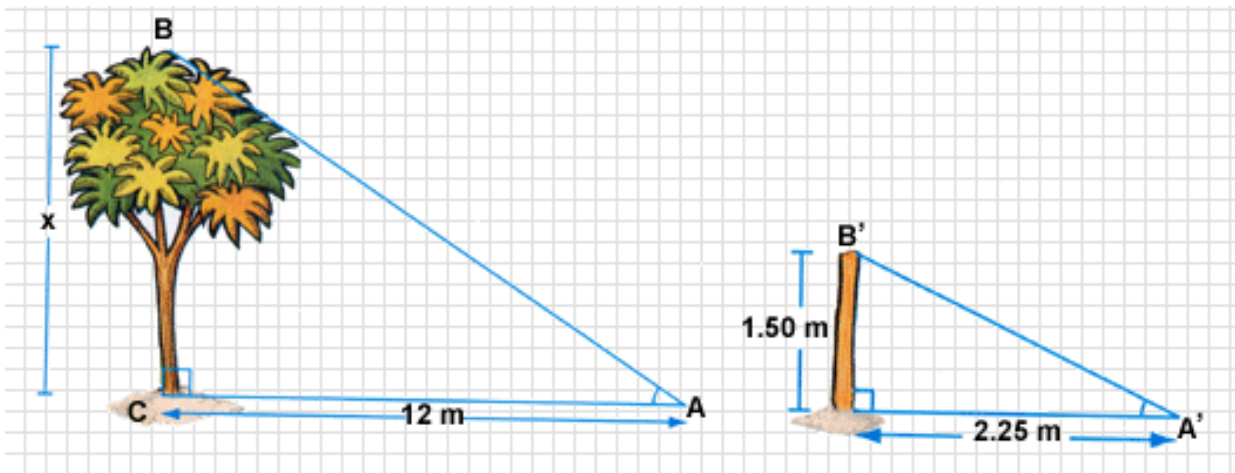
---

- 4) Los triángulos MNL y PQR son semejantes encuentra el área de cada triángulo y la razón entre sus áreas. Explica cómo es la razón entre las áreas y la razón entre los lados de los triángulos.

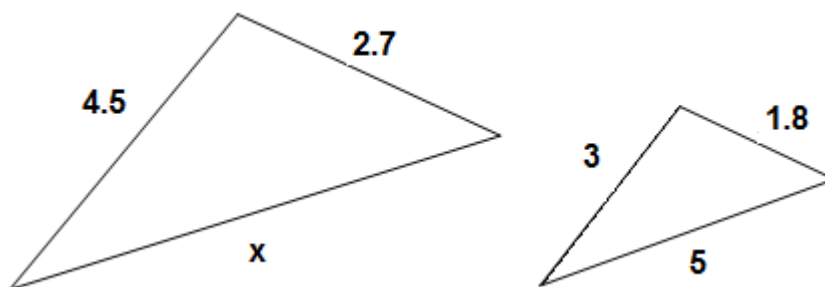


- 5) Encuentra el valor de  $x$ . ¿Son semejantes las figuras que se forman con la sombra del árbol y la vara? Razona la respuesta. En caso afirmativo, halla la razón de semejanza. ¿Cuál sería la escala entre ambas?

Halla sus áreas y perímetros. Halla la razón de sus áreas. Halla la razón de sus perímetros.

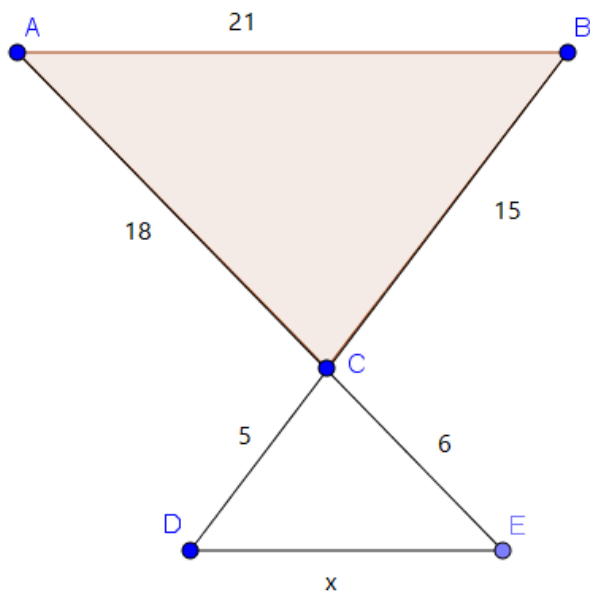


- 6) Dado que los siguientes triángulos son semejantes encuentra el valor de  $x$ .

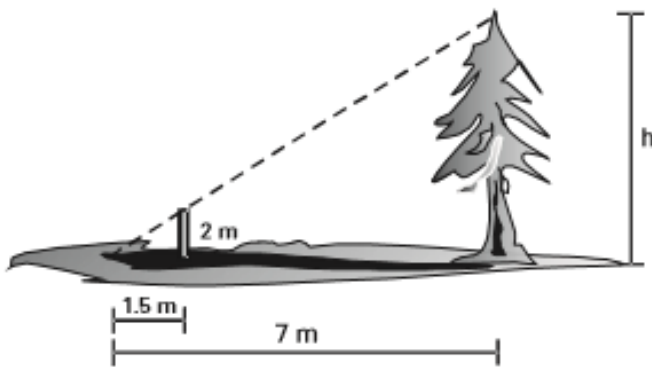


En la siguiente figura,  $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ . Halla el valor de  $x$ .





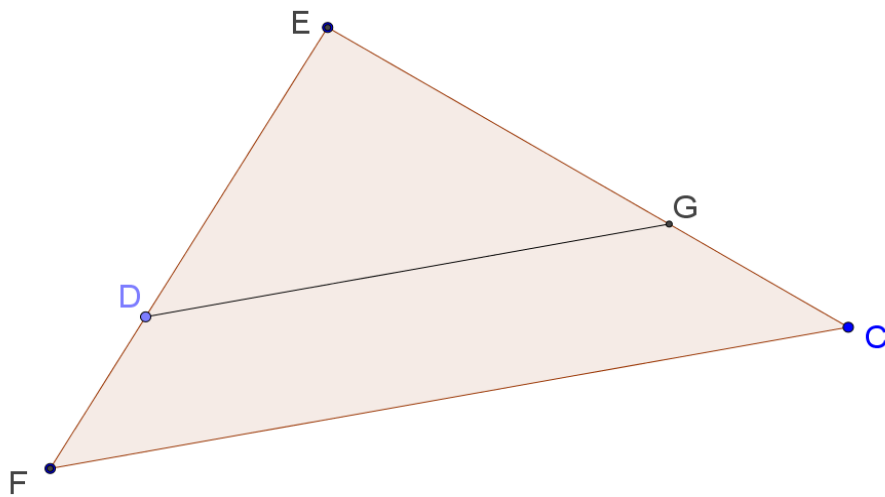
- 7) Calcula la altura de un árbol que proyecta una sombra de 7 metros y, en el mismo plano, una barra vertical que mide 2 metros de altura proyecta una sombra de 1.5 metros.



