Geometria Analítica

1 Vetores no plano e no espaço

1.1 Vetores no espaço

Consideremos o espaço euclidiano tridimensional E como modelo matemático do espaço físico.

Suporemos fixada uma unidade de comprimento, portanto unidades de área e de volume.

A distância entre dois pontos A e B do espaço, igual ao comprimento do segmento de reta AB, será indicado com a notação $d(A,\ B)$.

Diz-se que um segmento de reta está orientado quando nele foi escolhido um sentido de percurso, chamado o sentido positivo. A notação AB para segmentos orientados significa que o sentido positivo de percurso é de A para B.

Os segmentos de reta orientados AB e CD dizem-se equipolentes quando cumprem as seguintes condições:

1) Têm o mesmo comprimento, isto é, $d(A,\ B) = d(C,\ D)$;

2) São paralelos ou colineares, isto é, as retas AB e CD são paralelas ou os segmentos AB e CD estão sobre uma mesma reta;

3) Têm o mesmo sentido, isto é, o quadrilátero $ABDC$ (vértices percorridos nesta ordem) é um paralelogramo.

Quando dois segmentos de reta orientados AB e CD são equipolentes, diz-se que eles determinam o mesmo vetor. Indica-se por $v = \overrightarrow{AB}$ o vetor determinado pelo segmento orientado AB. Temos

a) comprimento ou módulo de $v = \overrightarrow{AB}$ é a distância entre A e B. Anota-se por $\|v\|$,

b) direção de $v = \overrightarrow{AB}$ a reta AB,

c) sentido de $v = \overrightarrow{AB}$ de A para B.

Portanto, dois segmentos orientados AB e CD definem o mesmo vetor se tèm o mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido. Temos então que

$$v = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

se o quadrilátero $ABDC$ é um paralelogramo com AB lado oposto a CD e AC lado opsto a BD.

Por extensão, se $A = B$ temos $v = \overrightarrow{AB} = 0$ vetor nulo.

Fisicamente, vetores representam grandezas que ficam caracterizadas por módulo, direção e sentido. São exemplos: força, velocidade, deslocamento.

Um vetor de módulo 1 é chamado versor ou vetor unitário.

Operações com vetores

Definimos operações de adição de vetores e multiplicação de vetor por número real. A operação de adição de vetores é definida geometricamente da segunte maneira:

Se

$$u = \overrightarrow{AB},\ v = \overrightarrow{BC}$$

então, $u + v$ é definido por

$$u + v = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Este modo de somar vetores é chamado regra do triângulo. De modo equivalente, se

$$u = \overrightarrow{AB},\ v = \overrightarrow{AC}$$

então

$$u + v = \overrightarrow{AD}$$

onde AD é a diagonal maior do paralelogramo determinado pelos vetores $u = \overrightarrow{AB}$, $v = \overrightarrow{AC}$. Este segundo modo de somar vetores é chamado regra do paralelogramo.

Por exemplo, dadas as forças F_1 e F_2 a força resultante é por definição o vetor

$$F_r = F_1 + F_2.$$

A multiplicação de vetor por número real é definida, geometricamente, do seguinte modo:

Se $u = \overrightarrow{AB}$ e $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, então

$$au = a\overrightarrow{AB}$$

é o vetor que tem comprimento igual $|a| \cdot \|u\|$, mesma direção que $\overrightarrow{AB}$, mesmo sentido se $a > 0$ e sentido contrário oposto se $a < 0$.

Se $a = 0$ então $a\overrightarrow{u} = 0$ por definição.

Propriedades da adição:

1) Propriedade comutativa. Para quaisquer vetores
u, v temos $u + v = v + u$.

2) Propriedade associativa. Para quaisquer vetores u, v, w temos $(u + v) + w = u + (v + w)$.

3) Existe um vetor 0 tal que $u + 0 = u$ para qualquer vetor u.

4) Dado o vetor u existe um único vetor anotado $-u$ tal que

$$u + (-u) = 0.$$

Usando a propriedade 4, vamos definir a diferença entre os vetores u e v, nesta ordem, por

$$u - v = u + (-v).$$

Propriedades da multiplicação por escalar:

5) Distributividade em relação a soma de números reais. Para quaisquer números reais a, b e qualquer vetor u temos $(a+b)\cdot u = a\cdot u + b\cdot u$.

6) Distributividade em relação a soma de vetores. Para qualquer número real a e para quaisquer vetores u, v temos $a\cdot(u+v) = a\cdot u + a\cdot v$.

7) Para qualquer vetor u temos $1\cdot u = u$.

8) Para qualquer $u \in \mathbb{R}^3$ e para quaisquer números reais a, b temos $(ab)\,u = a\,(bu) = b\,(au)$.

Dizemos que vetor u é múltiplo do vetor v se existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $u = av$.

Por exemplo, o vetor zero é múltiplo de qualquer vetor. De fato, basta tomarmos $a = 0$. Se $u \neq 0$ é múltiplo de v então v também é múltiplo de u. De fato, se $u = av$ e $u \neq 0$ então $a \neq 0$ e daí $v = \frac{1}{a}u$.

Definição de soma de ponto e vetor. Dado o ponto A de E e o vetor v a soma de A e v, anotada $A+v$, é o ponto B de E tal que

$$v = \overrightarrow{AB}$$

Observamos que

$$(A+v)+u = A+(v+u)\,.$$

Exemplos

1) Em um triângulo ABC, M, N, P são os pontos médios de AB, BC e CA respectivamente. Exprimir $\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{CM}$ em função de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

Temos

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BP} &= \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AP}\\ \overrightarrow{AP} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC},\end{aligned}$$

Então,

$$\overrightarrow{BP} = -\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AN} &= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}\end{aligned}$$

$$2\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AN} &= \overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\\ &= \overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

2) Em um triângulo ABC, a medida de AX é a metade de $\overrightarrow{XB}$. Escrever $\overrightarrow{CX}$ em termos de $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$.

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{AX} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{XB} \\
\overrightarrow{XB} &= \overrightarrow{XC} + \overrightarrow{CB} \\
\overrightarrow{CX} &= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AX} = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{XB} \\
&= \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{XC} + \overrightarrow{CB}\right) \\
&= \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{XC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} \\
&= \overrightarrow{CA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CX} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} \\
\frac{3}{2}\overrightarrow{CX} &= \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} \\
\overrightarrow{CX} &= \frac{2}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}
\end{aligned}
$$

3) Prove que as diagonais de um paralelogramo têm o mesmo ponto médio.

Seja $ABCD$ o paralelogramo de diagonais AC e DB. Seja M o ponto médio de AC. Temos

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AD} \\
\overrightarrow{CM} &= \overrightarrow{MA}
\end{aligned}
$$

$$
\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MD},
$$

logo M é o ponto médio de BD.

4) Prove que o segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo a o terceiro lado e tem por comprimento a metade deste.

Seja ABC um triângulo. Sejam M o ponto médio de AC e N o ponto médio BC. Basta mostrar que $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Temos

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MC} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} \\ \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \\ \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

1.2 Dependência linear

Dados os números reais $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n$ e os vetores $v_1,\ v_2,\ ...,\ v_n$, o vetor

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n$$

chama-se uma combinação linear de $v_1,\ v_2,\ ...,\ v_n$.

Dizemos que o conjunto de vetores $\{v_1,\ v_2,\ ...,\ v_n\}$ é linearmente dependente se algum destes vetores é combinação linear dos demais. Em caso contrário, dizemos que este conjunto é linearmente independente.

Exemplos

1) O conjunto $\{v_1,\ v_2\}$ é linearmente dependente se v_1 é múltiplo de v_2 ou v_2 é múltiplo de v_1. Então, $\{v_1,\ v_2\}$ é linearmente independente se v_1 não é múltiplo de v_2 e v_2 não é múltiplo de v_1.

2) Suponhamos o conjunto $\{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ linearmente dependente. Então, v_3 é combinação linear de v_1 e v_2, ou v_2 é combinação linear de v_1 e v_3, ou v_1 é combinação linear de v_2 e v_3. Suponhamos v_3 é combinação linear de v_1 e v_2. Então, existem números reais a_1 e a_2 ais que

$$v_3 = a_1v_1 + a_2v_2.$$

Se v_1 e v_2 não são múltiplos um do outro, concluímos que v_3 pertence ao plano determinado por v_1 e v_2. Se, por exemplo, v_1 é múltiplo de v_2 então v_3 é múltiplo de v_2.

Assim, $\{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ é linearmente independente se $v_1,\ v_2$ e v_3 não pertencem a um mesmo plano e reciprocamente. Mais rigorosamente falando, escrevendo

$$v_1 = \overrightarrow{AB},\ v_2 = \overrightarrow{AC},\ v_3 = \overrightarrow{AD}$$

vamos ter $\{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ linearmente independente se os pontos $A,\ B,\ C,\ D$ não pertencem a um mesmo plano (não são coplanares), e reciprocamente.

3) Pode-se mostrar que conjunto de vetores $\{v_1,\ v_2,\ ...,\ v_n\}$ com $n > 3$ é sempre linearmente dependente.

1.3 Bases

Se $\{e_1,\ e_2,\ e_3\}$ é um conjunto linearmente independente, isto é, $e_1,\ e_2,\ e_3$ são vetores não coplanares então todo vetor u de E se expressa de modo único na forma

$$u = ae_1 + be_2 + ce_3$$

onde os números $a,\ b$ e c são únicos. De fato, escrevemos

$$e_1 = \overrightarrow{PA},\ e_2 = \overrightarrow{PB},\ e_3 = \overrightarrow{PC}$$

onde os pontos $P,\ A,\ B,\ C$ não pertencem a um mesmo plano. Escrevemos $u = \overrightarrow{PD}$. Pelo ponto D tomemos uma reta paralela a reta PC que encontra o plano PAB no ponto M. Pelo ponto M, tomamos retas r_1 e r_2 respectivamente paralelas a PA e PB. Sejam N a interseção de PA com r_2 e Q a interseção de PB com r_1. Então, existem números reais a e b tais que

$$\overrightarrow{PN} = a\overrightarrow{PA} \text{ e } \overrightarrow{PQ} = b\overrightarrow{PB}$$

Finalmente, pelo D tomamos um plano paralelo ao plano PAB que intercepta a reta PC em um ponto R. Então, existe um número real c tal que $\overrightarrow{PR} = c\overrightarrow{PC}$. Temos

$$\begin{aligned} u &= \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR} = a\overrightarrow{PA} + b\overrightarrow{PB} + c\overrightarrow{PC} \\ &= ae_1 + be_2 + ce_3 \end{aligned}$$

O conjunto $\{e_1,\ e_2,\ e_3\}$ é chamada base do espaço e os números $a,\ b$ e c as componentes de u nesta base. Fixada a base escrevemos $u = (a,\ b,\ c)$ se

$$u = ae_1 + be_2 + ce_3$$

Consideremos o conjunto

$$\mathbb{R}^3 = \{(x,\ y,\ z) : x,\ y,\ z \in \mathbb{R}\}$$

Como vimos fixada a base $\{e_1,\ e_2,\ e_3\}$ do espaço podemos identificar os vetores com os elementos de $\mathbb{R}^3$. Temos $0 = (0,\ 0,\ 0)$.

As operações de adição de vetores e multiplicação por número real em componentes são dadas da seguinte maneira. Sejam $u = (x_1,\ y_1,\ z_1), v = (x_2,\ y_2,\ z_2) \in \mathbb{R}^3$ e $a \in \mathbb{R}$ então

$$\begin{aligned} u + v &= (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2,\ z_1 + z_2)\,, \\ a \cdot u &= (ax_1,\ ay_1,\ az_1)\,. \end{aligned}$$

De fato, $u = (x_1,\ y_1,\ z_1), v = (x_2,\ y_2,\ z_2)$ então

$$u = x_1e_1 + y_1e_2 + z_1e_3 \text{ e } v = x_2e_1 + y_2e_2 + z_2e_3$$

e daí, usando as propriedades da soma de vetores concluímos que

$$\begin{aligned} u + v &= (x_1e_1 + y_1e_2 + z_1e_3) + (x_2e_1 + y_2e_2 + z_2e_3) \\ &= (x_1 + x_2)\, e_1 + (y_1 + y_2)\, e_2 + (z_1 + z_2)\, e_3 \end{aligned}$$

Note que se $u = (x,\ y,\ z)$ então $-\overrightarrow{u} = (-x,\ -y,\ -z)$.

Exemplos

1. Dados os vetores $u = (1,\ 2, 3)$, $v = (3,\ 2, 1)$ e $w = (-3, 2, 7)$ no espaço, encontrar números $a,\ b$ tais que $w = au + bv$.

Resolução.

$$\begin{aligned} w &= au + bv \\ (-3, 2, 7) &= a(1,\ 2, 3) + b(3,\ 2, 1) \\ &\iff (-3, 2, 7) = (a + 3b,\ 2a + 2b,\ 3a + b) \\ &\iff \begin{cases} a + 3b = -3 \\ 2a + 2b = 2 \\ 3a + b = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a + 6b = -6 \\ 2a + 2b = 2 \\ 6a + 2b = 14 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2a + 6b = -6 \\ -4b = 8 \\ -16b = 32 \end{cases} \iff a = 3, b = -2 \end{aligned}$$

Logo,

$$w = 3u - 2v.$$

2. Dados os vetores $v_1 = (1,\ 1, 1),\ v_2 = (1,\ 1, 0),\ v_3 = (0, 1, 1)$ e $v_4 = (1, 0, 1)$ no espaço, expressar o vetor $w = (4, 2, 1)$ na forma $w = av_1 + bv_2 + cv_3 + dv_4$ de dois modos distintos.

Resolução.

$$\begin{array}{rcl} w & = & av_1 + bv_2 + cv_3 + dv_4 \\ (4,2,1) & = & a(1,\ 1,1) + b(1,\ 1,0) + c(0,1,1) + d(1,0,1) \\ & \iff & (4,2,1) = (a+b+d,\ a+b+c,\ a+c+d) \\ & \iff & \left\{ \begin{array}{c} a+b+d=4 \\ a+b+c=2 \\ a+c+d=1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} a+b+d=4 \\ c-d=-2 \\ c-b=-3 \end{array} \right. \\ & \iff & \left\{ \begin{array}{c} a+b+d=4 \\ c-d=-2 \\ -b+d=-1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} a=4-2d-1 \\ b=d+1 \\ c=d-2 \end{array} \right. \end{array}$$

Por exemplo, escolhemos $d = 1$ e $d = 2$. Obtemos

$$w = 1v_1 + 2v_2 - 1v_3 + 1v_4$$

e

$$w = -1v_1 + 3v_2 + 0v_3 + 2v_4.$$

1.4 Coordenadas

Dizemos que uma base $\{e_1,\ e_2,\ e_3\}$ é ortonormal se os vetores $e_1,\ e_2,$ e e_3 são dois a dois ortogonais e são unitários. Fixado um ponto O do espaço e uma base ortonormal $\{e_1,\ e_2,\ e_3\}$, temos que para todo ponto P de E

$$\overrightarrow{OP} = xe_1 + ye_2 + ze_3.$$

Dizemos então que os números $x,\ y,\ z$ são as coordenadas do ponto P em relação ao sistema de coordenadas $(O,\ \{e_1,\ e_2,\ e_3\})$ e escrevemos

$$P = (x,\ y,\ z).$$

O ponto O é dito origem do sistema de coordenadas. Temos $O = (0,\ 0,\ 0)$. Sejam $A = O + e_1,\ B = O + e_2,\ C = O + e_3$. As retas $OA,\ OB,\ OC$ são chamadas eixos coordenados, respectivamente eixo dos x, eixo dos y e eixo dos z. Escrevemos também $OXYZ$ para designar o sistema de eixos ortogonais com origem em O e eixos $OX = reta\ OA$, $OY = reta\ OB$ e $OZ = reta\ OC$.

Os pontos sobre o eixo OX tem coordenadas na forma $(x,\ 0,\ 0)$, sobre o eixo OY na forma $(0,\ y,\ 0)$ e sobre o eixo OZ na forma $(0,\ 0,\ z)$.

