**Instituto Politécnico Nacional**

**Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos #3**

"Estanislao Ramírez Ruiz"

# Página Web

***Trigonometría y geometría***

***Segundo parcial***


*Integrantes:*

Contreras Eustaquio Uriel

Contreras Romero Dylan Enrique

Escudero Velázquez Joa Kaleb- **Representante**

Vargas Figueroa Christian Jesús

# Índice

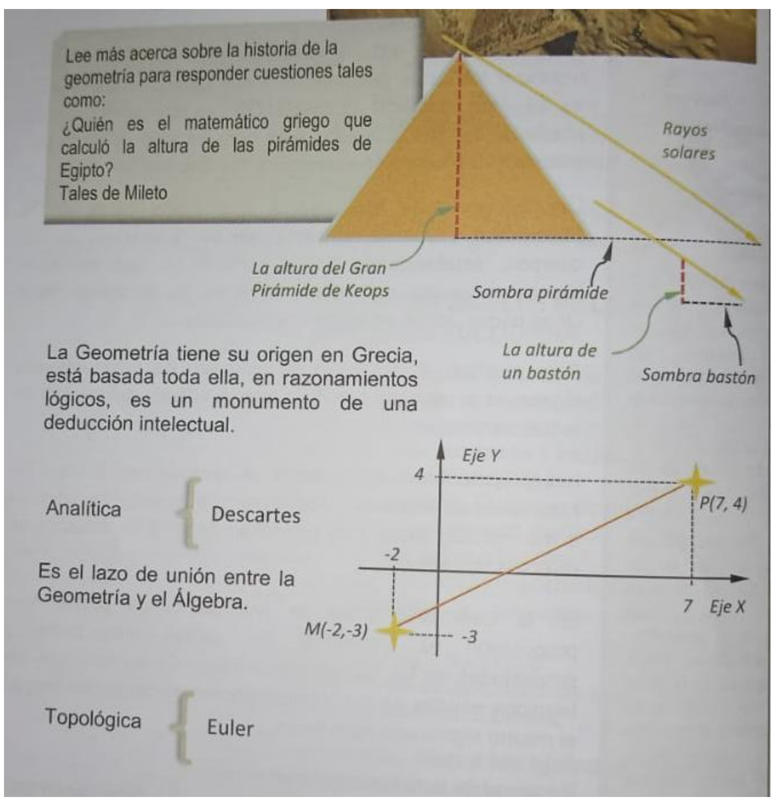
Elementos básicos de la geometría euclidiana ........ 3
Puntos, Rectas y Superficies ........ 4
Ángulos ........ 5
Clasificación de ángulos según su abertura ........ 6
Medición de ángulos. Sistemas de medición. Convertir de un sistema a otro. 9
Postulados y conceptos básicos importantes ........ 10
Rectas paralelas y secantes ........ 12
Diferentes figuras geométricas y sus propiedades ........ 15
Puntos y rectas notables del Triángulo ........ 17
Criterios de Congruencia ........ 21
Triángulo-semejanza ........ 24
CRITERIOS DE SEMEJANSA ........ 26
TEOREMA DE TALES: ........ 27
¿CÓMO CALCULAR LA ALTURA DE UN ÁRBOL CON SU SOMBRA UTILIZANDO EL TEOREMA DE TALES? ........ 27
TEOREMA DE PITAGORAS ........ 28
APLICACIÓN DEL TEOREMA DE PITÁGORAS EN LA PRÁCTICA. ........ 28
POLÍGONOS. ........ 29
CLASIFICACIÓN DE LOS POLÍGONOS. ........ 29

# Elementos básicos de la geometría euclidiana

La geometría se remonta a los años 2000 a. C., cuando los egipcios y babilonios comenzaron a medir sus terrenos, construir y edificar monumentos, etc. La palabra GEOMETRÍA viene del griego GEOS-TIERRA y METRON-MEDIDA, los que usaban la geometría eran aquellos que establecían las fronteras. Fue descubierta primeramente en Egipto, por la medición de áreas, además de su aplicación en la tipografía, astronomía, etc.

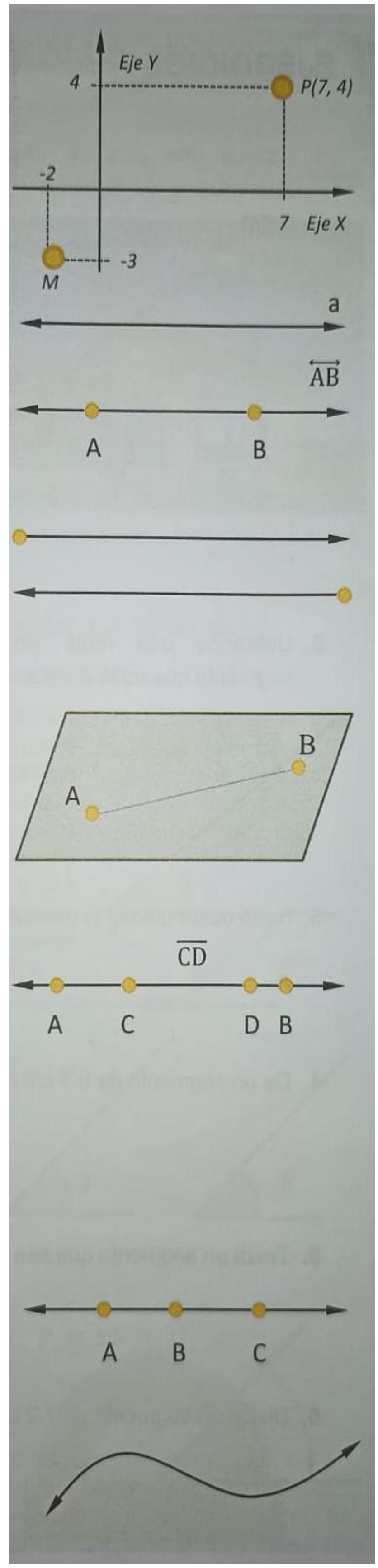
Trabajo de hombres como Tales (600 a.C.), Pitágoras (540 a.C.), Platón (391 a.C.) y Aristóteles (350 a.C.) sirvió para que las ideas de la geometría culminaran en el libro llamado ELEMENTOS escrito por Euclides por el 326 a.C.

La geometría es una ciencia que forma parte de la Matemática, estudia la forma, tamaño y posición de los cuerpos, Y estableciendo juicios y criterios que midan su validez. Para esto es necesario conocer ciertas definiciones y propiedades de las figuras geométricas, y es necesario que estas tengan el mismo significado para todos.



# Puntos, Rectas y Superficies

Se definen los términos geométricos tales como:




**PUNTO:** En la Geometría, un punto tiene **únicamente una posición. NO** tiene longitud, extensión ni espesor. Se presenta por (.) y se denota con una letra mayúscula colocada cerca de él. Ejemplo: Punto M y punto P.

**RECTA:** Una recta es una curva generada por un punto moviéndose en la misma dirección y en ambos sentidos, no tiene ni inicio ni fin. **Tiene longitud**, pero **No** tiene extensión ni espesor. Se denota por letras mayúsculas para dos puntos cualquiera o por una letra minúscula.

**SEMIRRECTA:** Se genera por un punto que se mueve en una misma dirección y sentido, tiene inicio pero no tiene fin.

**SUPERFICIE: Tiene longitud y extensión**, pero **NO** tiene espesor, por lo tanto, es bidimensional. Una superficie plana o PLANO es una región que se determina de dos dimensiones y está totalmente definida de ellas.

**SEGMENTO:** Es una porción de la recta comprendida entre dos de sus puntos, tiene inicio y fin.

Representamos al segmento por las letras mayúsculas que corresponden a sus extremos.

Observa que un segmento puede ser subdividido a su vez en partes. En el ejemplo anterior:

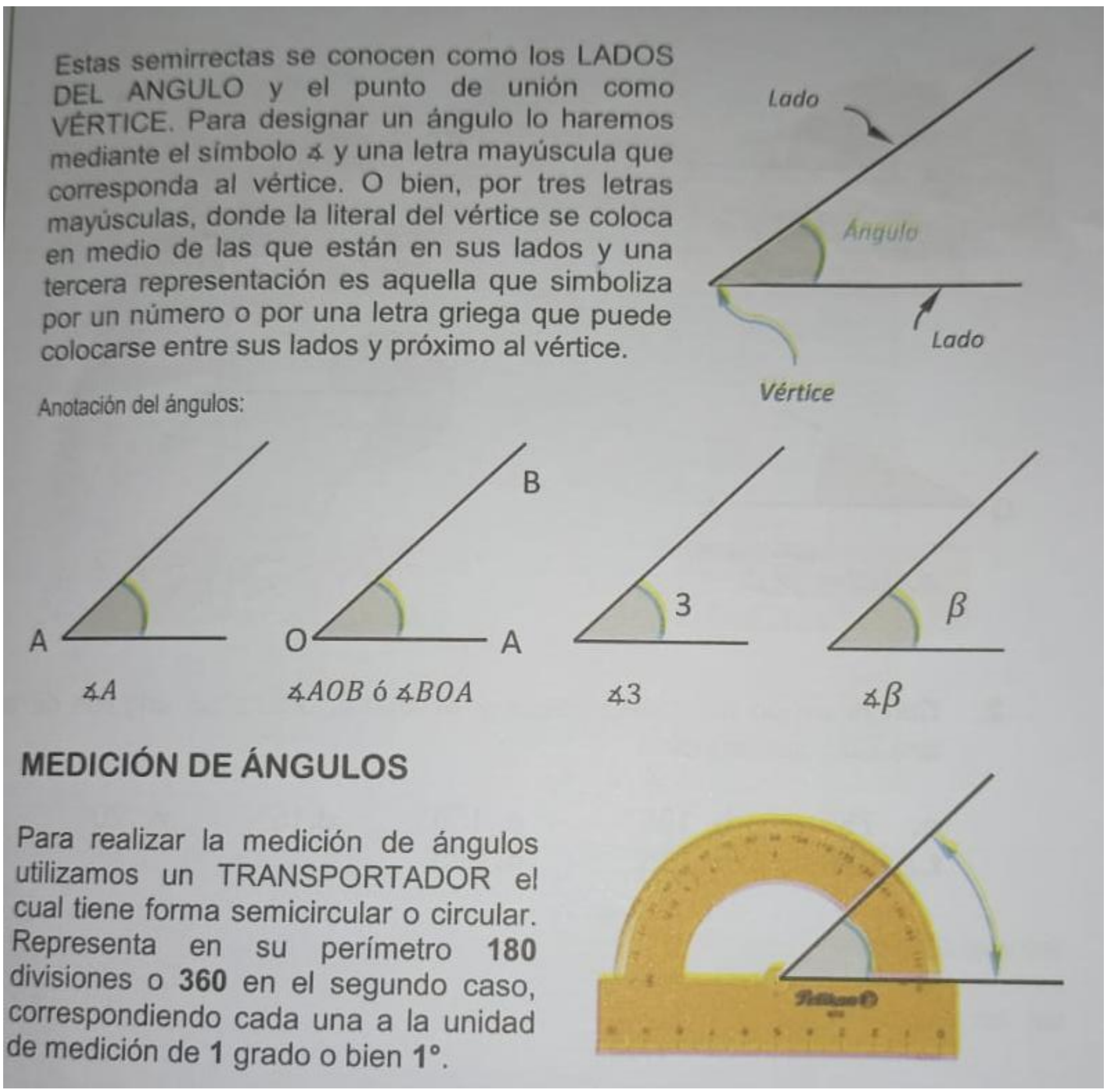
$$AB = AC + CD + DB$$

**Importante:** Cuando tres puntos, por ejemplo: A, B y C están sobre la misma línea, ellos se llaman **colineales** y con A-B-C mostramos que B está entre A y C.

**LÍNEA CURVA:** Es sucesión de infinitos puntos donde los puntos no están alineados necesariamente en una misma dirección.

## Ángulos

La abertura entre dos semirrectas que tienen en común su origen. Las semirrectas se conocen como lados del ángulo y el punto de unión como el vértice.


Estas semirrectas se conocen como los LADOS DEL ANGULO y el punto de unión como VÉRTICE. Para designar un ángulo lo haremos mediante el símbolo ∡ y una letra mayúscula que corresponda al vértice. O bien, por tres letras mayúsculas, donde la literal del vértice se coloca en medio de las que están en sus lados y una tercera representación es aquella que simboliza por un número o por una letra griega que puede colocarse entre sus lados y próximo al vértice.



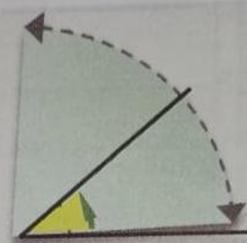
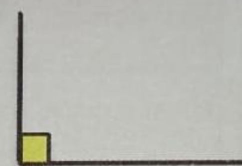
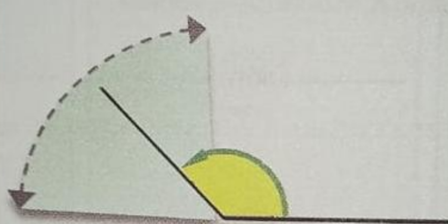
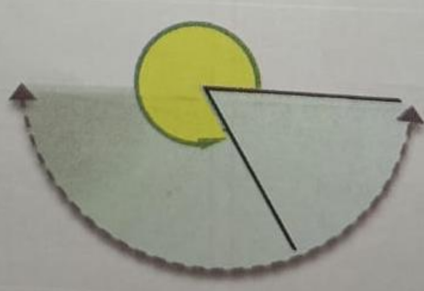
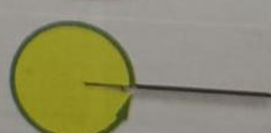
Anotación del ángulos:



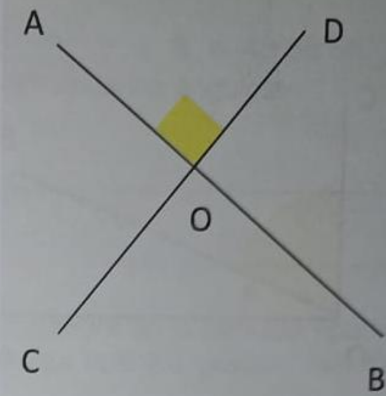
**MEDICIÓN DE ÁNGULOS**

Para realizar la medición de ángulos utilizamos un TRANSPORTADOR el cual tiene forma semicircular o circular. Representa en su perímetro **180** divisiones o **360** en el segundo caso, correspondiendo cada una a la unidad de medición de **1** grado o bien **1°**.

## Clasificación de ángulos según su abertura

| NOMBRE DEL ÁNGULO | FIGURA | MEDIDA |
|---|---|---|
| AGUDO |  | $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ |
| RECTO |  | $\alpha = 90^\circ$ |
| OBTUSO |  | $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ |
| LLANO O COLINEAL |  | $\alpha = 180^\circ$ |
| ENTRANTE O CONVEXO |  | $180^\circ < \alpha < 360^\circ$ |
| PERÍGONO |  | $\alpha = 360^\circ$ |

RECTAS **PERPENDICULARES**: Son aquellas que al cortarse forman ángulos rectos.




**SIMBOLOGÍA**
< Menor que
> Mayor que

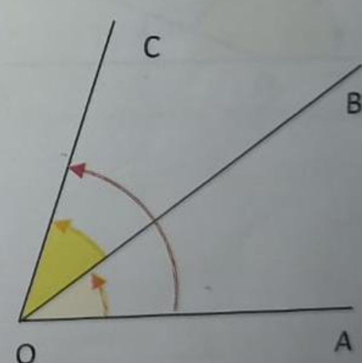
∡ AOD = 90°

Usando símbolos $\overline{AB} \perp \overline{CD}$

## PAREJAS DE ÁNGULOS Y SU CLASIFICACIÓN

Los ángulos de acuerdo a su posición con respecto a otros ángulos los clasificaremos en parejas de tal manera que facilite su medición.

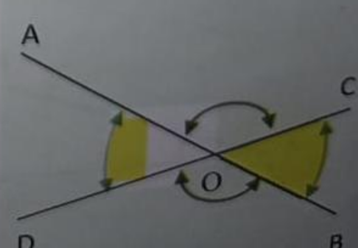
ÁNGULOS **CONSECUTIVOS** O ADYACENTES: Aquellos que tienen un lado y su vértice en común.




∡ COB es CONSECUTIVO con ∡ BOA y además:

∡ COA = ∡ COB + ∡ BOA

**OPUESTOS** POR EL VÉRTICE: Son los que se forman por dos rectas que se cortan y no son adyacentes.




∡ COB OPUESTO POR EL VÉRTICE ∡ AOD y además:

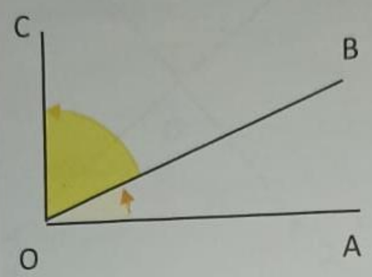
∡COB = ∡ AOD

∡AOC OPUESTO POR EL VÉRTICE ∡ DOB y además:

∡ AOC = ∡ DOB

ÁNGULOS **COMPLEMETARIOS**:

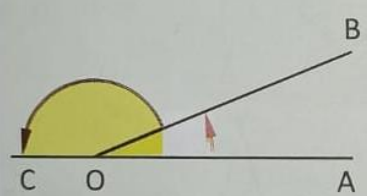
Son dos ángulos cuya suma es igual a 90°.




∡ COB + ∡ BOA = 90°

ÁNGULOS **SUPLEMENTARIOS**:

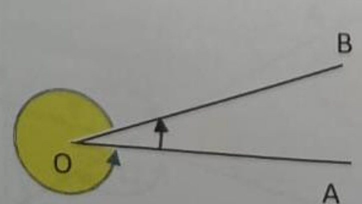
Se llama así a dos ángulos cuya suma es igual a 180°.




∡ AOB + ∡ BOC = 180°

ÁNGULOS **CONJUGADOS**:

Se llama así a dos ángulos cuya suma es igual a 360°.