### Teorema de Tales

#### Teorema de Tales

Si en un triángulo se traza una línea paralela a cualquiera de sus lados, se obtiene un triángulo que es semejante al triángulo dado



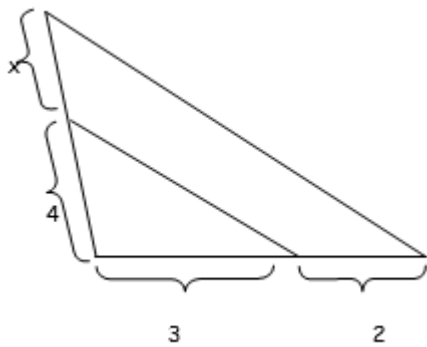
En el  $\triangle EFC$  como  $\overline{DG} \parallel \overline{FC}$  entonces  $\triangle EFC \sim \triangle EDG$  de donde:

$$\frac{\overline{EF}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{FC}}{\overline{DG}} = \frac{\overline{EC}}{\overline{EG}}$$

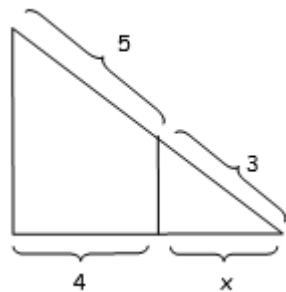
### Ejercicio 9

En los siguientes ejercicios determina el valor de x.

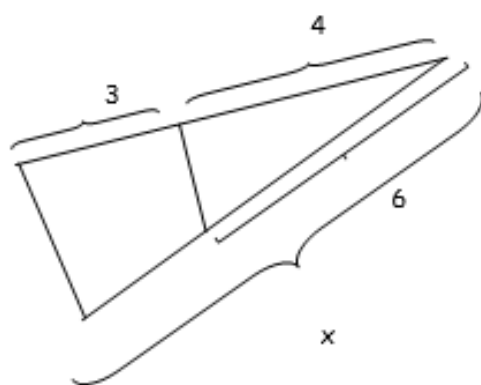
1)



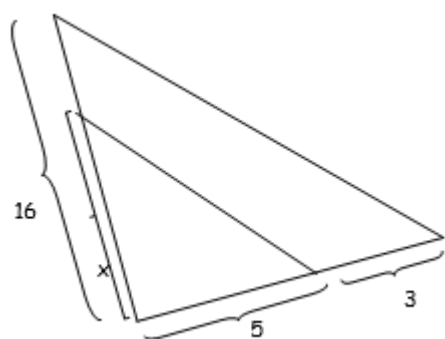
2)



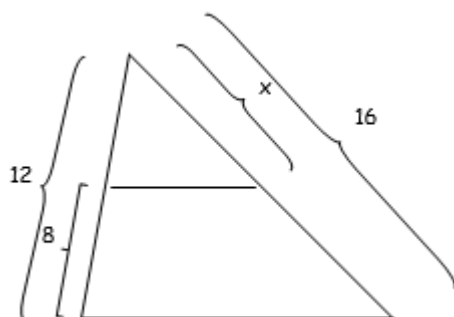
3)



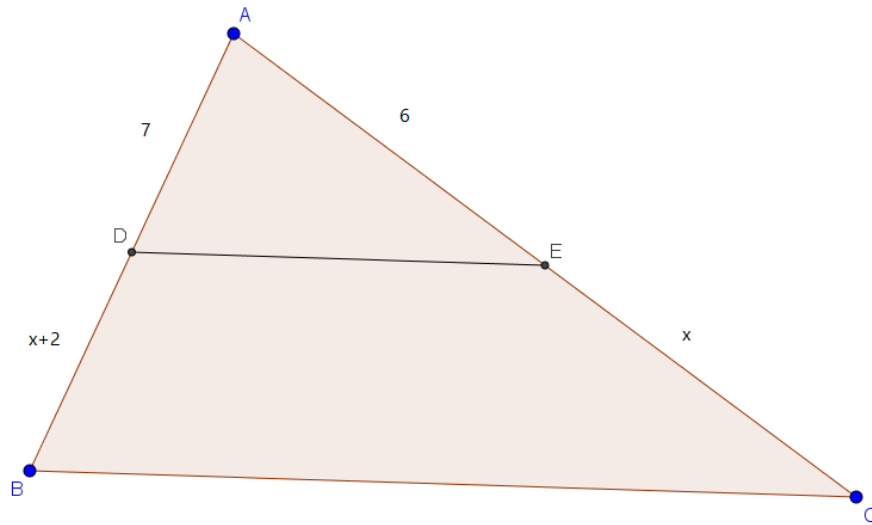
4)



5)

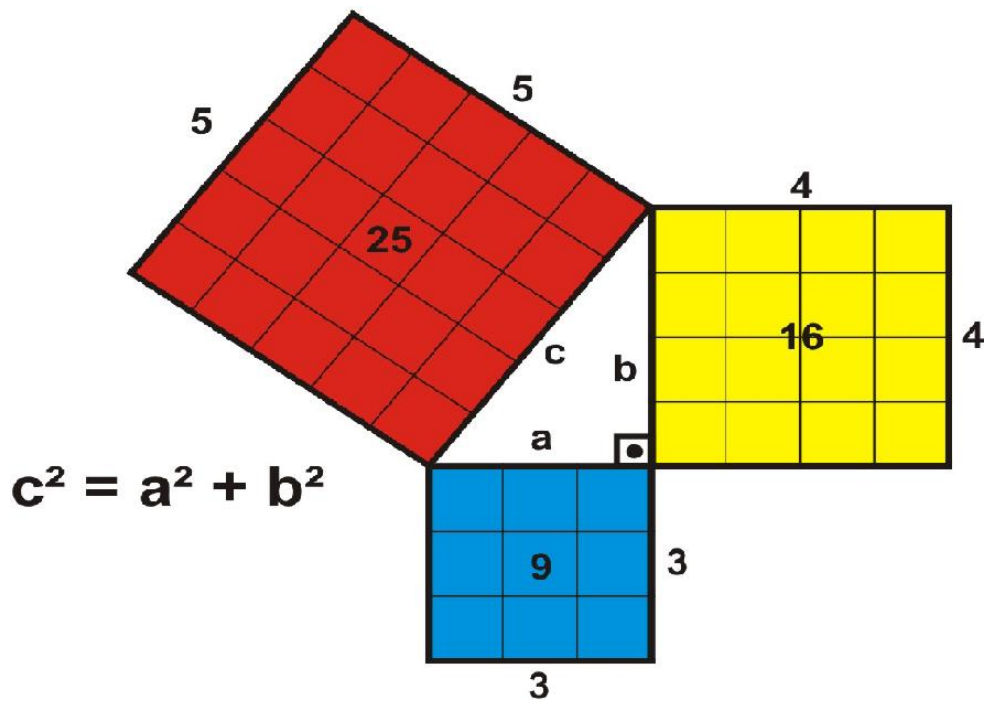


6) En el siguiente triángulo,  $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$  hallar el valor de  $x$ .



### Teorema de Pitágoras

Consideremos un triángulo rectángulo cuyos lados miden 3, 4 y 5 unidades.



Los lados que forman el ángulo recto se llaman catetos. El lado opuesto al ángulo recto se llama hipotenusa, la cual mide 5 unidades en este caso.

El área del cuadrado mayor es igual a la suma de las áreas de los cuadrados menores, es decir:

$$(5)^2 = (3)^2 + (4)^2$$

$$25 = 9 + 16$$

Esta relación se cumple en todo triángulo rectángulo y recibe el nombre de Teorema de Pitágoras.