O plano determinado pelos eixos OX e OY é dito plano coordenado OXY, o mesmo para os demais planos coodenados. Os pontos sobre o plano coordenado OXY tem coordenadas na forma $(x,\ y,\ 0)$, sobre o plano OXZ na forma $(x,\ 0,\ z)$ e sobre o plano OYZ na forma $(0,\ y,\ z)$.

Note que se $A = (x_1,\ y_1,\ z_1)$ e $B = (x_2,\ y_2,\ z_2)$ então

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2,\ y_2,\ z_2) - (x_1,\ y_1,\ z_1) = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1)$.

O módulo do vetor $u = (x,\ y,\ z)$ em relação a uma base ortonormal é dado por

$$\|u\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

A distância entre os pontos $A = (x_1,\ y_1,\ z_1)$ e $B = (x_2,\ y_2,\ z_2)$ é dada por

$$d(A, B) = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Se $v = (a,\ b,\ c)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ então

$$A + \lambda v = (x_1 + \lambda a,\ y_1 + \lambda b,\ z_1 + \lambda c)\,.$$

De fato, escrevendo $D = A + \lambda v = (x,\ y,\ z)$ temos $\overrightarrow{AD} = \lambda v$ e então

$$(x - x_1,\ y - y_1,\ z - z_1) = \lambda(a,\ b,\ c)$$

e então

$$x = x_1 + \lambda a,\ y = y_1 + \lambda b,\ z = z_1 + \lambda c.$$

Exemplo. Determinar as coordenadas do ponto médio do segmento AB, sendo $A = (x_1,\ y_1,\ z_1)$ e $B = (x_2,\ y_2,\ z_2)$.

Seja M o ponto médio do segmento AB. Então,

$$\begin{aligned} M &= A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (x_1,\ y_1,\ z_1) + \frac{1}{2}(x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1) \\ &= \left(x_1 + \frac{1}{2}(x_2 - x_1),\ y_1 + \frac{1}{2}(y_2 - y_1),\ z_1 + \frac{1}{2}(z_2 - z_1)\right) \\ &= \left(\frac{x_1 + x_2}{2},\ \frac{y_1 + y_2}{2},\ \frac{z_1 + z_2}{2}\right). \end{aligned}$$

Logo,

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2},\ \frac{y_1 + y_2}{2},\ \frac{z_1 + z_2}{2}\right).$$

Sejam $A,\ B$ e C três pontos do espaço E. Para que estes pontos sejam colineares (pertençam a uma mesma reta) é necessário e suficiente que os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ sejam múltiplos um do outro. Podemos verificar este fato usando coordenadas.

Exemplo. Sejam os pontos $A = (1,\ 2,\ 3),\ B = (3,\ 4,\ 2,),\ C = (5,\ 6,\ 1)$ e $D = (2,\ 3,\ 4)$. Temos

$$\overrightarrow{AB} = (2,\ 2,\ -1),\ \overrightarrow{AC} = (4,\ 4,\ -2) = 2\overrightarrow{AB},$$

assim $A,\ B$ e C são colineares. Mas $AD = (1,\ 1,\ 1)$ não é múltiplo de $\overrightarrow{AB}$, logo os os pontos $A,\ B$ e D não são colineares.

Sejam $A,\ B$ e C pontos não colineares. Então eles determinam um plano. Para que o ponto D pertença ao plano determinado por $A,\ B$ e C é necessário que o vetor $\overrightarrow{AD}$ seja uma combinação linear dos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, isto é, que existam números reais x e y tais que

$$\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}.$$

Exemplo. Sejam os pontos $A = (1,\ 2,\ 3),\ B = (2,\ 3,\ 4,),\ C = (3,\ 4,\ 6)$ e $D = (1,\ 1,\ 2),\ E = (4,\ 5,\ 2)$ Temos

$$\overrightarrow{AB} = (1,\ 1,\ 1),\ \overrightarrow{AC} = (2,\ 2,\ 3),\ \overrightarrow{AD} = (0,\ -1,\ -1),\ \overrightarrow{AE} = (3,\ 3,\ -1).$$

$\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ não são múltiplos um do outro, assim os pontos $A,\ B$ e C não são colineares e portanto determinam um plano. Os pontos D e E peretncem a este plano? Quanto ao ponto D. Precisamos encontrar dois números reais $x,\ y$ tais que

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AD} &= x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} \\
&\Leftrightarrow\ (0,\ -1,\ -1) = x\,(1,\ 1,\ 1) + y(2,\ 2,\ 3) = (x+2y,\ x+2y,\ x+3y) \\
&\Leftrightarrow\ \begin{cases} x+2y=0 \\ x+2y=-1 \\ x+3y=-1 \end{cases}
\end{aligned}$$

o que é impossível. Logo, D não peretence a este plano. Quanto ao ponto E. Precisamos encontrar dois números reais $x,\ y$ tais que

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AE} &= x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} \\
&\Leftrightarrow\ (3,\ 3,\ -1) = x\,(1,\ 1,\ 1) + y(2,\ 2,\ 3) = (x+2y,\ x+2y,\ x+3y) \\
&\Leftrightarrow\ \begin{cases} x+2y=3 \\ x+2y=3 \\ x+3y=-1 \end{cases}
\end{aligned}$$

resolvendo este sistema de equações obtemos $x = 11$ e $y = -4$. Logo,

$$\overrightarrow{AE} = 11\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AC}.$$

Assim, o ponto D pertence a este plano.

Exemplo. Sejam os pontos $O = (0,\ 0,\ 0),\ A = (1,\ 1,\ 0),\ B = (2,\ -1,\ 0),\ C = (0,\ 1,\ 1)$. Os pontos $O,\ A,\ B$ são não-colineares e portanto definem um plano. O ponto C não pertence a este plano que é o plano OXY. Logo, $\left\{\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC}\right\}$ formam uma base do espaço pois estes vetores são não-coplanares. Consideremos o vetor $u = (1,\ 2,\ 3)$. Para expressar este vetor nessa base. Devemos encontrar números reais $x,\ y,\ z$ tais que

$$u = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}.$$

Então,

$$\begin{aligned}
(1,\ 2,\ 3) &= x(1,\ 1,\ 0) + y(2,\ -1,\ 0) + z(0,\ 1,\ 1) \\
&= (x+2y,\ x-2y+z,\ z)
\end{aligned}$$

que é equivalente ao sistema linear

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x - 2y + z = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

e daí encontramos $x = -\frac{1}{3},\ y = \frac{2}{3},\ z = 3$. Logo,

$$u = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC}.$$

1.5 Vetores no plano

Tudo que fizemos para vetores no espaço podemos fazer para vetores no plano. Se $\{e_1,\ e_2\}$ é um conjunto linearmente independente de vetores no plano, isto é, $e_1,\ e_2$ são vetores não múltiplos um do outro então todo vetor u do plano se expressa de modo único na forma

$$u = ae_1 + be_2.$$

O conjunto $\{e_1,\ e_2\}$ é chamada base para os vetors do plano e os números a e b as componentes de u nesta base. Fixada a base escrevemos $u = (a,\ b)$ se

$$u = ae_1 + be_2$$

Consideremos o conjunto

$$\mathbb{R}^2 = \{(x,\ y) : x,\ y \in \mathbb{R}\}$$

Como vimos fixada a base $\{e_1,\ e_2\}$ do plano podemos identificar os vetores com os elementos de $\mathbb{R}^2$. Temos $0 = (0,\ 0,\ 0)$.

As operações de adição de vetores e multiplicação por número real em componentes são dadas da seguinte maneira. Sejam $u = (x_1,\ y_1), v = (x_2,\ y_2) \in \mathbb{R}^3$ e $a \in \mathbb{R}$ então

$$\begin{aligned} u + v &= (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)\,, \\ a \cdot u &= (ax_1,\ ay_1)\,. \end{aligned}$$

De fato, $u = (x_1,\ y_1), v = (x_2,\ y_2)$ então

$$u = x_1e_1 + y_1e_2 \text{ e } v = x_2e_1 + y_2e_2$$

e daí, usando as propriedades da soma de vetores concluímos que

$$\begin{aligned} u + v &= (x_1e_1 + y_1e_2) + (x_2e_1 + y_2e_2) \\ &= (x_1 + x_2)\,e_1 + (y_1 + y_2)\,e_2 \end{aligned}$$

Note que se $u = (x,\, y)$ então $-\overrightarrow{u} = (-x,\, -y)$.

Exemplos

1. Dados os vetores $u = (2, 1),\ v = (-3, 2)$, expressar o vetor $w = (1, 1)$ na forma $w = au + bv$.

Resolução.

$$\begin{aligned} w &= au + bv, \\ (1,1) &= a(2,1)u + b(-3,2) = (2a - 3b,\ a + 2b) \\ &\iff \begin{cases} 2a - 3b = 1 \\ a + 2b = 1 \end{cases} \iff a = 5,\ b = 3. \end{aligned}$$

Logo,

$$w = 5u + 3v.$$

2. Sejam os vetores $u = (1, 1),\ v = (1, 2)$, e $w = (2, 1)$. Encontrar números $a_1,\ b_1,\ c_1,\ a_2,\ b_2,\ c_2$ não todos nulos tais que

$$a_1u + b_1v + c_1w = a_2u + b_2v + c_2w$$

com $a_1 \neq a_2,\ b_1 \neq b_2,\ c_1 \neq c_2$.

Resolução.

$$\begin{aligned} a_1u + b_1v + c_1w &= a_2u + b_2v + c_2w \iff a_1u + b_1v + c_1w - (a_2u + b_2v + c_2w) = 0 \\ &\iff (a_1 - a_2)\,u + (b_1 - b_2)\,v + (c_1 - c_2)\,w = 0 \\ &\iff (a_1 - a_2)\,(1,1) + (b_1 - b_2)\,(1,2) + (c_1 - c_2)\,(2,1) = (0,0) \\ &\iff (a_1 - a_2 + b_1 - b_2 + 2c_1 - 2c_2,\ a_1 - a_2 + 2b_1 - 2b_2 + c_1 - c_2) = (0,0) \\ &\iff \begin{cases} a_1 - a_2 + b_1 - b_2 + 2c_1 - 2c_2 = 0 \\ a_1 - a_2 + 2b_1 - 2b_2 + c_1 - c_2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Subtraindo a segunda equação da primeira temos

$$-b_1 + b_2 + c_1 - c_2 = 0 \iff b_2 - b_1 = c_2 - c_1.$$

Por exemplo escolhemos $b_2 = 2,\ b_1 = 1,\ c_2 = 2,\ c_1 = 1$. Então, o sistem a torna-se

$$\begin{aligned} &\begin{cases} a_1 - a_2 + b_1 - b_2 + 2c_1 - 2c_2 = 0 \\ a_1 - a_2 + 2b_1 - 2b_2 + c_1 - c_2 = 0 \end{cases} \\ \iff &\ a_1 - a_2 = 3 \end{aligned}$$

Escolhemos $a_1 = 4,\ a_2 = 1$.

Dizemos que uma base $\{e_1,\ e_2\}$ é ortonormal se os vetores $e_1,\ e_2$ são ortogonais e unitários. Fixado um ponto O do plano uma base ortonormal $\{e_1,\ e_2\}$, temos que para todo ponto P do plano

$$\overrightarrow{OP} = xe_1 + ye_2.$$

Dizemos então que os números $x,\ y$ são as coordenadas do ponto P em relação ao sistema de coordenadas $(O,\ \{e_1,\ e_2\})$ e escrevemos

$$P = (x,\ y).$$

O ponto O é dito origem do sistema de coordenadas. Temos $O = (0,\ 0)$. Sejam $A = O + e_1,\ B = O + e_2$. As retas $OA,\ OB$ são chamadas eixos coordenados, respectivamente eixo dos x, eixo dos y.

Note que se $A = (x_1,\ y_1)$ e $B = (x_2,\ y_2)$ então

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2,\ y_2) - (x_1,\ y_1) = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1).$$

O módulo do vetor $u = (x,\ y)$ em relação a uma base ortonormal é dado por

$$\|u\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

A distância entre os pontos $A = (x_1,\ y_1)$ e $B = (x_2,\ y_2)$ é dada por

$$d(A, B) = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Se $v = (a,\ b)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ então

$$A + \lambda v = (x_1 + \lambda a,\ y_1 + \lambda b).$$

De fato, escrevendo $D = A + \lambda v = (x,\ y)$ temos $\overrightarrow{AD} = \lambda v$ e então

$$(x - x_1,\ y - y_1) = \lambda(a,\ b)$$

e então

$$x = x_1 + \lambda a,\ y = y_1 + \lambda b.$$

1.6 Produto interno ou escalar de vetores

O ângulo entre os vetores não nulos u e v é o ângulo θ formado entre eles tal que $0 \leq \theta \leq \pi$.

Se $\theta = \frac{\pi}{2}$ dizemos que u e v são ortogonais e escrevemos $u \perp v$. Por convenção $0 \perp v$ para qualquer v.

Definimos o produto interno ou escalar entre os vetores u e v por

$$\langle u,\ v\rangle = \begin{cases} 0 \text{ se } u = 0 \text{ ou } v = 0 \\ \|u\|\,\|v\|\cos\theta,\ \text{se } u \neq 0 \text{ e } v \neq 0 \end{cases}$$

onde θ é o ângulo entre u e v.

Decorre da definição que se $\|v\| = 1,$ então $\langle u,\, v\rangle$ dá a medida (com sinal) da projeção ortogonal de u na direção de v.

Segue também que dois vetores são ortogonais se $\langle u,\ v\rangle = 0$.

Exemplo. T trabalho da força constante constante F da posição A até a posição B :

$$T = \pm \|F_1\| \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \|F\| \cos\theta \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\langle F,\ \overrightarrow{AB}\right\rangle$$

onde $F = F_1 + F_2$ com F_1 paralela a $\overrightarrow{AB}$ e F_2 ortogonal $\overrightarrow{AB}$.

O produto interno tem as seguintes propriedades:

a) $\langle u,\ u\rangle = \|u\|^2$,

b) $\langle u,\ v\rangle = \langle v,\ u\rangle$,

c) $\langle u+v,\ w\rangle = \langle u,\ w\rangle + \langle v,\ w\rangle$,

d) $\langle au,\ v\rangle = \langle u,\ av\rangle = a\langle u,\ v\rangle$.

Exemplos

1) Mostrar que as diagonais de um quadrado são perpendiculares.

Consideremos um quadrado $ABCD$ com lado AB paralelo ao lado DC. Então, sendo $u = \overrightarrow{AB}$ e $v = \overrightarrow{BC}$ temos que $u+v$ e $u-v$ são os vetores determinados pelas diagonais do quadrado. Então devemos mostrar que $\langle u+v,\ u-v\rangle = 0$. Usando as propriedades temos

$$\begin{aligned}\langle u+v,\ u-v\rangle &= \langle u,\ u\rangle - \langle u,\ v\rangle + \langle v,\ u\rangle - \langle v,\ v\rangle \\ &= \|u\|^2 - \langle u,\ v\rangle + \langle u,\ v\rangle - \|v\|^2 \\ &= \|u\|^2 - \langle u,\ v\rangle + \langle u,\ v\rangle - \|u\|^2 = 0,\end{aligned}$$

onde usamos que $\|u\| = \|v\|$ pois $ABCD$ é um quadrado.

2) Mostrar que

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u,\ v\rangle + \|v\|^2 .$$

Temos, usando as propriedades,

$$\begin{aligned}\|u+v\|^2 &= \langle u+v,\ u+v\rangle = \langle u,\ u\rangle + \langle u,\ v\rangle + \langle v,\ u\rangle + \langle v,\ v\rangle \\ &= \|u\|^2 + \langle u,\ v\rangle + \langle u,\ v\rangle + \|v\|^2 \\ &= \|u\|^2 + 2\langle u,\ v\rangle + \|v\|^2 .\end{aligned}$$

Uma base $\{e_1,\ e_2,\ e_3\}$ formada por vetores unitários e ortogonais é dita uma base ortonormal. Temos então

$$\|e_1\| = \|e_2\| = \|e_3\| = 1$$

e

$$\langle e_i,\ e_j\rangle = 0 \text{ se } i \neq j.$$

Se $u = (x,\ y,\ z)$ são as componentes de u numa base ortonormal $\{e_1,\ e_2,\ e_3\}$ então

$$x = \langle u,\ e_1\rangle,\ y = \langle u,\ e_2\rangle,\ z = \langle u,\ e_3\rangle .$$

De fato,

$$u = (x,\ y,\ z) = xe_1 + ye_2 + ze_3$$

e então

$$\begin{aligned} \langle u,\ e_1\rangle &= \langle xe_1 + ye_2 + ze_3,\ e_1\rangle = x\langle e_1,\ e_1\rangle + y\langle e_2,\ e_1\rangle + z\langle e_3,\ e_1\rangle \\ &= x \end{aligned}$$

onde usamos que a base $\{e_1,\ e_2,\ e_3\}$ é ortonormal. Analogamente, obtemos $y = \langle u,\ e_2\rangle$ e $z = \langle u,\ e_3\rangle$.