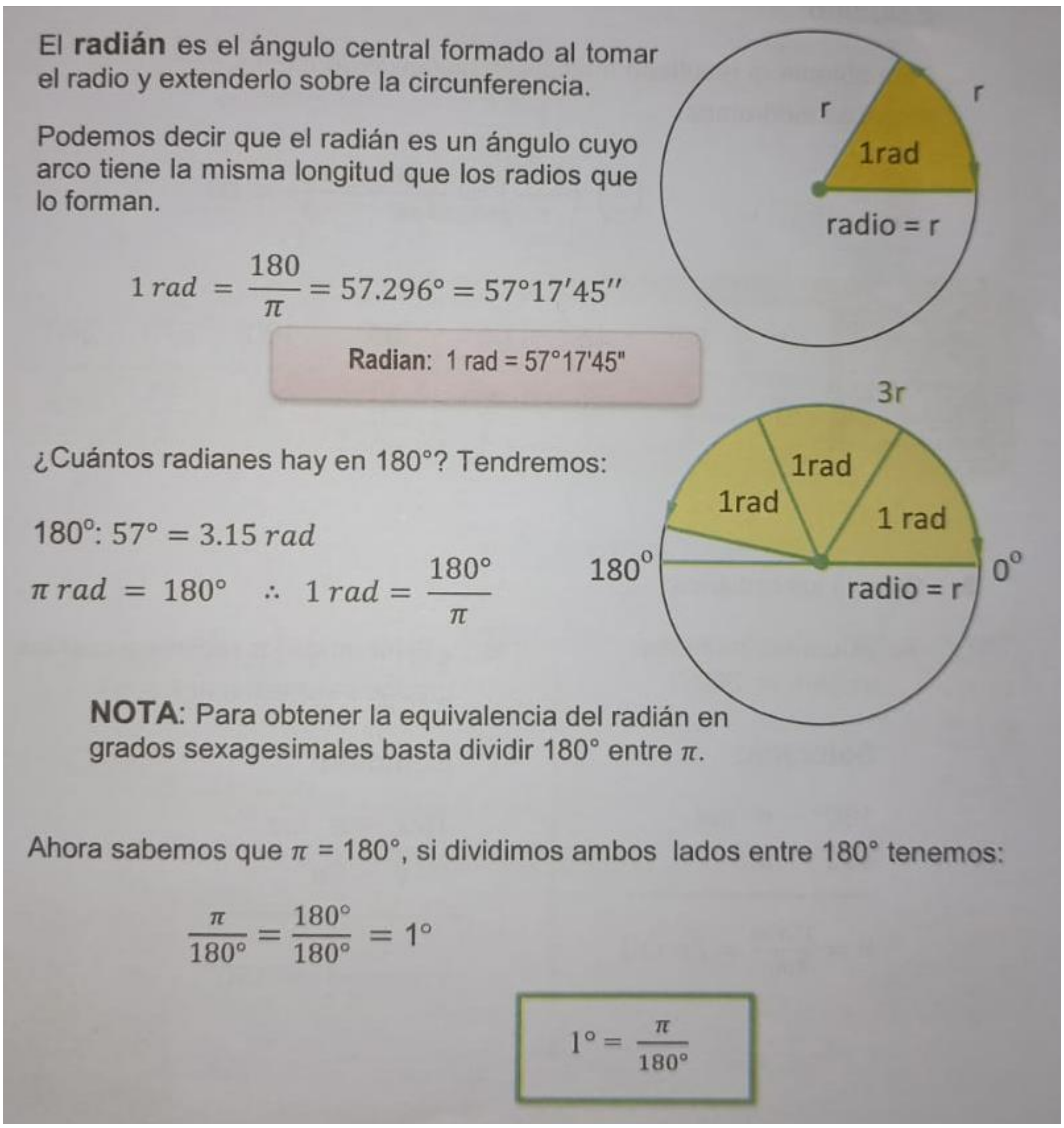

∡ AOB + ∡ BOA = 360°

# Medición de ángulos. Sistemas de medición.
# Convertir de un sistema a otro.

Existen otros sistemas de medidas para la medición de ángulos, estos son: Sistema Centesimal o alemán y el sistema Cíclico.

SISTEMA CENTESIMAL: Los ángulos de medidas también pueden ser grados, minutos y segundos, la diferencia es que el círculo se divide en 400 grados, 100 minutos y 100 segundo.

**SISTEMA CÍCLICO:** Este sistema usa un arco de la circunferencia, y se mide con una unidad de medida llamada Radian.



El **radián** es el ángulo central formado al tomar el radio y extenderlo sobre la circunferencia.

Podemos decir que el radián es un ángulo cuyo arco tiene la misma longitud que los radios que lo forman.

$$1\,rad = \frac{180}{\pi} = 57.296° = 57°17'45''$$

**Radian:** 1 rad = 57°17'45"

¿Cuántos radianes hay en 180°? Tendremos:

$$180°: 57° = 3.15\,rad$$

$$\pi\,rad = 180° \quad \therefore \quad 1\,rad = \frac{180°}{\pi}$$

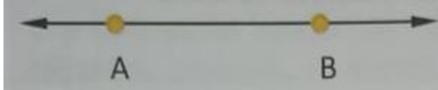
**NOTA:** Para obtener la equivalencia del radián en grados sexagesimales basta dividir 180° entre $\pi$.

Ahora sabemos que $\pi$ = 180°, si dividimos ambos lados entre 180° tenemos:

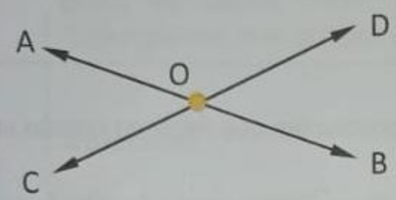
$$\frac{\pi}{180°} = \frac{180°}{180°} = 1°$$

$$\boxed{1° = \frac{\pi}{180°}}$$

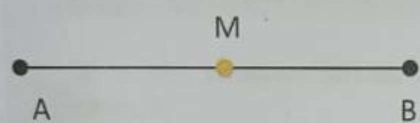
# Postulados y conceptos básicos importantes



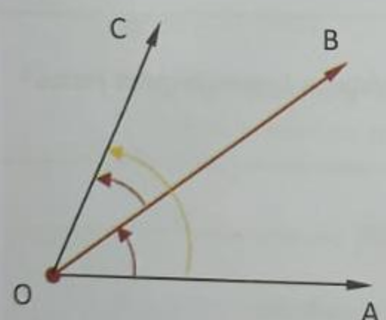

1. Sólo se puede dibujar una línea entre dos puntos A y B:




2. Dos líneas pueden intersectar en un solo punto.
   Punto O es la única intersección de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ de la figura siguiente:



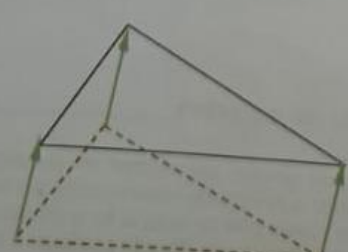

3. Un segmento de recta tiene sólo un punto medio. En este ejemplo M es el único punto medio en la figura siguiente:




4. Un ángulo sólo puede tener una bisectriz. En la figura siguiente, la bisectriz del ángulo ∢AOC es OB.

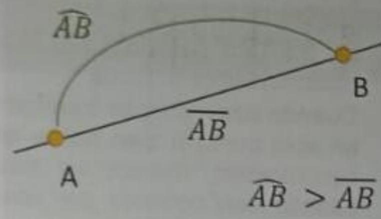
**Bisectriz**: Una línea que está en el interior de un ángulo y forma dos ángulos iguales con los dos lados de este ángulo.

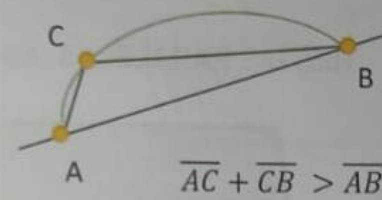

5. Hay 360° alrededor de un círculo.



6. Cualquier forma geométrica se puede mover sin cambiar su forma.

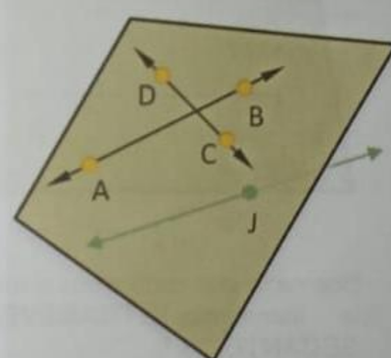
7. La distancia más corta entre dos puntos A y B en un plano es la recta que pasa entre ellos. Un segmento de línea será siempre más corto que una línea curva o la suma de dos segmentos de línea, tales como AC+BC>AB.



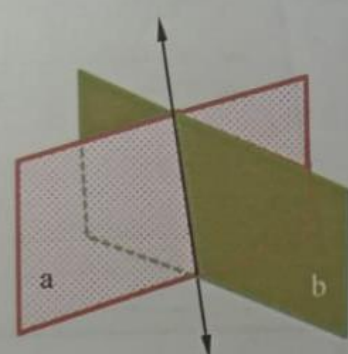




8. Si dos puntos están en un plano, la línea que contiene los puntos se encuentra en el mismo plano. En nuestro ejemplo: puntos A y B y la línea $\overline{AB}$ y puntos C y D y la línea $\overline{CD}$.