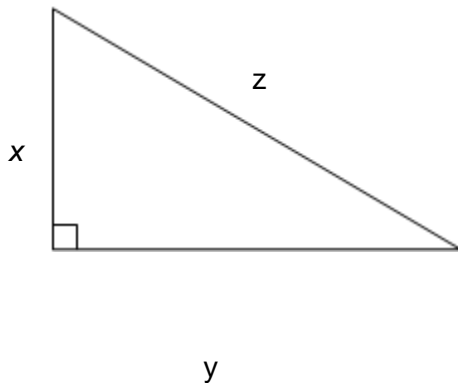
#### Teorema de Pitágoras

En todo triángulo rectángulo la suma de las áreas de los cuadrados contruidos sobre los catetos es igual al área del cuadrado contruido sobre la hipotenusa

#### Ejercicio 10

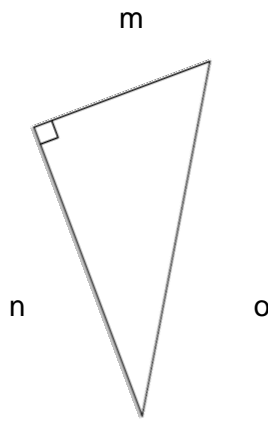
Enuncia el teorema de Pitágoras con los datos de las siguientes figuras

1)



Teorema: \_\_\_\_\_

2)



Teorema: \_\_\_\_\_

### Ejemplo.

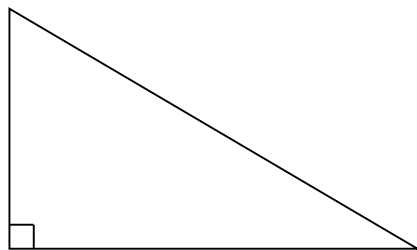
Contesta de acuerdo a los datos que se proporcionan, acerca de un triángulo rectángulo.

¿Cuánto mide un cateto si la hipotenusa y el otro cateto miden 20 y 12 respectivamente?

Solución

Hipotenusa = 20, cateto = 12. Teorema de Pitágoras  $a^2 + b^2 = c^2$

Sustituyendo se tiene  $12^2 + b^2 = 20^2$



$$b^2 = 20^2 - 12^2$$

$$b^2 = 400 - 144$$

$$b^2 = 256$$

$$b = \sqrt{256}$$

$$b = 16$$

**Ejercicio 11.** Contesta cada pregunta, de acuerdo a los datos que se proporcionan, acerca de un triángulo rectángulo.

1. ¿Cuál es el valor de la hipotenusa si los catetos miden 6 y 8?
2. ¿Cuál es el valor de la hipotenusa si los catetos miden 5 y 7?
3. ¿Cuánto mide la hipotenusa si los catetos miden  $\sqrt{5}$  y 3?
4. ¿Cuánto mide un cateto si el otro cateto y la hipotenusa miden  $\sqrt{3}$  y  $3\sqrt{3}$  respectivamente?
5. ¿Cuánto mide un cateto si el otro cateto mide  $\sqrt{5}$  y la hipotenusa  $\sqrt{17}$  ?

**Ejemplo.** Indica si en la siguiente tercia sus medidas corresponden a los lados de un triángulo rectángulo. Justifica tu respuesta.

2, 6,  $2\sqrt{10}$       Justificación:

$$(2\sqrt{10})^2 = (2)^2 + (6)^2$$

$$4(10) = 4 + 36$$

$$40 = 40$$

∴ es un triángulo rectángulo

**Ejercicio 12.** Indica cuáles de las siguientes ternas son medidas posibles de los lados de un triángulo rectángulo y cuáles no. Justifica tus respuestas.

1) 4, 2, 20

2) 12, 5 y 13

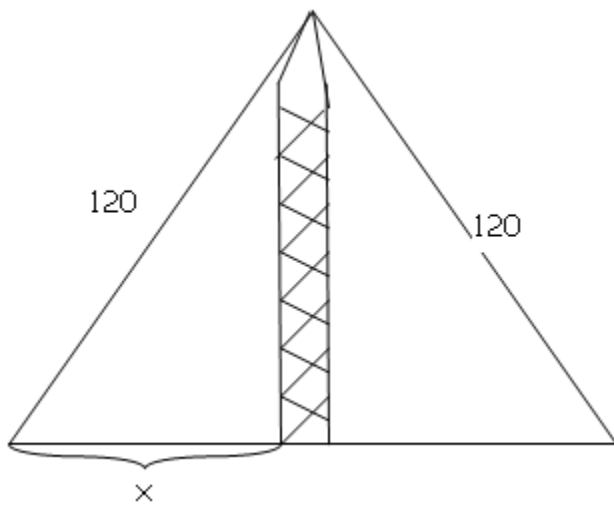
3) 36, 64, 110

4) 1, 1, 2

5) 5, 6, 8

**Ejemplo**

a) Para darle mayor estabilidad a una antena de 72m de altura, en una estación radiofónica se desea colocar tirantes de 120 m. Si se proyecta tender los tirantes desde la parte más alta de la torre ¿A qué distancia del pie de ésta deben construirse las bases de concreto para fijar dichos tirantes?



Justificación

$$x^2 + 72^2 = 120^2$$

$$x^2 = 120^2 - 72^2$$

$$x^2 = 14400 - 5184$$

$$x^2 = 9216$$

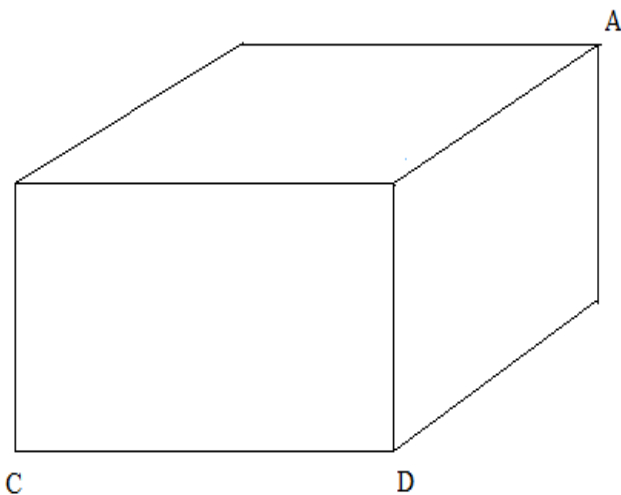
$$x = \sqrt{9216}$$

$$x = 96$$

**Ejercicio 13.** Resuelve los siguientes problemas, como en el siguiente ejemplo.

1) Un terreno mide 2 000 m de largo por 1 500 m de ancho, pero se localiza en medio una colina que impide una medición directa ¿cuánto mide la diagonal de este terreno?

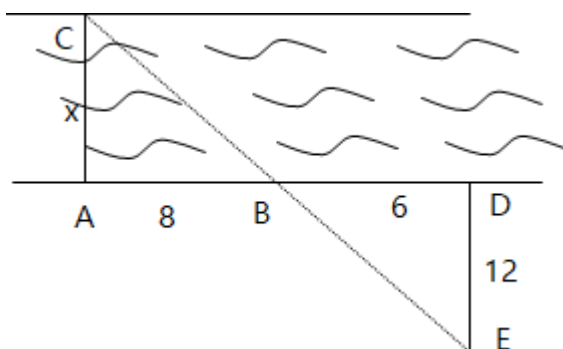
2) Un salón mide 3 m de altura, 6 m de ancho y 10m de largo ( $\overline{CD}$ ). Si un insecto debe caminar desde A (una esquina) hasta B (el punto medio del lado  $\overline{CD}$ ). ¿Cuál es la distancia mínima que deberá caminar el insecto para ir de A a B?