Se $u = (x_1,\ y_1,\ z_1)$, $v = (x_2,\ y_2,\ z_2)$ em relação a uma base ortonormal $\{e_1,\ e_2,\ e_3\}$ então usando as propriedades do produto interno temos

$$\langle u,\ v\rangle = \langle x_1e_1 + y_1e_2 + z_1e_3,\ x_2e_1 + y_2e_2 + z_2e_3\rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Em particular,

$$\|u\|^2 = \langle u,\ u\rangle = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2,\ \|u\| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.$$

Exemplo. Achar a medida do ângulo em radianos entre os vetores $u = (2,\ 0,\ 3)$ e $v = (1,\ 1,\ 1)$ referidos em uma base ortonormal.

Temos

$$\begin{aligned} \langle u,\ v\rangle &= \|u\|\,\|v\|\cos\theta \\ \langle u,\ v\rangle &= 2*1 + 0*1 + 3*1 = 5 \\ \|u\| &= \sqrt{2^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{13} \\ \|v\| &= \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

Então,

$$\cos\theta = \frac{\langle u,\ v\rangle}{\|u\|\,\|v\|} = \frac{5}{\sqrt{13}\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{39}}$$

e daí θ é o ângulo entre 0 e π tal $\cos\theta = \frac{5}{\sqrt{39}}$. Assim,

$$\theta = \arccos\left(\frac{5}{\sqrt{39}}\right)$$

Para vetores no plano, seja $\{e_1,\ e_2\}$ é uma base ortonormal então se $u = (x,\ y)$ são as componentes de u numa nesta base temos

$$x = \langle u,\ e_1\rangle,\ y = \langle u,\ e_2\rangle.$$

De fato,

$$u = (x,\ y) = xe_1 + ye_2$$

e então

$$\begin{aligned}\langle u,\ e_1\rangle &= \langle xe_1 + ye_2,\ e_1\rangle = x\langle e_1,\ e_1\rangle + y\langle e_2,\ e_1\rangle \\ &= x\end{aligned}$$

onde usamos que a base $\{e_1,\ e_2\}$ é ortonormal. Analogamente, obtemos $y = \langle u,\ e_2\rangle$

Se $u = (x_1,\ y_1),\ v = (x_2,\ y_2)$ em relação a uma base ortonormal $\{e_1,\ e_2\}$ então usando as propriedades do produto interno temos

$$\langle u,\ v\rangle = \langle x_1e_1 + y_1e_2,\ x_2e_1 + y_2e_2\rangle = x_1x_2 + y_1y_2.$$

Em particular,

$$\|u\|^2 = \langle u,\ u\rangle = x_1^2 + y_1^2,\ \|u\| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}.$$

Exemplos

1) Considere os vetores $u = (1,\ 2),\ v = (2,\ 1)$. Encontre os valores $\lambda \in \mathbb{R}$ para os quais

$$\langle \lambda u + v,\ u + \lambda v\rangle = 0.$$

Temos

$$\lambda u + v = (\lambda + 2,\ 2\lambda + 1)\,,\ u + \lambda v = (1 + 2\lambda,\ 2 + \lambda)\,.$$

Então,

$$\begin{aligned}\langle \lambda u + v,\ u + \lambda v\rangle &= 0 \Leftrightarrow (\lambda + 2)(1 + 2\lambda) + (2\lambda + 1)(2 + \lambda) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2(\lambda + 2)(1 + 2\lambda) = 0 \Leftrightarrow 4\lambda^2 + 10\lambda + 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{2} \text{ou } \lambda = -2.\end{aligned}$$

2) Se $A = (-2,\ 3),\ B = (0,\ 1),\ C = (4, 2)$. Calcule o cosseno do ângulo entre os vetores $u = \overrightarrow{AB}$ e $v = \overrightarrow{AC}$.

Temos

$$\begin{aligned}u &= \overrightarrow{AB} = (2,\ -2)\,,\ v = \overrightarrow{AC} = (6,\ -1) \\ \|u\| &= 2\sqrt{2},\ \|v\| = \sqrt{37} \\ \langle u,\ v\rangle &= 2 \times 6 + (-2) \times (-1) = 14.\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
\langle u,\ v\rangle &= \|u\|\,\|v\|\cos\theta \\
14 &= 2\sqrt{2}\sqrt{37}\cos\theta \\
\cos\theta &= \frac{14}{2\sqrt{2}\sqrt{37}} = \frac{7}{\sqrt{74}}.
\end{aligned}$$

3) Área do paralelogramo. Consideremos o paralelogramo P determinado pelos vetores $u = \overrightarrow{AB}$ e $v = \overrightarrow{AC}$. Considere a altura h do paralelogramo correspondente ao lado AC. Temos h comprimento do segmento BE, onde BE é perpendicular a AC. Seja θ o ângulo entre $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AB}$. Temos que a área deste paralelogramo é

$$\acute{A}rea(P) = \|v\|\,h = \|v\|\,\|u\|\operatorname{sen}\theta$$

Temos

$$\begin{aligned}
\Big(\acute{A}rea(P)\Big)^2 &= \|u\|^2\,\|v\|^2\operatorname{sen}^2\theta \\
&= \|u\|^2\,\|v\|^2\,(1-\cos^2\theta) \\
&= \|u\|^2\,\|v\|^2 - \|u\|^2\,\|v\|^2\cos^2\theta \\
&= \|u\|^2\,\|v\|^2 - \langle u,\ v\rangle^2.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\acute{A}rea(P) = \sqrt{\|u\|^2\,\|v\|^2 - \langle u,\ v\rangle^2}.$$

Exemplo. Derermine a área do paralelogramo determinado pelos vetores $u = \overrightarrow{AB}$ e $v = \overrightarrow{AC}$ onde $A = (1,\ 2),\ B = (3,\ 1),\ C = (4, 1)$.

Temos

$$u = \overrightarrow{AB} = (2,\ -1),\ v = \overrightarrow{AC} = (3,\ -1).$$

Logo,

$$\acute{A}rea(P) = \sqrt{\|u\|^2\,\|v\|^2 - \langle u,\ v\rangle^2} = \sqrt{5\times 10 - 49} = \sqrt{1} = 1.$$

1.7 Produto vetorial

Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, onde $a_{11},\ a_{12},\ a_{21}$ e a_{22} são números reais. O determinante de A é o número real

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Exemplo. Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, então

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1 \cdot 2 - (-1) \cdot 2 = 4.$$

Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, onde $a_{11},\ a_{12},\ a_{21},\ \dots\ a_{33}$ são números reais. O determinante de A é o número real

$$\det A = a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

Fixemos a base ortonormal $\{e_1,\ e_2,\ e_3\}$. Sejam u, v vetores quaisquer do espaço. Escrevemos u e v em relação a base fixada como

$$u = (x_1,\, y_1,\, z_1),\ \ v = (x_2,\, y_2,\, z_2).$$

O produto vetorial entre os vetores u e v é o vetor $w = u \wedge v$ definido por

$$u \wedge v = \left(\det \begin{pmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{pmatrix},\ -\det \begin{pmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{pmatrix},\ \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \right).$$

Pode-se mostrar que essa definição independe da base ortonormal fixada.

Observamos que o produto vetorial pode ser interpretado como o seguinte determinante formal

$$u \wedge v = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix}$$

Exemplos

1) Determine o produto vetorial $u \wedge v$ nos casos:

a) $u = (1,\, -2,\, 1)$, $v = (2,\, 1,\, 1)$

b) $u = (2,\, -4,\, 3)$ e $v = (-4,\, 8,\, -6)$

a)

$$\begin{aligned} u \wedge v &= \left(\det \begin{pmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{pmatrix}, -\det \begin{pmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}\right) \\ &= \left(\det \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= (-3,\, 1,\, 5)\,. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} u \wedge v &= \left(\det \begin{pmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{pmatrix}, -\det \begin{pmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}\right) \\ &= \left(\det \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}, -\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}\right) \\ &= (0,\ 0,\ 0) \end{aligned}$$

O produto vetorial satisfaz as seguintes propriedades

$$1)\ \ \|u \wedge v\| = \|u\|\,\|v\| \operatorname{sen} \theta$$

onde θ é o ângulo entre u e v.

2) $u \wedge v$ ortogonal a u e a v,

3) $u \wedge v = -(v \wedge u)$,

4) $(u + v) \wedge w = u \wedge v + u \wedge w$, (distributiva),

5) $a\,(u \wedge v) = (au) \wedge v = u \wedge (av)$,

6) $|u \wedge v|$ é igual a área do paralelogramo de lados u e v,

onde $u,\ v$ e w são vetores e $a \in \mathbb{R}$.

7) O sentido do produto vetorial $u \wedge v$ é dado pela regra da mão direita: fechamos a mão direita de u para v, o sentido de $u \wedge v$ é o indicado pelo polegar.

Exemplo. Consideremos a base ortonormal ortonormal $\{e_1,\ e_2,\ e_3\}$. Temos

$$e_1 \wedge e_2 = e_3,$$

$$e_1 \wedge e_3 = -e_2$$

$$e_2 \wedge e_3 = e_1.$$

O produto vetorial não é associativo. De fato,

$$(e_1 \wedge e_1) \wedge e_2 = 0 \text{ e}$$
$$e_1 \wedge (e_1 \wedge e_2) = e_1 \wedge e_3 = -e_2.$$

Exemplos

1) Determinar um vetor unitário ortogonal a ambos os vetores

$$u = (1,\ 1,\ 0) \ \text{ e } v = (0,\ 1,\ 1)\,.$$

Um vetor ortogonal a ambos os vetores $u = (1,\ 1,\ 0)\,,\ v = (0,\ 1,\ 1)$ é

$$\begin{aligned} u \wedge v &= e_1 - e_2 + e_3 = \\ &= (1,\ -1,\ 1). \end{aligned}$$

Como $|(1,\ -1,\ 1)| = \sqrt{3}$, o vetor

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(1,\ -1,\ 1) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

é um vetor unitário ortogonal a ambos os vetores $u = (1,\ 1,\ 0)$ e $v = (0,\ 1,\ 1)\,.$

3) Determinar a área do paralelogramo determinado pelos vetores

$$u = (1,\ -2,\ 1)\,,\ v = (-2,\ 1,\ 1)\,.$$

A área de tal paralelogramo é $\|u \wedge v\|$. Temos

$$u \wedge v = (-3,\ -3,\ -3)\,.$$

Logo, a área do paralelogramo é $\|u \wedge v\| = 3\sqrt{3}$.

1.8 Produto misto

Sejam os vetores u, v e w do espaço, o produto misto destes vetores é definido por

$$[u,\ v,\ w] = \langle u \wedge v,\ w \rangle$$

Interpretação geométrica: Suponhamos $u,\ v$ e w não coplanares. Considere o paralelepípedo de arestas $u,\ v$ e w onde escrevemos

$$u = \overrightarrow{AB},\ v = \overrightarrow{AD} \text{ e } w = \overrightarrow{AE}.$$

Nos perguntamos qual o volume V deste paralelepípedo. Sabemos que este volume é o produto da área de uma base pela altura correspondente. Consideremos a base formada pelas arestas AB e AD. A área desta base é $\|u \wedge v\|$. Seja h a altura relativa a essa base e θ o ângulo entre $u \wedge v$ e w. Temos

$$h = \|w\| \, |\cos\theta| \, .$$

Logo,

$$V = \|u \wedge v\| \, \|w\| \, |\cos\theta| = |[u, \ v, \ w]| \, .$$

Proposição 1. Seja $\{e_1, \ e_{2,} \ e_3\}$ base ortonormal ortonormal. Se relativamente a essa base

$$u = (x_1, \, y_1, \, z_1), \ \ v = (x_2, \, y_2, \, z_2), \ \ w = (x_3, \, y_3, \, z_3).$$

Então,

$$[u, \ v, \ w] = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}.$$

Exemplos

1 Sendo

$$u = \overrightarrow{AB} = (1, \ 0, \ 1), \ v = \overrightarrow{AD} = (0, \ 3, \ 3) \text{ e } w = \overrightarrow{AE} = (2, \ 1, \ 2)$$

calcule o volume V do paralelepípedo de arestas $u, \ v$ e w.

Temos

$$[u, \ v, \ w] = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = -3.$$

Logo,

$$V = |-3| = 3.$$

Observação. Consequência da fórmula do produto misto.

Os vetores $u = (x_1, y_1, z_1)$, $v = (x_2, y_2, z_2)$, $w = (x_3, y_3, z_3)$ são linearmente dependentes $\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = 0$.

De fato, $u = (x_1, y_1, z_1)$, $v = (x_2, y_2, z_2)$, $w = (x_3, y_3, z_3)$ são linearmente dependentes $\Leftrightarrow [u,\ v,\ w] = 0$.

2 Retas no plano e no espaço

2.1 Equações da reta no espaço

Dizemos que uma reta r é paralela a um vetor $v \neq 0$ se, para dois pontos quaisquer $A,\ B$ em r, o vetor $\overrightarrow{AB}$ é múltiplo de v. Se $v = \overrightarrow{PQ}$, isto significa que r coincide ou é paralela a reta PQ.

Consideremos uma reta r no espaço E. Seja A um ponto de r e consideremos v um vetor não nulo paralelo a r. Um ponto P do espaço pertence a r se existe um número real t tal que

$$\overrightarrow{AP} = tv \text{ ou } P = A + tv$$

e reciprocamente. Ao variar t em $\mathbb{R}$ obtem-se todos os pontos da reta.

O vetor v é chamado um vetor diretor da reta r. Note que todo vetor não nulo multiplo de v é um vetor diretor de r.

A equação

$$P = A + tv,\ t \in \mathbb{R}$$

é chamada equação vetorial da reta r.

Escrevendo $P = (x,\ y,\ z)$, $A = (x_1,\ y_1,\ z_1)$ e $v = (a,\ b,\ c)$ a equação anterior torna-se

$$(x,\ y,\ z) = (x_1,\ y_1,\ z_1) + t(a,\ b,\ c)$$

o que equivale as equações

$$\begin{aligned} x &= x_1 + ta \\ y &= y_1 + tb \\ z &= z_1 + tc \end{aligned}$$

que são chamadas equações paramétricas de r.

Se $a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0$, obtemos das equações anteriores que

$$t = \frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

isto é,

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

que são chamadas as equações simétricas de r.

Exemplos

1) Determinar as equações da reta que passa pelo ponto $A = (1,\ -1,\ 4)$ e com vetor diretor $v = (1,\ -1,\ 2)$. Determinar o ponto da reta correspondente ao parâmetro $t = 5$.

Temos

$$P = A + tv = (1,\ -1,\ 4) + t(1,\ -1,\ 2),\ t \in \mathbb{R}$$

é a equação vetorial. Resulta que as equações paramétricas são

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 4 + 2t \end{cases}$$

Daí isolando t

$$x - 1 = \frac{y + 1}{-1} = \frac{z - 4}{2}$$

encontramos as equações simétricas de r. Para $t = 5$, substituindo nas equaçoes paramétricas obtemos

$$\begin{cases} x = 1 + t = 6 \\ y = -1 - t = -6 \\ z = 4 + 2t = 14 \end{cases}$$

Logo, o ponto da reta é $P = (6,\ -6,\ 14)$.

2) Se a reta r contém os pontos distintos $A = (x_1,\ y_1,\ z_1)$ e $B = (x_2,\ y_2,\ z_2)$ então podemos tomar $v = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ e daí as equações paramétricas de r são

$$\begin{aligned} x &= x_1 + t\,(x_2 - x_1) \\ y &= y_1 + t\,(y_2 - y_1) \\ z &= z_1 + t\,(z_2 - z_1) \end{aligned}$$

$t \in \mathbb{R}$.

