SMA0355 - Aula 3 - 29.03.2022
Integrais duplas sobre regiões gerais

Objetivos de aprendizado:

1. Reconhecer quando uma função de duas variáveis é integrável sobre uma região geral.
2. Avaliar uma integral dupla calculando uma integral iterada sobre uma região limitada por duas linhas verticais e duas funções de x, ou duas linhas horizontais e duas funções de y.
3. Simplificar o cálculo de uma integral iterada alterando a ordem de integração.
4. Usar integrais duplas para calcular o volume de uma região entre duas superfícies ou a área de uma região plana.

Nesta aula, consideraremos integrais duplas de funções definidas sobre uma região limitada geral D no plano. Um exemplo de uma região limitada geral D no plano é mostrado na Figura 1. Como D é limitado no plano, deve existir uma região retangular R no mesmo plano que contém a região D, ou seja, existe uma região retangular R tal que D é um subconjunto de R ($D \subset R$).

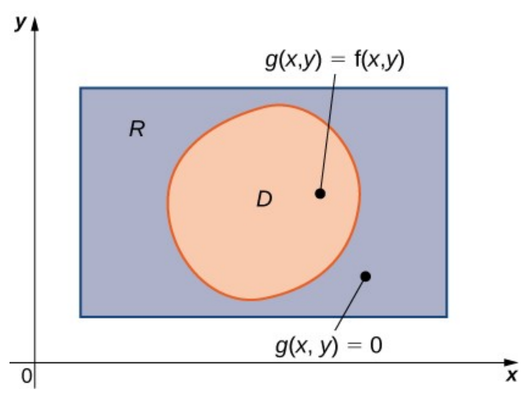

Figura 1: .

Suponha que $f : D \to \mathbb{R}$ seja uma função definida em uma região limitada geral $D \subset \mathbb{R}^2$ como na Figura 1. Para desenvolver integrais duplas de f sobre D, estendemos a definição da função para incluir todos os pontos na região retangular R e então usamos os conceitos e ferramentas das Aulas 1 e 2. Mas como estendemos a definição de f para incluir todos os pontos de R? Fazemos isso definindo uma nova função $g(x,y)$ em R da seguinte forma:

$$g(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{se } (x,y) \in D \\ 0 & \text{se } (x,y) \in R \text{ mas } (x,y) \notin D \end{cases}$$

Definição. Se g for integrável em R, então definimos a **integral dupla de f em D** por

$$\iint_D f(x,y)\, dA = \iint_R g(x,y)\, dA.$$

Essa definição faz sentido porque R é um retângulo e, portanto, $\iint_R g(x,y)\, dA$ já foi definida na Aula 1. O procedimento usado é razoável, pois os valores de $g(x,y)$ são 0 quando (x,y) está fora de D e dessa forma não contribuem para o valor da integral. Isso significa que não importa qual o retângulo R tomado, desde que contenha D.

Observe que podemos ter algumas dificuldades técnicas se a fronteira de D for complicada. Como todos os resultados desenvolvidos em Integrais Duplas sobre Regiões Retangulares usaram uma função integrável $f(x,y)$, devemos ter cuidado com $g(x,y)$ e verificar que $g(x,y)$ é uma função integrável sobre a região retangular R. Assim, admitimos que a fronteira de D é uma curva fechada simples, suave e contínua por partes. Por enquanto, vamos nos concentrar nas descrições das regiões ao invés da função e estender nossa teoria apropriadamente para integração. Consideramos dois tipos de regiões planas limitadas.

Definição.

