陕西科技大学 试题纸

课程 复变函数和积分变换 学期 2016—2017—1

班级 ________ 学号 ________ 姓名 ________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
阅卷人											

一 、填空题（每小题 3 分,共 15 分）

1、设 $\dfrac{2i}{\sqrt{3}-i}-\dfrac{3}{\sqrt{3}i-1}=x+iy$， $x,y\in R$，则 $\dfrac{y}{x}=$________；

2、$(-2)^{\sqrt{3}}=$________ （结果写为三角形式）；

3、$ln(1+i)=$________ ；

4、设 $f(z)=\dfrac{z-\sin z}{z^3}$，则孤立奇点 $z=0$ 的类型为________ （若为极点，请给出极点的阶数）；

5、级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1+i\sqrt{3})^n z^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n$ 的收敛半径 $R=$________.

二、选择题（每小题 3 分,共 15 分）

1、以下选项表述正确的是________；

(A) $\sin z$ 是个周期函数 (B) e^z 是个多值函数

(C) $|\cos z|\le 1$ (D) $2i>i$

2、设函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在整个复平面上解析，则下列命题不一定成立的是________ ；

(A) u,v 均为调和函数 (B) u,v 在整个平面可微

(C) $\overline{f(z)}$ 在整个复平面解析 (D) $f'(z)$ 在整个复平面解析

3、以下复级数中，条件收敛的是________；

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1+\dfrac{i}{n^2})$ (B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(6+5i)^n}{8^n}$ (C) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{i}{2^n}$ (D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{i^n}{n}$

4、级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{(z-1)^n}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-1)^n}{3^n}$的收敛域为__________；

(A) $\frac{1}{2}<|z-1|<3$　(B) $2<|z-1|<3$　(C) $\frac{1}{3}<|z-1|<2$　(D) Φ

5、$z=\infty$为$f(z)=\frac{\sin z}{z}$的__________**.**

(A) 一级极点　(B) 可去奇点　(C) 本性奇点　(D) 不是孤立奇点

三、（**本题满分 7 分**）判断函数$f(z)=x^2-y-x+i(2xy-y^2)$在复平面上何处可导？何处解析？

四、（本题满分 7 分）已知$u(x,y)=e^x\cos y+x+y$，求满足条件$f(0)=1$的解析函数$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，并计算$f'(z)$**.**

五、（本题满分 6 分）求下列复变函数在指定孤立奇点处的留数**.**

1、$\mathrm{Re}\,s[\frac{1-\cos z}{z^2(z+1)},\infty]$；　　2、$\mathrm{Re}\,s[\frac{1}{\sin z},\pi]$**.**

六、（每小题 5 分,共 25 分）计算下列各积分，其中封闭曲线 C 为正向简单闭曲线.

1、$\oint_c[\frac{e^z}{z(z-3)}+\frac{1}{z}]dz\quad c:|z-3|=1$；　　2、$\oint_c\frac{z^5}{1+z^6}dz\quad c:|z|=2$；

3、$\int_c(x-2yi)dz\quad c:$沿$y=x^2$从0到$1+i$；　　4、$\oint_c\frac{z}{(z-1)(z-2)^2}dz\quad c:|z|=3$；

5、$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{1+x^2}dx$**.**

七、（每小题 5 分,共 15 分）求下列函数的级数展开式**.**

1、$f(z)=\frac{1}{z^2}\sin\frac{1}{z}\qquad 0<|z|<+\infty$**；**

2、$f(z)=\frac{z}{1+z^2}\qquad 1<|z|<+\infty$**；**

3、$f(z)=\frac{1}{z^2}$　　在$z=1$处展开**.**

八、（本题满分 10 分）试用拉普拉斯变换求解微分方程问题

$y''(t)+2y'(t)\quad y(t)$，　　$y(0)=y'(0)$**.**

陕西科技大学 试题纸

课程 复变函数和积分变换 学期 2016—2017—1

班级 ________ 学号 ________ 姓名 ________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
阅卷人											

一 、填空题（每题 3 分共 15 分）

1、$5\sqrt{3}$， 2、$2^{\sqrt{3}}[\cos\pi(1+2k)\sqrt{3}+i\sin\pi(1+2k)\sqrt{3}], k=0,\pm1,\pm2,\cdots$,

3、$\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}i$， 4、可去奇点 ，5、$\frac{1}{2}$.