3 Determinar a e b para que o ponto $P = (1,\ a,\ b)$ pertença a reta de equações paramétricas

$$\begin{aligned} x &= -2+t \\ y &= 3-t \\ z &= -1+2t \end{aligned}$$

Devemos ter

$$\begin{aligned} 1 &= -2+t \\ a &= 3-t \\ b &= -1+2t \end{aligned}$$

para algum $t \in \mathbb{R}$. A solução é $a = 0$ e $b = 5$.

4) Sejam as retas r que contém o ponto $A = (0,\ 1, 0)$ com vetor diretor $v = (1,\ 1,\ -2)$ e s que contém o ponto $B = (1,\ 0, 0)$ e vetor diretor $u = (2,\ 1,\ 3)$. Mostrar que r e s não se interceptam.

Temos

$$\begin{aligned} r \quad &: \quad P = A + tv = (0,\ 1, 0) + t(1,\ 1,\ -2) \\ \\ &= \quad (t,\ 1+t,\ -2t),\ t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} s \quad &: \quad X = B + \lambda u = (1,\ 0, 0) + \lambda(2,\ 1,\ 3) \\ \\ &= \quad (1+2\lambda,\ \lambda,\ 3\lambda),\ \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Se r e s se interceptassem existiriam t e λ tais que

$$(t,\ 1+t,\ -2t) = (1+2\lambda,\ \lambda,\ 3\lambda)$$

o que equivale a

$$\begin{cases} t = 1+2\lambda \\ 1+t = \lambda \\ -2t = 3\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1+2\lambda \\ t = \lambda - 1 \\ t = -\frac{3}{2}\lambda \end{cases}$$

Das duas primeiras equações vem $1+2\lambda = \lambda - 1$ e daí $\lambda = -2$. O que resulta $t = -3$. Substituindo na terceira equação vem

$$-3 = 3$$

0 que não ocorre. Logo as retas não se interceptam.

2.2 Equações da reta no plano

Consideremo agora uma reta r do plano. Seja $A = (x_1,\ y_1)$ um ponto r e $v = (a,\ b)$ um vetor diretor. Um ponto $P = (x,\ y)$ pertence a r se existe número real t tal que

$$\overrightarrow{AP} = tv \text{ ou } P = A + tv$$

daí

$$(x,\ y) = (x_1,\ y_1) + t(a,\ b)$$

o que equivale as equações

$$\begin{aligned} x &= x_1 + ta \\ \\ y &= y_1 + tb \end{aligned}$$

que são chamadas equações paramétricas de r.

Se $a \neq 0,\ b \neq 0$ obtemos das equações anteriores que

$$t = \frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b}$$

isto é,

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b}$$

que são chamadas as equações simétricas de r.

Das equações simétricas resulta

$$b(x - x_1) = a(y - y_1)$$

ou

$$\begin{aligned} bx - bx_1 - ay + ay_1 &= 0 \\ bx - ay - bx_1 + ay_1 &= 0. \end{aligned}$$

Escrevendo $A = b,\ B = -a$ e $C = -bx_1 + ay_1$ obtemos a equação

$$Ax + By + C = 0,$$

dita equação geral ou cartesiana da reta r.

Exemplos

1) Obter as equações da reta r que passa pelo ponto $A = (1,\ -1)$ e tem vetor paralelo $v = (1, 3)$.

Equação vetorial:

$$P = A + tv = (1,\ -1) + t(1,3)$$

onde t varia em $\mathbb{R}$.

Equações paramétricas:

$$\begin{aligned} x &= 1 + t \\ y &= -1 + 3t \end{aligned}$$

Equações simétricas:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{3}$$

Equação cartesiana:

$$\begin{aligned} 3(x-1) &= y + 1 \\ 3x - y - 4 &= 0 \end{aligned}$$

2) Encontre o ponto de interseção da reta r_1 paralela ao vetor $v = (1,\ 1)$ que passa pelo ponto $A = (2,\ 3)$ com a reta r_2 que passa pelos pontos $B = (-1,\ -2)$ e $C = (3,\ 6)$.

Equação vetorial da reta r_1

$$P = (2,\ 3) + t(1,\ 1)$$

com t variando em $\mathbb{R}$.

Equação vetorial da reta r_2

Vetor diretor $u = \overrightarrow{BC} = (4,\ 8)$

$$X = (-1,\ -2) + \lambda\,(4,\ 8)$$

com λ variando em $\mathbb{R}$.

Ponto de interseção:

Existem t e λ tais que $P = X$. Temos

$$\begin{aligned} P &= X \Leftrightarrow (2,\ 3) + t(1,\ 1) = (-1,\ -2) + \lambda\,(4,\ 8) \\ \\ &\Leftrightarrow (2+t,\ 3+t) = (-1+4\lambda,\ -2+8\lambda) \\ \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2+t = -1+4\lambda \\ 3+t = -2+8\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t - 4\lambda = -3 \\ t - 8\lambda = -5 \end{cases} \\ \\ &\Leftrightarrow t = -1,\ \lambda = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Logo o ponto de interseção é

$$P(-1) = X(\frac{1}{2}) = (1,\ 2)$$

3) Obter a equação cartesiana da reta que passa pelos pontos $A = (1,\ 7)$ e $B = (3,\ 8)$.

Equação cartesiana:

$$ax + by + c = 0.$$

$A = (1, 7)$ peretence a reta. Então,

$$a + 7b + c = 0.$$

$B = (3,\ 8)$ peretence a reta. Então

$$3a + 8b + c = 0.$$

Subtraindo equação 2 e equação 1 obtemos

$$2a + b = 0.$$

Escolhemos $a = 1$ e $b = -2$. Então, $c = 13$. Logo, a equação cartesiana da reta é

$$x - 2y + 13 = 0.$$

Definição. Um vetor $n \neq 0$ é dito vetor normal a uma reta no plano se é ortogonal a $u = \overrightarrow{AB}$ para quaisquer pontos A e B distintos da reta.

Seja r reta que passa pelo ponto $A = (x_0,\ y_0)$ e tem vetor normal $n = (a,\ b) \neq 0$. Então,

$$\begin{aligned} P &= (x,\ y) \in r \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} \text{ é perpendicular a } n \\ &\Leftrightarrow \left\langle \overrightarrow{AP},\ n \right\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle (x - x_0,\ y - y_0),\ (a,\ b) \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow ax + by + c = 0 \\ \text{onde } c &= -ax_0 - by_0 \end{aligned}$$

Assim, encontramos novamente a equação cartesiana da reta agora com a interpretação geométrica de $n = (a,\ b)$ vetor normal a reta.

Exemplo. Determine a equação cartesiana da reta r que passa pelo ponto $A = (-1,\ 4)$ e tem vetor normal $n = (2,\ 3)$.

Vetor normal $n = (2,\ 3) = (a,\ b)$. Então equação cartesiana da reta

$$2x + 3y + c = 0.$$

$A = (-1,\ 4)$ peretence a reta. Então,

$$-2 + 12 + c = 0,\ c = -10.$$

Logo, a equação é

$$2x + 3y - 10 = 0.$$

Observação. Um vetor $n = (a,\ b) \neq 0$ ser normal a uma reta r equivale ao vetor $v = \lambda(-b,\ a)$ ser paralelo a r, para qualquer $\lambda \neq 0$. De fato,

$$\langle n,\ v\rangle = -\lambda ab + \lambda ab = 0$$

e daí v é paralelo a r e reciprocamente.

Exemplo. Obtenha a equação cartesiana a reta que passa pelo ponto $B = (-1,\ 4)$ e é paralela ao vetor $v = (2,\ 3)$.

$v = (2,\ 3)$ vetor paralelo a r então $n = (-3,\ 2)$ é normal a reta. Logo, a equação cartesiana é

$$-3x + 2y + c = 0.$$

$B = (-1,\ 4) \in r$. Então,

$$3 + 8 + c = 0,\ c = -11.$$

Logo, a equação é

$$-3x + 2y - 11 = 0.$$

2.3 Paralelismo e perpendicularismo entre retas

Paralelismo

Definição. As retas distintas r e s são paralelas se são coplanares e não se interceptam.

1) Paralelismo entre retas no espaço

Sejam r e s retas no espaço. Fixemos um sistema de coordenadas $(0,\ e_1,\ e_2,\ e_3)$ do espaço. Designemos por

$$\overrightarrow{r} = (a,\ b,\ c),\ \overrightarrow{s} = (m,\ n,\ p)$$

vetores diretores de r e s respectivamente.

É fácil ver que as retas r e s são paralelas se $\{\overrightarrow{r},\ \overrightarrow{s}\}$ linearmente dependente e r e s não se interceptam, e reciprocamente. Temos $\{\overrightarrow{r},\ \overrightarrow{s}\}$ linearmente dependente se existe número real λ tal que $\overrightarrow{r} = \lambda\overrightarrow{s}$.

Pode acontecer $\{\overrightarrow{r},\ \overrightarrow{s}\}$ linearmente dependente e $r = s$.

Exemplos

1) Consideremos as retas

$$\begin{aligned} r &: X = (1,\ 2,\ 3) + t(0,\ 1,\ 3) \\ s &: P = (1,\ 3,\ 6) + \mu(0,\ 2,\ 6) \end{aligned}$$

Temos

$$\overrightarrow{r} = (0,\ 1,\ 3),\ \overrightarrow{s} = (0,\ 2,\ 6)$$

são os vetores diretores de r e s respectivamente. Observamos que

$$\overrightarrow{s} = 2\overrightarrow{r}.$$

Assim, $\{\overrightarrow{r},\ \overrightarrow{s}\}$ linearmente dependente. Logo, r e s são paralelas ou coincidentes. Vamos verificar que o ponto $A = (1,\ 2,\ 3)$ de r também pertence a s. Devemos encontrar $\mu \in \mathbb{R}$ tal que

$$A = (1,\ 2,\ 3) = (1,\ 3,\ 6) + \mu(0,\ 2,\ 6)$$

$$(1,\ 2,\ 3) = (1,\ 3 + 2\mu,\ 6 + 6\mu)$$

$$\begin{cases} 3 + 2\mu = 2 \\ 6 + 6\mu = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \mu = -\frac{1}{2}.$$

Logo, as retas r e s não são paralelas. Logo, $r = s$.

2) Verifique se são paralelas as retas

$$\begin{aligned} r &: P = (1,\ 2,\ 3) + t(-1,\ 2,\ 3) \\ s &: x + 1 = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{3} \end{aligned}$$

Um vetor diretor de r é $\overrightarrow{r} = (-1,\ 2,\ 3)$. Podemos escrever

$$x + 1 = \frac{x-(-1)}{1},$$

logo um vetor diretor de s é $\overrightarrow{s} = (1,\ 2,\ 3)$. Como $\overrightarrow{r}$ e $\overrightarrow{s}$ não são múltiplos concluímos que as retas não são paralelas.

2) Paralelismo entre retas no plano

Teorema. *As retas* r_1 e r_2 *do plano de equações*

$$\begin{aligned} r_1 &: ax + by + c = 0 \\ r_2 &: a^{'}x + b^{'}y + c^{'} = 0 \end{aligned}$$

serem paralelas equivale a existir um número real λ *tal que*

$$\left(a^{'},\ b^{'}\right) = \lambda(a,\ b) \text{ e } c^{'} \neq \lambda c.$$

De fato, neste caso o sistema de equações formado pelas duas equações não tem solução. Portanto, as duas retas r_1 e r_2 do plano não se interceptam, logo são paralelas.

Exemplo. Determine a equação cartesiana (geral) da reta r_2 que passa pelo ponto $A = (2,\ 2)$ e é paralela a reta r_1 de equação $x - 2y - 3 = 0$.

Seja $ax + by + c = 0$ a equação da reta r_2. Devemos ter

$$(a,\ b) = \lambda(1,\ -2) \text{ e } c \neq -3\lambda.$$

Podemos tomar $\lambda = 1$ e $c \neq -3$. Então,

$$(a,\ b) = (1,\ -2).$$

E a equação fica

$$x - 2y + c = 0.$$

Como $A = (2,\ 2) \in r_2$, devemos ter

$$2 - 2(2) + c = 0,\ \ c = 2.$$

Logo a equação de r_2 é

$$x - 2y + 2 = 0.$$

Perpendicularismo

1) Perpendicularismo entre retas no espaço

Definição. Sejam r e s retas no espaço. Fixemos um sistema de coordenadas $(0,\ e_1,\ e_2,\ e_3)$ do espaço. Designemos por

$$\overrightarrow{r} = (a,\ b,\ c),\ \ \overrightarrow{s} = (m,\ n,\ p)$$

vetores diretores de r e s respectivamente. Temos

a) Dizemos que r e s são ortogonais se $\overrightarrow{r}$ e $\overrightarrow{s}$ são ortogonais.

b) Dizemos que r e s são perpendiculares se $\overrightarrow{r}$ e $\overrightarrow{s}$ são ortogonais e $r \cap s \neq \emptyset$.

Exemplos

1) Verifique se as retas

$$\begin{aligned} r &: X = (1,\ 1,\ 1) + t(2,\ 1,\ -3) \\ s &: P = (0,\ 1, 0) + \lambda(-1,\ 2,\ 0) \end{aligned}$$

são ortogonais. Verifique se são perpendiculares.

Temos

$$\overrightarrow{r} = (2,\ 1,\ -3),\ \ \overrightarrow{s} = (-1,\ 2,\ 0)$$

são os vetores diretores de r e s respectivamente. Está fixado um sistema de coordenadas ortogonais. Assim temos

$$\langle \overrightarrow{r},\ \overrightarrow{s} \rangle = 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 + (-3) \cdot 0 = 0,$$

portanto, $\overrightarrow{r}$ e $\overrightarrow{s}$ são ortogonais. Logo, as retas são ortogonais. Vamos verificar se são perpendiculares. Vamos determinar se existe ponto de interseção entre r e s. Os pontos de r são da forma

$$X = (1,\ 1,\ 1) + t(2,\ 1,\ -3) = (1 + 2t,\ 1 + t,\ 1 - 3t).$$

Os pontos de s são da forma

$$P = (0,\ 1, 0) + \lambda(-1,\ 2,\ 0) = (-\lambda,\ 1 + 2\lambda,\ 0).$$

Para o ponto que esta em r e s devemos ter

$$\begin{cases} 1 + 2t = -\lambda \\ 1 + t = 1 + 2\lambda \\ 1 - 3t = 0. \end{cases}$$

Da terceira equação vem $t = \frac{1}{3}$. Substituindo na primeira vem

$\lambda = -\frac{10}{3}$, e na segunda equação vem $\lambda = \frac{1}{6}$. o que é uma contradição. Logo, $r \cap s = \emptyset$. Logo, r e s não são perpendiculares.

2) Determine as equações paramétricas da reta r que passa pelo ponto $A = (-1,\ 3,\ 1)$ e é perpendicular a reta

$$s : \frac{x - 1}{2} = \frac{y - 1}{3} = z.$$

A equação paramétrica de r tem a forma

$$r : P = A + tv = (-1,\ 3,\ 1) + tv$$

onde v é um vetor diretor de r. Vamos escolher $v = \overrightarrow{AQ}$ onde Q é o ponto de interseção de r e s. Devemos ter $v = \overrightarrow{AQ}$ ortogonal ao vetor diretor de s que é o vetor $u = (2,\ 3,\ 1)$. Como $Q \in s$ devemos ter

$$Q = (1 + 2\lambda,\ 1 + 3\lambda,\ \lambda)$$

para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Então,

$$v = \overrightarrow{AQ} = (2 + 2\lambda,\ -2 + 3\lambda,\ \lambda - 1)$$

e daí

$$\begin{aligned} \left\langle \overrightarrow{AQ},\ u \right\rangle &= \langle (2 + 2\lambda,\ -2 + 3\lambda,\ \lambda - 1),\ (2,\ 3,\ 1) \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow\ (2 + 2\lambda)\,2 + (-2 + 3\lambda)\,3 + (\lambda - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow\ \lambda = \frac{3}{14}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} v &= \overrightarrow{AQ} = (2 + 2\lambda,\ -2 + 3\lambda,\ \lambda - 1) \\ &= (2 + 2\frac{3}{14},\ -2 + 3\frac{3}{14},\ \frac{3}{14} - 1) \\ &= (\frac{59}{14},\ \frac{17}{14},\ -\frac{11}{14}) = \frac{1}{14}(59,\ 17,\ -11). \end{aligned}$$

Portanto, podemos tomar como vetor diretor de r

$$v = (59,\ 17,\ -11).$$

Logo, a equação paramétrica da reta r é

$$r : P = A + tv = (-1,\ 3,\ 1) + t(59,\ 17,\ -11)$$

2) Perpendicularismo entre retas no plano

Teorema. *As retas* r_1 e r_2 *do plano de equações*

$$\begin{aligned} r_1 &: ax + by + c = 0 \\ r_2 &: a^{'}x + b^{'}y + c^{'} = 0 \end{aligned}$$

serem perpendiculares equivale a seus normais $n_1 = (a,\ b)$ *e* $n_2 = (a^{'},\ b^{'})$ *serem ortogonais.*

Exemplo. Encontre a equação cartesiana da reta r_2 que passa pelo ponto $A = (-2,\ 1)$ e é perpendicular a reta r_1 de equação cartesiana $2x - 3y - 4 = 0$.