Uma região D no plano xy é do **Tipo I** se estiver entre duas retas verticais e os gráficos de duas funções contínuas $g_1(x)$ e $g_2(x)$. Isto é

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\right\}$$

Uma região D no plano xy é do **Tipo II** se estiver entre duas retas horizontais e os gráficos de duas funções contínuas $h_1(y)$ e $h_2(y)$. Isto é

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d,\ h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\right\}$$

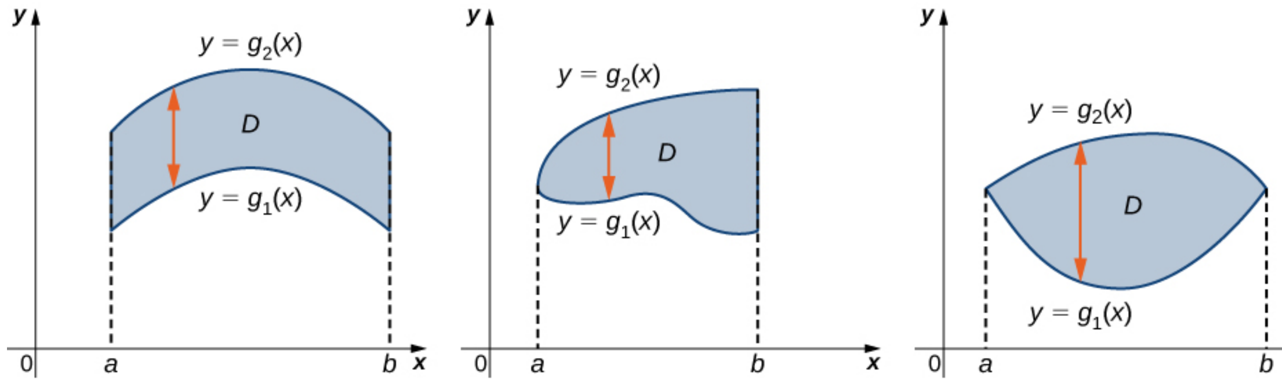

Figura 2: Uma região do Tipo I situa-se entre duas linhas verticais e os gráficos de duas funções de x.

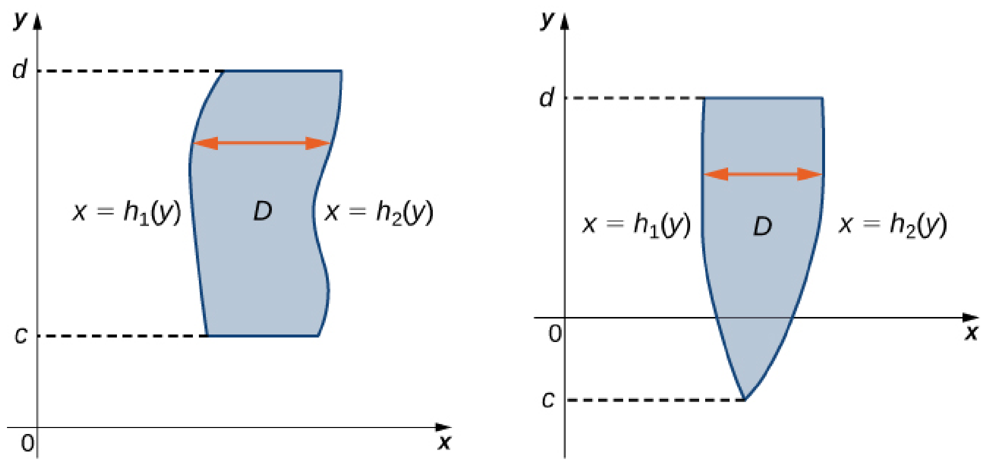

Figura 3: Uma região do Tipo II situa-se entre duas linhas horizontais e os gráficos de duas funções de y.

Exemplo 1. Considere a região no primeiro quadrante entre as funções $y = \sqrt{x}$ e $y = x^3$ (Figura 4). Descreva a região primeiro como Tipo I e depois como Tipo II.

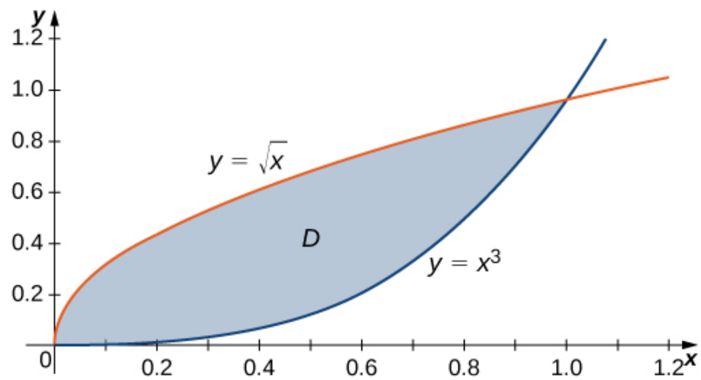

Figura 4: Região D pode ser descrita comoTipo I ou como Tipo II.