3) Se tiene una pirámide de base cuadrada. Si los triángulos son equiláteros y sus lados miden 2 m. ¿Cuál es la altura de la pirámide?

4) Para determinar el ancho AC de un río, un hombre tomó las medidas indicadas en la figura siguiente en metros. El  $\overline{AC}$  es perpendicular  $\overline{AD}$  y  $\overline{BD}$  perpendicular a  $\overline{DE}$ , ¿cuáles la anchura del río?



5) En una urbanización se han protegido 310 ventanas cuadradas de 126 cm de lado con una cinta adhesiva especial, como se ve en la figura. ¿Cuántos metros de cinta se han empleado?



## Unidad 3 TRIGONOMETRÍA

### Presentación.

En esta unidad el alumno comprenderá los conceptos de razones e identidades trigonométricas, así como las leyes de senos y cosenos mediante la resolución de problemas en distintos contextos que involucren triángulos con la finalidad de construir conocimientos que serán empleados en asignaturas posteriores.

### Conceptos claves.

**Numero Racional:** es un número que se puede expresar de la forma  $a/b$  donde  $a, b$  son números enteros y  $b \neq 0$ .

**Razón:** Se llama razón a la relación que se establece entre 2 magnitudes y se representa como un numero racional.

**Recíproco de un numero:** Es el inverso multiplicativo de un número.

**Semejanza:** Dos polígonos son semejantes cuando las medidas de sus lados homólogos guardan la misma proporción y sus ángulos correspondientes son congruentes.

**Teorema de Pitágoras:** En todo triángulo Rectángulo la suma de las áreas que se dibujan sobre los catetos es equivalente al área del cuadrado que se dibuja sobre la hipotenusa.

La **trigonometría** es una rama de la matemática cuyo significado etimológico es la medición de los triángulos.

En términos generales, la trigonometría es el estudio de las razones trigonométricas: Seno, Coseno, Tangente, Cotangente, Secante y cosecante Interviene directa o indirectamente en las demás ramas de la matemática y se aplica en todos aquellos ámbitos donde se requieren medidas de precisión.

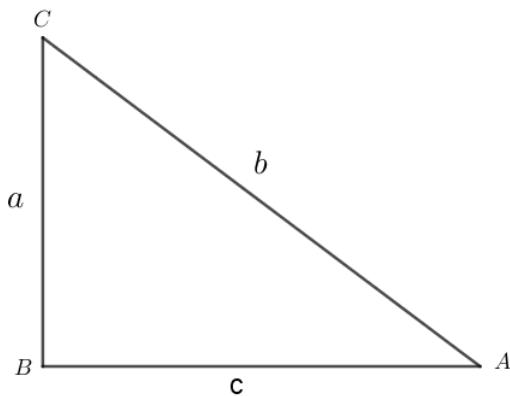
Posee numerosas aplicaciones, entre las que se encuentran: las técnicas de triangulación, por ejemplo, son usadas en astronomía para medir distancias a estrellas próximas, en la medición de distancias entre puntos geográficos, y en sistemas globales de navegación por satélites.

## RAZONES TRIGONOMETRICAS.

Una razón es la expresión de la forma  $\frac{a}{b}$  siendo  $b \neq 0$ , donde a, b son números reales que están expresados en las mismas unidades. En otras palabras, una razón es la comparación de dos cantidades.

Las razones que existen entre los lados de un triángulo rectángulo cambian de acuerdo al ángulo de que se trate. Las razones son funciones del ángulo. A estas razones se les llama **funciones trigonométricas**.

Sea el triángulo rectángulo ABC, con ángulos agudos A y C.



En este triángulo ***b*** es la hipotenusa. Si nos referimos al ángulo agudo A, ***a*** es el **cateto opuesto** y ***c*** es el **cateto adyacente** al ángulo de referencia

Las razones que resultan de comparar los lados de un triángulo reciben los nombres de ***seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante*** que se pueden representar de forma abreviada como: sen, cos, tan, cotan, sec y csc respectivamente.

Para el ángulo agudo A estas funciones las podemos definir de la siguiente manera:

$$\sin A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{b}$$

$$\cos A = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{b}$$

$$\tan A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{a}{c}$$

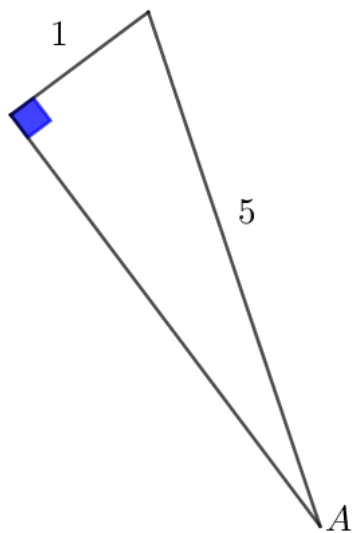
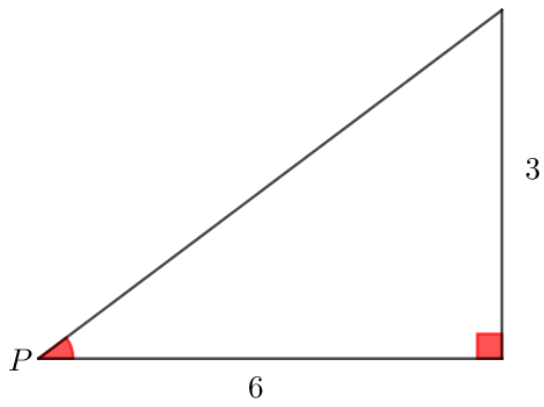
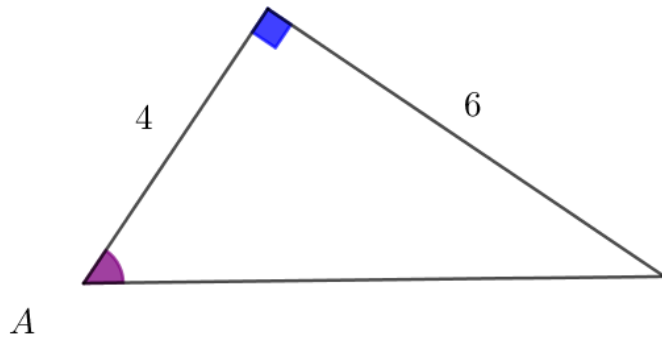
$$\cotan A = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{c}{a}$$