$AB$



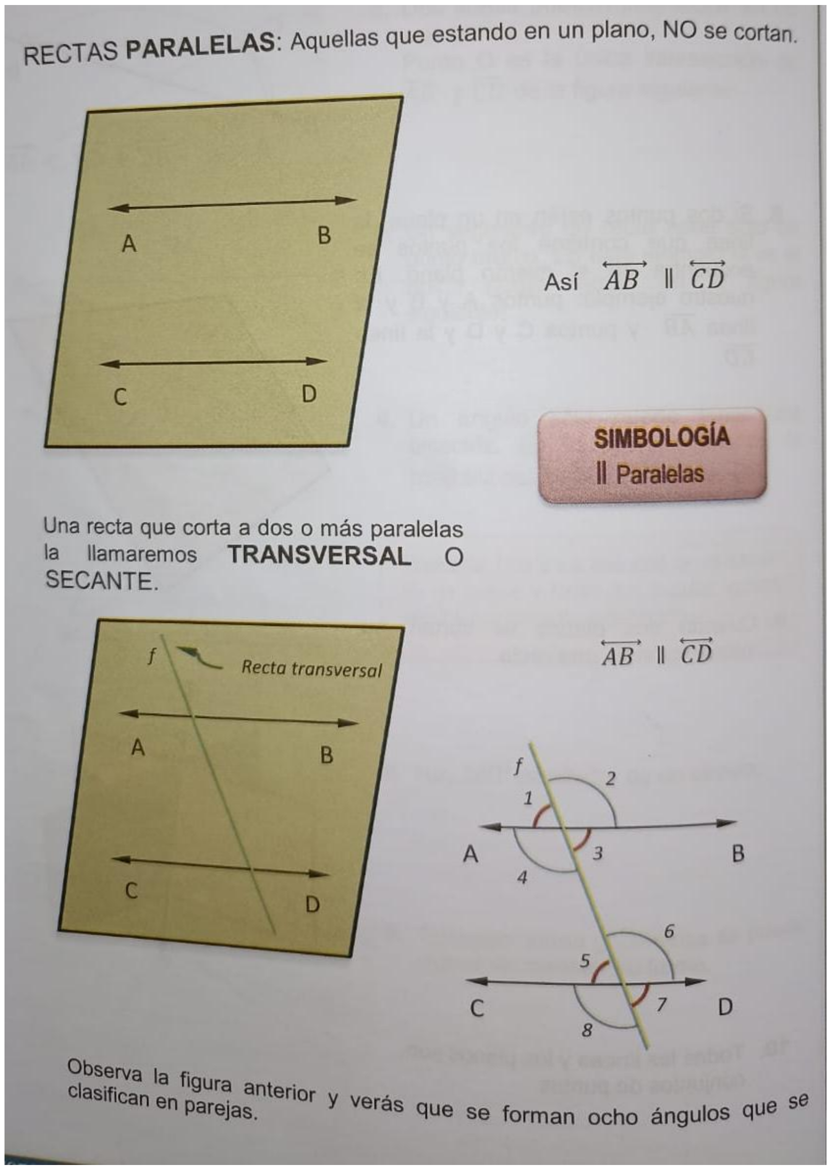

9. Cuando dos planos se cortan, su intersección es una recta.




10. Todas las líneas y los planos son conjuntos de puntos.

## Rectas paralelas y secantes

En el caso de que las rectas que se localizan en el plano no se tocan, tienen un “trato especial”, ya que al dividirlos por otra recta se forman una serie de ángulos con características especiales en cuanto a posición, etc. Esas son:



RECTAS **PARALELAS**: Aquellas que estando en un plano, NO se cortan.



Así $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

**SIMBOLOGÍA**
$\parallel$ Paralelas

Una recta que corta a dos o más paralelas la llamaremos **TRANSVERSAL** O SECANTE.



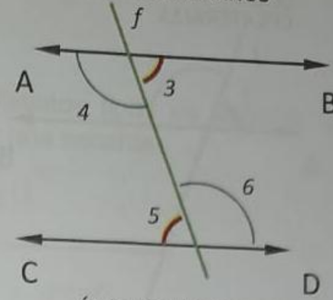
$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$



Observa la figura anterior y verás que se forman ocho ángulos que se clasifican en parejas.

**I. INTERNOS**: Son los que quedan determinadas por la recta trasversal y ENTRE LAS RECTAS PARALELAS. [∡3, ∡4, ∡5, ∡6], que a su vez se clasifican en:

ÁNGULOS INTERNOS



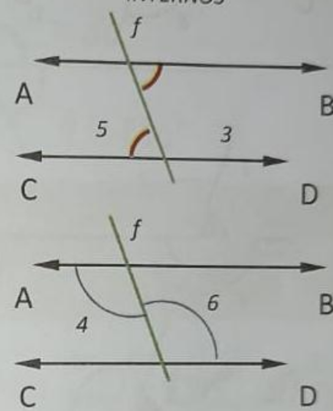

**a.** ALTERNOS INTERNOS: Son dos ángulos NO ADYACENTES localizados en lados opuestos de la transversal.

[∡3 y ∡5]
[∡4 y ∡6]

Que además son IGUALES en medida.

∡3 = ∡5
∡4 = ∡6

ÁNGULOS ALTERNOS INTERNOS



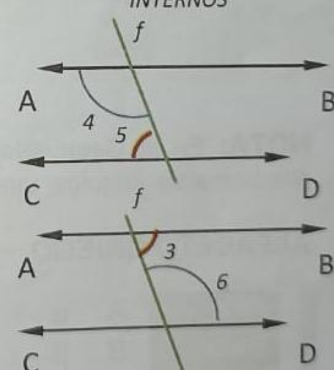

**b.** COLATERALES INTERNOS: Se ubican en el mismo lado de la transversal.

[∡4 y ∡5]
[∡3 y ∡6]

Que además son suplementarios.

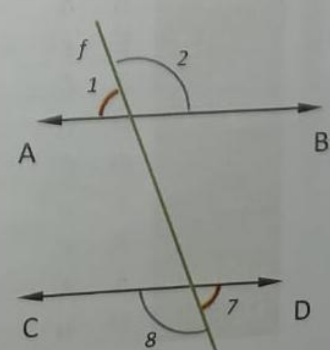
∡4 + ∡5 = 180°
∡3 + ∡6 = 180°

ÁNGULOS COLATERALES INTERNOS




**II.** EXTERNOS: Son aquellos que quedan determinados FUERA DE LAS RECTAS PARALELAS. [<1, <2, <7, <8], que a su vez se clasifican en:

ÁNGULOS EXTERNOS

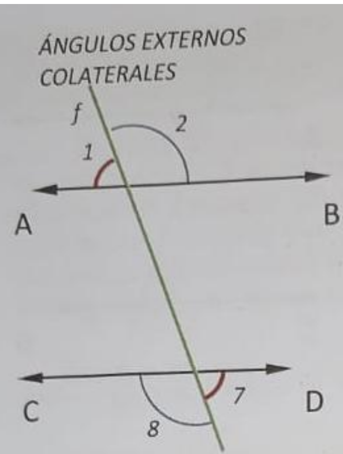



**a.** ALTERNOS EXTERNOS: Son ángulos NO ADYACENTES ubicados en lados opuestos a la transversal.

[∡1 y ∡7]
[∡2 y ∡8]

Que además son IGUALES en medida.

∡1 = ∡7
∡2 = ∡8

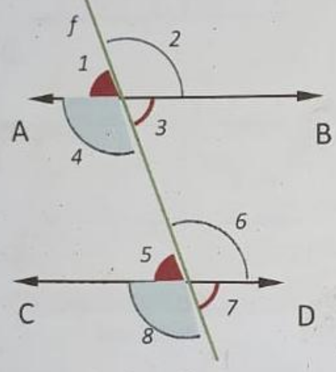



**b.** COLATERALES EXTERNOS: Están situados del mismo lado de la transversal y del mismo lado de la trasversal y del mismo lado de las rectas paralelas.

[$\measuredangle 2$ y $\measuredangle 7$]
[$\measuredangle 1$ y $\measuredangle 8$]

Que además son SUPLEMENTARIOS.

$$\measuredangle 2 + \measuredangle 7 = 180°$$
$$\measuredangle 1 + \measuredangle 8 = 180°$$




**III.** CORRESPONDIENTES: Están situados del mismo lado de la transversal, uno interno y otro externo. [$\measuredangle 1$ y $\measuredangle 5$, $\measuredangle 2$ y $\measuredangle 6$, $\measuredangle 3$ y $\measuredangle 7$, $\measuredangle 4$ y $\measuredangle 8$].

Que además son IGUALES en medida.

$$\measuredangle 1 = \measuredangle 5, \quad \measuredangle 2 = \measuredangle 6,$$
$$\measuredangle 3 = \measuredangle 7, \quad \measuredangle 4 = \measuredangle 8$$

**NOTA:** En la Geometría es muy común utilizar el alfabeto griego para nombrar a los ángulos; también se emplean en el estudio de la Estadística.

## ALFABETO GRIEGO

| | | |
|---|---|---|
| Alfa | Α | α |
| Beta | Β | β |
| Gama | Γ | γ |
| Delta | Δ | δ |
| Épsilon | Ε | ε |
| Zeta | Ζ | ζ |
| Eta | Η | η |
| Teta | Θ | θ |
| Iota | Ι | ι |
| Kapa | Κ | κ |
| Lambda | Λ | λ |
| Mu | Μ | μ |

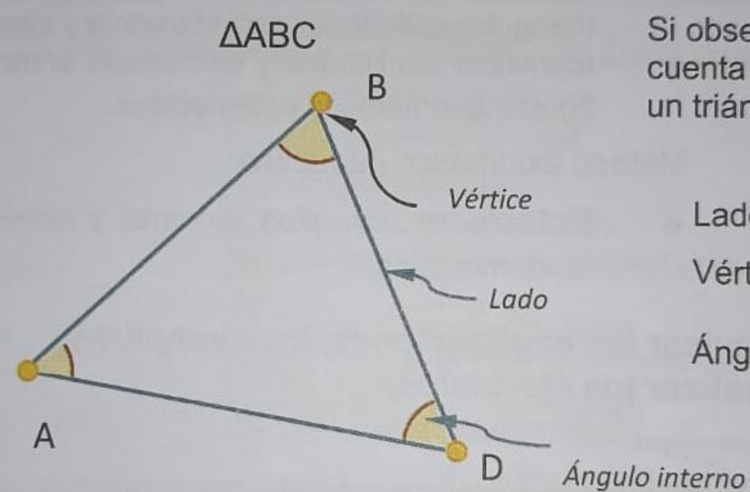
| | | |
|---|---|---|
| Un | Ν | ν |
| Xi | Ξ | ξ |
| Omicron | Ο | ο |
| Pi | Π | π |
| Ro | Ρ | ρ |
| Sigma | Σ | σ |
| Tau | Τ | τ |
| Ipsilon | Υ | υ |
| Fi | Φ | φ |
| Ji | Χ | χ |
| Psi | Ψ | ψ |
| Omega | Ω | ω |

## Diferentes figuras geométricas y sus propiedades

En la geometría se encuentran figuras limitadas por segmentos de la recta, a estas figuras que se forman por la unión de 3 o más segmentos de recta se les llama POLIGONOS. Los segmentos forman sus lados y los puntos de unión forman sus vértices.

Uno de los polígonos más importantes es el Triángulo, que se define como. Polígono de tres lados.

Utilizaremos el símbolo A y lo representaremos con las letras mayúsculas de sus vértices en cualquier orden.