Resolução.
Ao descrever uma região como Tipo I, precisamos identificar a função que está acima da região e a função que está abaixo da região. Aqui, a região D é limitada acima por $y = \sqrt{x}$ e abaixo por $y = x^3$ no intervalo para $x \in [0, 1]$. Assim, como Tipo I, D é descrito como o conjunto

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ x^3 \leq y \leq \sqrt{x}\}.$$

No entanto, ao descrever uma região como Tipo II, precisamos identificar a função que fica à esquerda da região e a função que fica à direita da região. Aqui, a região D é limitada à esquerda por $x = y^2$ e à direita por $x = \sqrt[3]{y}$ no intervalo para y em $[0, 1]$. Assim, como Tipo II, D é descrito como o conjunto

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1,\ y^2 \leq x \leq \sqrt[3]{y}\}.$$

Se a região D é limitada por curvas suaves em um plano e podemos descrevê-la como Tipo I ou Tipo II ou uma mistura de ambos, então podemos usar o seguinte teorema sem precisar encontrar um retângulo R contendo a região.

Teorema de Fubini (forma forte).

Se f é contínua em uma Região D do Tipo I, então

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_D f(x,y)dydx = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\right]\,dx.$$

Se f é contínua em uma Região D do Tipo II, então

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\right]\,dy.$$

A integral em cada uma dessas expressões é uma integral iterada, semelhante às que vimos antes. Observe que, na integral interna da primeira expressão, integramos $f(x,y)$ com x sendo mantido constante e os limites de integração sendo $g_1(x)$ e $g_2(x)$. Na integral interna da segunda expressão, integramos $f(x,y)$ com y sendo mantido constante e os limites de integração são $h_1(y)$ e $h_2(y)$.

Exemplo 2. Calcule a integral $\iint_D x^2 e^{xy}\,dA$ onde D é mostrado na Figura 5.

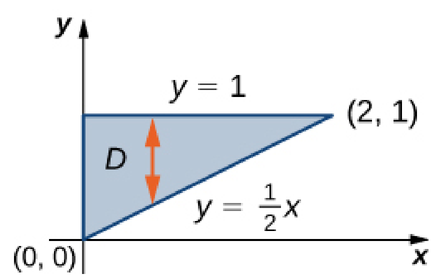

Figura 5: Região D pode ser descrita como Tipo I.

Resolução. Primeiro escreva a região como Tipo I.

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2,\ \frac{x}{2} \le y \le 1\}.$$

Então,

$$\begin{aligned}
\iint_D x^2 e^{xy}\, dA &= \int_0^2 \int_{x/2}^1 x^2 e^{xy} dy dx \\
&= \int_0^2 \left[\int_{x/2}^1 x^2 e^{xy} dy \right] dx \\
&= \int_0^2 [x e^{xy}] \,|_{y=x/2}^{y=1}\, dx \\
&= \int_0^2 \left[x e^x - x e^{x^2/2} \right] dx \\
&= \left[x e^x - e^x - e^{x^2/2} \right] |_{x=0}^{x=2} \\
&= 2
\end{aligned}$$

Neste exemplo, poderíamos ter visto a região como Tipo II (Figura 6)

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq x \leq 2y\}.$$

e a integral então seria

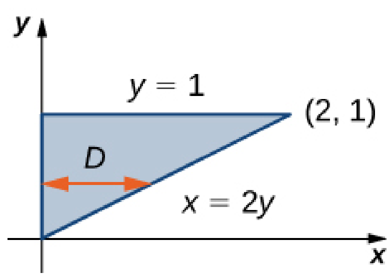

Figura 6: Região D pode ser descrita como Tipo II.

$$\iint_D x^2 e^{xy}\, dA = \int_0^1 \int_0^{2y} x^2 e^{xy} dx dy.$$

No entanto, se integrarmos primeiro em relação a x, essa integral é demorada para calcular porque temos que usar integração por partes duas vezes.