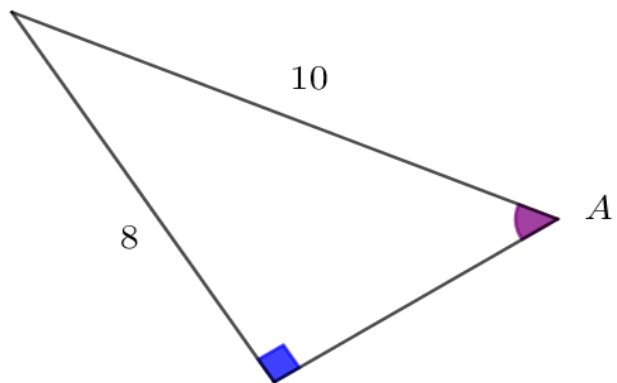
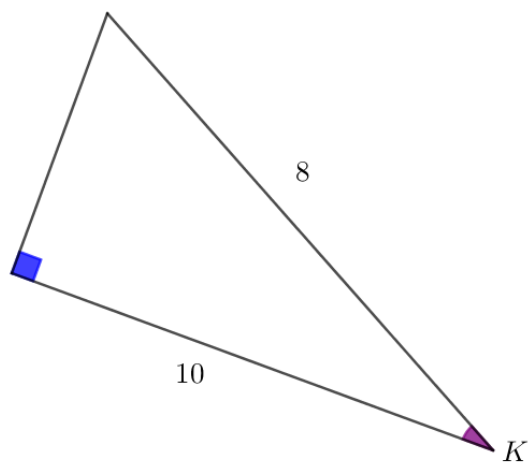
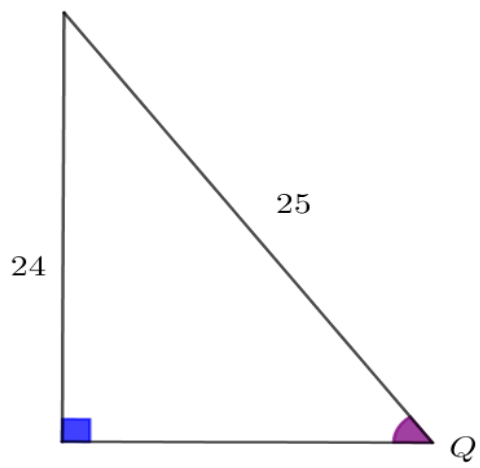
$$\sec A = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{b}{c}$$

$$\csc A = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{b}{a}$$

### Actividad 1

Expresa las razones trigonométricas correspondientes a los ángulos señalados con las letras mayúsculas en algunos casos debes de aplicar el teorema de Pitágoras





## Razones Trigonómicas Recíprocas

Dos fracciones son recíprocas cuando su producto es igual a la unidad por ejemplo si hacemos la multiplicación de  $\frac{5}{2}$  y  $\frac{2}{5}$  el resultado es igual a la unidad esto implica que las dos fracciones sean recíprocas.

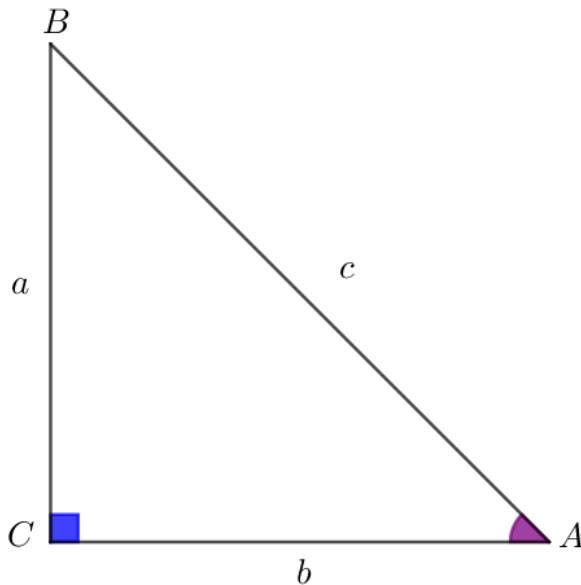
$$\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{5}{2}\right) = \left(\frac{10}{10}\right) = 1$$

$$\left(\frac{7}{9}\right)\left(\frac{9}{7}\right) = \left(\frac{63}{63}\right) = 1$$

$$(8)\left(\frac{1}{8}\right) = \left(\frac{8}{8}\right) = 1$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)(3) = \left(\frac{3}{3}\right) = 1$$

Si comparamos las 6 razones trigonométricas de un ángulo agudo, observamos que son recíprocas las siguientes funciones:



$$\sin A = \frac{a}{c}$$

$$\cos A = \frac{b}{c}$$

$$\tan A = \frac{a}{b}$$

$$\cotan A = \frac{b}{a}$$

$$\sec A = \frac{c}{b}$$

$$\csc A = \frac{c}{a}$$

Esto implica entonces que las relaciones queden de la siguiente manera:

$$\text{sen } A \cdot \csc A = 1 \quad (1)$$

$$\cos A \cdot \sec A = 1 \quad (2)$$

$$\tan A \cdot \cotan A = 1 \quad (3)$$

Despejando a  $\text{sen } A$  y  $\csc A$  de la ecuacion 1

$$\text{sen } A = \frac{1}{\csc A} \quad (4)$$

$$\csc A = \frac{1}{\text{sen } A} \quad (5)$$

Despejando a  $\cos A$  y  $\sec A$  de la ecuacion 2

$$\cos A = \frac{1}{\sec A} \quad (6)$$

$$\sec A = \frac{1}{\cos A} \quad (7)$$

Despejando a  $\tan A$  y  $\cotan A$  de la ecuacion 3

$$\tan A = \frac{1}{\cotan A} \quad (8)$$

$$\cotan A = \frac{1}{\tan A} \quad (9)$$

En las Calculadoras Científicas generalmente aparecen las tres primeras funciones que son Seno, Coseno y Tangente por lo que se hace confuso al estudiante determinar los valores de las funciones Cotangente, secante y Cosecante para ello ocuparemos las formulas 5, 7 y 9.

Ejemplos:

Determinar los valores de las siguientes Funciones Trigonómicas.

$$\csc 30^\circ = \frac{1}{\sen 30^\circ} = 2$$

$$\sec 45^\circ = \frac{1}{\cos 45^\circ} = \sqrt{2} \approx 1.41$$

$$\cotan 60^\circ = \frac{1}{\tan 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.57$$

$$\csc 15^\circ = \frac{1}{\sen 15^\circ} = \sqrt{6} + \sqrt{2} \approx 3.86$$

$$\cotan 30^\circ = \frac{1}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3} \approx 1.73$$

$$\sec 60^\circ = \frac{1}{\cos 60^\circ} = 2$$

### **Ejercicios**

1.-Utilizando la calculadora científica determinar el valor de las siguientes funciones trigonométricas.

$$\csc 10^\circ =$$

$$\sen 30^\circ =$$

$$\cos 45^\circ =$$

$$\tan 60^\circ =$$



$$\sec 35^\circ =$$

$$\cotan 30^\circ =$$

$$\sen 45^\circ =$$

$$\csc 25^\circ =$$

2.- Dada una función Trigonométrica, hallar las demás.

**Consulta  
con un  
lector de  
QR para  
mas  
información**



**a)**  $\cos A = \frac{4}{5}$

**b)**  $\tan \phi = -\frac{6}{10}$

**c)**  $\sen \beta = \frac{2}{3}$

**d)**  $\sen \phi = \frac{1}{\sqrt{2}}$

**e)**  $\sec \phi = -2$

**f)**  $\cos \alpha = \frac{1}{3}$

**g)**  $\sec \beta = 4$

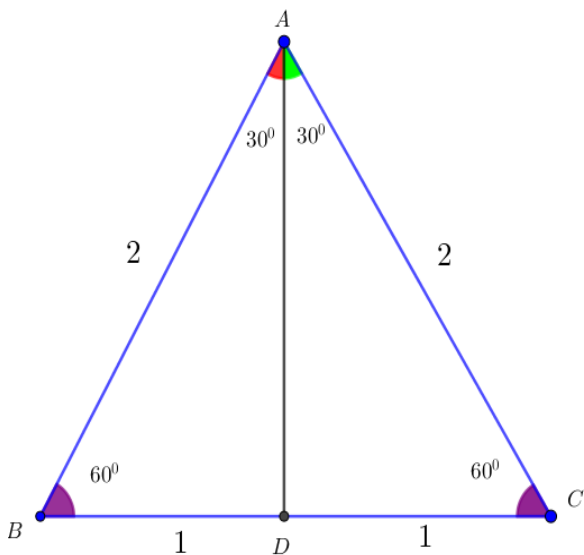
**h)**  $\tan \theta = -1$

**i)**  $\csc \theta = -\frac{4\sqrt{7}}{7}$

## Funciones Trigonómicas para ángulos de $30^\circ$ , $45^\circ$ y $60^\circ$

Para encontrar las seis razones trigonométricas de los ángulos de  $30^\circ$  y  $60^\circ$  respectivamente dibujemos un triángulo equilátero de lado igual a 2

