Գեներատիվ մրցակցող ցանցերի կիրառումը նկարի տեսքով թաքնագրության կրիչ ստեղծելու համար

Նախաբան

Թաքնագրությունը գաղտնի տեղեկատվությունը ոչ գաղտնի տեղեկատվության (կոնտեյներ) մեջ թաքցման մեթոդների հավաքածու է: Իսկ թաքնավերլուծությունը (Steganalysis), մի գործընթաց է, որն ուղղված է պարզելուն, թե արդյո՞ք հաղորդագրությունը պարունակում է թաքնված ինֆորմացիա, և հնարավորության դեպքում այն վերականգնելուն: Թաքնված ինֆորմացիայի ներկայությունը հայտնաբերելու համար սովորաբար օգտագործվում է երկուական դասակարգիչ (Binary classifier): Սույն ուսումնասիրության մեջ ներկայացվելու է մի մոդել, որը ստեղծում է նկար-կոնտեյներներ, հիմնված՝ Խորը Պարուրման Ստեղծարար Մրցակցող Ցանցերի (Deep Convolutional Generative Adversarial Networks, կրճատ՝ DCGAN) վրա: Այս մոտեցումը թույլ է տալիս առաջարկել ավելի թաքնակայուն կոնտեյներ, ներդրված հաղորդագրությամբ, օգտագործելով ստանդարտ թաքնագրային ալգորիթմներ:

Այս թեմայի շուրջ 2016թ.-ին կատարվել է հետազոտություն, որի ընթացքում փորձել են գեներացնել մարդկանց դեմքեր: Մոդելը հաջողությամբ մոլորեցրել է թաքնագրային վերլուծիչին, սակայն որոշ դեպքերում մարդու աչքը գեներացված նկարները հեշտությամբ կարող էր տարբերել իրականից, քանզի մոդելին՝ ուսուցման ժամանակ, տրամադրվել էին տարբեր սեռի մարդկանց դեմքեր, սակայն չէին հաշվի առել այդ հանգամանքը:

Ուսուցմանը մասնակցելու են միանգամից 3 մոդել: Դրանք են՝

1. Գեներացնող մոդել (Գեներատոր - Generator) - G
2. Տարբերակող մոդել (Տարբերակիչ - Discriminator) - D
3. Թաքնավերլուծող մոդել (Թաքնավերլուծիչ - Steganalyser) - S

Առաջին մոդելը՝ գեներատորը, պատասխանատու է նկարներ գեներացնելու համար, այն պետք է այնպիսի նկարներ գեներացնի, որ հնարավոր չլինի տարբերել իրական նկարներից: Այս խնդրի լուծման համար օգտագործվելու է երկրորդ մոդելը՝ տարբերակիչը, որի խնդիրն է լինելու տարբերել իրական նկարը կեղծից (կեղծ են բոլոր այն նկարները որոնք ստեղծել է G գեներատորը): Այս ամենից հետո գործի է անցնում 3-րդ մոդելը՝ վերլուծիչը, որի խնդիրն է պարզել արդյո՞ք տրված նկարում առկա է թաքնագրված ինֆորմացիա, թե՞ ոչ: D վերլուծիչին ուսուցման ընթացքում տրամադրվելու են գեներատորի նկարները, որոնք արդեն պարունակում են թաքնագրված ինֆորմացիա, ինչպես նաև սովորական նկարներ, որոնք չեն պարունակում ոչ մի թաքնագրված ինֆորմացիա:

Այսպիսով D տարբերակիչն ու S վերլուծիչը բարելավելու են իրենց արդյունքը՝ հիմնվելով G գեներատորի տրամադրած և սովորական նկարների վրա, իսկ G-ն

բարելավելու է իր արդյունքը՝ հիմնվելով D-ի և S-ի արդյունքի վրա: Հենց այստեղ էլ առաջ է գալիս մրցակցող ցանցերի գաղափարը, քանզի ստացվում է, որ ցանցերը մրցում են միմյանց հետ, թե ում արդյունքն ավելի լավը կլինի:

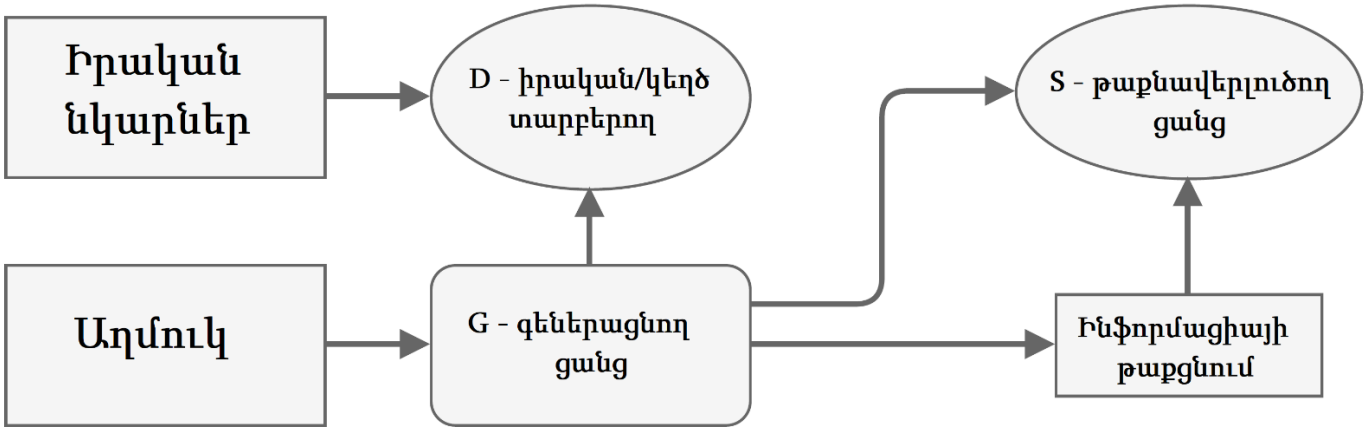
Վերջերս մշակված մրցակցող ցանցերը (GAN, տես Goodfellow(2014)) հզոր գեներացնող մոդելներ են, որոնց հիմնական գաղափարը գեներատորի և տարբերակիչի ուսուցումն է մինիմաքս խաղի միջոցով: G մոդելը մուտքին ստանում է պատահական՝ այսպես ասած անիմաստ նկար, որի հիման վրա փորձում է ստեղծել հնարավորինս իրականին մոտ պատկեր, իսկ D-ն ձգտում է տարբերակել իրական պատկերները կեղծերից:

Գոյություն ունեն նմանատիպ ցանցերի տարբեր մոդիֆիկացիաներ՝

- Խորը Պարուրման Ստեղծարար Մրցակցող Ցանցեր (DCGAN, տես՝ Radford (2015))
  - այս մոդելը Ստեղծարար Մրցակցող Ցանցի (GAN) փոփոխություն է, որը մասնագիտացված է պատկերների առաջացման ուղղությամբ
- Պայմանական Մրցակցող Ցանցեր
  - թույլ է տալիս ստեղծել որևէ դասի օբյեկտներ, տես Mirza & Osindero (2014);
- Պատկերների առաջացում՝ հիմնված տեքստային նկարագրության վրա, տես Reed (2016):

Թաքնագրվող գաղտնի ինֆորմացիան, ինչպես նաև կոնտեյները, կարող է ներկայացված լինել տարբեր տեսքով՝ նկարի, տեքստի, տեսահոլովակի, ձայնագրության և այլն: Այս ուսումնասիրության մեջ կատարվելու է տեքստի թաքնագրում նկարում և օգտագործվելու է DCGAN տեսակը:

Ներքևում ներկայացված են մոդելները և նրանց միջև կապերը՝



Մեքենայական ուսուցում (Machine Learning – ML)

Նախքան անցնելը բուն թեմային, ծանոթանանք մեքենայական ուսուցման հետ: Արթուր Սամուելն այն նկարագրում է այսպես. «Մեքենայական ուսուցումը մի տեխնոլոգիա է, որը համակարգիչներին հնարավորություն է տալիս սովորելու, առանց բացահայտ ծրագրավորված լինելու»: Սա, իհարկե, ոչ պաշտոնական ձևակերպում է, սակայն լավ պատկերացում է տալիս:

Մեքենայական ուսուցման ալգորիրթմներից են.

- Վերահսկվող ուսուցում (Supervised learning)
- Չվերահսկվող ուսուցում (Unsupervised learning)
- Ուսուցում ամրապնդմամբ (Reinforcement learning)
- Խորհրդատու համակարգ (Recommender system)

Վերահսկվող ուսուցման դեպքում մեքենային տրվում է մուտքային տվյալների հավաքածու և այդ տվյալներին համապատասխան ելքային արժեքները: Այսպիսով այս ուսուցման դեպքում մեքենային հայտնի են ամեն մի մուտքային ինֆորմացիային համապատասխանող ելքային արժեքը կամ արժեքները:

Վերահսկվող ուսուցում (Supervised Learning)

Վերահսկվող ուսուցման խնդիրները դասակարգվում են հետևյալ 2 տիպերի.

- Ռեգրսիայի խնդիրներ (Regression problems)
- Դասակարգման խնդիրներ (Classification problems)

Ռեգրեսիայի խնդրներում փորձում ենք կանխատեսել անընդհատ ֆունկցիայի արժեքներ, ինչը նշանակում է, որ մենք փորձում ենք մուտքային փոփոխականները համապատասխանեցնել ինչ-որ անընդհատ ֆունկցիայի ելքային արժեքներին: Դասակարգման հարցում մենք փոխարենը փորձում ենք կանխատեսել ընդհատ ելքային արժեքներ: Այլ կերպ ասած, մենք փորձում ենք մուտքային փոփոխականները համապատասխանեցնել դիսկրետ կատեգորիաների:

Ռեգրեսիայի խնդրի օրինակ՝ «Տրված մարդու նկարից որոշել նրա տարիքը»:

Դասակարգման խնդրի օրինակ՝ «Տրված է որևէ հիվանդի ուռուցքի մասին ինֆորմացիա, որոշել արդյո՞ք ուռուցքը չարորակ է, թե՞ բարորակ»:

Չվերահսկվող ուսուցում (Unsupervised Learning)

Չվերահսկվող ուսուցումը հնարավորություն է տալիս լուծել այնպիսի խնդիրներ, որոնց ելքային արժեքների մասին կա՛մ քիչ ինֆորմացիա ունենք, կա՛մ ընդհանրապես չգիտենք, թե ինչ տեսքի պետք է լինեն: Մենք կարող ենք ստանալ մի այնպիսի ելքային

տվյալի կառուցվածք, որի վրա մուտքային տվյալի ազդեցությունն անգամ չգիտենք: Այդ կառուցվածքը հնարավոր է ստանալ տվյալները համախմբելու արդյունքում՝ հիմնված մուտքային տվյալի փոփոխականների միջև կապերի վրա:

Չվերահսկվող ուսուցման ժամանակ կանխատեսման արդյունքների վրա հիմնված հետադարձ կապ չկա:

Օրինակներ՝

Կլաստերիզացիա. Վերցնել 1,000,000 տարբեր գեների հավաքածու և ավտոմատացնել այդ գեների խմբավորումն այնպիսի խմբերում, որոնք ինչ-որ կերպ նման են կամ կապված են տարբեր փոփոխականների հետ՝ ինչպիսիք են կյանքի տևողությունը, գտնվելու վայրը, դերը և այլն:

Ոչ կլաստերիզացիա. «Կոկտեյլային երեկույթի ալգորիթմը», թույլ է տալիս գտնել կառուցվածք քաոսային միջավայրում (այսինքն, առանձնացնել մարդու խոսակցության ձայնը երեկույթում հնչող երաժշտությունից):

Որոշ նշանակումներ

Կատարենք մի քանի նշանակումներ, որոնք կոգտագործվեն հետագայում:

Դիցուք ունենք հետևյալ տվյալները՝

X_1	…	X_n	Y
$Input^{(1)}{}_1$	…	$Input^{(1)}{}_n$	$Output^{(1)}$
…	…	…	…
$Input^{(m)}{}_1$	…	$Input^{(m)}{}_n$	$Output^{(m)}$

$X_1, X_2, \dots X_n$-ը մուտքային պարամետրերի նշանակումներն են, Y-ը՝ ելքային պարամետրի նշանակումը: $Input^{(i)}{}_1, Input^{(i)}{}_2, \dots Input^{(i)}{}_n$-ը մուտքային պարամետրերի արժեքներն են (տվյալի հատկություններ), իսկ $Output^{(i)}$-ն՝ ելքային պարամետրի արժեքն է, որտեղ՝ $i=1,2,\dots,m$: Հարմարավետության համար $Input^{(i)}{}_1, Input^{(i)}{}_2, \dots Input^{(i)}{}_n$-ը նշանակենք $x^{(i)}$-ով, իսկ $Output^{(i)}$-ն՝ $y^{(i)}$-ով: Պարզ է, որ՝ n-ը մուտքային պարամետրերի քանակն է:

$(x^{(i)}, y^{(i)})$ զույգն անվանում ենք ուսուցման օրինակ (training example), իսկ դրանց ցուցակը՝ ուսուցման տվյալներ (training set): Այսինքն m-ը՝ ուսուցման տվյալների քանակն է:

Այժմ կարող ենք տալ վերահսկվող ուսուցման ավելի ֆորմալ ձևակերպում՝ «Վերահսկվող ուսուցման նպատակն է՝ տրված ուսուցման տվյալների հիման վրա ձևավորել մի այնպիսի $h : X \to Y$ ֆունկցիա, որ $h(x)$-ի ելքային արժեքը բավականին մոտ լինի համապատասխան y-ի արժեքին»: h ֆունկցիան անվանում են «հիպոթեզ»:

Ինչքան *h(x)-ի* արժեքը մոտ լինի համապատասխան *y-ի* արժեքին, այնքան ավելի ճիշտ արդյունքներ կտա մեր մեքենայական ուսուցման մոդելը:

Բնականաբար *h(x)-ը* ունի գործակիցներ, նշանակենք այդ գործակիցները $\theta_0, \theta_1, \dots \theta_n$*-ով,* այս պատճառով *h(x)-ը* որոշ դեպքերում կնշանակենք $h_\theta(x)$:

Հասկանալի է, որ մեր խնդիրը հենց այդ *θ-ների* արժեքները գտնելու մեջ է կայանում, քանզի հետագայում՝ երբ արդեն մեր մոդելը բավարար չափով ուսուցանված կլինի, և ունակ կլինի գուշակել ճիշտ արժեքներ, նրան տրվելու են $X_1, X_2, \dots X_n$ արժեքները և քանզի այն ունի արդեն հաշվարկած $\theta_0, \theta_1, \dots \theta_n$ արժեքները, ընդամենը պետք է հաշվի $h_\theta(x)$*-ի* արժեքը:

Արժեքի ֆունկցիա (Cost Function)

h(x)-ի արժեքների ճշտությունը կարելի է գնահատել **արժեքի ֆունկցիայի** միջոցով: Այն իրենից ներկայացնում է *h(x)-ի* բոլոր ելքային արժեքների և իրական *y-ների* արժեքների միջինացված տարբերություն:

Ահա բանաձևը՝

$$J(\theta_0, \theta_1, \dots \theta_n) = \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{m}(h(x_i) - y_i)^2$$

Ավելի պարզ այն կարող ենք գրել հետևյալ կերպ՝ $\frac{1}{2}\bar{x}$, որտեղ $\bar{x}$*-ը* $(h_\theta(x_i) - y_i)$*-ի* քառակուսային միջինն է, այսինքն՝ գուշակված և իրական արժեքի տարբերությունը:

Այս ֆունկցիան նաև կոչվում է «Քառակուսային սխալի ֆունկցիա» (“Squared error function”): Քառակուսային միջինը բաժանվել է 2-ի՝ հետագա հաշվարկների հարմարավետության համար, քանի որ դրա միջոցով $(h_\theta(x_i) - y_i)^2$*-ի* ածանցումից ստացված *2* բազմապատիկը կվերանա:

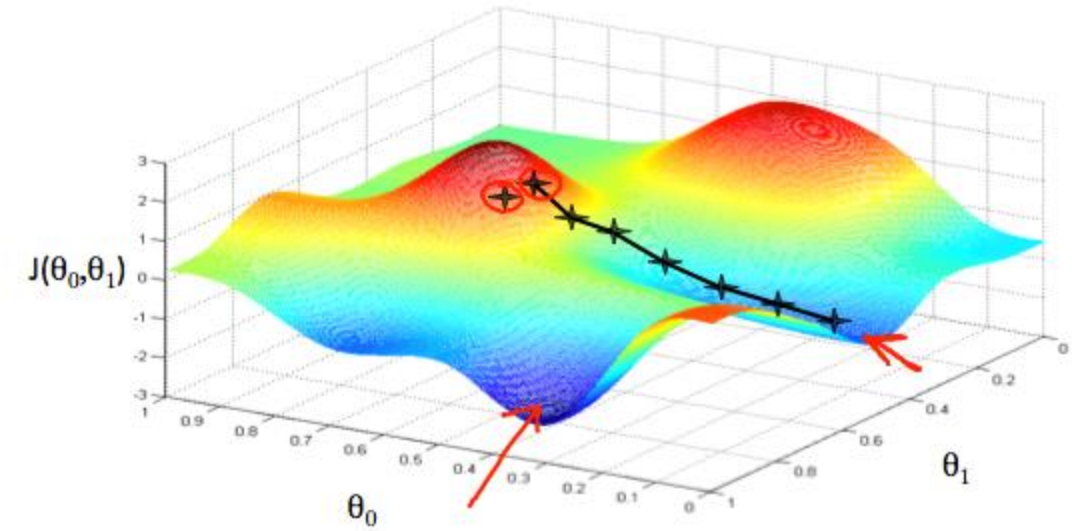
Ստացվեց, որ մեր խնդիրը կայանում է $J(\theta_0, \theta_1, \dots \theta_n)$*-ը* մինիմիզացնելու մեջ, որն ավելի ֆորմալ կարող ենք ներկայացնել հետևյալ կերպ՝

$$\underset{\theta_0, \theta_1, \dots \theta_n}{minimize}\, J(\theta_0, \theta_1, \dots \theta_n)$$

Նվազող գրադիենտ (Gradient Descent)

Այսիպսով արդեն պարզաբանվեց, թե ինչ է հիպոթեզ ֆունկցիան և թե ինչպես կարելի է չափել նրա ճշտությունը: Այժմ անհրաժեշտ է որոշել հիպոթեզի պարամետրերը:

Դիտարկենք հիպոթեզ ֆունկցիայի պարզեցված օրինակ, որն ունի ընդհամենը 2 պարամետր՝ θ_0 և θ_1: Պատկերենք այդպիսի հիպոթեզի արժեքի ֆունկցիայի օրինակ:



Այստեղ պետք է հստակ պատկերացնել, որ մենք չենք գծում հիպոթեզի գրաֆիկը, այլ փոխարենը գծում ենք նրա **արժեքի ֆունկցիայի** գրաֆիկը, որը ցույց է տալիս, թե θ_0-ի և θ_1-ի արժեքների համար ինչքանով է հիպոթեզը շեղված սպասվելիք արժեքներից: Հասկանալի է, որ պետք է գտնել տվյալ գրաֆիկի վրայի ամենացածր կետը, որի θ_0 և θ_1 արժեքներն էլ հենց կլինեն մեր հիպոթեզի որոնելի պարամետրերի արժեքները (վերևի նկարում կարմիր սլաքներով նշված են տվյալ գրաֆիկի մինիմումները): Քանզի արժեքի ֆունկցիան հիմնականում իրենից ներկայացնում է բարդ մաթեմատիկական բանաձև, այն դժվար է գծել, կամ գտնել, թե θ-ի որ արժեքների դեպքում է այն ընդունում մինիմալ արժեք: Հենց այս խնդիրը լուծելու համար օգտագործվում է նվազող գրադիենտը:

Նշվածն իրականացնելու համար կօգտագործենք արժեքի ֆունկցիայի ածանցյալը: Ածանցյալը ցույց է տալիս տվյալ կետում շոշափողի ուղղությունը, ինչն էլ ինֆորմացիա է տալիս այն մասին, թե որ ուղղությամբ պետք է շարժվել: Ամեն քայլին շարժվում ենք այն ուղղությամբ, որն ամենաշատն է նվազեցնում արժեքի ֆունկցիան:

Յուրաքանչյուր քայլի չափը որոշվում է α պարամետրի միջոցով, որը կոչվում է ուսուցման գործակից (learning rate): Օրինակ, վերը նշված գրաֆիկում յուրաքանչյուր «աստղի» հեռավորությունը ներկայացնում է քայլի հեռավորությունը՝ պայմանավորված α պարամետրով: Փոքր α-ն համապատասխանում է փոքր քայլի, իսկ մեծը՝ մեծ քայլի: Քայլի ուղղությունը, որոշվում է $J(\theta_0, \theta_1)$-ի մասնակի ածանցյալով: Կախված այն բանից, թե որտեղից ենք սկսում դիտարկել գրաֆիկը, հնարավոր է տարբեր մինիմումների հասնել: Վերևում պատկերված են երկու տարբեր սկզբնակետեր (վերցված են կարմիր շրջանագծերի մեջ), որոնք հասնում են երկու տարբեր մինիմումների:

Ընդհանուր դեպքի համար նվազող գրադիենտի ալգորիթմը կլինի.

կրկնել հեևյալը մինչև զուգամիտում՝ $\theta_j := \theta_j - \alpha \frac{\delta}{\delta \theta_j} J(\theta_0, \theta_1, \dots \theta_n)$ որտեղ՝

j = 0,1, … n ներկայացնում է հատկության հերթական համարը: Այն անվանում են նաև թարմացման կանոն (update rule):

Մեր օրինակի համար՝ *n = 1:*

Յուրաքանչյուր իտերացիային պետք է միաժամանակ թարմացնել բոլոր θ_0, θ_1, … θ_n պարամետրերը: Այսինքն նախ տվյալ իտերացիայի համար հաշվարկել բոլոր *θ-ների* արժեքները՝ *θ',* որից հետո *θ-ին* վերագրել *θ':* Եթե կամայական θ_j*-ի* արժեքը թարմացնենք նախքան բոլոր *θ-ների* արժեքները հաշվարկելը, ապա կստանանք սխալ պատասխան:

Պետք է հաշվի առնել, որ կարևոր է α-ի ճիշտ ընտրությունը, քանզի դրանով է պայմանավորված ալգորիթմի զուգամիտման ժամանակը: Եթե ալգորիթմը չի զուգամիտում կամ շատ ժամանակ է պահանջում մինիմումին հասնելու համար ապա α քայլաչափը սխալ է ընտրված:

Այստեղ կարող է հարց առաջանալ, թե արդյո՞ք հնարավոր է հասնել մինիմումի՝ α-ի անփոփոխ արժեքի դեպքում: Պատասխանը պարզ է դառնում, երբ հաշվի ենք առնում այն հանգամանքը, որ, քանզի ամեն քայլ անելուց մենք ավելի ենք իջնում արժեքի ֆունկցիայի կորով ներքև, հետևաբար ամեն քայլի հետ մեկտեղ աճանցյալի արժեքը նվազում է: Իսկ դա նշանակում է, որ անգամ, եթե α-ն հաստատուն պահենք, այնուամենայնիվ $\alpha \frac{\delta}{\delta\theta_j} J(\theta_0, \theta_1, \dots \theta_n)$ արտադրյալը ամեն քայլին կնվազի և հասնելով որևէ մինիմումի այն կհավասարվի *0-ի* և հետագա քայլերը ոչ մի կերպով չեն ազդի *θ-ների* արժեքների վրա:

Հեշտությամբ կարելի է համոզվել, որ, եթե մեր հիպոթեզն ունի գծային տեսք՝

$$h_\theta(x) = \theta_0 + \theta_1 X_1 + \theta_2 X_2 + \cdots + \theta_n X_n$$

ապա թարմացման կանոնի մեջ *J(θ)-ի* արժեքը տեղադրելուց հետո թարմացման կանոնի տեսքը կլինի՝

$$\theta_j := \theta_j - \alpha \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \left(h_\theta\left(x^{(i)}\right) - y^{(i)}\right) \cdot x_j^{(i)}$$

որտեղ՝ j:=0…n:

Այստեղ և հետագայում կընդունենք, որ $x_0^{(i)} = 1$, բոլոր *i-երի* համար: Սա արվում է բանաձևերը հարմար ներկայացնելու համար: Ստացվեց, որ գծային հիպոթեզն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$h_\theta(x) = \theta_0 X_0 + \theta_1 X_1 + \theta_2 X_2 + \cdots + \theta_n X_n$$

որտեղ, ինչպես նշվեց, $X_0 = 1$:

Հատկության մասշտաբավորում (Feature Scaling)

Մենք կարող ենք արագացնել նվազող գրադիենտի աշխատանքը՝ բերելով բոլոր մուտքային պարամետրերը մոտավորապես նույն տիրույթի թվերի: Դա կապված է այն բանի հետ, որ որ *θ-ն* ավելի արագ է հասնում մինիմումին փոքր միջակայքերում և ավելի դանդաղ՝ մեծ միջակայքերում, հետևաբար այն տատանվելով է այն տատանվելով է ձգտում մինիմումին, երբ փոփոխականները շատ անհավասար են:

Դա կանխելու համար կարող ենք այնպես փոփոխել հատկությունները (մուտքային պարամետրերը), որ նրանք ընկնեն մոտավորապես միևնույն թվային տիրույթ: Իդեալական դեպքում՝

$$-1 < x_i < 1$$

կամ՝

$$-0.5 < x_i < 0.5$$

Սրանք պարտադիր պահանջներ չեն, մենք ընդամենը փորձում ենք կրճատել հաշվարկների ժամանակը: Նպատակն է՝ բերել բոլոր մուտքային փոփոխականները միևնույն տիրույթի:

Հատկության մասշտաբավորումն ու միջինով նորմալացումը (mean normalization) այն երկու մեթոդներն են, որոնք կօգնեն լուծել այդ խնդիրը: Առաջինը ենթադրում է մուտքային տվյալների բաժանում նրանց մեծագույն և փոքրագույն արժեքների տարբերության վրա: Միջինով նորմալացման դեպքում պետք է մուտքային փոփոխականից հանել մուտքային տվյալների միջին արժեքը, ապա նոր բաժանել մեծագույն և փոքրագույն արժեքների տարբերության վրա: Ստացվեց, որ այս երկու մեթոդների իրականացման համար անհրաժեշտ է փոփոխել մուտքային պարամետրերը՝ համապատասխան ներքևի բանաձևի.