Exemplo 3. Calcule a integral $\iint_D (3x^2 + y^2)\, dA$ onde D é a região limitada pela reta $y = x - 3$ e pela parábola $x = y^2 - 3$.

Resolução. A região D é mostrada na Figura 7. A descrição de D como região do Tipo I é mais complicada, porque o limite inferior é constituído de duas partes, o que levaria a escrever D como a união de duas regiões do Tipo I. Já como região do Tipo II,

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq y \leq 3,\ y^2 - 3 \leq x \leq y + 3\}.$$

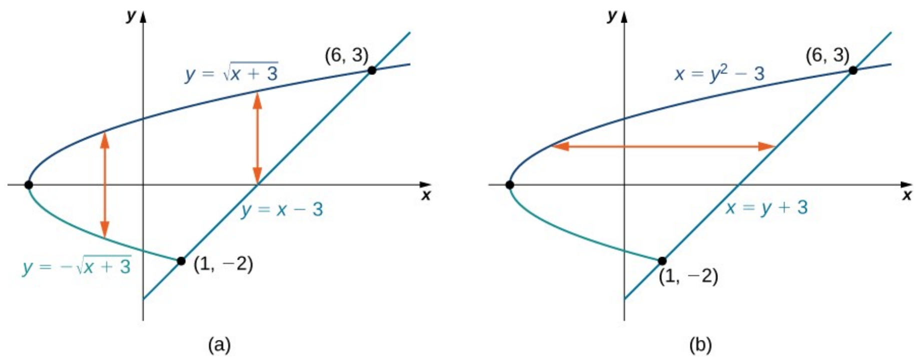

Figura 7: A região D neste exemplo pode ser (a) União de regiões Tipo I ou (b) Tipo II

$$
\begin{aligned}
\iint_D (3x^2+y^2)\,dA &= \int_{-2}^{3}\int_{y^2-3}^{y+3}(3x^2+y^2)dxdy \\
&= \int_{-2}^{3}(3x^2+y^2)\Big|_{x=y^2-3}^{x=y+3}dy \\
&= \int_{-2}^{3}\left((y+3)^3+(y+3)y^2-(y^2-3)^3-(y^2-3)y^2\right)\,dy \\
&= \int_{-2}^{3}\left(-y^6+8y^4+2y^3-12y^2+27y+54\right)\,dy \\
&= \left[-\frac{y^7}{7}+\frac{8y^5}{5}+\frac{y^4}{2}-4y^3+\frac{27y^2}{2}+54y\right]\Big|_{-2}^{3} \\
&= \frac{2375}{7}.
\end{aligned}
$$

Exemplo 4. Determine o volume do tetraedro T limitado pelos planos $x+2y+z=2$, $x=2y$, $x=0$ e $z=0$.

Resolução. Para a resolução de uma questão como esta, é prudente desenhar o sólido tridimensional e a região plana D sobre a qual o sólido está. A Figura 8(a) mostra o tetraedro limitado pelos planos $x+2y+z=2$, $x=2y$, $x=0$ e $z=0$. Como o plano $x+2y+z=2$ intercepta o plano xy (cuja equação é $z=0$) na reta $x+2y=2$, vemos que T está acima da região triangular D no plano xy limitado pelas retas $x=2y$, $x+2y=2$ e $x=0$ (Veja a Figura 8(b).)

O plano $x+2y+z=2$ pode ser escrito como $z=2-x-2y$, de modo que o volume pedido está sob o gráfico da função $z=2-x-2y$ e acima de

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 1,\ x/2\le y\le 1-x/2\}.$$

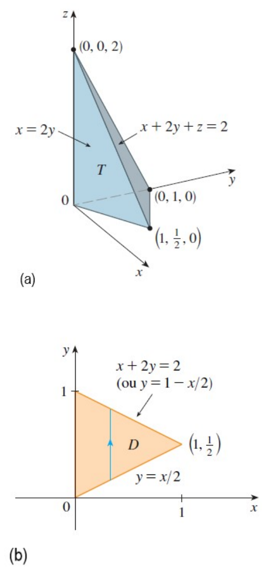

Figura 8:

Potanto,

$$
\begin{aligned}
V = \iint_D (2 - x - 2y)\, dA &= \int_0^1 \int_{x/2}^{1-x/2} (2 - x - 2y)\, dy\, dx \\
&= \int_0^1 \left[2y - xy - y^2\right] \Big|_{y=x/2}^{y=1-x/2} dx \\
&= \int_0^1 \left[2 - x - x(1 - x/2) - (1 - x/2)^2 - x + x^2/2 + x^2/4\right] dx \\
&= \int_0^1 \left[x^2 - 2x + 1\right] dx = \left[x^3/3 - x^2 + x\right] \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

Exemplo 5. Calcule a integral iterada $\int_0^1 \int_x^1 \sin(y^2)\, dy\, dx$.

Resolução. Se tentarmos calcular essa integral na forma pela qual ela se apresenta, teremos de resolver o problema de calcular $\int \sin(y^2)\, dy$. Mas isso é impossível de fazer em termos finitos, uma vez que $\int \sin(y^2)\, dy$ não se escreve como uma combinação linear de funções elementares. Para superar esta dificuldade mudamos a ordem de integração, o que pode ser feito escrevendo-se inicialmente a integral iterada dada como uma integral dupla e aplicando o Teorema de Fubini.

$$
\int_0^1 \int_x^1 \sin(y^2)\, dy\, dx = \iint_D \sin(y^2)\, dA
$$

onde
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ x \leq y \leq 1\}.$$
Vemos que um modo alternativo de escrever D é
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq x \leq y\}.$$
Usando o Teorema de Fubini, obtemos
$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_x^1 \sin(y^2)\,dy\,dx &= \iint_D \sin(y^2)\,dA \\ &= \int_0^1 \int_0^y \sin(y^2)\,dx\,dy = \int_0^1 x\sin(y^2)\big|_{x=0}^{x=y}\,dy \\ &= \int_0^1 y\sin(y^2)\,dy = -\frac{1}{2}\cos(y^2)\big|_0^1 = \frac{1}{2}(1-\cos 1).\end{aligned}$$

O próximo teorema é útil para calcular integrais duplas sobre regiões D no plano que não sejam nem do Tipo I nem do Tipo II.

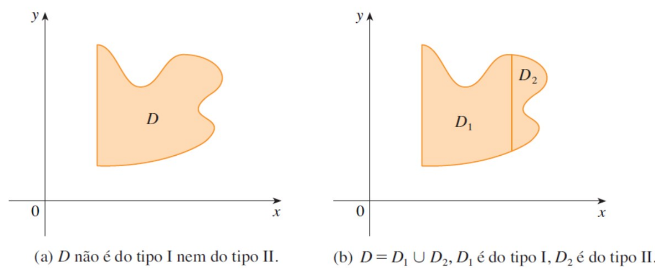

Figura 9:

Teorema.
Se $f : D \to \mathbb{R}$ é integrável e $D = D_1 \cup D_2$, onde D_1 e D_2 não se sobrepõem exceto eventualmente nas fronteiras, as quais são curvas fechadas simples, suaves e contínuas por partes, então
$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_{D_1} f(x,y)\,dA + \iint_{D_2} f(x,y)\,dA.$$

Exemplo 6. Expresse a região D mostrada na Figura 10 como uma união de regiões do Tipo I ou Tipo II e calcule a integral
$$\iint_D (2x+5y)\,dA.$$

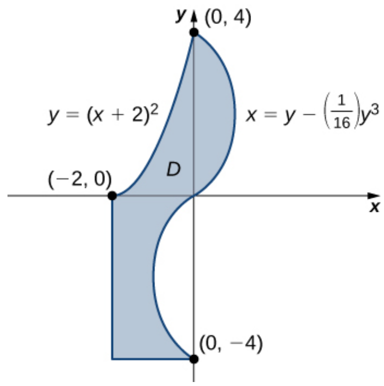

Figura 10: Esta região pode ser decomposta em uma união de três regiões do Tipo I ou Tipo II.