Seja $ax + by + c = 0$ a equação cartesiana da reta r_2 perpendicular a reta r_1 de equação $2x - 3y - 4 = 0$. O vetor normal de r_1 é $n_1 = (2,\ -3)$. O vetor $n_2 = (a,\ b)$ deve ser ortogonal a n_1. Portanto, $n_2 = (-b,\ a) = (3,\ 2)$. Portanto, a equação é $3x + 2y + c = 0$. Como o ponto $A = (-2,\ 1) \in r_2$ temos $3(-2) + 2 + c = 0,\ c = 4$. Logo, a equação geral de r_2 é

$$3x + 2y + 4 = 0.$$

2.4 Ângulo entre duas retas

Definição. Dadas as retas r e s no espaço, o ângulo θ entre r e s é definido por

a) Se r e s são coincidentes ou paralelas então $\theta = 0$.

b) Se r e s são concorrentes então θ é o menor dos ângulos determinados por r e s no plano que as contém. Em particular, $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

c) Se r e s são reversas, então θ é o ângulo entre r e r' onde r' é reta paralela a s que passa por um ponto P de r.

Dadas as retas r e s, sejam u e v vetores diretores de r e s respectivamente. Seja θ o ângulo entre r e s. Sendo α o ângulo entre u e v, temos

$$\cos\alpha = \frac{\langle u,\ v\rangle}{\|u\|\,\|v\|},\ \ 0 \leq \alpha \leq \pi.$$

Se $\langle u,\ v\rangle > 0$ então $\cos\alpha > 0$ donde $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$. Daí, $\theta = \alpha$. Logo,

$$\cos\theta = \frac{\langle u,\ v\rangle}{\|u\|\,\|v\|} = \frac{|\langle u,\ v\rangle|}{\|u\|\,\|v\|}.$$

Se $\langle u,\ v\rangle \leq 0$ então $\cos\alpha \leq 0$ donde $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$. Daí, $\theta + \alpha = \pi$. Logo,

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha = -\frac{\langle u,\ v\rangle}{\|u\|\,\|v\|} \\ &= \frac{|\langle u,\ v\rangle|}{\|u\|\,\|v\|}.\end{aligned}$$

Conclusão: Em qualquer dos casos temos

$$\cos\theta = \frac{|\langle u,\ v\rangle|}{\|u\|\,\|v\|}$$

onde θ é o ângulo entre as retas r e s.

Exemplos

1) Determine a medida do ângulo entre as retas

$$\begin{aligned} r &: X = (1,\ 1,\ 9) + \lambda(0,\ 1,\ -1) \\ s &: P = (1,\ 2,\ 3) + t(1,\ 1,\ 0) \end{aligned}$$

Temos

$$u = (0,\ 1,\ -1),\ v = (1,\ 1,\ 0)$$

vetores diretores de r e s respectivamente. Então,

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{|\langle u,\ v\rangle|}{\|u\|\,\|v\|} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2},\ 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \\ \theta &= \frac{\pi}{3} \text{ radianos.} \end{aligned}$$

2) Obtenha os vértices B e C do triângulo equilátero ABC sendo $A = (1,\ 1,\ 0)$ sabendo que BC está contido na reta r de equação vetorial

$$X = (0,\ 0, 0) + \lambda(0,\ 1,\ -1).$$

Seja P um dos vértices B ou C. Como $P \in r$ temos $P = (0,\ \lambda,\ -\lambda)$ para algum λ real. Mas o ângulo entre as retas r e a reta que passa por A e P mede 60 graus. Assim, como o vetor diretor de r é $u = (0,\ 1,\ -1)$ e $\overrightarrow{AP} = (-1,\ \lambda - 1,\ -\lambda)$, temos

$$\begin{aligned} \cos 60 &= \frac{\left|\left\langle u,\ \overrightarrow{AP}\right\rangle\right|}{\|u\|\left\|\overrightarrow{AP}\right\|} = \frac{|2\lambda - 1|}{\sqrt{2}\sqrt{1 + (\lambda - 1)^2 + \lambda^2}} \\ \frac{|2\lambda - 1|}{\sqrt{2}\sqrt{1 + (\lambda - 1)^2 + \lambda^2}} &= \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{|2\lambda - 1|}{\sqrt{2\lambda^2 - 2\lambda + 2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{(2\lambda - 1)^2}{2\lambda^2 - 2\lambda + 2} = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ou } \lambda = 1. \end{aligned}$$

Os vértices são

$$\begin{aligned} P &= (0,\ \lambda,\ -\lambda) = (0,\ 0,\ 0) \text{ e} \\ P &= (0,\ \lambda,\ -\lambda) = (0,\ 1,\ -1) \end{aligned}$$

Se as retas r e s estão no plano a teoria é análoga.

Exemplos

1) Determine o ângulo entre as retas de equações cartesianas:

$$\begin{aligned} r_1 &: 3x + 4y + 7 = 0 \\ r_2 &: -2x + 5y + 8 = 0 \end{aligned}$$

Temos que um vetor normal a r_1 é $n_1 = (3,\ 4)$. Portanto, um vetor paralelo a r_1 é $v_1 = (-4,\ 3)$.

Temos que um vetor normal a r_2 é $n_2 = (-2,\ 5)$. Portanto, um vetor paralelo a r_2 é $v_2 = (-5,\ -2)$.

Logo,

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{|\langle v_1,\ v_2\rangle|}{\|v_1\|\,\|v_2\|} = \frac{|14|}{5\sqrt{29}} = \frac{14}{5\sqrt{29}} \\ \theta &= \arccos\left(\frac{14}{5\sqrt{29}}\right) = 1.024\ radianos \end{aligned}$$

2) Qual o ângulo formado pelas retas cujas equações cartesianas são $2x + 3y = 5$ e $5x + y = -3$.

$u = (-3,\ 2)$ é vetor paralelo a reta $2x + 3y = 5,\ v = (-1,\ 5)$ é vetor paralelo a reta $5x + y = -3$. Logo,

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{|\langle u,\ v\rangle|}{\|u\|\,\|v\|} = \frac{|13|}{\sqrt{13}\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \theta &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

2.5 Posições relativas entre duas retas

Queremos resolver o seguinte problema: dadas duas retas r e s do espaço descobrir se elas são paralelas, concorreentes ou reversas.

Para isso, fixemos um sistema de coordenadas $(O,\ e_1,\ e_2,\ e_3)$ do espaço e designemos por

$$\overrightarrow{r} = (a,\ b,\ c),\ \overrightarrow{s} = (m,\ n,\ p)$$

vetores diretores de r e s respectivamente, e por

$$A = (x_0,\ y_0,\ z_0),\ B = (x_1,\ y_1,\ z_1)$$

pontos de r e s respectivamente. Observamos então que

1) r e s são reversas $\Leftrightarrow \left\{\overrightarrow{r},\ \overrightarrow{s},\ \overrightarrow{AB}\right\}$ é l. i

$\Leftrightarrow$

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

2) r e s são paralelas $\Leftrightarrow r \cap s = \emptyset$ e $\{\overrightarrow{r},\ \overrightarrow{s}\}$ é l. d.

3) r e s são concorrentes $\Leftrightarrow r \cap s = \{P\}$

$\Leftrightarrow$ $\left\{\overrightarrow{r},\ \overrightarrow{s},\ \overrightarrow{AB}\right\}$ é l. d

$\Leftrightarrow$

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \end{pmatrix} = 0$$

e $\{\overrightarrow{r},\ \overrightarrow{s}\}$ é l. i.

Exemplos

1) Estude a posição relativa entre as retas

$$\begin{aligned} r &: X = (1,\ 2,\ 3) + \lambda(0,\ 1,\ 3) \\ s &: P = (0,\ 1,\ 0) + t(1,\ 1,\ 1) \end{aligned}$$

Temos

$$\overrightarrow{r} = (0,\ 1,\ 3),\ \overrightarrow{s} = (1,\ 1,\ 1)$$

vetores diretores de r e s respectivamente. $\{r,\ s\}$ é l.i. Então, r e s reversas ou concorrentes.

$$A = (1,\ 2,\ 3) \in r,\ B = (0,\ 1,\ 0) \in s,\ \overrightarrow{AB} = (-1,\ -1,\ -3)\,.$$

Temos

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} = 2 \neq 0.$$

Então, $\left\{\overrightarrow{r},\ \overrightarrow{s},\ \overrightarrow{AB}\right\}$ é l. i. Logo, r e s são reversas.

2) Estude a posição relativa entre as retas

$$\begin{aligned} r &: X = (1,\ 2,\ 3) + \lambda(0,\ 1,\ 3) \\ s &: P = (1,\ 3,\ 6) + t(0,\ 2,\ 6) \end{aligned}$$

Temos

$$\overrightarrow{r} = (0,\ 1,\ 3),\ \overrightarrow{s} = (0,\ 2,\ 6)$$

vetores diretores de r e s respectivamente. $\{r,\ s\}$ é l.d. Então, r e s paralelas ou coincidentes. Vamos analisar a interseção entre r e s. Existem λ e t tais que

$X(\lambda) = P(t)$? Temos

$$\begin{aligned} X(\lambda) &= P(t) \Leftrightarrow (1,\ 2,\ 3) + \lambda(0,\ 1,\ 3) = (1,\ 3,\ 6) + t(0,\ 2,\ 6) \\ &\Leftrightarrow (1,\ 2+\lambda,\ 3+3\lambda) = (1,\ 3+2t,\ 6+6t) \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} 2+\lambda = 3+2t \\ 3+3\lambda = 6+6t \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} \lambda = 1+2t \\ 3+3\lambda = 6+6t \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} \lambda = 1+2t \\ 6+6t = 6+6t \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \lambda = 1+2t. \end{aligned}$$

Portanto, $X(\lambda) = P(t)$ para $\lambda = 1+2t$. Logo, $r = s$.

3) Estude a posição relativa entre as retas

$$\begin{aligned} r &: \frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{5} = \frac{z+2}{5} \\ s &: x = -y = \frac{z-1}{4} \end{aligned}$$

Temos

$$\overrightarrow{r} = (3,\ 5,\ 5),\ \overrightarrow{s} = (1,\ -1,\ 4)$$

vetores diretores de r e s respectivamente. $\{r,\ s\}$ é l.i. Então, r e s reversas ou concorrentes.

$$A = (1,\ 5,\ -2) \in r,\ B = (0,\ 0,\ 1) \in s,\ \overrightarrow{AB} = (-1,\ -5,\ 3)$$

Temos

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 1 & -1 & 4 \\ -1 & -5 & 3 \end{pmatrix} = -14 \neq 0.$$

Então, $\left\{\overrightarrow{r},\ \overrightarrow{s},\ \overrightarrow{AB}\right\}$ é l. i. Logo, r e s são reversas.

Posição relativa de duas retas no plano

Temos

1) r é paralela a $s \Leftrightarrow r \cap s = \emptyset$.

2) r e s são concorrentes $r \cap s = \{P\}$.

Teorema. *Sejam as retas r e s de equações cartesianas*

$$ax + by + c = 0,\ a^{'}x + b^{'}y + c^{'} = 0$$

respectivamente. Então, r e s são paralelas $\Leftrightarrow$ existe $\lambda \in R$ tal que

$$\left(a^{'},\ b^{'}\right) = \lambda(a,\ b) \text{ e } c^{'} \neq \lambda c.$$

Exemplos

1) Decida a posição relativa entre as retas

$$\begin{aligned} r &: \ 2x + 3y = 5 \\ s &: \ 6x + 9y = 11 \end{aligned}$$

Temos, na notação do teorema,

$$\begin{aligned} (a,\ b) &= (2,\ 3) \\ \left(a^{'},\ b^{'}\right) &= (6,\ 9) = 3(2,\ 3) = \lambda(a,\ b),\ \lambda = 3 \\ c^{'} &= -11 \neq \lambda(-5) \end{aligned}$$

Logo, as retas são paralelas.

2) Decida a posição relativa entre as retas

$$\begin{aligned} r &: \ 2x + 3y = 5 \\ s &: \ 6x + 9y = 15 \end{aligned}$$

Temos, na notação do teorema,

$$\begin{aligned} (a,\ b) &= (2,\ 3) \\ \left(a^{'},\ b^{'}\right) &= (6,\ 9) = 3(2,\ 3) = \lambda(a,\ b),\ \lambda = 3 \\ \text{mas } c^{'} &= -15 = \lambda(-5) \end{aligned}$$

Logo, as retas não são paralelas. É facil ver que as retas são coincidentes.

3) Decida a posição relativa entre as retas

$$\begin{aligned} r &: \ 2x + 3y = 5 \\ s &: \ 3x + 7y = 11 \end{aligned}$$

Temos, na notação do teorema,

$$\begin{aligned} (a,\ b) &= (2,\ 3) \\ \left(a^{'},\ b^{'}\right) &= (3,\ 7) \neq \lambda(2,\ 3) = \lambda(a,\ b) \end{aligned}$$

para todo λ. Logo, as retas são concorrentes. É facil ver que o ponto de interseção é a s solução do sistema formado pelas duas equações. No exemplo temos $P = (x = \frac{2}{5}, y = \frac{7}{5})$.

3 Estudo do Plano

3.1 Equações paramétricas do plano

Dizemos que o plano Π é paralelo ao vetor $v = \overrightarrow{PQ} \neq 0$ se a reta PQ é paralela a Π ou está contida nele.

Seja Π um plano com vetores paralelos u e v não colineares (linearmente independentes). u e v também são chamados vetores diretores do plano Π. Seja A um ponto de Π. Seja P um ponto do espaço. Temos que $P \in \Pi$ se existem números reais $s,\ t$ tais que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= su + tv \\ P &= A + su + tv \end{aligned}$$

e reciprocamente. A equação

$$P = A + su + tv,\ s \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}$$

é chamada equação vetorial de Π. Aos números s e t variar em $\mathbb{R}$ obtemos todos os pontos do plano Π.

Escrevendo $P = (x,\ y,\ z),\ A = (x_1,\ y_1,\ z_1)$ e $u = (a_1,\ b_1,\ c_1),\ v = (a_2,\ b_2,\ c_2)$ a equação anterior torna-se

$$(x,\ y,\ z) = (x_1,\ y_1,\ z_1) + s(a_1,\ b_1,\ c_1) + t(a_2,\ b_2,\ c_2)$$

o que equivale as equações

$$\begin{aligned} x &= x_1 + sa_1 + ta_2 \\ y &= y_1 + sb_1 + tb_2 \\ z &= z_1 + sc_1 + tc_2 \end{aligned}$$

$s,\ t \in \mathbb{R}$, que são chamadas equações paramétricas de Π.

Exemplos

1) Se o plano Π contém os pontos não colineares $A = (x_1,\ y_1,\ z_1)$, $B = (x_2,\ y_2,\ z_2)$ e $C = (x_3,\ y_3,\ z_3)$ então podemos tomar

$$\begin{aligned} u &= \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1, z_2 - z_1) \\ v &= \overrightarrow{AC} = (x_3 - x_1,\ y_3 - y_1, z_3 - z_1) \end{aligned}$$

e daí as equações paramétricas de Π são

$$\begin{aligned} x &= x_1 + s\,(x_2 - x_1) + t\,(x_3 - x_1) \\ y &= y_1 + s\,(y_2 - y_1) + t\,(y_3 - y_1) \\ z &= z_1 + s\,(z_2 - z_1) + t\,(z_3 - z_1) \end{aligned}$$

$s, t \in \mathbb{R}$.