$$x_i := \frac{x_i - \mu_i}{s_i}$$

որտեղ s_i-*ն* i-րդ հատկության մեծագույն և փոքրագույն արժեքների տարբերությունն է, իսկ μ_i-*ն*՝ այդ հատկության բոլոր արժեքների միջինը: Նշենք, որ s_i-*ին* կարող ենք ընդունել հավասար մրջին քառակուսային շեղմանը, և այդ դեպքում ստացված արժեքները կտարբերվեն նախորդ տարբերակով ստացված արժեքներից:

Նշվածի օրինակ կարող է ծառայել հետևյալը՝ եթե x_i-*ն* ներկայացնում է բնակելի տան բարձրություն, և գտնվում է *4-ից 34* միջակայքում, իսկ այդ հատկության բոլոր արժեքների միջինը հավասար է *18-ի,* ապա $x_i := \frac{\text{արժեք} - 18}{30}$:

Ուսուցման գործակից (Learning Rate)

Նվազող գրադիենտն իրականացնելուց հետո անհրաժեշտ է հետևել ալգորիթմի աշխատանքին (մոդելի ուսուցման պրոցեսին) և հասկանալ արդյո՞ք այն ճիշտ է աշխատում:

Պատկերացում կազմելու համար, թե ինչքան լավ է սովորում մոդելը, անհրաժեշտ է գծել արժեքի ֆունկցիայի՝ *J(θ)-ի,* կախումը *իտերացիաների քանակից:* Պարզ է, որ, եթե ամեն ինչ ճիշտ է աշխատում, ապա ամեն իտերացիայից հետո *J(θ)-ի* արժեքը պետք է նվազի՝ ձգտելով *0-ի:* Հետևաբար, եթե գրաֆիկը աճում է, ապա ինչ որ բան այն չէ: Հիմնականում դրա պատճառը *α-ի* մեծ արժեքն է լինում. անհաժեշտ է նվազեցնել *α-ի* արժեքը:

Հարկ է նշել՝ ապացուցված է, որ, եթե ուսուցման գործակից *α-ն* բավարար չափով փոքր է ընտրված, ապա *J(θ)-ն* նվազում է ամեն իտերացիային: Սակայն, եթե այն շատ փոքր է ընտրված, ապա *J(θ)-ն* կարող է շատ դանդաղ նվազել:

Կարելի է համարել որ մոդելը բավարար չափով ուսուցանվել է այն պահին, երբ *J(θ)-ի* փոփոխությունն ինչ-որ իտերացիայից հետո ավելի փոքր է որևէ *E* արժեքից: *E-ն* կամայապես ընտրված փոքր թիվ է, օրինակ՝ 10^{-3}: Գործնականում դժվար է ընտրել *E-ի* օպտիմալ արժեք:

Պոլինոմալ ռեգրեսիա (Polynomial Regression)

Բնականաբար հիպոթեզ ֆունկցիան կարող է լինել կամայական տեսակի: Նրա տեսքը պարզելու համար անհրաժեշտ է կատարել տվյալների ուսումնասիրություն: Եթե ուսումնասիրությունից հետո պարզվում է, որ հիպոթեզը չպետք է լինի գծային, ապա կարևոր է իմանալ, որ հնարավոր է ձևափոխել այն քառակուսայինի, խորանարդայինի կամ այլ տեսքի կորի:

Օրինակ, եթե մեր հիպոթեզ ֆունկցիան ունի հետևյալ տեսքի է՝

$$h_\theta(x) = \theta_0 + \theta_1 x_1$$

ապա կարելի է ստեղծել նոր հատկություններ՝ հիմնված x_1-ի վրա այնպես, որ ստանանք քառակուսային ֆունկցիա՝

$$h_\theta(x) = \theta_0 + \theta_1 x_1 + \theta_2 x_1^2$$

կամ՝ խորանարդային ֆունկցիա՝

$$h_\theta(x) = \theta_0 + \theta_1 x_1 + \theta_2 x_1^2 + \theta_3 x_1^3$$

Այս օրինակներում ստեղծեցինք նոր՝ x_2 և x_3, հատկություններ, որտեղ $x_2 = x_1^2$, իսկ $x_3 = x_1^3$:

Այն քառակուսի արմատի տեքի դարձնելու համար, կարելի է կատարել հետևյալ ձևափոխությունը՝

$$h_\theta(x) = \theta_0 + \theta_1 x_1 + \theta_2 \sqrt{x_1}$$

Շատ կարևոր է հիշել, որ նշված կերպով հատկություններ ավելացնելիս շատ կարևոր է կատարել հատկությունների մաշտաբավորում, քանի որ հատկությունների տիրույթներն իրարից խիստ տարբերվելու են:

Օրինակ, եթե x_1-ը 1-1,000 տիրույթում է, ապա x_1^2-ն կլինի 1-1,000,000, իսկ x_1^2-ը՝ 1-1,000,000,000:

Նորմալ հավասարում (Normal Equation)

Նվազող գրադիենտը *J(θ)-ն* մինիմիզացնելու տարբերակներից մեկն է: Հիմա կդիտարկենք մեկ այլ տարբերակ, որը հնարավորություն կտա մինիմիզացնել *J(θ)-ն,* առանց որևէ իտերացվող ալգորիթմի: Խոսքը նորմալ հավասարման մասին է, որը հնարավորություն է տալիս գտնել որոնելի *θ-ների* արժեքներն առանց իտերացիայի: Բանաձևը հետևյալն է՝

$$\theta = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

որտեղ *X-ը (m x (n+1) չափի)* ուսուցման տվյալների մատրիցն է, *Y-ը՝ (m x 1 չափի)* ամեն մի ուսուցման օրինակի համապատասխան ելքային արժեքը, իսկ X^T*-ն X-ի* տրանսպոզիցիան է: Այստեղ *X-ը m x (n+1)* չափի է, քանի որ սկզբնական *X* մատրիցին պետք է ավելացնել ամբողջությամբ 1-երով լցված սյունը, որն էլ հենց ամեն ուսուցման տվյալի x_0 արժեքն է:

Հարկ է նշել, որ այս դեպքում պետք չէ կատարել հատկությունների մաշտաբավորում:

Ներքևում բերված է նվազող գրադիենտի և նորմալ հավասարման համեմատության աղյուսակ.