FIGURA 1



Al trazar el segmento  $\overline{AD}$  que representa la altura de la figura 1 divide el triángulo equilátero (tiene sus 3 lados iguales y 3 ángulos  $60^\circ$ ) en dos rectángulos iguales. Al aplicar el teorema de Pitágoras podemos determinar la medida de la recta  $\overline{AD}$  utilizando el triángulo  $\triangle ADC$  esto es:

$$(\overline{AC})^2 = (\overline{AD})^2 + (\overline{DC})^2$$

Despejando  $\overline{AD}$

$$\overline{AD} = \sqrt{(\overline{AC})^2 - (\overline{DC})^2}$$

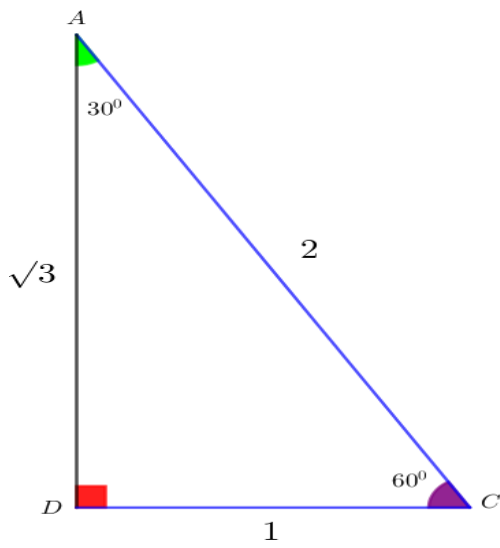
$$\overline{AD} = \sqrt{(2)^2 - (1)^2}$$

$$AD = \sqrt{4 - 1}$$

$$AD = \sqrt{3}$$

FIGURA 2

De la figura 2. Calculamos las seis razones trigonométricas del



**ángulo de  $30^\circ$**

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cotan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

$$\sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\csc 30^\circ = \frac{2}{1} = 2$$

Calculamos las seis razones  
trigonómicas del

**ángulo de  $60^\circ$**

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

$$\cotan 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sec 60^\circ = \frac{2}{1} = 2$$

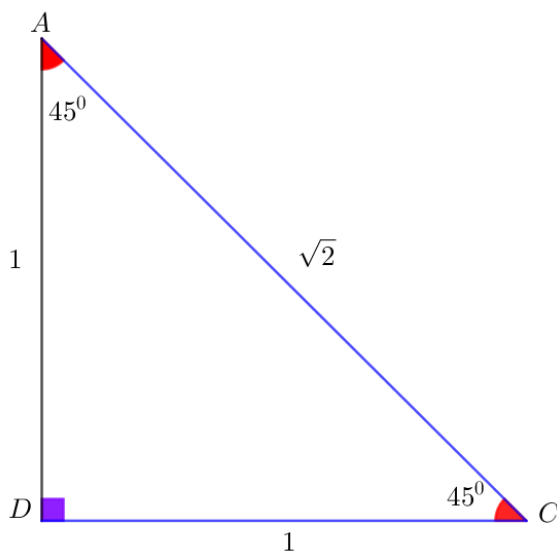
$$\csc 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Para el ángulo de  $45^\circ$  dibujemos un triángulo rectángulo isósceles donde:

$$\overline{AD} = \overline{DC} = 1$$

Por el teorema de Pitágoras encontramos el lado  $\overline{AC}$

**FIGURA 3**



$$(\overline{AC})^2 = (\overline{AD})^2 + (\overline{DC})^2$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(\overline{AD})^2 + (\overline{DC})^2}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(1)^2 + (1)^2}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{1 + 1}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{2}$$

De la figura 3. Calculamos las seis razones trigonométricas del

**ángulo de  $45^\circ$**

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

$$\cotan 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

$$\sec 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$\csc 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

Para recordar con facilidad las seis funciones trigonométricas para los ángulos de **30°, 45° y 60°**

Realicemos la siguiente tabla.

GRADOS	SEN	COS	TAN	COTAN	SEC	CSC
<b>0°</b>	0	1	0	$\pm\infty$	1	$\pm\infty$
<b>30°</b>	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
<b>45°</b>	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
<b>60°</b>	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Ejercicios:

1.-Calcular el valor de las funciones trigonométricas de los ángulos que se indican y exprésalas en forma de radicales.

a) Del ángulo de 210°

b) Del ángulo de 240°

c) Del ángulo de  $315^\circ$

d) Del ángulo de  $225^\circ$

e) Del ángulo de  $300^\circ$

f) Del ángulo de  $330^\circ$

2.- Simplifica las expresiones siguientes y escribe el resultado en forma de radicales

a)  $2\operatorname{sen}^2 30^\circ =$

b)  $4\tan 60^\circ * \tan 30^\circ =$

c)  $\cotan 30^\circ * \operatorname{sen}^2 45^\circ =$

d)  $2\cos 30^\circ * \operatorname{sen} 45^\circ =$

e)  $\operatorname{sen}^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ =$

f)  $\csc^2 45^\circ - \cotan^2 45^\circ =$

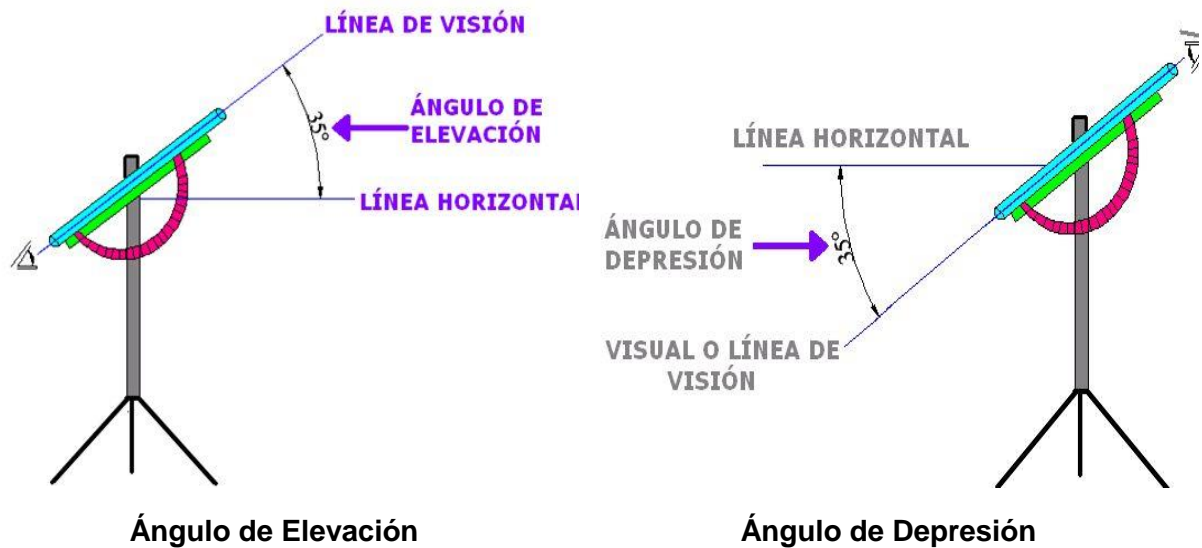
Resuelve los siguientes ejercicios:

Aplicando funciones trigonométricas, resuelve los siguientes triángulos rectángulos.