二、选择题（每题 3 分共 15 分）

1、A；2、C；3、D；4、B；5、C

三、（本题满分 7 分）判断函数 $f(z)=x^2-y-x+i(2xy-y^2)$ 在复平面上何处可导？何处解析？

解：$u(x,y)=x^2-y-x, v(x,y)=2xy-y^2$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=2x-1，\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}=2y，\quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=-1，\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}=2x-2y$$

……………………………………………………………4 分

四个一阶偏导存在且连续，当且仅当 $y=\frac{1}{2}$ 时，C-R 方程成立，所以函数只有在 $y=\frac{1}{2}$ 时可导，在整个复平面处处不解析。……………………………………3 分

四、（本题满分 7 分）已知 $u(x,y)=e^x\cos y+x+y$，求满足条件 $f(0)=1$ 的解析函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，并计算 $f'(z)$。

解：$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y+1$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-e^x\sin y+1$……………………………………2 分

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=e^x\cos y+1-(-e^x\sin y+1)i=e^z+1-i$$ …………………2 分

$f(z)=\int(e^z+1-i)dz=e^z+(1-i)z+C$ ……………………………………2 分

因为 $f(0)=1$，所以$C=0$。……………………………………………..1 分

综上， $f(z)=e^z+(1-i)z, f'(z)=e^x\cos y+1-(-e^x\sin y+1)i=e^z+1-i$

五、（本题满分 6 分）求下列函数在指定孤立奇点处的留数。

1、 $\mathrm{Re}\,s[\dfrac{1-\cos z}{z^2(z+1)},\infty]$**；** **2、** $\mathrm{Re}\,s[\dfrac{1}{\sin z},\pi]$**.**

解：1、 $z=0$是$\dfrac{1-\cos z}{z^2(z+1)}$可去奇点，所以$\mathrm{Re}\,s[\dfrac{1-\cos z}{z^2(z+1)},0]=0$ ………………1 分

$z=-1$是$\dfrac{1-\cos z}{z^2(z+1)}$一级极点，所以

$$\mathrm{Re}\,s[\frac{1-\cos z}{z^2(z+1)},-1]=\lim_{z\to-1}(z+1)\frac{1-\cos z}{z^2(z+1)}=1-\cos1$$

……………………………………………………..1 分

$$\mathrm{Re}\,s[\frac{1-\cos z}{z^2(z+1)},\infty]=-\{\mathrm{Re}\,s[\frac{1-\cos z}{z^2(z+1)},0]+\mathrm{Re}\,s[\frac{1-\cos z}{z^2(z+1)},-1]\}=\cos1-1$$

……………………………………………………..1 分

2、 $z=\pi$ 是 $\dfrac{1}{\sin z}$ 一级极点， ….…… ………………………………1 分

$\mathrm{Re}\,s[\dfrac{1}{\sin z},\pi]=\dfrac{1}{\cos z}\Big|_{z=\pi}=-1$ …..……………………………………………2 分

六、（每小题 5 分,共 25 分）计算下列各积分，其中封闭曲线 C 为正向简单闭曲线。

1、 $\oint_c[\dfrac{e^z}{z(z-3)}+\dfrac{1}{z}]dz\quad c:|z-3|=1$**；** **2、** $\oint_c\dfrac{z^5}{1+z^6}dz\quad c:|z|=2$**；**

3、 $\int_c(x-2yi)dz\quad c:$**沿** $y=x^2$ **从**0**到**$1+i$**；** **4、**$\oint_c\dfrac{z}{(z-1)(z-2)^2}dz\quad c:|z|=3$**；**

5、 $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x\sin x}{1+x^2}dx$**.**

解：1、 $\oint_c[\dfrac{e^z}{z(z-3)}+\dfrac{1}{z}]dz=\oint_c\dfrac{e^z}{z(z-3)}dz=2\pi i\,\mathrm{Re}\,s[\dfrac{e^z}{z(z-3)},3]$ ……………2 分

$$\operatorname{Res}[\frac{e^z}{z(z-3)},3]=\lim_{z\to 3}[(z-3)\ \frac{e^z}{z(z-3)}]=\frac{1}{3}e^3$$ ……………………………….2 分

所以 $\oint_c[\frac{e^z}{z(z-3)}+\frac{1}{z}]dz=\frac{2\pi i}{3}e^3$ 。 ……………………………….1 分