Si observas, te podrás dar cuenta que los elementos de un triángulo son:

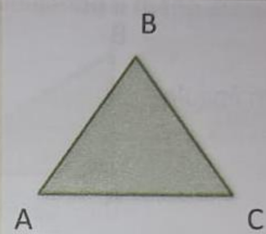
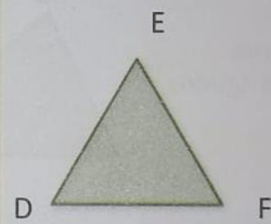
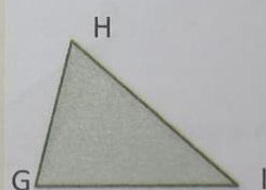
Lados: AB, BC, CA.

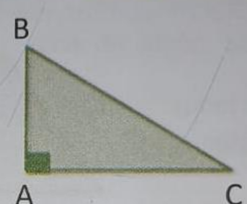
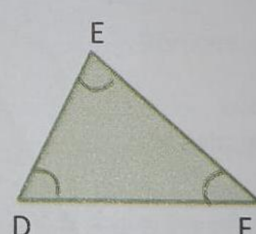
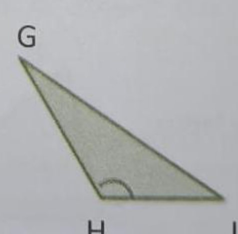
Vértices: A, B, C.

Ángulos Internos: $\alpha, \beta, \gamma$

### CLASIFICACIÓN DE TRIÁNGULOS.

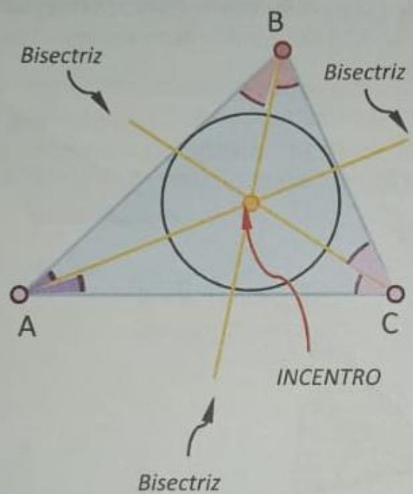
Los triángulos adquieren diferentes formas y tamaños dependiendo de la longitud de sus lados y la abertura de sus ángulos, por lo que se hace necesario clasificarlos para una mejor identificación en el estudio de sus propiedades.

| TRIÁNGULO | DESCRIPCIÓN | FIGURA | CARACTERÍSTICA |
|---|---|---|---|
| **Equilátero** | Sus tres lados son iguales |  | $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC}$ |
| **Isósceles** | Tiene dos lados iguales y el otro diferente |  | $\overline{DE} = \overline{EF} \neq \overline{DF}$ |
| **Escaleno** | No tiene lados iguales |  | $\overline{GH} \neq \overline{GI} \neq HI$ |

| | TRIÁNGULO | DESCRIPCIÓN | FIGURA | CARACTERÍSTICA |
|---|---|---|---|---|
| | **Rectángulo** | Tiene un ángulo recto |  | $\sphericalangle A = 90°$ |
| ***OBLICUÁNGULOS*** | **Acutángulo** | Tiene tres ángulos agudos |  | $\sphericalangle E, \sphericalangle D$ y $\sphericalangle E$ son menores de $90°$ |
| | **Obtusángulo** | Tiene un ángulo obtuso |  | $\sphericalangle H$ es mayor de $90°$ |

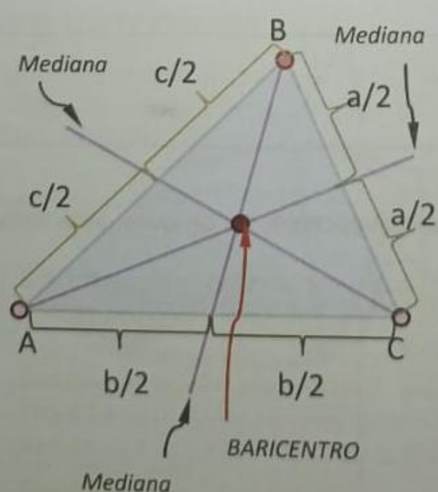
# Puntos y rectas notables del Triángulo

Hasta ahora sólo hemos hablado de los lados y ángulos del triángulo, pero los vértices también son importantes, ya que al trazarse rectas auxiliares que pasan por ellos, determinan en su intersección puntos que merecen un trato especial para el análisis de los triángulos.




## BISECTRIZ:

Es la recta que divide al ángulo en dos partes iguales, las tres bisectrices de un triángulo se cortan en un punto llamado INCENTRO, con la característica de que es el centro del círculo inscrito en el triángulo.



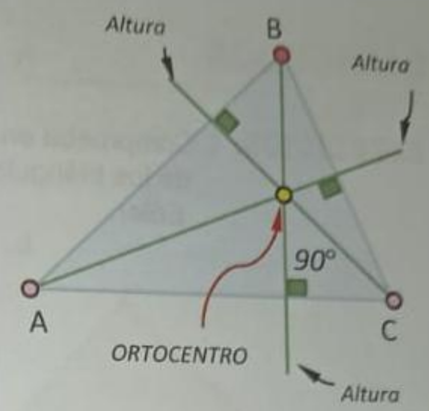

## MEDIANA:

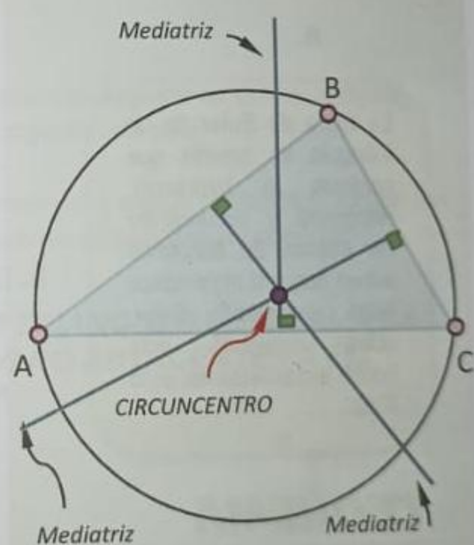
Es el segmento que va desde un vértice hasta el punto medio del lado opuesto. Las tres medianas de un triángulo se cortan en un punto llamado BARICENTRO (su centro de gravedad).

Lados
BC = a
AC = b
AB = c

**ALTURA:**
Es el segmento que se traza desde un vértice y es perpendicular al lado opuesto de éste.

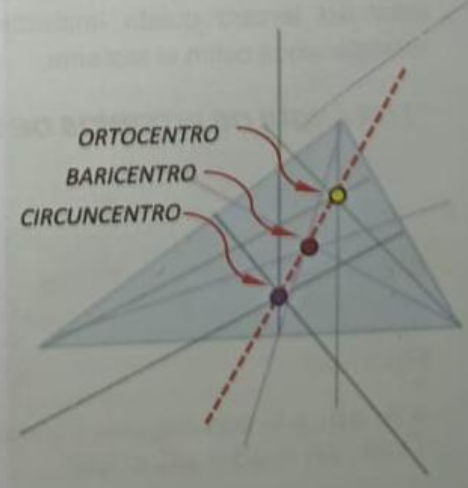
Las tres alturas de un triángulo se cortan en un punto llamado ORTOCENTRO.




**MEDIATRIZ:** Es la recta que divide a cada lado del triángulo en dos segmentos iguales.

Las tres mediatrices de un triángulo se cortan en un punto llamado CIRCUNCENTRO, que resulta ser el centro del círculo circunscrito en el triángulo.

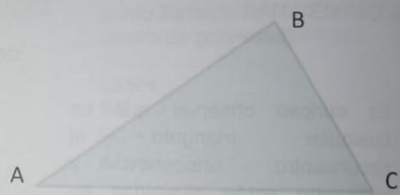



Es curioso observar que en cualquier triángulo el circuncentro, ortocentro y baricentro están alineados en una recta llamada RECTA DE EULER.

## TEOREMA

Los ángulos internos de un triángulo cualquiera tienen una importante propiedad en cuanto a su suma, de tal forma que al conocer dos de ellos, el valor del tercero queda implícitamente determinado. Esta propiedad la enunciaremos como el teorema.

***"LOS ÁNGULOS INTERNOS DE TODO TRIÁNGULO SUMAN 180°"***



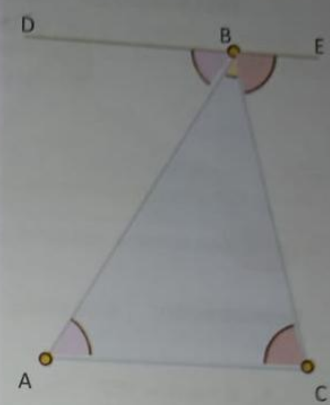

*Hipótesis:*

$\measuredangle A$, $\measuredangle B$, $\measuredangle C$ son ángulos internos del $\Delta$ ABC.

*Tesis:* $\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180°$

**Demostración:**

**1.** Tracemos la recta $\overline{DE}$ que pase por B y paralela a $\overline{AC}$ por construcción.




**2.** $\measuredangle DBA + \measuredangle ABC + \measuredangle EBC = 180°$, forman un ángulo llano.

**3.** $\measuredangle EBC = \measuredangle BCA$. Ángulos alternos internos.

**4.** $\measuredangle DBA = \measuredangle BAC$. Ángulos alternos internos.

**5.** $\measuredangle EBC = \measuredangle C$
$\measuredangle DBA = \measuredangle A$
$\measuredangle ABC = \measuredangle B$

Por lo tanto: $\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180°$

Ahora bien, en los triángulos también tenemos ángulos externos, esto es, ángulos formados por un lado y la prolongación de otro.

Los ángulos externos, al igual que los internos y según la clasificación de los triángulos, tienen ciertas propiedades que enunciaremos a continuación.