Նվազող գրադիենտ	Նորմալ հավասարում
Պետք է ընտրել *α*	Պետք չէ ընտրել *α*
Անհրաժեշտ է մի քանի իտերացիա	Առանց իտերացիայի
Բարդությունը՝ $O(kn^2)$	Բարդությունը՝ $O(n^3)$
Լավ է աշխատում, երբ *n-ը* շատ մեծ է	Դանդաղ է, երբ *n-ը* շատ մեծ է

Նորմալ հավասարումը մատրիցի հակադարձ, տրանսպոզիցիա և բազմապատկում կատարելու հետ է կապված, այդ պատճառով նրա բարդությունը $O(n^3)$ է: Այդ պատճառով *n-ի* մեծ արժեքների դեպքում այն դանդաղ է աշխատում: Գործնականում, երբ *n-ը* գերազանցում է 10,000-ը ավելի լավ է նորմալ հավասարումից անցնել իտերացվող ալգորիթմի:

Հնարավոր է նաև ունենալ այնպիսի մուտքային տվյալների մատրից, որը չունի հակադարձ (անհակադարձելի է): Նշվածի հիմնական պատճառներ կարող են լինել՝

- Ավելորդ հատկությունների առկայությունը, երբ 2 հատկություններ շատ սերտ կապի մեջ են, այսինքն գտնվում են գծային կախվածության մեջ
- Չափից դուրս շատ հատկությունների առկայությունը՝ $m \leq n$: Այս դեպքում կարելի է հեռացնել որոշ հատկություններ, կամ օգտագործել «կանոնավորումը», որը կմանրամասնենք հետագայում

Նշված խնդիրների լուծումն կարող է լինել որոշ հատկությունների հեռացումը, որոնք գծային կախման մեջ են գտնվում մեկ այլ հատկությունից կամ պարզապես որոշ՝ քիչ կարևոր, հատկությունների հեռացումը, երբ առկա են մեծ քանակի հատկություններ:

Դասակարգում (Classification)

Որպես դասակարգման խնդիր լուծելու մեթոդ կարելի է օգտագրոծել գծային ռեգրեսիան և 0.5-ից մեծ գուշակված արժեքներն ընդունել որպես 1, իսկ դրանից փոքրերը՝ 0: Սակայն այս մեթոդը լավ չի աշխատում, քանի որ դասակարգուման հիպոթեզն իրականում գծային ֆունկցիա չէ: Այն ռեգրեսիայի խնդիր է, սկայան այն տարբերությամբ, որ նրա արժեքները վերջավոր քանակի դիսկրետ արժեքներ են:

Մինչ ավելի բարդ դեպքերի անցնելը, կենտրոնանաք երկուական դասակարգման խնդրի (binary classification problem) վրա, որտեղ y-ը կարող է ընդունել միայն 2 արժեք՝ 0 և 1: Օրինակ, եթե պետք է ստեղծել սպամ-նամակների գտնող մոդել, ապա նրա մուտքին տրված ամեն մի նամակի $x^{(i)}$ հատկությունների համար ելքը կարող է լինել 1, եթե այն սպամ է, և 0՝ հակառակ դեպքում:

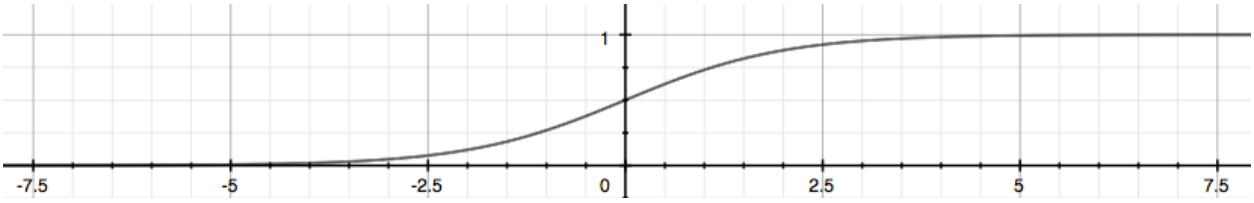
Դասակարգման խնդրի լուծելու համար կարող ենք անտեսել այն հանգամանքը, սպասվող ելքը վերջավոր, դիսկրետ արժեքներ են և օգտագործենք գծային ռեգրեսիան այս խնդրի լուծման համար: Սակայն այս դեպքում անգամ անիմաստ են $h_\theta(x)$-ի 1-ից մեծ և 0-ից փոքր արժեքները, քանի որ մենք գիտենք, որ $y \in \{0, 1\}$: Սրան լուծում տալու համար կձևափոխենք $h_\theta(x)$-ն այնպես, որ նա բավարարի $0 \leq h_\theta(x) \leq 1$ պայմանը: Դա անելու համար կարելի է լոգիստիկ ֆունկցիային (Logistic Function) փոխանցել $\theta^T x$-ը՝

$$h_\theta(x) = g(\theta^T x) = \frac{1}{1 + e^{-\theta^T x}}$$

Այստեղ g-ն հենց այն լոգիստիկ ֆունկցիան է, որը կամայական իրական թիվ համապատասխանեցնում է (0, 1) տիրույթի որևէ թվի, ինչը թույլ է տալիս կամայական տիրույթի ելքային արժեքներ ունեցող ֆունկցիան փոխակերպել դասակարգման խնդրին ավելի հարմար ֆունկցիայի:

Լոգիստիկ ֆունկցիան նաև անվանում են Սիգմոիդ ֆունկցիա (Sigmoid Function):

Ներքևում պատկերված է այդպիսի ֆունկցիայի մի օրինակ:



Այսպիսով $h_\theta(x)$-ը հավանականությունն է այն բանի, որ ելքային արժեքը հավասար է *1-ի:* Օրինակ, եթե $h_\theta(x) = 0.7$, ապա նշանակում է, որ ելքային արժեքի 1 լինելու հավանականությունը 70% է: Բնականաբար ելքային արժեքի 0 լինելու հավանականությունը հավասար է $(1 - h_\theta(x))$-ի, այսինքն տվյալ օրինակի դեպքում՝ *30%:*

Այս ամենն ավելի ֆորմալ տեսքով կարող ենք գրել այսպես.

$$h_\theta(x) = P(y = 1|x; \theta) = 1 - P(y = 0|x; \theta)$$

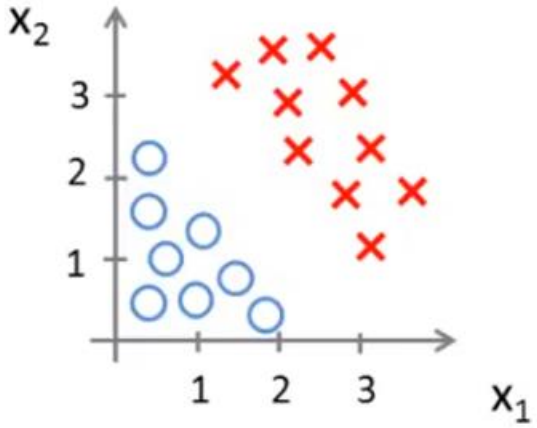
Որոշման սահման (Decision Boundary)

Քանի որ $h_\theta(x)$-ի արդյունքը $y=1$ պայմանի հավանականություն է, անհրաժեշտ է ընտրել մի սահման, և ընդունել, որ այդ սահմանից բարձր $h_\theta(x)$-երի համար $y=1$, հակառակ դեպքում՝ $y=0$: Օրինակ, եթե համարենք, որ $y=1$, երբ $h_\theta(x)>0.5 \Rightarrow g(\theta^T x)>0$, ապա նայելով սիգմոիդ ֆունկցիայի գրաֆիկին, կարող ենք ասել, որ այդ դեպքում $\theta^T x$-ը պետք է մեծ լինի *0-ից:*