2) Equações paramétricas do plano que passa por $A = (1,\ 1, 0)$ e $B = (0,\ 1,\ -1)$ e é paralelo ao segmento CD onde $C = (1,\ 2, 1)$ e $D = (0,\ 1,\ 0)$. Podemos tomar

$$A = (1,\ 1, 0),\ u = \overrightarrow{AB} = (-1,\ 0,\ -1) \text{ e } v = \overrightarrow{CD} = (-1,\ -1,\ -1)\,.$$

Logo, as equações paramétricas são

$$\begin{aligned} x &= 1 - s - t \\ y &= 1 - t \\ z &= -s - t \end{aligned}$$

$s,\ t \in \mathbb{R}$.

3) Sejam os pontos $A = (1,\ 2,\ 3),\ B = (2,\ 3,\ 1),\ C = (3,\ 2,\ 1)$. Então,

$$\overrightarrow{AB} = (1,\ 1,\ -2),\ \overrightarrow{AC} = (2,\ 0,\ -2)$$

temos $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ não múltiplos um do outro, portanto $A,\ B$ e C são não colineares. Então, $A,\ B$ e C determinam um plano Π. Em que ponto este plano intercepta o eixo OX?

Temos que as equações paramétricas de Π são

$$\begin{aligned} P &= (x,\ y,\ z) = (1,\ 2,\ 3) + s(1,\ 1,\ -2) + t(2,\ 0,\ -2) \\ & \left\{ \begin{array}{c} x = 1 + s + 2t \\ y = 2 + s \\ z = 3 - 2s - 2t \end{array} \right. \end{aligned}$$

P está no eixo OX se $y = 0$ e $z = 0$, isto é,

$$2 + s = 0 \text{ e } 3 - 2s - 2t = 0$$

cujas soluções são $s = -2$ e $t = \frac{7}{2}$. Daí,

$$x = 1 + s + 2t = 6.$$

Logo, o ponto onde Π encontra o eixo OX é $P = (6,\ 0,\ 0)$.

3.2 Equação cartesiana do plano

Chamamos vetor normal ao plano Π com vetores diretores u e v a um vetor não nulo ortogonal a u e a v (portanto ortogonal a qualquer vetor do plano). Seja n um vetor normal ao plano Π. Seja $P = (x,\ y,\ z)$ um ponto de Π. Escrevemos $w = \overrightarrow{AP}$ (como antes A é ponto de Π). Então,

$$w = su + tv$$

para certos $s,\ t \in \mathbb{R}$. Temos $\langle n,\ u\rangle = \langle n,\ v\rangle = 0$. Assim,

$$\begin{aligned} \langle n,\ w\rangle &= \langle n,\ su + tv\rangle = s\langle n,\ u\rangle + t\langle n,\ v\rangle \\ &= s0 + t0 = 0. \end{aligned}$$

Escrevendo $A = (x_1,\ y_1,\ z_1)$ e $n = (a,\ b,\ c)$ temos que $\langle n,\ w\rangle = 0$ equivale a equação

$$\langle (a,\ b,\ c),\ (x - x_1,\ y - y_1, z - z_1)\rangle = 0$$

isto é

$$ax + by + cz + d = 0$$

onde $d = -ax_1 - by_1 - cz_1$. A última equação é chamada equação geral ou equação cartesiana do plano Π.

Exemplos

1) Determinar a equação cartesiana do plano Π que passa pelo ponto $A = (-1,\ 3,\ 7)$ e tem vetor normal $n = (1,\ 5,\ 7)$.

A equação cartesiana é $ax + by + cz + d = 0$ com $n = (a,\ b,\ c)$ vetor normal ao plano. Então, a equação cartesiana de Π é

$$x + 5y + 7z + d = 0.$$

Como $A = (-1,\ 3,\ 7) \in \Pi$ temos

$$-1 + 5 \times 3 + 7 \times 7 + d = 0,\ d = -63.$$

Logo a equação cartesiana de Π é

$$x + 5y + 7z - 63 = 0.$$

2) Determinar a equação geral do plano que contém o ponto $A = (1,\ 1,\ 1)$ e a reta r de equações paramétricas

$$\begin{aligned} x &= 2t \\ y &= 3t \\ z &= 1 + t \end{aligned}$$

$t \in \mathbb{R}$. Temos que A não pertence a reta r, logo r e A determinam um plano Π. O vetor diretor da reta r é um vetor diretor do plano Π. Tomamos $u = (2,\ 3,\ 1)$. Para o outro vetor diretor consideremos $v = \overrightarrow{AB}$ onde B é um ponto de r, digamos, $B = (0,\ 0,\ 1)$. Logo, $v = (-1,\ -1,\ 0)$. Assim, encontramos

$$n = u \wedge v = (1,\ -1,\ 1)$$

Portanto, a equação geral do plano Π é

$$x - y + z + d = 0.$$

Como $A = (1,\ 1,\ 1) \in \Pi$ temos $d = -1$. Logo, a equação geral do plano Π é

$$x - y + z - 1 = 0.$$

3.3 Perpendicularismo entre reta e plano e entre plano e plano

1 - Perpendicularismo entre reta e plano

Para decidir se uma reta r é perpendicular a um plano Π, podemos proceder da seguinte forma:

Sendo $w \neq 0$ paralelo a r e u e v linearmente independentes paralelos a Π então r é perpendicular a $\Pi \Leftrightarrow u \wedge v$ é paralelo a w.

Caso Π seja dado pela equação cartesiana

$$\Pi : ax + by + cz + d = 0$$

então como $n = (a,\ b,\ c)$ é ortogonal a Π basta verificar que este vetor é paralelo a w.

Exemplos

1) Verificar se r e Π são perpendiculares, sendo

$$\begin{aligned} r &: X = (0,1,0) + \lambda(1,\ 1,\ 3) \\ \Pi &: P = (3,\ 4,\ 5) + s(6,\ 7,\ 8) + t(9,\ 10, 11). \end{aligned}$$

Temos $w = (1,\ 1,\ 3)$ é vetor paralelo a r, $u = (6,\ 7,\ 8)$ e $v = (9,\ 10, 11)$ são l.i paralelos a Π. Verifiquemos se $u \wedge v$ é paralelo a w.

$$u \wedge v = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 \end{pmatrix} = (-3,\ 6,\ -3) = -3(1,\ -2,\ 1)$$

$u \wedge v$ não é paralelo a $w = (1,\ 1,\ 3)$. Logo, r e Π não são perpendiculares.

2) Ache equações na forma simétrica da reta que passa pelo ponto $P = (-1,\ 3,\ 5)$ e é perpendicular ao plano

$$\Pi : x - y + 2z - 1 = 0.$$

Um vetor paralelo a r é o vetor $n = (1,\ -1,\ 2)$ que é ortogonal a Π. Como r passa pelo ponto $P = (-1,\ 3,\ 5)$ temos que uma equação na forma simétrica de r é

$$r : \frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-5}{2}.$$

3) Verificar se r é perpendicular a Π nos casos:

a)

$$\begin{aligned} r &: X = (3,\ 1,\ 4) + \lambda(1,\ -1,\ 1) \\ \Pi &: P = (1,\ 1,\ 1) + s(0,\ 1,\ 0) + t(9,\ 1,\ 1). \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} r &: X = (3,\ 1,\ 4) + \lambda(-1,\ 0,\ 1) \\ \Pi &: P = (1,\ 1,\ 1) + s(0,\ 2,\ 0) + t(1,\ 1,\ 1). \end{aligned}$$

a) Temos $w = (1,\ -1,\ 1)$ paralelo a r e

$$u \wedge v = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (1,\ 0,\ -1)$$

Como w e $u \wedge v$ não são paralelos temos que r e Π não são perpendiculares.

b) Temos $w = (-1, 0,\ 1)$ paralelo a r e

$$u \wedge v = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (2,\ 0,\ -2) = -2(-1,\ 0,\ 1) - 2w$$

Como w e $u \wedge v$ são paralelos temos que r e Π são perpendiculares.

2 - Perpendicularismo entre plano e plano

Temos o seguinte resultado de verificação imediata. Se n_1 é ortogonal ao plano Π_1 e n_2 é ortogonal ao plano Π_2 então

Π_1 e Π_2 são perpendiculares $\Leftrightarrow$ n_1 e n_2 são ortogonais $\Leftrightarrow$ $\langle n_1,\ n_2\rangle = 0$.

Exemplos

1) Verificar se são perpendiculares os planos

$$\begin{aligned} \Pi_1 &: X = (0,\ 1,\ 0) + s(1,\ 0,\ 1) + t(-1,\ -1,\ 1) \\ \Pi_2 &: 2x - 7y + 16z = 40 \end{aligned}$$

Temos que os vetores paralelos Π_1 são

$$u = (1,\ 0,\ 1) \text{ e } v = (-1,\ -1,\ 1)$$

que são l.i. Então,um vetor normal a Π_1 é

$$n_1 = u \wedge v = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = (1,\ -2,\ -1).$$

Um vetor normal a Π_2 é $n_2 = (2,\ -7,\ 16)$. Como

$$\langle n_1,\ n_2\rangle = \langle (1,\ -2,\ -1),\ (2,\ -7,\ 16)\rangle = 0$$

resulta que Π_1 é perpendicular a Π_2.

3.4 Posições relativas entre reta e plano e entre plano e plano

1 - Posições relativas entre reta e plano

Temos as seguintes posições relativas entre uma reta r e um plano Π :

a) r está contida em Π.

b) r é paralela a Π, isto é, $r \cap \Pi = \emptyset$.

c) r é transversal a Π, isto é, $r \cap \Pi$ consiste de um único ponto P.

Para estudar a posição relativa entre um plano devemos analisar $r \cap \Pi$. Fixemos um sistema de coordenadas $(O,\ e_1,\ e_2,\ e_3)$ e sejam em relação a ele

$$\begin{aligned} r &: X = (x_0,\ y_0,\ z_0) + \lambda(m,\ n,\ p), \\ \Pi &: ax + by + cz + d = 0. \end{aligned}$$

Vamos discutir o sistema de quatro equações lineares nas incógnitas $x,\ y,\ z,\ \lambda$

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda m \\ y = y_0 + \lambda n \\ y = z_0 + \lambda p \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases}$$

Substitua as equações 1, 2, 3 na equação 4. Temos

a) Se existir um único $\lambda = \lambda_0$ que resolve a equação 4 então a reta r é transversal ao plano Π e o ponto de interseção é obtido substituindo $\lambda = \lambda_0$ em

$$X = (x_0,\ y_0,\ z_0) + \lambda(m,\ n,\ p)$$

b) Se não existir λ que satisfaça a equação 4, temos $r \cap \Pi = \emptyset$ e daí r e Π são paralelos.

c) Se a equação 4 é satisfeita para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ então r está contida em Π.

Exemplos

1) Estude a posição relativa entre a reta

$$r : X = (1,\ 1,\ 1) + \lambda(3,\ 2,\ 1)$$

e o plano de equação

$$\Pi : 4x + 3y - z - 4 = 0.$$

Temos o sistema $\begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \\ 4x + 3y - z - 4 = 0 \end{cases}$

Substituindo as três primeiras equações na equação 4 obtemos

$$\begin{aligned} 4\,(1+3\lambda)+3\,(1+2\lambda)-(1+\lambda)-4 &= 0, \\ 17\lambda+2 &= 0, \\ \lambda &= -\frac{2}{17}. \end{aligned}$$

Então r é transversal a Π. O ponto de interseção é

$$X = (1,\ 1,\ 1) - \frac{2}{17}(3,\ 2,\ 1) = \left(\begin{array}{ccc} \frac{11}{17} & \frac{13}{17} & \frac{15}{17} \end{array}\right).$$

2) Idem para

$$r : X = (2,\ 2,\ 1) + \lambda(3,\ 3,\ 0)$$

e o plano de equação

$$\Pi : P = (1,\ 0,\ 1) + s(1,\ 1,\ 1) + t(0,\ 0,\ 3)$$

Estudemos a interseçao $r \cap \Pi$. Temos o sistema

$$\left\{\begin{array}{c} x = 2+3\lambda \\ y = 2+3\lambda \\ z = 1 \\ x = 1+s \\ y = s \\ z = 1+s+3t \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{c} 2+3\lambda = 1+s \\ 2+3\lambda = s \\ 1 = 1+s+3t \end{array}\right. \Leftrightarrow 1+s = s \Leftrightarrow 1 = 0$$

o sistema não tem solução. Logo, $r \cap \Pi = \emptyset$, isto é, r é paralela a Π.

3) Idem para

$$r : X = (1,\ 1,\ 0) + \lambda(1,\ -1,\ 1)$$

e o plano de equação

$$\Pi : x+y-z+2 = 0.$$

Temos o sistema

$$\left\{\begin{array}{c} x = 1+\lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = \lambda \\ x+y-z+2 = 0 \end{array}\right.$$

Substituindo as três primeiras equações na equação 4 obtemos

$$\begin{aligned}(1+\lambda)+(1-\lambda)-\lambda+2 &= 0,\\ 4-\lambda &= 0,\\ \lambda &= 4.\end{aligned}$$

Então r é transversal a Π. O ponto de interseção é

$$X=(1,\ 1,\ 0)+4(1,\ -1,\ 1)=(5,\ -3,\ 4).$$

2 - Posições relativas entre plano e plano

Temos as seguintes posições relativas entre dois planos Π_1 e Π_2 :

a) $\Pi_1=\Pi_2$,

b) Π_1 e Π_2 paralelos, isto é, $\Pi_1\cap\Pi_2=\emptyset$,

c) Π_1 e Π_2 transversais, ou seja concorreentes. Neste caso, $\Pi_1\cap\Pi_2$ é uma reta.

Fixado um sistema de coordenadas $(O,\ e_1,\ e_2,\ e_3)$ e sejam em relação a ele

$$\begin{aligned}\Pi_1 &: a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0\\ \Pi_2 &: a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0\end{aligned}$$

suas equações cartesianas. Temos os casos:

a) $\Pi_1=\Pi_2\Leftrightarrow$ Existe $\lambda\neq 0$ tal que

$$a_1=\lambda a_2,\ b_1=\lambda b_2,\ c_1=\lambda c_2 \text{ e } d_1=\lambda d_2.$$

De fato, temos

$$\Pi_1 : a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0.$$

Então,

$$\begin{aligned}a_1x+b_1y+c_1z+d_1 &= (\lambda a_2)\,x+(\lambda b_2)\,y+(\lambda c_2)\,z+\lambda d_2=\\ &= \lambda\,(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)\end{aligned}$$

Daí, sendo $\lambda\neq 0$,

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0\Leftrightarrow a_2x+b_2y+c_2z+d_2.$$

Portanto, $\Pi_1=\Pi_2$.

b) Π_1 e Π_2 paralelos $\Leftrightarrow$ Existe $\lambda\neq 0$ tal que

$$a_1=\lambda a_2,\ b_1=\lambda b_2,\ c_1=\lambda c_2 \text{ e } d_1\neq\lambda d_2.$$

De fato, podemos escrever

$$\begin{aligned}\Pi_1 &: a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0,\\ \lambda\,(a_2x+b_2y+c_2z)+d_1 &= 0\Leftrightarrow a_2x+b_2y+c_2z=-\frac{d_1}{\lambda}\end{aligned}$$

Como

$$\Pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z = -d_2$$

e $\frac{d_1}{\lambda} \neq d_2$, vemos que $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \emptyset$, isto é, os planos Π_1 e Π_2 são paralelos.

c) Se não existe $\lambda \neq 0$ tal que

$$a_1 = \lambda a_2,\ b_1 = \lambda b_2,\ c_1 = \lambda c_2.$$

Concluímos por exclusão que que os planos Π_1 e Π_2 são transversais, isto é, a interseção $\Pi_1 \cap \Pi_2$ é uma reta.

