



MINISTERIET FOR
BØRN, UNDERVISNING
OG LIGESTILLING
STYRELSEN FOR
UNDERVISNING OG KVALITET

Matematik A

Højere teknisk eksamen

Onsdag den 14. december 2016
kl. 9.00 - 14.00

Matematik A

2016

Prøvens varighed er 5 timer.

Alle hjælpemidler er tilladte.

Opgavebesvarelsen skal afleveres renskrevet.

Notatpapir (kladdepapir) sendes ikke til bedømmelse.

Alt materiale, der afleveres til bedømmelse, skal påføres navn.

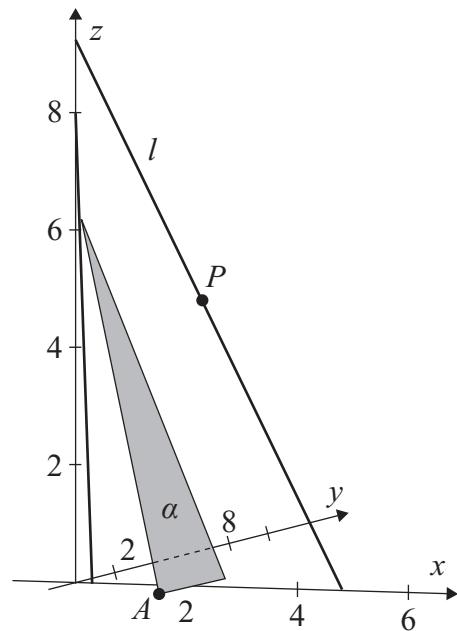
I bedømmelsen vil der blive lagt vægt på, om tankegangen klart fremgår, herunder om der i besvarelsen af den enkelte opgave er:

- Anvendt matematiske teorier og metoder til løsning
- En forbindende tekst, der giver en klar begrundelse for valget af den anvendte løsningsmetode samt en afrunding af hvert spørgsmål med præcise konklusioner, præsenteret i et klart sprog og med brug af korrekt matematisk notation
- Dokumentation af beregninger ved brug af it-værktøjer og/eller mellemregninger samt forklarende tekst
- Benyttet figurer og illustrationer med tydelig sammenhæng mellem tekst og figurer.

Billedmateriale uden kildeangivelse tilhører opgavekommissionen.

Opgave 1

Billedet viser en gammeldags kran på Flensborg havn. På figur 1 er en del af kranen indlagt i et koordinatsystem. Alle mål er i meter.



Figur 1

Planen α vist på figur 1 har ligningen

$$31,62x + 10,2z = 66,402$$

- a) Vis, at punktet $A(2,1; -1,7; 0)$ ligger i planen α .
- b) Bestem den spidse vinkel mellem α og xy -planen.

Linjen l beskriver en af stolperne på billedet, og er givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9,3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4,8 \\ 0 \\ -9,3 \end{pmatrix}$$

Punktet P , vist på figur 1, ligger på linjen l og svarer til det sted, hvor stolpen er understøttet af to afstivere.

P befinder sig i højden $z = 4,9$.

- c) Vis, at punktet P har koordinaterne $P(2,27; 0; 4,9)$.
- d) Bestem afstanden fra P til α .

Opgave 2

En patient får en indsprøjting med et smertestillende præparat. Efterfølgende måles koncentrationen af præparatet i blodet. Koncentrationen aftager eksponentielt med tiden. I tabel 1 ses sammenhørende værdier af tiden og koncentrationen.

Tiden måles i timer og koncentrationen i mg/L.



<https://www.flickr.com/photos/blakespot/4919795171>

Tiden (timer)	0,5	1	2	3	4	5
Koncentration (mg/L)	2,5	2,1	1,5	1,0	0,74	0,50

Tabel 1

- a) Indtegn data i et passende koordinatsystem.
- b) Bestem en forskrift for funktionen c , der beskriver koncentrationen som funktion af tiden.
- c) Bestem halveringstiden for c .
- Når koncentrationen er faldet til 0,3 mg/L vil præparatet ikke længere virke smertestillende.
- d) Bestem det tidspunkt efter indsprøjtningen, hvor præparatet ikke længere virker smertestillende.

Opgave 3

En vektorfunktion er givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 + t - 2 \\ \sqrt{t^2 + 1} - 2 \end{pmatrix} \quad \text{hvor } t \in [-5; 5]$$

- Indtegn banekurven for \vec{r} i et koordinatsystem.
- Bestem koordinaterne for banekurvens skæringer med akserne.
- Bestem ligningen for tangenten til banekurven for $t = 1$.