- a) Si los catetos  $a$  y  $b$ , valen 44.6 cm y 43.1 cm, respectivamente. Hallar el valor de los ángulos  $A$  y  $B$  y la longitud de la hipotenusa.
- b) Si el cateto  $a=11.5$  cm y la hipotenusa  $c=20.4$  cm. Hallar el valor de los ángulos  $A$  y  $B$  y la longitud del cateto  $b$ .
- c) Si el ángulo  $A=30^{\circ}10'$  y su cateto opuesto vale 13.5 cm. Hallar al valor del ángulo  $B$  y los otros lados.
- d) Si el ángulo  $B=36^{\circ}25'$ , y su cateto adyacente mide 70 cm. Determinar el valor del ángulo  $A$  y la longitud de los otros lados.
- e) Si el ángulo  $A$  mide  $42^{\circ}50'$ , y la hipotenusa 17 cm. Calcula la longitud de los catetos.
- f) El ángulo que forma una cuerda tensa de una cometa con la horizontal es de  $38^{\circ}$ . Encuentra a que altura se encuentra el cometa, si se ha soltado 120 metros de cuerda.
- g) En un triángulo isósceles, sus lados iguales miden 70 cm y cada uno de sus ángulos iguales mide  $54^{\circ}25'$ . Encuentre la altura y la longitud de su base.
- h) Una escalera de 8 metros de largo se coloca contra un edificio, formando un ángulo de  $61^{\circ}$  con respecto al piso.
  - a) ¿A que altura estará la parte superior de la escalera sobre el edificio?
  - b) ¿Qué tan lejos esta la parte inferior de la escalera, respecto a la pared del edificio?
- i) Desde un acantilado que tiene una altura de 70 metros, una persona observa un bote, con un ángulo de  $18^{\circ}20'$ , con respecto a la horizontal. Determina a que distancia esta el bote a la base del acantilado y la distancia con respecto al observador.

### **Ángulos de Elevación y Depresión.**

3. Resuelve los siguientes problemas, conforme al apoyo de las siguientes figuras.



- a. Desde un punto sobre el piso, localizado a 120m, de la Torre Eiffel se observa que el ángulo de elevación a la punta de la torre es de  $68^{\circ}$ . Determina la altura de la torre.
- b. Desde la punta de una roca que se eleva verticalmente 240m fuera del agua, se observa un ángulo de depresión de  $30^{\circ}$  con respecto a un bote. Hallar la distancia del bote al pie de la roca.
- c. Un alumno mide 1.75m de alto, debido al sol proyecta una sombra de 2.35m. ¿Determina el valor del ángulo que forman los rayos del sol y la tierra?.
- d. Un cable esta sujeto a lo alto de una antena de radio y a un punto en el suelo que esta a 26.32m de la base de la antena. Si el alambre hace un ángulo de  $58^{\circ}20'$  con el suelo, calcula la longitud del alambre.
- e. La Gran Pirámide de Egipto mide 147m de altura, con una base cuadrada de 230m por lado. Determina el ángulo que se forma cuando un observador se sitúa en el punto medio de uno de los lados y observa la cúspide de la pirámide.



- f. Calcula el valor del ángulo (en grados minutos y segundos) que se forma con el sol y el horizonte en el momento en que un edificio de 50m de altura proyecta una sombra de 137m.
- g. Desde lo alto de un edificio con vista al mar, un observador avista una lancha que navega directamente hacia el edificio. Si el observador esta a 34m sobre el nivel del mar (SNM) y el ángulo de depresión de la lancha cambia de  $23^{\circ}18'$  a  $38^{\circ}$  durante el periodo de observación, calcula la distancia que recorre la lancha.
- h. A medida que un globo de aire caliente sube, su ángulo de elevación desde un punto al nivel del suelo situado a 110 km de distancia con respecto a la horizontal del globo, cambia de  $22^{\circ}40'$  a  $33^{\circ}50'$ . ¿Aproximadamente cuanto sube el globo durante este periodo?

### Identidades Trigonómicas.

4. Verifica las siguientes identidades Trigonómicas.

2. $\sec \theta - \tan \theta * \sec \theta = \cos \theta$	3. $(1 - \sec^2 A)(1 + \tan A) = 1$
5. $\cot^2 A + \cot^4 A = \csc^4 A - \csc^2 A$	6. $\cot x + \frac{\sec x}{1 + \cos x} = \csc x$
8. $\frac{\tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \cdot \frac{1 + \cot^2 \alpha}{\cot^2 \alpha} = \sec^2 \alpha \sec^2 \alpha$	9. $\frac{\sec \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sec^2 \alpha} = \frac{\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$
11. $1 - \frac{\cos^2 \theta}{1 + \sec \theta} = \sec \theta$	12. $\frac{1}{\sec^2 A} + \frac{1}{\csc^2 A} = 1$
14. $\frac{1 - 2\cos^2 B}{\sec B \cos B} = \tan B - \cot B$	15. $\frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A} = 2\cos^2 A$
17. $\frac{\sec \beta}{1 - \cos \beta} = \frac{1 + \cos \beta}{\sec \beta}$	

### A. Ecuaciones Trigonométricas.

5. Resuelve cada una de las siguientes ecuaciones para todos los valores del ángulo entre 0 y 360°:

- |  |                             |   |                                   |
|--|-----------------------------|---|-----------------------------------|
| 1. $2 \operatorname{Sen} \theta = \operatorname{Csc} \theta$                   | <b>Sol. 45°, 135°</b>       | 8. $(\operatorname{Tan} \theta - 1)(4 \operatorname{Sen}^2 \theta - 3) = 0$ | <b>Sol. 45°, 60°, 120°, 225°</b>  |
| 2. $\operatorname{Tan} \theta = 3 \operatorname{Ctg} \theta$                   | <b>Sol. 60°, 240°</b>       | 9. $\sqrt{2} \operatorname{Cos} \theta = \operatorname{Ctg} \theta$         | <b>Sol. 45°, 135°</b>             |
| 3. $\operatorname{Sec} \theta - \operatorname{Csc} \theta = 0$                 | <b>Sol. 45°, 225°</b>       |   |                                   |
| 4. $2 \operatorname{Sen}^2 \theta = 3 \operatorname{Cos} \theta$               | <b>Sol. 60°, 300°</b>       | 10. $2 (\operatorname{Cos}^2 \theta - \operatorname{Sen}^2 \theta) = 1$     | <b>Sol. 30°, 150°, 210°, 330°</b> |
| 5. $\operatorname{Sec} \theta = 4 \operatorname{Cos} \theta$<br><b>240°</b>    | <b>Sol. 60°, 120°, 240°</b> | 11. $\operatorname{Tan} \theta = 4 - 3 \operatorname{Ctg} \theta$           | <b>Sol. 45°, 71°33'54'', 225°</b> |
| 6. $2 \operatorname{Sen}^2 A - \operatorname{Cos} A = 1$<br><b>300°</b>        | <b>Sol. 60°, 180°, 300°</b> | 12. $\operatorname{Cos} 2\theta + \operatorname{Cos} \theta + 1 = 0$        | <b>Sol. 90°, 120°, 240°, 270°</b> |
| 7. $\operatorname{Sen} 2\theta + \operatorname{Sen} \theta = 0$<br><b>180°</b> | <b>Sol. 0°, 120°, 180°</b>  | 13. $\operatorname{Cos} \phi + \operatorname{Cos} 2\phi = 0$                | <b>Sol. 0°, 120°, 240°</b>        |