2、$\oint_c\frac{z^5}{1+z^6}dz=-2\pi i\operatorname{Res}[\frac{z^5}{1+z^6},\infty]$ ………………………………….2 分

$$\operatorname{Res}[\frac{z^5}{1+z^6},\infty]=-\operatorname{Res}[\frac{\frac{1}{z^5}}{1+\frac{1}{z^6}}\frac{1}{z^2},0]=-\operatorname{Res}[\frac{1}{(z^6+1)z},0]=-1$$ …… ……..…2 分

所以 $\oint_c\frac{z^5}{1+z^6}dz=2\pi i$ 。 …..………………… …………1 分

3、 $c: z=x+ix^2, x:0\to 1, dz=(1+2xi)dx$ ...……………………… …………2 分

$$\int_c(x-2yi)dz=\int_0^1(x-2x^2i)(1+2xi)dx=\frac{3}{2}$$ 。 ………………………………….3 分

4、$\oint_c\frac{z}{(z-1)(z-2)^2}dz=2\pi i\{\operatorname{Res}[\frac{z}{(z-1)(z-2)^2},1]+\operatorname{Res}[\frac{z}{(z-1)(z-2)^2},2]\}$

$$=-2\pi i\operatorname{Res}[\frac{z}{(z-1)(z-2)^2},\infty]$$ …………………………2 分

$$\operatorname{Res}[\frac{z}{(z-1)(z-2)^2},\infty]=-\operatorname{Res}[\frac{\frac{1}{z}}{(\frac{1}{z}-1)(\frac{1}{z}-2)^2}\frac{1}{z^2},0]$$

$$=-\operatorname{Res}[\frac{1}{(1-z)(1-2z)^2},0]=0$$ …………………………2 分

所以 $\oint_c\frac{z}{(z-1)(z-2)^2}dz=0$ 。 …………………………1 分

5、$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{1+x^2}dx=\operatorname{Im}\{2\pi i\operatorname{Res}[\frac{ze^{iz}}{1+z^2},i]\}$ …………………………2 分

$$\operatorname{Res}[\frac{ze^{iz}}{1+z^2},i]=\left.\frac{ze^{iz}}{2z}\right|_{z=i}=\frac{1}{2e}$$ ...………………………2 分

所以$\int_0^{+\infty}\frac{x\sin x}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{e}$ 。 ………………… ………1 分

七、（每小题 5 分,共 15 分）求下列函数在指定域内的级数展开式。

1、 $f(z)=\frac{1}{z^2}\sin\frac{1}{z}$ 　　$0<|z|<+\infty$；2、 $f(z)=\frac{z}{1+z^2}$ 　　$1<|z|<+\infty$；

3、 $f(z)=\frac{1}{z^2}$ 　　$|z-1|<1.$

解：1、 $f(z)=\frac{1}{z^2}\sin\frac{1}{z}=\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{z^{2n+1}}$ ………………………………5 分

2、$f(z)=\frac{z}{1+z^2}=\frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{1}{z^2}}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{2n}}$ ……………………………….5 分

3、 $f(z)=\frac{1}{z^2}=(\frac{-1}{z})'$

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{(z-1)+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$$ ……………………………….3 分

所以 $f(z)=\frac{1}{z^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n(z-1)^{n-1}$ ……………………………….2 分

八、（10 分）试用拉普拉斯变换求解微分方程问题。

$y''(t)+2y'(t)$ $y(t)$， 　　$y(0)=y'(0)$

解：设L[$y(t)$]=Y(s)，方程两端同时取拉普拉斯变换得

$$\mathrm{L}[y''(t)+2y'(t)+y(t)]=\frac{1}{s}$$ ……………………………..2 分

即 $s^2Y(s)+2sY(s)+Y(s)=\frac{1}{s}$ …………………….…..2 分

解得 　$Y(s)=\frac{1}{s(s+1)^2}$ 　　　　………………………..……1 分

$\mathrm{Res}[\frac{1}{s(s+1)^2}e^{st},0]=\lim_{s\to 0}\frac{1}{(s+1)^2}e^{st}=1$ 　　　　…………………………..…..2 分

$\mathrm{Res}[\frac{1}{s(s+1)^2}e^{st},-1]=\lim_{s\to -1}(\frac{1}{s}e^{st})'=-(t+1)e^{-t}$ …………………… ..2 分

所以 $\mathrm{L}^{-1}[Y(s)]=y(t)=1-(t+1)e^{-t}$ 　　　……………………….…1 分