Opgave 4

En differentialligning er givet ved

$$\frac{dy}{dx} = 2y - 1$$

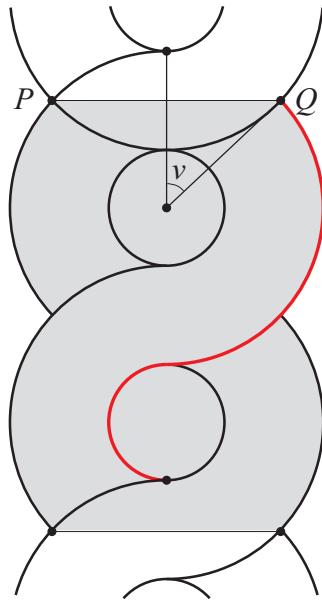
- Vis, at rekursionsligningen, der svarer til Eulers metode for differentialligningen, er givet ved

$$y_{n+1} = (1 + 2h) \cdot y_n - h \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

- Vis, at $z_n = \frac{1}{2}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ er en løsning til rekursionsligningen.
- Opskriv samtlige løsninger til rekursionsligningen.
- Bestem den løsning til rekursionsligningen, der opfylder $y_0 = 1$.

Opgave 5

Billedet viser et fortov i Portugal. På figur 2 ses en model af mønsteret.



Figur 2

Mønsteret er konstrueret af cirkler, som parvis har samme centrum. Hver af de store cirkler tangerer to små cirkler. Alle cirklernes centre ligger på samme rette linje.

En opmåling viser, at den lille cirkels radius er $r = 0,2$, den store cirkels radius er $R = 0,55$ og afstanden $|PQ| = 0,8$. Alle mål er i meter.

- Bestem vinkel v , se figur 2.
- Bestem længden af kurven, vist med rødt.
- Bestem arealet af det tonede område.

Opgave 6

Der findes mange forskellige typer af klokker. På billederne ses nogle, som bruges til at pynte med til jul.



<http://www.jamerantik.dk/>



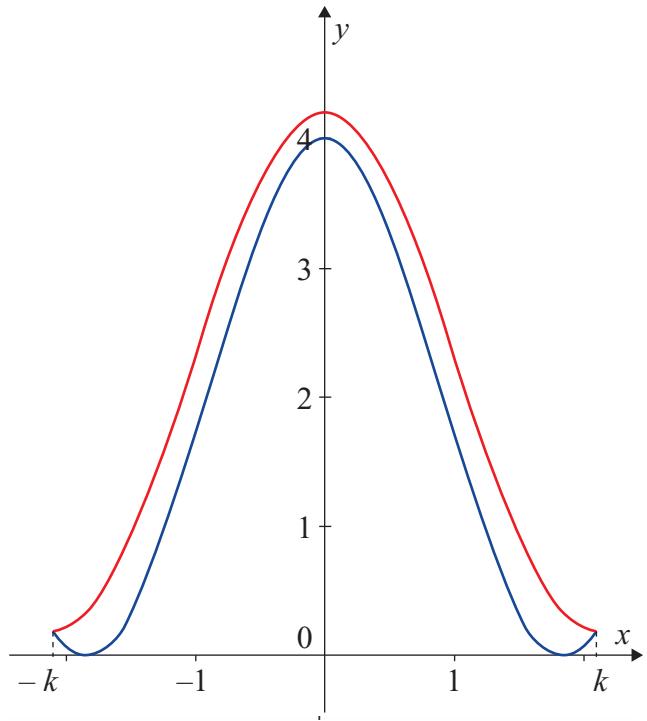
<http://vik-elektrooginterior.no/>



<http://www.atjemsland.no/>



<http://porcelaensbutikken.dk/>



Figur 3

På figur 3 er et tværsnit af en klokke indtegnet i et koordinatsystem, hvor målene er i centimeter. Tværsnittet af klokken er afgrænsset af graferne for de to funktioner

$$f(x) = 2 \cos(1,5x) + 2,2 \quad -k \leq x \leq k$$

$$g(x) = 2 \cos(1,7x) + 2 \quad -k \leq x \leq k$$

- a) Vis, at bredden af klokken er 4,23 cm.
- b) Bestem den største tangenthældning for funktionen f .

Klokken skal fremstilles i messing. Volumen af klokken kan beskrives som et omdrejningslegeme omkring y -aksen.

- c) Bestem volumen af den messing, der skal anvendes til fremstilling af klokken.