Exemplos

1) Estude a posição relativa entre os planos:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &: X = (1,\ 1,\ 0) + \lambda(1,\ 1,\ 1) + \mu(0,\ 1,\ 0) \\ \Pi_2 &: X = (0,\ 0,\ 0) + s(1,\ 0,\ 1) + t(-1,\ 0,\ 3) \end{aligned}$$

Primeiramente, encontramos equações cartesianas para Π_1 e Π_2. Temos que

$$u_1 = (1,\ 1,\ 1) \text{ e } v_1 = (0,\ 1,\ 0)$$

são vetores linearmente independentes paralelos a Π_1. Então

$$\begin{aligned} n_1 &= u_1 \wedge v_1 = (1,\ 1,\ 1) \wedge (0,\ 1,\ 0) \\ &= \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (-1,\ 0,\ 1) \end{aligned}$$

é vetor$\in$ normal a Π_1. Logo, a equação cartesiana de Π_1 é

$$-x + z + d = 0.$$

Como $(1,\ 1,\ 0) \in \Pi_1$, temos $-1 + 0 + d = 0$, $d = 1$. Logo,

$$\Pi_1 : -x + z + 1 = 0.$$

Temos que

$$u_2 = (1,\ 0,\ 1) \text{ e } v_2 = (-1,\ 0,\ 3)$$

são vetores linearmente independentes paralelos a Π_2. Então

$$\begin{aligned} n_2 &= u_2 \wedge v_2 = (1,\ 0,\ 1) \wedge (-1,\ 0,\ 3) \\ &= \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = (0,\ -4,\ 0) \end{aligned}$$

é vetor$\in$ normal a Π_1. Logo, a equação cartesiana de Π_1 é

$$-4y + d = 0.$$

Como $(0,\ 0,\ 0) \in \Pi_2$, temos $-4 \cdot 0 + d = 0$, $d = 0$. Logo,

$$\Pi_2 : -4y = 0.$$

Temos

$$\Pi_1 : -x + 0y + z + 1 = 0,\ \Pi_2 : 0x - 4y + 0z + 0 = 0.$$

Como não existe $\lambda \neq 0$ tal que

$$-1 = \lambda 0 = 0,\ 0 = \lambda 4,\ 1 = \lambda 0 = 0,$$

concluímos que Π_1 e Π_2 são transversais. A interseção de Π_1 e Π_2 é a reta

$$\begin{cases} -x + z + 1 = 0 \\ -4y = 0. \end{cases}$$

Fazendo $x = t$ parâmetro real obtemos

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = -1 + t \end{cases}$$

com $t \in \mathbb{R}$,são as equações paramétricas da reta interseção $\Pi_1 \cap \Pi_2$.

2) Estude a posição relativa entre os planos:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &: \ x + 10y - z = 4 \\ \Pi_2 &: \ 4x + 40y - 4z = 16 \end{aligned}$$

Como existe $\lambda \neq 0$ tal que

$$1 = 4\lambda,\ 10 = 40\lambda,\ -1 = -4\lambda,\ 4 = 16\lambda$$

a saber $\lambda = \frac{1}{4}$ concluímos que $\Pi_1 = \Pi_2$.

3) Estude a posição relativa entre os planos:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &: \ 6x - 4y + 2z = 8 \\ \Pi_2 &: \ 9x - 6y + 3z = 12 \end{aligned}$$

Como existe $\lambda \neq 0$ tal que

$$6 = 9\lambda,\ -4 = -6\lambda,\ 2 = 3\lambda,\ 8 = 12\lambda$$

a saber $\lambda = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ concluímos que $\Pi_1 = \Pi_2$.

4) Estude a posição relativa entre os planos:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &: \ 6x - 4y + 2z = 8 \\ \Pi_2 &: \ 9x - 6y + 2z = 5 \end{aligned}$$

Como existe $\lambda \neq 0$ tal que

$$6 = 9\lambda, \ -4 = -6\lambda, \ 2 = 3\lambda \text{ e } 8 \neq 5\lambda$$

a saber $\lambda = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ concluímos que Π_1 e Π_2 são paralelos.

4 Distâncias

4.1 Distância de ponto à reta

Definição. Dado um ponto P e uma reta r com $P \notin r$, a distância de P a r é a menor $d(P,\ A)$ com $A \in r$, isto é,

$$d(P,\ r) = \min \{d(P, A) : A \in r\}.$$

Pelo teorema de Pitágoras podemos ver que essa menor distância ocorre quando quando $A \in r$ é a projeção ortogonal de P sobre r. Entretanto o procedimento seguinte prescinde do conhecimento deste ponto.

Sejam A e B pontos quaisquer de r com $A \neq B$. A área de triângulo ABP, como sabemos, é

$$S = \frac{1}{2} \left\| \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{AB} \right\|.$$

Por outro lado

$$S = \frac{1}{2} \left\| \overrightarrow{AB} \right\| h$$

onde h é a altura relativa ao lado AB. Portanto, obtemos

$$d(P,\ r) = h = \frac{\left\| \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{AB} \right\|}{\left\| \overrightarrow{AB} \right\|}.$$

Como A e B são pontos arbitrários de r podemos ver $\overrightarrow{AB}$ como um vetor diretor v de r. Logo,

$$d(P,\ r) = \frac{\left\| \overrightarrow{AP} \wedge v \right\|}{\|v\|}.$$

Exemplo. Calcule a distância do ponto $P = (1,\ 1,\ -1)$ à reta

$$r : \left\{ \begin{array}{c} x - y = 1 \\ x + y - z = 0 \end{array} \right.$$

Escolhemos $z = t$ como parâmetro de sta reta. Então, somando as duas equações obtemos

$$2x - z = 1$$

e daí

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \\ y &= -1 + x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \end{aligned}$$

Logo, podemos escrever a reta r como

$$r : X = \left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ 0\right) + t\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1\right)$$

onde t varia em $\mathbb{R}$. Portanto, $A = \left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ 0\right) \in r$ e

$$v = \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1\right) = \frac{1}{2}(1,\ 1,\ 2)$$

é um vetor diretor de r. Então,

$$\overrightarrow{AP} = (1 - \frac{1}{2},\ 1 + \frac{1}{2},\ -1) = \left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ -1\right)$$

e

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} \wedge v &= \left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ -1\right) \wedge (1,\ 1,\ 2) \\ &= \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (4,\ -2,\ -1) \end{aligned}$$

Logo,

$$d(P,\ r) = \frac{\left\|\overrightarrow{AP} \wedge v\right\|}{\|v\|} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{7}\sqrt{3}}{\sqrt{2}\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{7}{2}}.$$

4.2 Distância de ponto a plano

Definição. Dado um ponto P e um plano Π com $P \notin \Pi$, a distância de P a r é a menor $d(P,\ A)$ com $A \in \Pi$, isto é,

$$d(P,\ \Pi) = \min\{d(P, A) : A \in \Pi\}.$$

Pelo teorema de Pitágoras podemos ver que essa menor distância ocorre quando quando $A \in \Pi$ é a projeção ortogonal de P sobre Π. Entretanto o procedimento seguinte prescinde do conhecimento deste ponto.

Escolha um ponto A de Π e projete $\overrightarrow{AP}$ sobre um vetor n normal a Π. O módulo dessa projeção é a $d(P,\ \Pi)$. Temos então

$$d(P,\ \Pi) = \left\| proj_n \overrightarrow{AP} \right\| = \left\| \frac{\left\langle \overrightarrow{AP},\ n \right\rangle}{\|n\|^2} n \right\| = \frac{\left| \left\langle \overrightarrow{AP},\ n \right\rangle \right|}{\|n\|}.$$

Vejamos essa fórmula em coordenadas. Sejam

$$\begin{aligned} P &= (x_0,\ y_0,\ z_0), \\ \Pi &: ax + by + cz + d = 0. \end{aligned}$$

Então, $n = (a,\ b,\ c)$ é normal a Π. Seja ainda $A = (x_1,\ y_1,\ z_1) \in \Pi$. Então,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= (x_0 - x_1,\ y_0 - y_1,\ z_0 - z_1), \\ \left\langle \overrightarrow{AP},\ n \right\rangle &= a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1) \\ &= ax_0 + by_0 + cz_0 - ax_1 - by_1 - cz_1 \\ &= ax_0 + by_0 + cz_0 + d. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} d(P,\ \Pi) &= \frac{\left| \left\langle \overrightarrow{AP},\ n \right\rangle \right|}{\|n\|} \\ &= \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \end{aligned}$$

Exemplo. Calcule a distância do ponto $P = (1,\ 2,\ -1)$ ao plano $\Pi : 3x - 4y - 5z + 1 = 0$.

Temos aplicando a fórmula

$$\begin{aligned} d(P,\ \Pi) &= \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ &= \frac{|3 \cdot 1 - 4 \cdot 2 - 5(-1) + 1|}{\sqrt{9 + 16 + 25}} = \frac{1}{\sqrt{50}} \end{aligned}$$

Exercício. Calcule a distância do ponto $P = (1,\ 3,\ 4)$ ao plano

$$\Pi_1 : X = (1,\ 0,\ 0) + \lambda(1,\ 0,\ 0) + \mu(-1,\ 0,\ 3)$$

4.3 Distância entre duas retas

Sejam r e s duas retas do espaço. A distância entre r e s é a menor distância entre um ponto qualquer de r e um ponto qualquer de s, isto é,

$$d(r,\ s) = \min\left\{d(A,\ B) : A \in r \text{ e } B \in s \in\right\}.$$

Temos os casos:

a) r e s paralelas

Temos $d(r,\ s)$ é igual a distância entre os pontos A e B onde uma perpendicular comum a r e s as intercepta.

b) r e s concorrentes

Então, $r \cap s = \{P\}$. Logo,

$$d(r,\ s) = \min\left\{d(A,\ B) : A \in r \text{ e } B \in s \in\right\} = d(P,\ P) = 0$$

c) r e s reversas

Sejam r e s retas reversas. Para determinar a $d(r,\ s)$ vamos encontrar uma perpendicular comum a r e s. Sejam u vetor diretor de r e v vetor diretor de s. Temos u e v linearmente independentes pois as retas são reversas. Escrevemos

$$\begin{aligned} r &: \ P = A + ru,\ r \in \mathbb{R}, \\ s &: \ X = B + sv,\ s \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

as equações paramétricas de r e s.

Seja o produto vetorial

$$w = u \wedge v$$

Qualquer reta paralela a w é perpendicular tanto a r como a s. Seja T uma dessas perpendiculares comum a r e s. Então, T é da forma

$$C + tw$$

onde C é um ponto do espaço. Queremos que T tenha origem em um ponto C pertencente a r, então C é da forma

$$C = A + tu,$$

e, além disso, que passe por um ponto da reta s, portanto da forma

$$B + sv.$$

Portanto, devemos tomar $w = u \wedge v$ e em seguida determinar os números reais $r,\ s$ e t tais que

$$A + ru + tw = B + sv$$

ou seja

$$ru - sv + tw = \overrightarrow{AB}$$

que é uma equação vetorial equivalente a um sistema de três equações numéricas. Seja $(r_0,\ s_0,\ t_0)$ a solução procurada. Então, a equação paramétrica de T é

$$T : A + r_0 u + tw$$

com t parâmetro real. A distância entre as retas r e s é o comprimento do segmento de reta que liga os pontos

$$A + r_0 u \text{ e } B + s_0 v.$$

Este comprimento é $\|t_0 w\|$ pois

$$A + r_0 u + t_0 w = B + s_0 v.$$

Exemplo. Achar a perpendicular comum às retas reversas $r = AA'$ e $s = BB'$ e determinar a distância entre essa retas conhecendo-se

$$\begin{aligned} A &= (2,\ -3,\ 1),\ A' = (4,\ 2,\ -3) \\ B &= (1,\ 4,\ 2), B' = (3,\ 5,\ 6) \end{aligned}$$

Temos

$$u = \overrightarrow{AA'} = (2,\ 5,\ -4)$$

é vetor diretor de r, e

$$v = \overrightarrow{BB'} = (2,\ 1,\ 4)$$

vetor diretor de s. Temos u e v l.i. As retas são reversas. Portanto,

$$\begin{aligned} w &= u \wedge v = (24,\ -16,\ -8) = 8(3,\ -2,\ -1) \\ \overrightarrow{AB} &= (-1,\ 7,\ 1) \end{aligned}$$

O sistema

$$ru - sv + tw = \overrightarrow{AB}$$

se escreve então

$$\begin{cases} 2r - 2s + 3t = -1 \\ 5r - s - 2t = 7 \\ -4r - 4s - t = 1 \end{cases}$$

cujas soluções são $r_0 = \frac{3}{4}, s_0 = -\frac{19}{28},\ t_0 = -\frac{9}{7}$. Portanto, a perpendicular comum a r e s é a reta que passa pelo ponto

$$\begin{aligned} C &= A + r_0 u = (2,\ -3,\ 1) + \frac{3}{4}(2,\ 5,\ -4) \\ &= \left(\ \tfrac{7}{2},\ \ \tfrac{3}{4},\ \ -2\ \right) \end{aligned}$$

e é paralela ao vetor $w = (3,\ -2,\ -1)$. A distância entre as retas r e s é

$$\|t_0 w\| = \|t_0 w\| = \frac{9}{7}\,\|w\| = \frac{9}{7}\sqrt{14}.$$

5 Cônicas e Quádricas

5.1 As cônicas

A elipse

Sejam F_1 e F_2 pontos do plano. Uma elipse de focos F_1 e F_2 é o conjunto dos pontos P do plano cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é igual a uma constante, que indicaremos com $2a$. Portanto, P pertencer a elipse equivale a

$$d(P,\ F_1) + d(P,\ F_2) = 2a.$$

Vejamos que a elipse tem uma equação bastante simples em um sistema de coordenadas convenientemente escolhido. Dada a elipse E, tomamos no plano um sistema de coordenadas ortogonais tal que $F_1 = (c,\ 0)$ e $F_2 = (-c,\ 0)$, $c \geq 0$. Observe que $c < a$ pois, no triângulo PF_1F_2 o lado $F_1F_2 = 2c$ é menor que a soma $PF_1 + PF_2 = 2a$. (Se fosse $c = a$ a elipse se reduziria ao segmento F_1F_2).

Assim, pela definição de elipse, o ponto $P = (x,\ y) \in E$ equivale a

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 2a \Leftrightarrow \\ \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \end{aligned}$$

Elevando ao quadrado, obtemos

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2$$

$\Leftrightarrow$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned}
-cx &= 2a^2 - 2a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + cx \\
&\Leftrightarrow a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx
\end{aligned}$$

Elevando ao quadrado novamente, temos

$$\begin{aligned}
a^2\left((x+c)^2 + y^2\right) &= \left(a^2 + cx\right)^2 = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 \\
a^2x^2 + 2ca^2x + c^2a^2 + a^2y^2 &= a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 \\
a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 &= a^4 - c^2a^2 = a^2\left(a^2 - c^2\right) \\
\left(a^2 - c^2\right)x^2 + a^2y^2 &= a^2\left(a^2 - c^2\right)
\end{aligned}$$

Chamando $b^2 = a^2 - c^2 > 0$ obtemos

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

e então dividindo por a^2b^2 resulta

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

que é a equação da elipse com a escolha de coordenadas acima, dita equação da elipse na forma reduzida.

Os pontos $A = (a,\ 0),\ A' = (-a,\ 0),\ B = (b,\ 0),\ B' = (-b, 0)$ pertencem a elipse, eles são chamados vértices. Os segmentos AA' e BB' chamam-se eixos, AA' o eixo maior e BB' o eixo menor. Observamos também que senndo $a^2 = b^2 + c^2$ temos $a \geq b$ sendo $d(A,\ A') = 2a,\ d(B,\ B') = 2b$.

Exemplos

1) A equação $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ representa uma elipse com $a = 5$ e $b = 4$. Para determinar os focos temos

$$\begin{aligned}
c^2 &= a^2 - b^2 = 25 - 16 = 9 \\
c &= 3 \text{ ou } c = -3
\end{aligned}$$

Logo, os focos são $F_1 = (3,\ 0)$ e $F_2 = (-3,\ 0)$.

2) A equação $5x^2 + 9y^2 = 16$ representa uma elipse. De fato, podemos escrevê-la na forma

$$\begin{aligned}
\frac{5}{16}x^2 + \frac{9}{16}y^2 &= 1,\ \frac{x^2}{\frac{16}{5}} + \frac{y^2}{\frac{16}{9}} = 1 \\
\frac{x^2}{\left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{4}{3}\right)^2} &= 1
\end{aligned}$$

que é a equação de uma elipse.