### I. *"UN ÁNGULO EXTERNO DE UN TRIÁNGULO ES IGUAL A LA SUMA DE LOS DOS INTERNOS NO ADYACENTES A ÉL."*

*Hipótesis:*

$\alpha$ ángulo externo

$\measuredangle A$, $\measuredangle B$ son internos.

*Tesis:*

$\measuredangle A$, $\measuredangle B$ son internos.

*Tesis:*

$\measuredangle A + \measuredangle B = \alpha$


**1.** $\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180°$
Teorema anterior

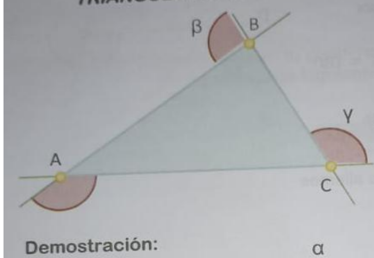
**2.** $\alpha + \measuredangle C = 180°$ son suplementarios

**3.** Aplicamos la propiedad de la igualdad

$$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = \alpha + \measuredangle C$$
$$- \measuredangle C = - \measuredangle C$$

Por lo tanto: $\measuredangle A + \measuredangle B = \alpha$

## II. " LA SUMA DE LOS ÁNGULOS EXTERNOS DE UN TRIÁNGULO ES IGUAL A 360°"




*Hipótesis:* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ son externos del $\Delta$ ABC

*Tesis:*
$\alpha + \beta + \gamma = 360°$

**Demostración:**

**1.** $\alpha + \measuredangle A = 180°$
$\beta + \measuredangle B = 180°$
$\gamma + \measuredangle C = 180°$
Son suplementarios

**2.** Sumando términos tenemos:

$\alpha + \beta + \gamma + \measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 540°$

**3.** $\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180°$ por teorema

$$\begin{array}{r} \alpha + \beta + \gamma + 180° = 540° \\ -180° \;\; -180° \\ \hline \alpha + \beta + \gamma = 360° \end{array}$$

descontamos 180°de ambos lados

## CONGRUENCIA.

Existen casos o figuras geométricas en las cuales aparecen triángulos con igual forma y tamaño, por lo que las propiedades que son válidas para uno, lo son para el otro. De aquí que:

**TRIÁNGULOS CONGRUENTES:** Son aquellos que tienen la misma forma y tamaño, esto es, sus lados y ángulos correspondientes son iguales.

Así al referirnos a la congruencia de dos triángulos, estamos hablando de la igualdad de los mismos.

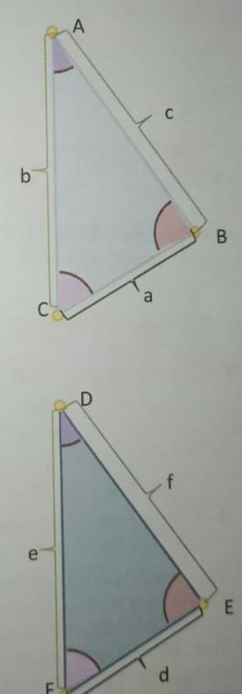
La congruencia la representaremos por el símbolo $\cong$ .

Por ejemplo:

$\Delta ABC \cong \Delta DEF$

**1.** $\measuredangle A = \measuredangle D$
$\measuredangle B = \measuredangle E$
$\measuredangle C = \measuredangle F$

**2.** a = d, b = e, c = f

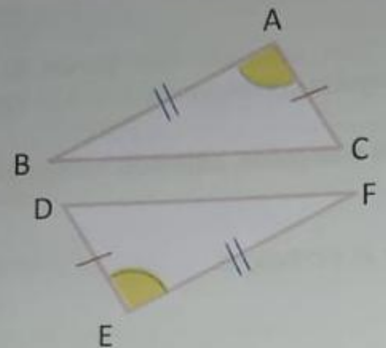



En general, dos figuras son congruentes, si una es exactamente la copia de otra, es decir, se pueden hacer coincidir en todas sus partes por sobreposición directa.

En los triángulos no es necesario conocer todos sus elementos para trazarlos, solo bastan algunos de ellos y la posición que guardan con respecto a los otros, por ello se dan sin demostración los CRITERIOS siguientes para analizar la congruencia.

# Criterios de Congruencia

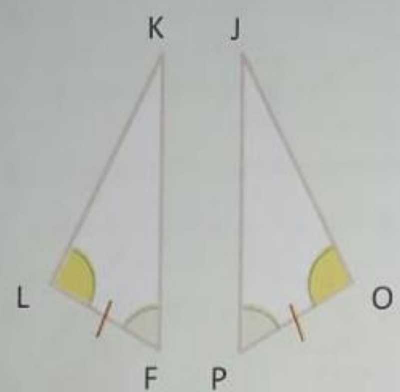
## Dos triángulos son congruentes si:




- **Lado-ángulo-lado (LAL).** Dos lados y el ángulo comprendido entre ellos son iguales a los correspondientes de otro triángulo.

  **Ejemplo:**

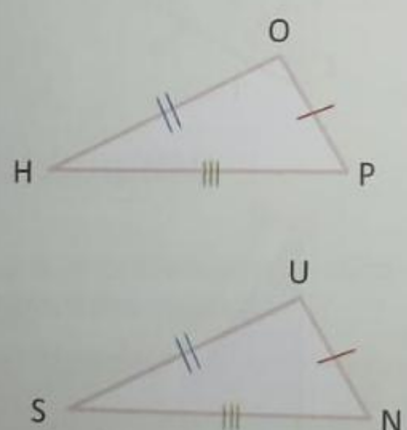
  $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ *por LAL*




- **Ángulo-lado-ángulo (ALA).** Dos ángulos y el lado común a ambos son iguales a los correspondientes de otro triángulo.

  **Ejemplo:**

  $\Delta KLF \cong \Delta JOP$ *por ALA*




- **Lado-lado-lado (LLL).** Tres lados son iguales a los correspondientes de otro triángulo.

  **Ejemplo:**

  $\Delta HOP \cong \Delta SUN$ *por LLL*

Cuando se está tratando de figuras congruentes es conveniente colocar una misma marca en las partes iguales de ambos.

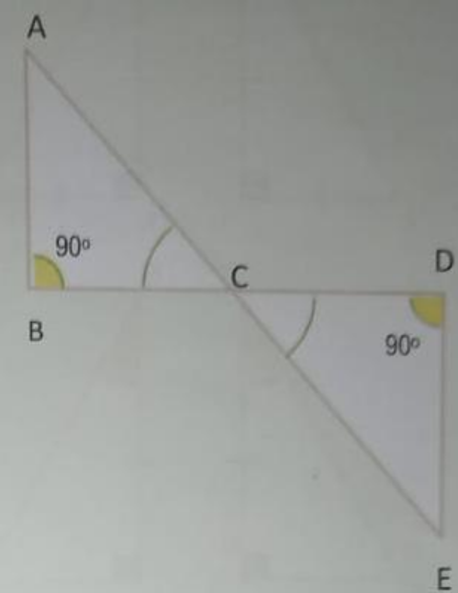
En el *primer caso*:
$\overline{AB} = \overline{EF}$, $\overline{AC} = \overline{DE}$, $\measuredangle A = \measuredangle E$

En el *segundo caso*:
$\overline{LF} = \overline{PO}$, $\measuredangle L = \measuredangle O$, $\measuredangle F = \measuredangle P$

En el *tercer caso*:
$\overline{OH} = \overline{SU}$, $\overline{OP} = \overline{UN}$, $\overline{HP} = \overline{SN}$

## EJEMPLO:

1. Analicemos la siguiente figura:




Si $\overline{BC} = \overline{CD}$,
el ángulo ∡ C es opuesto por el vértice y ∡ B = ∡ D = 90°,
entonces:
$\Delta ABC = \Delta EDC$ (ALA)

Los **triángulos rectángulos** merecen atención especial para el análisis de su congruencia ya que por definición tienen un elemento igual, el ÁNGULO RECTO, por lo que basta que se cumplan solo dos condiciones para obtener la igualdad de ellos.

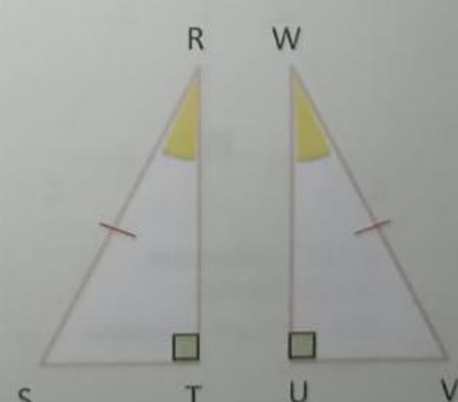
**Por ejemplo:**

a. La **hipotenusa y un lado (HL)** del primer triángulo rectángulo son congruentes con las partes correspondientes del triángulo rectángulo segundo.

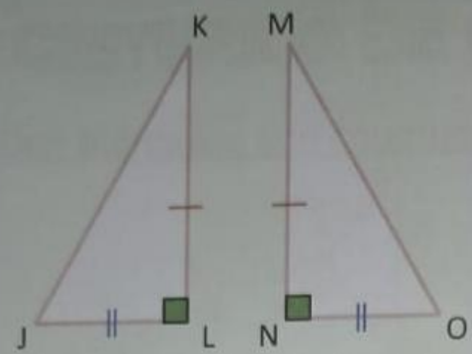


$\Delta LMN \cong \Delta OPQ$ *por HP*

b. La **hipotenusa y un ángulo agudo (HA)** del primer triángulo rectángulo son congruentes a las partes correspondientes del segundo triángulo rectángulo.