Ասվածն ավելի պարզ հասկանալու համար դիտարկենք հետևյալ օրինակը. դիցուք՝

$$h_\theta(x) = g(\theta_0 + \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2)$$

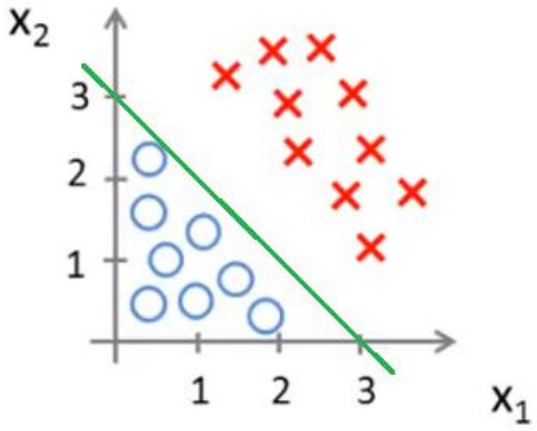
իսկ ուսուցման տվյալները հետևյալ տեսքի են՝



ինչպես նաև ենթադրենք, թե ուսուցման վերջում ստացել ենք, որ $\theta_0=-3$, $\theta_1=1$, $\theta_2=1$, կամ մատրիցի տեսքով՝

$$\theta = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

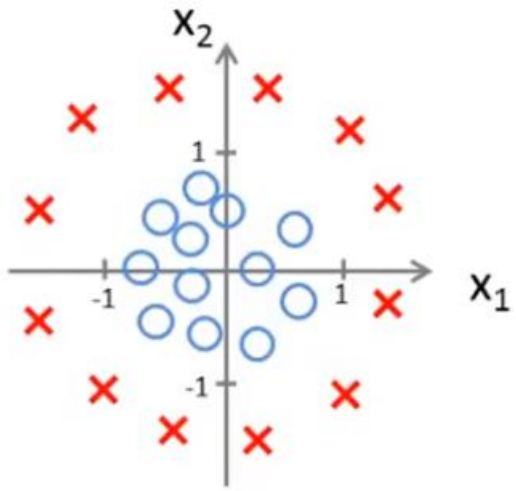
ապա ստացվում է, որ $y=1$, երբ $-3 + x_1 + x_2 \geq 0$, պարզագույն ձևափոխություններից հետո ստանում ենք $x_2 \geq - x_1 + 3$, ինչն իրենից ուղիղ գծի հավասարում է ներկայացնում: Վերջինիս գրաֆիկը գծված է ներքևում՝ կանաչ գույնով.



Ստացվեց, որ այս կանաչ գծից վերև բոլոր (x_1, x_2) զույգի համար՝ $y=1$: Նույն կերպ նրանից ներքև բոլոր (x_1, x_2) զույգի համար՝ $y=0$:

Հենց այս գիծն էլ կոչվում է **որոշման սահման,** քանի որ այն ներկայացնում է մի սահման, որը բաժանում է $y=1$-երի խումբը $y=0$-երի խմբից:

Դիտարկենք մեկ այլ դեպք՝



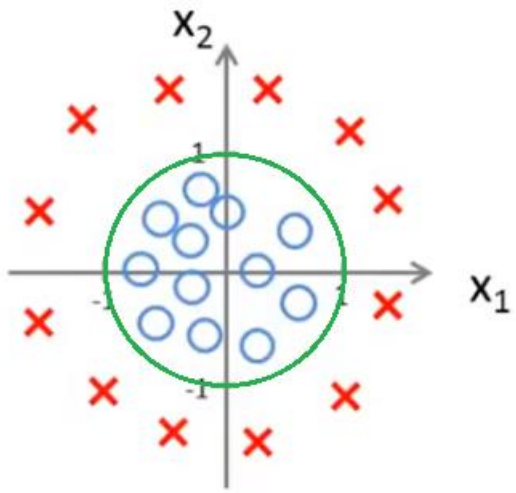
Նկարում պատկերված են ուսուցման տվյալները: Պարզ է, որ այստեղ որոշման սահմանը չունի գծային տեսք: Դիցուք այս կոնկրետ օրինակի համար հիպոթեզն ունի հետևյալ պոլինոմալ ֆունկցիայի տեսքը՝

$$h_\theta(x) = g(\theta_0 + \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \theta_3 x_1^2 + \theta_4 x_2^2)$$

իսկ ուսուցման վերջում ստացվել է՝

$$\theta = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

հետևաբար ստացվում է, որ *y=1,* երբ՝ $-1 + x_1^2 + x_2^2 \geq 0$, որտեղից ստանում ենք, որ $x_1^2 + x_2^2 \geq 1$, ինչն էլ 1 շառավղով, (0,0) կենտրոնով շրջանագծի հավասարումն է: Որոշման սահմանը կլինի՝



Գծված շրջանագծից, դուրս բոլոր (x_1,x_2) զույգերի համար *y=1,* իսկ նրա ներսում՝ *y=0:*

Կախված հիպոթեզ ֆունկցիայի բարդությունից, որոշման սահմանը կարող է լինել տարբեր տեսքի:

Լոգիստիկ հիպոթեզի արժեքի ֆունկցիան

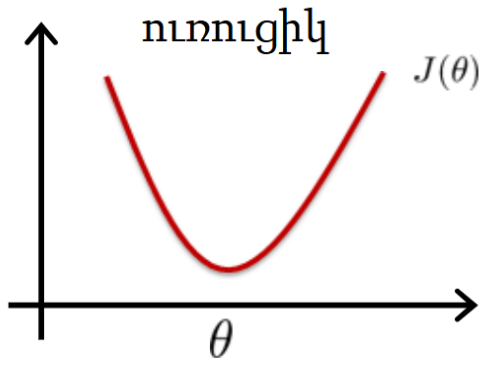
Ընդհանուր դեպքում արժեքի ֆունկցիան ունի հետևյալ տեսքը՝

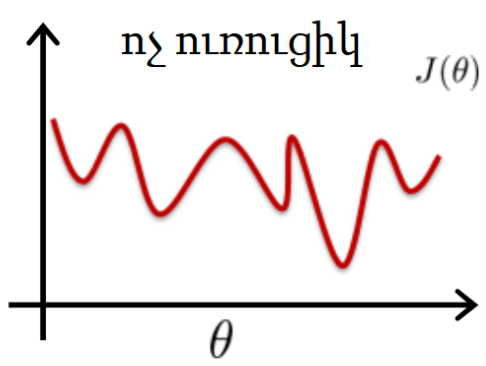
$$J(\theta) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} Cost(h_\theta(x_i), y_i)$$

որտեղ *Cost-ը* այն ֆունկցիան է, որը հաշվում է արժեքը *i-րդ* ուսուցման օրինակի համար:

Արդեն նշվել է, որ գծային հիպոթեզի դեպքում՝ $Cost(h(x_i), y_i) = (h(x_i), y_i)^2$, սակայն լոգիստիկ ֆունկցիայի համար չի կարելի օգտագործել նույն բանաձը, քանի որ այդ կերպ ստացված *J* ֆունկցիան ալիքային տեսքի է և հետևաբար ունի բազմաթիվ լոկալ մինիմումներ, որոնք բարդացնում են գլոբալ մինիմումը գտնելը: Այլ կերպ ասած *J-ի* գրաֆիկը ուռուցիկ չի լինի:

Ասվածն ավելի լավ պատկերացնելու համար ներքևում բերված են ուռուցիկ և ոչ ուռուցիկ ֆունկցիաների գրաֆիկների օրինակներ.

