

离散优化建模：习题课 4

作曲

1 简介

刘备被孙权的妹妹孙尚香深深吸引了。为了证明刘备的真心，孙尚香要求刘备作曲一首。这首歌的每一个音符都是不一样的，而且每个音符之间的音差也应该是不同的。

作曲 - `composition.mzn`

有 1 到 n 个音符，现在需要安排它们的顺序，令到相邻的音符的差全都不同（音符之间的差值在 1 到 $n - 1$ 之间）。

问题的数据如下：

`n = < 音符的数量 >;`

你应该输出一列排好序的音符。例如对于数据：

`n = 8;`

你应该输出的音符顺序可以是：

`order = [5, 2, 6, 4, 3, 8, 1, 7];`

需要注意到音符之间的差值全部都是不一样的。

尝试 n 为不同数值时的情况。你可以解决多大的值？尝试不同的求解器。

1.1 拓展

这是一个拓展练习。你可以在第一行输出音符的顺序，在第二行两个音符之间的位置输出它们之间的差值。也就是说，上述的输出如下：

```
5 2 6 4 3 8 1 7
3 4 2 1 5 7 6
```

对于 $n = 13$ 问题的解 `[13, 1, 12, 2, 11, 3, 10, 4, 9, 5, 8, 6, 7]`，输出应该是：

```
13  1  12  2  11  3  10  4  9  5  8  6  7
12 11 10  9  8  7  6  5  4  3  2  1
```

必须保证输出在 $2 \leq n \leq 99$ 是美观工整的。

2 作曲第二重 - compositiondual.mzn

让我们再尝试深入思考这个问题。在序列中有两个音符之间的差值必须是 $n - 1$ 。也就是说，音符 1 必须在音符 n 相邻的位置。为了表达出这个约束，你需要有变量 $posn[i]$ 来决定音符 i 的位置，以此对应上述输出中音符的顺序。所以约束可以表达为 $abs(posn[1] - posn[n]) = 1$ 。

你可以利用 `inverse` 这个全局约束来联系问题中 `order` 和 `posn` 这两个视角。

因为音符之间的差值其实是 1 到 $n - 1$ 数字的排列。我们也知道关于 $n - 1$ 这一差值的一些约束。 $n - 1$ 差值必须出现在音符 1 和音符 n 在序列中的位置之间。

如果我们把 1 到 $n - 1$ 的位置之差标记起来，我们可以令到第 $n - 1$ 个差值的位置是音符 1 在序列中的位置和音符 n 的位置的较小值。我们可以写成 $dposn[n - 1] = \min(posn[1], posn[n])$ 。

同样地，`diffs` 和 `dposn` 可以通过 `inverse` 全局约束来联系起来。所以所有音符的解为：[5, 2, 6, 4, 3, 8, 1, 7]。

```
order = [5, 2, 6, 4, 3, 8, 1, 7];
diffs = [3, 4, 2, 1, 5, 7, 6];
posn  = [7, 2, 5, 4, 1, 3, 8, 6];
dposn = [4, 3, 1, 2, 5, 7, 6];
```

在这个模型中，尝试 n 为不同数值时的情况。你可以解决多大的值？利用统计数据来看看不同模型 `composition.mzn` 和 `compositiondual.mzn` 有多大的不同！

3 软件需求

你需要 MINIZINC 2.0 (<http://www.minizinc.org/2.0/>) 来完成这次习题课。