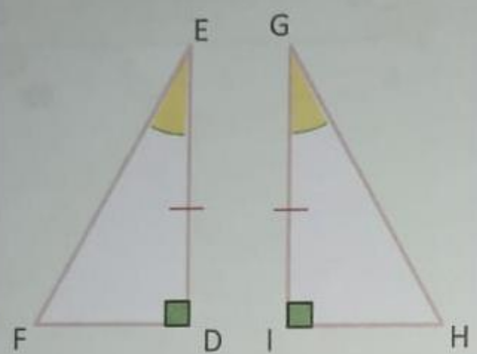



$\Delta RST \cong \Delta WVU$ *por HA*




**Dos lados (LL)** del primer triángulo rectángulo son iguales a las partes correspondientes del segundo triángulo rectángulo.

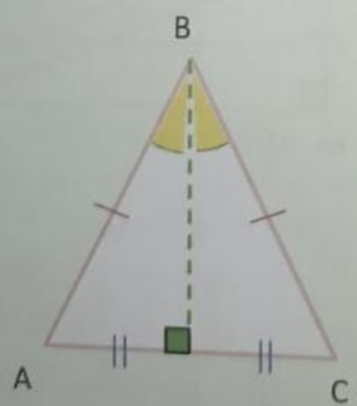
$$\Delta JLK \cong \Delta ONM \text{ por } LL$$




**Un lado y un ángulo agudo (LA)** del primer triángulo rectángulo son iguales a las partes correspondientes del segundo triángulo rectángulo.

$$\Delta EDF \cong \Delta HIG \text{ por } LA$$

Con base en el análisis hecho de la congruencia de triángulos, con respecto a sus elementos homólogos, veamos algunas de las propiedades de los triángulos que nos permitirán visualizar la forma que éstos tienen de acuerdo a la abertura de sus ángulos y la longitud de sus lados.




$\Delta ABC$ – isósceles,
Donde AB=BC
BM = altura- mediana-bisectriz

**1.** En los triángulos congruentes, a ángulos iguales se oponen lados iguales y viceversa.

**2.** En todo triángulo un lado es menor que la suma de los otros dos y mayor que la diferencia.

**3.** En todo triángulo al lado mayor se opone el ángulo mayor y viceversa.

**4.** En dos triángulos con dos lados respectivamente iguales y ángulo comprendido entre ellos desigual, a mayor ángulo se opone mayor lado.

**5.** La altura correspondiente a la base de un triángulo isósceles es también mediana y bisectriz del triángulo.

## Triángulo-semejanza

En un día soleado, los cuerpos producen sombras, ¿te has puesto a pensar en la relación que existe entre la altura de los cuerpos y la longitud de las sombras que producen éstas?

Se sabe que el sol incide con igual inclinación sobre los cuerpos en un momento y lugar determinados.

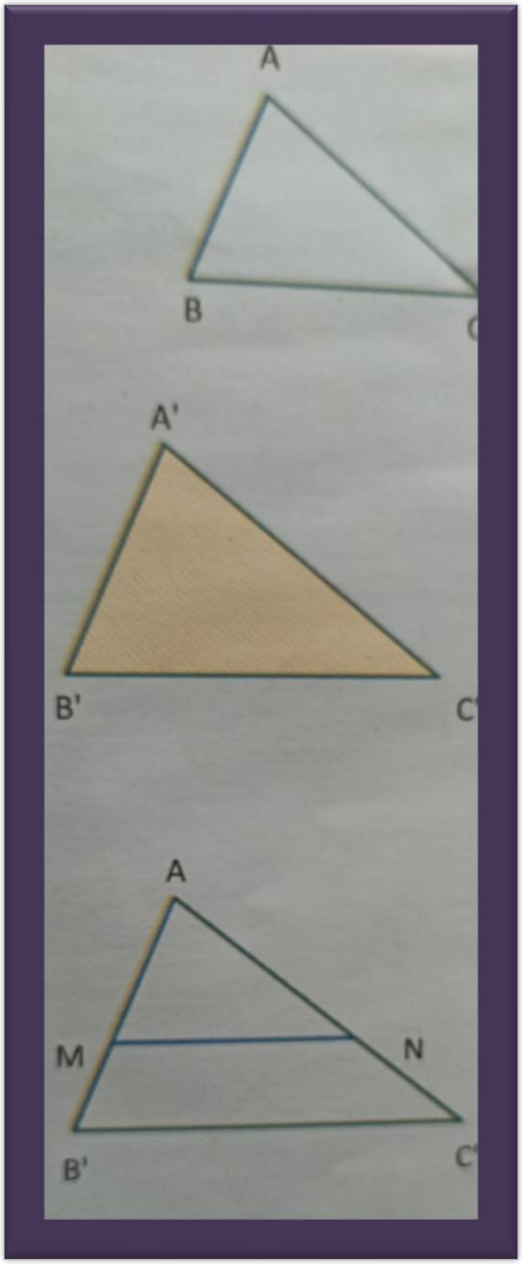
Es frecuente que los constructores, industriales y urbanistas tengan la precaución de diseñar su obra en dimensiones reducidas como paso previo a su construcción. Para ello, estos profesionales en sus respectivos trabajos hacen uso de maquetas y planos.

También se sabe que los laboratorios fotográficos reproducen los negativos en tamaño reducido "por contacto" pasando después a ampliar las exposiciones de mayor interés. Unos y otros, en sus respectivas obras trabajan con formas iguales, pero de distinto tamaño.

Dos triángulos son congruentes si sus lados correspondientes tienen la misma longitud y sus ángulos correspondientes tienen la misma medida. Hablamos de que se pueden hacer copias de estas figuras geométricas.

Dos triángulos son semejantes cuando tienen la misma forma, pero no necesariamente el mismo tamaño. Hablamos de reducción o aumento del tamaño de estas figuras geométricas que puede ser de diferente escala.

En general, DOS TRIÁNGULOS SON SEMEJANTES si tienen ángulos homólogos iguales y sus lados proporcionales.




Entonces podemos establecer que:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AB}{A'C'}$$

TEOREMA:

"Si dos lados de un triángulo se cortan por una paralela al tercero, se obtiene otro triángulo semejante al primero".

Observa que: A es común

AMN=ABC

Ambos son Correspondientes

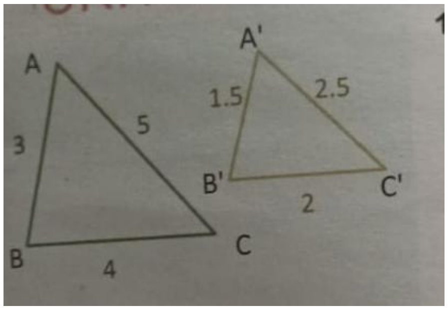
ANM=ACB

CRITERIOS DE SEMEJANZA

Del mismo modo que en la igualdad de triángulos, para la semejanza no es preciso comprobar que éstos tengan ángulos homólogos iguales y sus tres lados proporcionales. Es suficiente que cumplan ciertas condiciones que constituyen los CRITERIOS DE SEMEJANZA

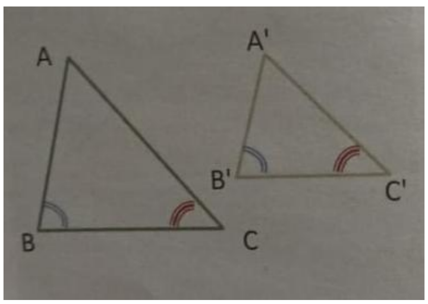
# CRITERIOS DE SEMEJANSA

1. Dos triángulos son semejantes si tienen los tres lados proporcionales.




$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AB}{A'C'}$$

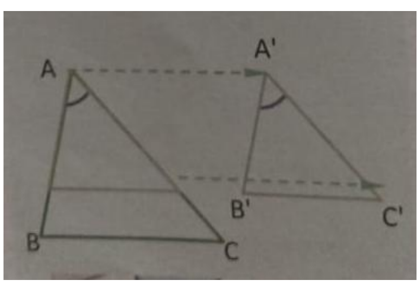
2. Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos iguales.




$A=A^1$

$B=B^1$

3. Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados proporcionales y el ángulo comprendido es igual.




$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$$

Por ser correspondientes

A=A´

En los tres casos, basta con suponer el triángulo pequeño sobre el grande y hacer uso del teorema fundamental para conformar su semejanza.

## TEOREMA DE TALES:

"Los segmentos determinados por rectas paralelas en dos concurrentes son proporcionales”

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OA´}{OB´}$$

De forma analógica:

$$\frac{AB}{OB} = \frac{A'B'}{OB'}$$

## ¿CÓMO CALCULAR LA ALTURA DE UN ÁRBOL CON SU SOMBRA UTILIZANDO EL TEOREMA DE TALES?

Ya sabes, que el teorema de Tales puede utilizarse para medir grandes alturas o distancias inaccesibles, empleando la semejanza de triángulos. Necesitas una cinta métrica; se trata de medir la altura de un objeto con su sombra y la sombra de una persona.

1. Debes medir la sombra del árbol.

2. Debes medir la altura de la persona y la longitud de su sombra.

3. Calcula:

$$\frac{Altura\ del\ arbol}{Smbra\ del\ arbol} = \frac{Altura\ persona}{Sombra\ de\ persona}$$

$$\frac{x}{1.80} = \frac{1.60}{1.15}$$

$$x = \frac{1.80 \times 1.60}{1.15} = 2.5m\ es\ la\ altura\ del\ arbol$$

# TEOREMA DE PITAGORAS

La acción de medir en la geometría se asocia a la idea del número. En la antigüedad, se suponía un estudio profundo de éstos, así como de sus propiedades y relaciones. En este sentido, sobresale la figura de Pitágoras, quien, junto con sus discípulos, intentó la armonía de los números.

Así lo confirma Aristóteles cuando dice: “Los pitagóricos se dedicaron primero a las matemáticas, ciencia que perfeccionaron y, compenetrados en ella, imaginaron que los principios de las matemáticas eran los principios de todas las cosas”.