Resolução. A região $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$, onde

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 0,\ 0 \leq y \leq (x+2)^2\}, \\ D_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 4,\ 0 \leq x \leq y - \frac{1}{16}y^3\}, \\ D_3 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -4 \leq y \leq 0,\ -2 \leq x \leq y - \frac{1}{16}y^3\}. \end{aligned}$$

Essas regiões são ilustradas mais claramente na Figura 11. Portanto,

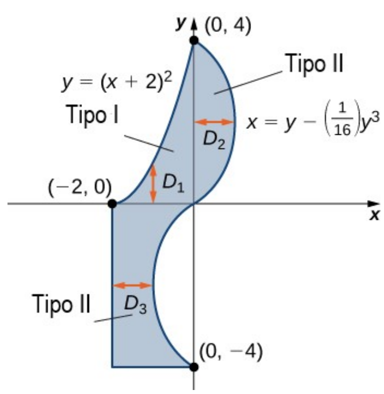

Figura 11: Esta região pode ser decomposta em uma união de três regiões do Tipo I ou Tipo II.

$$
\begin{aligned}
\iint_D (2x+5y)\,dA &= \iint_{D_1} (2x+5y)\,dA + \iint_{D_2} (2x+5y)\,dA + \iint_{D_3} (2x+5y)\,dA \\
&= \int_{-2}^{0}\int_{0}^{(x+2)^2} (2x+5y)\,dy\,dx + \int_{0}^{4}\int_{0}^{y-\frac{1}{16}y^3} (2x+5y)\,dx\,dy + \int_{-4}^{0}\int_{-2}^{y-\frac{1}{16}y^3} (2x+5y)\,dx\,dy \\
&= \frac{1304}{105} \text{ (Verifique.)}
\end{aligned}
$$

Exemplo 7. Seja a função constante $f(x,y)=1$ sobre uma região D. Então a área $A(D)$ de D é

$$A(D) = \iint_D 1\,dA.$$

De fato, um cilindro sólido cuja base é D e altura 1 tem volume $A(D)\cdot 1 = A(D)$, mas sabemos que também podemos escrever seu volume como $\iint_D 1\,d$, portanto, $A(D) = \iint_D 1\,dA$.

Exemplo 8. Encontre a área da região D limitada abaixo pela curva $y=x^2$ e acima pela reta $y=2x$ no primeiro quadrante (Figura 12).

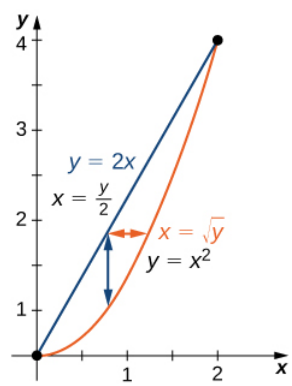

Figura 12:

Resolução. Basta integrar a função constante$f(x,y)=1$ sobre a região. Assim, a área A da região é $\int_0^2\int_{x^2}^{2x} dy\,dx$ ou $\int_0^4\int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} dx\,dy$.

$$A(D) = \iint_D 1dA = \int_0^2\int_{x^2}^{2x} dy = \int_0^2 (2x-x^2)\,dx = \frac{4}{3}.$$

Finalmente, usando a propriedade (iii) de integrais duplas (veja Aula 1), temos.

Teorema.
Se $f : D \to \mathbb{R}$ é integrável e $m \leq f(x,y) \leq M$ para todo $(x,y) \in D$, então

$$mA(D) \leq \iint_D f(x,y)\, dA \leq MA(D).$$

Exemplo 9. Estime a integral $\iint_D e^{\sin x \cos y}\, dA$, onde D é um disco de raio 2.

Resolução. Como $-1 \leq \sin x \cos y \leq 1$, temos

$$e^{-1} \leq e^{\sin x \cos y} \leq e^1 = e, \quad \forall\, (x,y) \in D.$$

Usando o teorema anterior para $m = e^{-1}$, $M = e$, $A(D) = 4\pi$, obtemos

$$\frac{4\pi}{e} \leq \iint_D e^{\sin x \cos y}\, dA \leq 4\pi e.$$