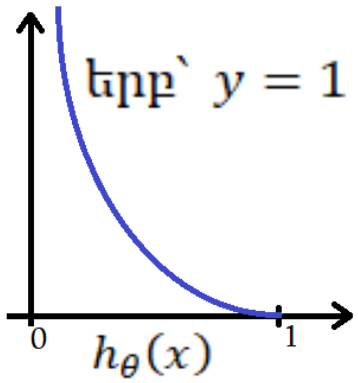


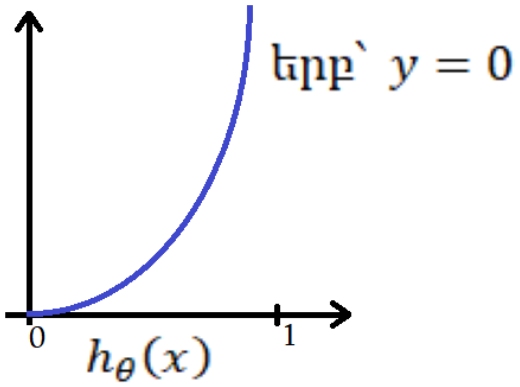


Փոխարենը կարելի է օգտագործել հետևյալ ֆունկցիան՝

$$\begin{cases} Cost(h_\theta(x), y) = -\log\big(h_\theta(x)\big) & \text{երբ՝ } y = 1 \\ Cost(h_\theta(x), y) = -\log\big(1 - h_\theta(x)\big) & \text{երբ՝ } y = 0 \end{cases}$$

Այս դեպքում ստանում ենք հետևյալ գրաֆիկները՝





Այստեղից երևում է, որ, եթե արժեքի ֆունկցիան գրենք այս ձևով, ապա համոզված կարող ենք ասել, որ *J-ն* ունի ուռուցիկ տեսք լոգիստիկ ռեգրեսիայի համար: Ինչը շատ կարևոր է ավելի արագ ուսուցանվող և ճիշտ արդյունքներ գուշակող մոդել ստեղծելու համար:

Ելնելով գրաֆիկից կարող ենք ասել.

- Երբ y=0, ապա արժեքի ֆունկցիան կլինի 0, միայն, եթե հիպոթեզը նույնպես տա 0: Եթե հիպոթեզը ձգտում է 1-ի, ապա արժեքի ֆունկցիան կձգտի անվերջության:
- Երբ y=1, ապա արժեքի ֆունկցիան կլինի 0, միայն, եթե հիպոթեզը նույնպես տա 1: Եթե հիպոթեզը ձգտում է 0-ի, ապա արժեքի ֆունկցիան կձգտի անվերջության:

Ասվածը մաթեմատիկորեն կարող ենք ներկայացնել հետևյալ կերպ՝

- $h_\theta(x_i) = y \Rightarrow Cost(h_\theta(x_i)\, y_i) = 0$
- $\begin{cases} y = 0 \\ h_\theta(x_i) \to 1 \end{cases} \Rightarrow Cost(h_\theta(x_i)\, y_i) \to \infty$
- $\begin{cases} y = 1 \\ h_\theta(x_i) \to 0 \end{cases} \Rightarrow Cost(h_\theta(x_i)\, y_i) \to \infty$

Լոգիստիկ հիպոթեզի արժեքի ֆունկցիայի համակարգը կարելի է փոխարինել մեկ արտահայտությամբ հետևյալ կերպ՝

$$Cost(h_\theta(x), y) = -y \log\big(h_\theta(x)\big) - (1-y)\log(1 - h_\theta(x))$$

Հետևաբար *J-ն* կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$J(\theta) = -\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left[-y^{(i)} \log\left(h_\theta\left(x^{(i)}\right)\right) - (1-y^{(i)})\log(1 - h_\theta\left(x^{(i)}\right))\right]$$

Կատարելով մաթեմատիկական ձևափոխություններ կարելի է համոզվել, որ այս դեպքում թարմացման կանոնը կլինի նույնն ինչ գծային ռեգրեսիայի համար՝

$$\theta_j := \theta_j - \alpha \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(h_\theta\left(x^{(i)}\right) - y^{(i)}\right) \cdot x_j^{(i)}$$

որտեղ *j=0,1,…n:*

Բազմադաս դասակարգում (Multiclass Classification)

Դասակարգման խնդիրներ քննարկելիս մինչ այս պահը դիտարկել ենք միայն երկուական դասակարգիչ, այսինքն հնարավոր էր միայն 2 ելք՝ *y={0,1}:* Հիմա կդիտարկենք տվյալների դասակարգումը, երբ առկա են երկուսից ավելի կատեգորիաներ: Այսինքն՝ *y={0,1}-ի* փոխարեն ունենք *y={0,1, …. k}:*

Քանի որ *y={0,1, …. k}*, ապա կբաժանենք խնդիրը *(k+1)* երկուական դասակարգման խնդիրների և ամեն մեկում կգուշակենք, թե ինչքան է հավանականությունն այն բանի, որ *y*-ը հերթական խմբի անդամն է՝

$$y \in \{0,1, \dots k\}$$

$$h_\theta^{(i)}(x) = P(y = i|x; \theta)$$

այստեղ *i=0, 1, … k* հերթական կատեգորիայի համարն է, իսկ $h_\theta^{(i)}(x)$-ը *y-ի i-րդ* կատեգորիայում գտնվելու հավանականությունն է: Հետևաբար գուշակելու համար, թե տրված մուտքային *x* օրինակին, ո՞ր կատեգորիան է համապատասխանում, անհրաժեշտ է $h_\theta^{(0)}(x)$, $h_\theta^{(1)}(x)$, … $h_\theta^{(k)}(x)$-ից ընտրել մեծագույնը: Սա մաթեմատիկորեն կգրենք այսպես՝

$$\text{գուշակված դասը} = \max\left(h_\theta^{(i)}(x)\right), \qquad i = 0, 1, \dots k$$