3) Escrever a equação da elipse de focos $F_1 = (4,\ 0)$ e $F_2 = (-4,\ 0)$ e eixo maior medindo 12. Temos $c = 4,\ a = 6$. Logo,

$$b^2 = a^2 - c^2 = 36 - 16 = 20$$

Logo, a equação é

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$$

A hipérbole

Sejam F_1 e F_2 pontos do plano e a um número real positivo. Chama-se hipérbole de focos F_1 e F_2 ao conjunto de pontos do plano cuja diferença das distâncias aos pontos F_1 e F_2 é, em valor absoluto, constante igual a $2a$. Portanto, P pertencer a hipérbole H equivale a

$$|d(P,\ F_2) - d(P,\ F_1)| = 2a.$$

A hipérbole H tem dois ramos, um formado pelos pontos para os quais a diferença $d(P,\ F_1) - d(P,\ F_2)$ é positiva igual a $2a$, e outro pelos pontos ondeem que esta diferença é negativa igual a $-2a$.

Vejamos que a hipérbole tem uma equação bem simples em um sistema de coordenadas convenientemente escolhido. Dada a elipse E, tomamos no plano um sistema de coordenadas ortogonais tal que $F_1 = (c,\ 0)$ e $F_2 = (-c,\ 0),\ c > 0$.

Se $d(P,\ F_2) - d(P,\ F_1) = 2a$ diremos que o ponto P está no ramo direito da hipérbole.

Se $d(P,\ F_2) - d(P,\ F_1) = -2a$ diremos que o ponto P está no ramo esquerdo da hipérbole. No sistema de coordenadas que escolhemos, se $P = (x,\ y)$ está no ramo direito de H então o ponto $P' = (-x,\ y)$ está no ramo esquerdo, e vice-versa. Portanto, os dois ramos são simétricos em relação ao eixo y.

Para determinar a equação do ramo direito da hipérbole H, escrevemos a equação $d(P,\ F_2) = d(P,\ F_1) + 2a$ em termos de coordenadas obtendo então

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 2a.$$

Elevando ambos os membros ao quadrado:

$$\begin{aligned}
(x+c)^2 + y^2 &= (x-c)^2 + y^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2 \\
&\Leftrightarrow\ x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2 \\
&\Leftrightarrow\ cx = -cx + 2a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 2a^2 \\
&\Leftrightarrow\ cx = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + a^2 \\
&\Leftrightarrow\ cx - a^2 = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}
\end{aligned}$$

Elevamos novamente ao quadrado

$$\begin{aligned}
c^2x^2 - 2cxa^2 + a^4 &= a^2(x-c)^2 + a^2y^2 = a^2\left(x^2 - 2cx + c^2\right) + a^2y^2 \\
&= a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 \\
&\Leftrightarrow c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4 = a^2(c^2 - a^2) \\
&\Leftrightarrow \left(c^2 - a^2\right)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).
\end{aligned}$$

Como no triângulo PF_1F_2, o lado F_1F_2 é maior que a diferença dos outros dois, temos $2c > 2a$, logo $c^2 > a^2$. Assim, chamamos $b^2 = c^2 - a^2$ com $b > 0$. Assim, a equação torna-se

$$\begin{aligned}
b^2x^2 - a^2y^2 &= a^2b^2 \\
&\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.
\end{aligned}$$

Se o ponto $P = (x,\ y)$ pertence ao ramo esquerdo da hipérbole então o ponto $P' = (-x,\ y)$ pertence ao ramo direito da hipérbole e daí

$$\frac{(-x)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

de modo que a equação também é válida para o ramo esquerdo da hipérbole.

A equação $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ é dita equação reduzida da hipérbole H. Assim, sendo mais formal,

$$H = \left\{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}$$

com as escolha de eixos acima e as constantes a e b dadas acima.

Observamos que os pontos $A = (a,\ 0)$ e $A' = (-a,\ 0)$ pertencem a hipérbole H. Estes pontos são chamados vértices da hipérbole. O segmento de reta AA' chama-se o eixo maior e o segmento BB' com $B = (0,\ b)$, $B' = (0,\ -b)$ chama-se o eixo menor. Os pontos $B = (0,\ b)$ e $B' = (0,\ -b)$ não pertence a hipérbole. As retas $y = \frac{b}{a}x$ e $y = -\frac{b}{a}x$ chamam-se assíntotas da hipérbole.

Observamos que, por exemplo, para o ramo direito temos

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

e daí

$$\begin{aligned}
\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{b}{a}x &= \frac{\left(\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{b}{a}x\right)\left(\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} + \frac{b}{a}x\right)}{\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} + \frac{b}{a}x} \\
&= \frac{\frac{b^2}{a^2}\left(x^2 - a^2\right) - \frac{b^2}{a^2}x^2}{\frac{b}{a}\left(\sqrt{x^2 - a^2} + x\right)} = \frac{-ba}{\sqrt{x^2 - a^2} + x}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{b}{a}x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-ba}{\sqrt{x^2-a^2}+x}=0.$$

Exemplos

1) Determinar os elementos da hipérbole de equação

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1.$$

Temos $a^2 = 9$ então $a = 3$, $b^2 = 4$ então $b = 2$. Como $c^2 = a^2 + b^2 = 13$ temos $c = \sqrt{13}$. Logo, os focos são $F_1 = (c,\ 0) = \left(\sqrt{13},\ 0\right)$ e $F_2 = (-c,\ 0) = \left(-\sqrt{13},\ 0\right)$, os vértices são $A = (a,\ 0) = (3,\ 0)$ e $A' = (-3,\ 0)$. Temos os pontos $B = (0,\ b) = (0,\ 2)$, $B' = (0,\ -2)$. As assíntotas são as retas $y = \frac{b}{a}x = \frac{2}{3}x$ e $y = -\frac{2}{3}x$.

2) A equação $3x^2 - 5x^2 = 7$ pode ser expressa na formas equivalentes

$$\frac{3x^2}{7}-\frac{5x^2}{7}=1,\ \frac{x^2}{\frac{7}{3}}-\frac{x^2}{\frac{7}{5}}=1,\ \frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{7}{3}}\right)^2}-\frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{7}{5}}\right)^2}=1$$

logo representa uma hipérbole com eixos AA', BB' determinados por $A = \left(\sqrt{\frac{7}{3}},\ 0\right)$, $A' = \left(-\sqrt{\frac{7}{3}},\ 0\right)$com $B = (0,\ \sqrt{\frac{7}{5}})$, $B' = (0,\ -\sqrt{\frac{7}{5}})$.

A parábola

A distância $d(P, d)$ de um ponto P a uma reta d é por definição comprimento do segmento perpendicular baixado do ponto sobre a reta.

Seja d uma reta e F um ponto fora dela. No plano determinado d e F, chama-se parábola de foco F e diretriz d ao conjunto dos pontos que equidistam de d e F, isto é, P pertence a parábola se $d(P,\ d) = d(P,\ F)$

A reta perpendicular à diretriz baixada a partir do foco chama-se eixo da parábola. Seja F_0 a interseção do eixo com a diretriz.

Seja p o comprimento do segmento FF_0 e A o ponto médio deste segmento. A distância de A a reta d é $\frac{p}{2}$, o mesmo que o comprimento de AF. Logo, A pertence a parábola e chama-se o seu vértice. Qualquer outro ponto da parábola está a uma distância de d maior que $\frac{p}{2}$. Logo, o vértice é o ponto da parábola mais próximo de d.

De fato, seja P um ponto da parábola distinto de A e seja P_0 a interseção da reta perpendicular a d baixada a partir de P com a reta d. Como o segmento FP_0 é maior que a perpendicular FF_0, temos

$$\begin{aligned} p &< FP_0 < FP + PP_0 = 2PP_0 = 2d(P,\ d) \\ &\Rightarrow d(P,\ d) > \frac{p}{2}. \end{aligned}$$

Vamos determinar a equação da parábola com $F,\ d$ e p dados acima. Tomemos um sistema de eixos ortogonais cuja origem é o vertice da parábola e cujo eixo Oy é o eixo da parábola. Neste sistema temos $F = (0,\ \frac{p}{2})$ e a equação da diretriz é $y = -\frac{p}{2}$. Se $P = (x,\ y)$ pertence à parábola então $y \geq 0$, na verdade $y > 0$ salvo quando $P = (0,\ 0)$. Temos então que a distância de P à diretriz d é $y + \frac{p}{2}$, e a distância de P ao foco $F = (0,\ \frac{p}{2})$ é $\sqrt{x^2 - \left(y - \frac{p}{2}\right)^2}$ e como P peretence a parábola

$$\begin{aligned} d(P,\ d) &= d(P,\ F) \\ y + \frac{p}{2} &= \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} \end{aligned}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado temos

$$\begin{aligned} \left(y + \frac{p}{2}\right)^2 &= x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow y^2 + py + \frac{p^2}{4} = x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4} \\ &\Leftrightarrow 2py = x^2 \Leftrightarrow y = \frac{x^2}{2p}. \end{aligned}$$

Exemplos

1) A equação $y = x^2$ define uma parábola com $2p = 1$ e daí $p = \frac{1}{2}$. Logo, o foco é $F = (0,\ \frac{1}{4})$, e a reta diretriz tem equação é $y = -\frac{p}{2} = -\frac{1}{4}$.

2) O gráfico da função quadrática $y = f(x) = x^2 + bx + c$ é uma parábola. De

fato,

$$
\begin{aligned}
y &= x^2+bx+c=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+c-\frac{b^2}{4}=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\frac{b^2-4c}{4}\\
\Leftrightarrow &\ y+\frac{b^2-4c}{4}=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2.
\end{aligned}
$$

Agora, fazemos a mudança de coordenadas dada por $Y=y+\frac{b^2-4c}{4}$ e $X=x+\frac{b}{2}$. Temos então, no novo sistema de coordenadas,

$$Y=X^2$$

que é a equação de uma parábola.

5.2 As quádricas

1) Elipsóide

Consideremos a superfície de $\mathbb{R}^3$ definida pela equação

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

onde $a>0,\ b>0$ e $c>0$. Essa superfície é chamada elipsóide.

Observamos que a interseção da elipsóide com o plano Oxy, isto é, com o plano $z=0$ é a elipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

A interseção da elipsóide com o plano Oxz, isto é, com o plano $y=0$ é a elipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

e com o plano Oyz, isto é, com o plano $x=0$ é a elipse

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Temos também que a interseção da elipsóide com os planos horizontais $z=d$ são dadas por

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{d^2}{c^2}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{d^2}{c^2}=\frac{c^2-d^2}{c^2}.$$

Portanto, são elipses se $c>|d|$.

Exemplos

1) Considere a elipsóide
$$x^2 + y^2 + 4z^2 = 1.$$
Podemos escrevê-la na forma
$$\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{1^2} + \frac{z^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1.$$
Então, temos $a = 1,\ b = 1$ e $c = \frac{1}{2}$. A interseção dessa elipsóide com o plano Oxy é o círculo
$$x^2 + y^2 = 1,$$
com o plano Oxz é a elipse
$$\frac{x^2}{1^2} + \frac{z^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1,$$
e com o plano Oyz é a elipse
$$\frac{y^2}{1^2} + \frac{z^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1.$$
As interseções dessa elipsóide com os planos horizontais $z = d$ são os círculos
$$\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1 - \frac{d^2}{\frac{1}{4}} = 1 - 4d^2$$
se $1 - 4d^2 > 0$,isto é, se $-\frac{1}{2} < d < \frac{1}{2}$.

2) Considere a elipsóide
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$
Temos que este elipsóide é a esfera de centro $(0,\ 0,\ 0)$ e raio 1.

2) Hiperbolóide de uma folha

É a superfície de $\mathbb{R}^3$ definida pela equação
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$
onde $a > 0,\ b > 0$ e $c > 0$.

Observamos que a interseção do hipérbolóide de uma folha com o plano Oxy, isto é, com o plano $z = 0$ é a elipse
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

A interseção do hiperbolóide de uma folha com o plano Oxz, isto é, com o plano $y = 0$ é a hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

e com o plano Oyz, isto é, com o plano $x = 0$ é a hipérbole

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Temos também que a interseção do hiperbolóide de uma folha com os planos horizontais $z = d$ são dadas por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{d^2}{c^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{d^2}{c^2} = \frac{c^2 + d^2}{c^2}.$$

Portanto, são elipses.

Exemplo. Considere o hiperbolóide de uma folha

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - z^2 = 1.$$

Podemos escrevê-la na forma

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{1} = 1$$

Então, temos $a = 5,\ b = 3$ e $c = 1$. A interseção desse hiperbolóide de uma folha plano Oxy é a elipse

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

com o plano Oxz é a hipérbole

$$\frac{x^2}{25} - \frac{z^2}{1} = 1,$$

e com o plano Oyz é a hipérbole

$$\frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{1} = 1.$$

As interseções desse hiperbolóde de uma folha com os planos horizontais $z = d$ são as elipses

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - \frac{d^2}{1} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 + d^2.$$

3) Hiperbolóide de duas folhas

É a superfície de $\mathbb{R}^3$ definida pela equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

onde $a > 0,\ b > 0$ e $c > 0$.

Observe que podemos escrever a equação do hiperbolóide de duas folhas na forma

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Escrevendo a equação do hiperbolóide de duas folhas na forma

$$\frac{z^2}{c^2} = 1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2},$$

vemos que

$$\frac{z^2}{c^2} > 1$$

e daí

$$|z| > c$$

e portanto, o hiperbolóide de duas folhas não possui pontos entre os planos horizontais $z = -c$ e $z = c$.

A interseção do hiperbolóide de duas folhas com o plano Oxz, isto é, com o plano $y = 0$ é a hipérbole

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

e com o plano Oyz, isto é, com o plano $x = 0$ é a hipérbole

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Temos também que a interseção do hiperbolóide de duas folhas com os planos horizontais $z = d$ são dadas por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{d^2}{c^2} = -1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 + \frac{d^2}{c^2} = \frac{d^2 - c^2}{c^2}.$$

Portanto, são elipses se $|d| > c$.

Exemplo. Considere o hiperbolóide de duas folhas

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} - z^2 = -1.$$

Podemos escrevê-la na forma

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{1} = -1$$

Então, temos $a = 4,\ b = 2$ e $c = 1$. A interseção desse hiperbolóide de duas folhas com o plano Oxz é a hipérbole

$$\frac{x^2}{16} - \frac{z^2}{1} = -1 \Leftrightarrow \frac{z^2}{1} - \frac{x^2}{16} = 1.$$

e com o plano Oyz é a hipérbole

$$\frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{1} = -1 \Leftrightarrow \frac{z^2}{1} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

As interseções desse hiperbolóde de duas folhas com os planos horizontais $z = d$ são as elipses

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} - \frac{d^2}{1} = -1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = -1 + d^2$$

se $|d| > 1$.

4) Parabolóide eliptico

É a superfície de $\mathbb{R}^3$ definida pela equação

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

onde $a > 0,\ b > 0$.

A interseção do parabolóide eliptico com os planos horizontais $z = d$ são dadas por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = d$$

Portanto, são elipses se $d > 0$, apenas o ponto $(0,\ 0)$ se $d = 0$ e o vazio se $d < 0$.

As interseções do parabolóide eliptico com os planos $x = c$ são dadas por

$$z = \frac{c^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

e portanto são parábolas.

As interseções do parabolóide eliptico com os planos $y = c$ são dadas por

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2}$$

e portanto são parábolas.

Exemplo. Considere o parabolóide eliptico

$$z = x^2 + y^2$$

Então, temos $a = 1,\ b = 1$.

As interseções desse parabolóide eliptico com os planos horizontais $z = d$ são os círculos

$$x^2 + y^2 = d$$

se $d > 0$, o ponto $(0,\ 0)$ se $d = 0$ e o vazio se $d < 0$.

As interseções desse parabolóide eliptico com os planos $x = c$ são dadas por

$$z = c^2 + y^2$$

e portanto são parábolas.

As interseções do parabolóide eliptico com os planos $y = c$ são dadas por

$$z = x^2 + c^2$$

e portanto são parábolas.