Pitágoras también se interesó por los objetos naturales más abstractos y dice que descubrió las maravillosas progresiones armónicas correspondientes a las notas de la escala musical; al encontrar la relación entre la longitud de una cuerda y el tono de la nota que producía al vibrar

## APLICACIÓN DEL TEOREMA DE PITÁGORAS EN LA PRÁCTICA.

Muchas veces en la construcción se necesita verificar si un ángulo es de 90°, por esta razón se utilizan los NÚMEROS PITAGÓRICOS.

Así, en los dos catetos que deben formar un ángulo de 90° se marcan, por ejemplo, las distancias de 3 y 4 cm o metros y se mide la hipotenusa. En este caso, si el ángulo es de 90°, la hipotenusa debe ser de 5 cm o metros respectivamente. Si no es de 5 cm o metros, el ángulo no es de 90°.

## POLÍGONOS.

Recordemos que una línea es una sucesión encadenada de segmentos, estos pueden ser abiertos o cerrados, es decir.

Entonces el POLÍGONO la superficie está limitada por una línea poligonal cerrada. La palabra polígono proviene del griego POLI-varias, GONO-ángulos.

En la figura adjunta puedes observar los elementos básicos de un polígono.

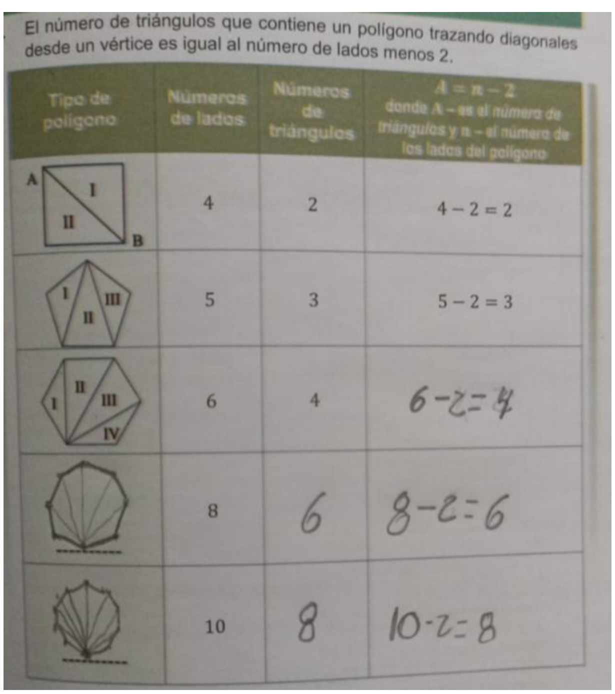
Otro elemento básico de todo polígono es su perímetro.

El perímetro de un polígono es la suma de las longitudes de sus lados.

## CLASIFICACIÓN DE LOS POLÍGONOS.

Los polígonos se clasifican según el número de lados, estos pueden ser triángulos, cuadriláteros, pentágonos, heptágonos, hexágonos, octágonos, enólogos, decágonos... Un polígono que tiene todos sus lados y todos sus ángulos iguales se dice que es un POLÍGONO REGULAR

En los datos aparecen los dos nuevos elementos CENTRO Y APOTEMA E CENTRO de una duna de sus vértices y el ANPOTEMA es el segmento perpendicular desde el centro a cualquiera de los lados



El número de triángulos que contiene un polígono trazando diagonales desde un vértice es igual al número de lados menos 2.

| Tipo de polígono | Números de lados | Números de triángulos | $A = n - 2$ donde A – es el número de triángulos y n – el número de los lados del polígono |
|---|---|---|---|
| | 4 | 2 | $4 - 2 = 2$ |
| | 5 | 3 | $5 - 2 = 3$ |
| | 6 | 4 | $6-2=4$ |
| | 8 | 6 | $8-2=6$ |
| | 10 | 8 | $10-2=8$ |

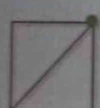
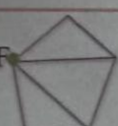
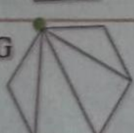
2. La suma de los ángulos interiores o internos de un polígono es igual a $S_1 = 180°(n-2)$ donde - son los lados del polígono.

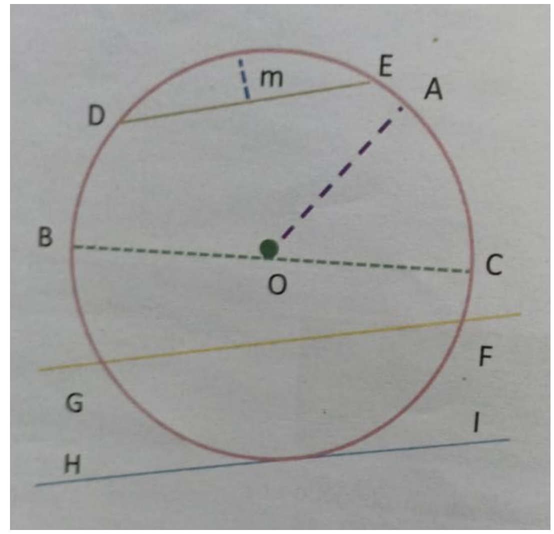
Ejemplo: fórmula para un hexágono regular:

$S_1 = (180°)\ (6-2)\ S_1 = (180°)\ (4) = 720°$

Corolario: Un ángulo interior de un polígono es i = 180° (n-2) 71 donde n - son los lados del polígono.

3. El número de diagonales que se pueden trazar desde un vértice igual al número de lados menos 3.

| Tipo de polígono | Número de lados | Números de diagonales | $D = n - 3$ donde $D$ – es el número de las diagonales desde un vértice del polígono y n – el número de sus lados. |
|---|---|---|---|
| D  | 3 | 0 | $3 - 3 = 0$ |
|  E | 4 | 1 | $4 - 3 = 1$ |
| F  | 5 | 2 | $5 - 3 = 2$ |
| G  | 6 | 3 | $6 - 3 = 3$ |




RADIO:

Cualquier segmento que une el centro con un punto de la circunferencia (OA).

DIÁMETRO:

Es el segmento cuyos extremos están en la circunferencia y contiene el centro (BC).

CUERDA:

Es el segmento cuyos extremos están en la circunferencia (DE). El diámetro es el mayor de las cuerdas.

SECANTE:

Es la recta que corta la circunferencia en dos puntos (FG).

TANGENTE:

Es cualquier recta que toca la circunferencia en uno y solo un punto (HI).

FLECHA O SAGITA:

Es la parte del radio, perpendicular al punto medio de la cuerda, comprendida entre ésta y el arco subtendido por ella (m).

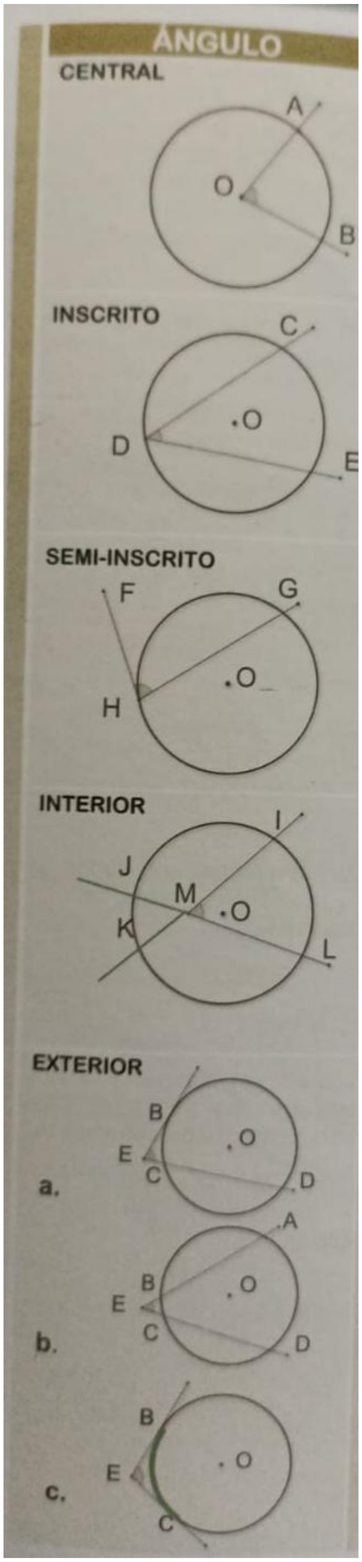
Como observarás todos los elementos que definen son rectas o segmentos de recta. Pero existen otros: ARCO Y ÁNGULO.

ARCO:

Es una parte de la circunferencia y para representarlos se utiliza el símbolo (DG).

ÁNGULO:

Según la posición del vértice




DESCRIPCIÓN

El vértice del ángulo central coincide con el centro de la circunferencia, y además sus lados son radios. La medida de este ángulo es igual a su arco correspondiente. En el ejemplo: AOB=AB

El vértice del ángulo inscrito es un punto de la circunferencia y los lados son rectos: secantes. La medida de este ángulo es la mitad del arco que abarca. En el ejemplo: CDE=CE

El vértice del ángulo semi-inscrito es un punto de la circunferencia y los lados son rectos, uno es secante y el otro es tangente. La medida de este ángulo es la mitad del arco que abarca. En el ejemplo: FHG=HG

El vértice del ángulo interior está dentro de la circunferencia y sus lados son secantes a ella. La medida de este ángulo es la mitad de la suma de las medidas de los arcos que abarcan sus lados y las prolongaciones de estos lados. En el ejemplo: IML= (IL + JK)

La medida de este ángulo es la mitad de la diferencia de las medidas de los arcos que abarcan sus lados sobre la circunferencia.

En el ejemplo

a): BED= (BD-BC) 2

b): AED= (AD-BC)

c): BEC=180-BC