### Gráficas de las Funciones Trigonométricas.

6. Obtenga la grafica de las siguientes funciones trigonométricas.

- |                                  |                                  |
|----------------------------------|----------------------------------|
| 1. $y = 2 \operatorname{sen} 4x$ | 2. $y = 3 \operatorname{cos} 2x$ |
| 3. $y = 5 \operatorname{cos} 3x$ | 4. $y = 4 \operatorname{sen} x$  |

## Triángulos Acutángulos y Oblicuángulos.

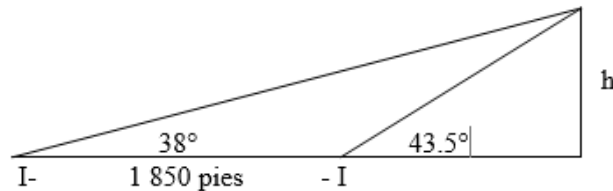
7. Resuelve cada uno de los siguientes triángulos ABC, dados.

Datos del Triángulo ABC	Solución del Triángulo
1. $c = 25$ , $A = 35^\circ$ y $B = 68^\circ$	Sol. $a = 15$ , $b = 24$ , $C = 77^\circ$ .
2. $a = 62.5$ , $A = 112^\circ 20'$ y $C = 42^\circ 10'$	Sol. $b = 29.1$ , $c = 45.4$ , $B = 25^\circ 30'$  Sol. $B = 38^\circ 50'$ , $A = 80^\circ$ , $a = 764$ .
3. $c = 628$ , $b = 480$ y $C = 55^\circ 10'$	Sol. $C = 37^\circ 35'$ , $B = 11^\circ 50'$ , $b = 142$ .
4. $a = 525$ , $c = 421$ y $A = 130^\circ 50'$	Sol. $A = 30^\circ 30'$ , $B = 120^\circ 40'$ , $c = 125$ .  Sol. $A = 42^\circ 40'$ , $C = 26^\circ 30'$ , $b = 44$ .
5. $a = 132$ , $b = 224$ y $C = 28^\circ 40'$	Sol. i) $B = 65^\circ 40'$ , $C = 80^\circ 40'$ , $c = 56.1$  ii) $B = 114^\circ 20'$ , $C = 32^\circ$ , $c = 30.1$ Sol. $A = 35^\circ 20'$ , $B = 60^\circ 10'$ , $C = 84^\circ 30'$
7. $a = 31.5$ , $b = 51.8$ y $A = 33^\circ 40'$	Sol. $A = 23^\circ 40'$ , $B = 32^\circ 20'$ , $C = 124^\circ$ .  Sol.. i) $a = 89.534$ , $B = 63^\circ 8.3'$ , $A = 67^\circ 32.8'$ ii) $a = 23.147$ , $B = 116^\circ 51.7'$ , $A = 13^\circ 49.4'$
8. $a = 25.2$ , $b = 37.8$ y $c = 43.4$	
9. $a = 30.3$ , $b = 40.4$ y $c = 62.6$	

10. $b = 86.425$ , $c = 73.463$ y $C = 49^\circ 18.9'$	
---	--

### APLICACIÓN DE LOS TRIANGULOS OBLICUANGULOS.

- Localización de un incendio.** Desde dos torres vigías, A y B mismas que están separadas por una distancia de 10.3 millas, se localiza un incendio en el punto F, si la estación B informa que el fuego está a un ángulo igual a  $\angle ABF = 52.6^\circ$  y la estación A informa que el ángulo es  $\angle BAF = 25.3^\circ$ , ¿Qué tan lejos esta el fuego de la estación A?
- Topografía.** Determine la altura de la montaña de la figura siguiente.



- Un guardia forestal observa, desde un punto de observación A que está en una carretera recta, un fuego en dirección  $32^\circ$  noreste. Otro guardia en un segundo puesto de observación B a 10 millas de A sobre la misma carretera, ve el mismo fuego en dirección  $48^\circ$  noroeste. Encuentre la distancia desde cada puesto de observación al fuego, y la distancia más corta de la carretera al fuego.
- Un camino en una colina tiene una inclinación de  $10^\circ$  con la horizontal, y un poste de teléfonos vertical está situado sobre este camino. Cuando el ángulo de elevación del Sol es  $62^\circ$ , el poste proyecta una sombra de 14.5 pies hacia abajo de la colina y paralela a la carretera. Encuentre la altura del poste.
- Un topógrafo quiere encontrar la distancia entre los puntos A y B que están en lados opuestos de un edificio. Desde un punto C, frente al edificio a 110 pies de A y a 160 pies de B, el ángulo formado por las líneas de observación desde C a A y de C a B es de  $54^\circ$ . Encuentre la distancia entre los dos puntos.
- Un meteorólogo en un punto de observación A sobre una carretera recta, observa un tornado en dirección  $38^\circ$  noreste. Otro meteorólogo lo observa desde otro punto, B, a 25 millas de A, observa el mismo tornado en dirección  $53^\circ$  noroeste. El tornado se mueve hacia el sur. Encuentre la distancia desde cada puesto de observación al tornado, También encuentre la distancia entre el tornado y la carretera.

5. Un globo aerostático es visto al mismo tiempo sobre Mexicali por dos observadores. Los dos están a 2.32 millas de distancia uno del otro. Si suponemos que los observadores y el globo están en el mismo plano vertical y el ángulo de elevación con respecto al primero es de  $28^\circ$  y con respecto al segundo es de  $37^\circ$ , ¿qué tan alto está el globo?
6. Una ceja de metal de 4 pies se coloca en el techo de un camión para reducir la resistencia del aire, como se ve en la figura. El ángulo entre la ceja y el techo es de  $18^\circ$ . ¿Cuál es la longitud del soporte vertical (línea punteada en la figura) si el ángulo  $\beta$  es de  $10^\circ$ ?
7. Para determinar la distancia entre dos puntos, A y B, en orillas opuestas de un lago, un topógrafo (el mismo sonso de antes) se sitúa en un punto C a 869 pies de A y 175 pies de B. Si el ángulo formado por las líneas de observación desde C a A y desde C a B es de  $78^\circ$ , encontrar la distancia de A a B.
8. Dos observadores están a 600 pies uno del otro y en lados opuestos de un asta bandera. Los ángulos de elevación de los observadores a lo más alto del asta son  $19^\circ$  y  $21^\circ$ . Encuentre la altura del asta bandera.
9. Un zeppelin es visto simultáneamente por dos observadores: Alberto sobre una torre de 650 pies de altura y Bonifacio al pie de la torre. Encuentre la distancia del zeppelin al observador Alberto si el ángulo de elevación desde Alberto es de  $32^\circ$  y el ángulo de elevación desde Bonifacio es de  $56^\circ$ . ¿Cuál es la altura del zeppelin?