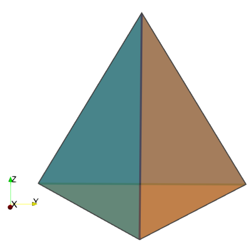
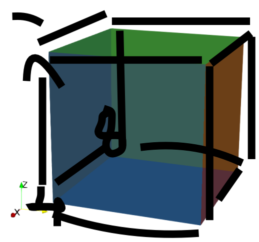
Progetto di Programmazione e Calcolo Scientifico

2025

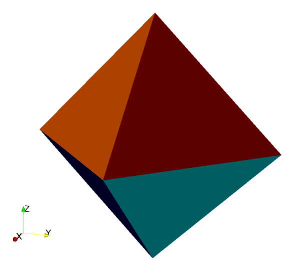
1 Solidi Platonici



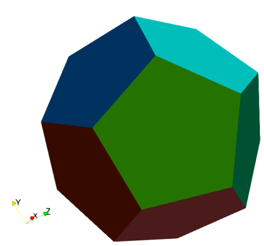
(a) Tetraedro
V = 4, E = 6, F = 4



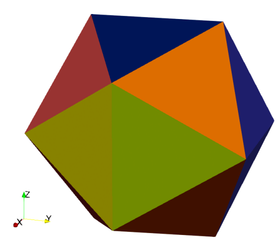
(b) Cubo
V = 8, E = 12, F = 6



(c) Ottaedro
V = 6, E = 12, F = 8



(d) Dodecaedro
V = 20, E = 30, F = 12



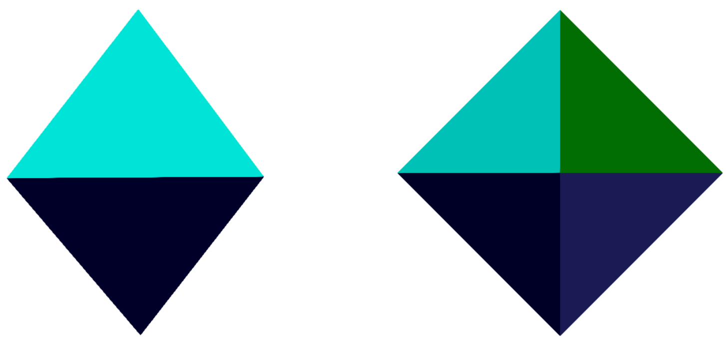
(e) Icosaedro
V = 12, E = 30, F = 20

Figure 1: Solidi Platonici.

In geometria, un **Solido Platonico** è un poliedro convesso e regolare in tre dimensioni. Un poliedro regolare è un poliedro

- avente tutte le facce congruenti (identiche in dimensione e forma);
- ogni faccia è un poligono regolare (lati e angoli congruenti);
- il numero di facce adiacenti a un vertice è uguale per tutti i vertice.

Esistono soltanto 5 solidi platonici [1], i quali sono mostrati e caratterizzati in Figure 1.
Questi solidi possono essere anche rappresentati dal cosiddetto **Simbolo di Schläfli** $\{p, q\}$ [1]. Nella scrittura $\{p, q\}$, p denota il numero di vertici del poligono che si osserva guardando ciascuna faccia, q denota il numero di vertici del poligono che si osserva guardando ciascun vertice. Vedi Figura 2. Questo vuole dire che il poliedro $\{p, q\}$ ha le facce che sono p-goni, mentre q rappresenta la **valenza** del vertice, ovvero il numero di facce adiacenti al vertice stesso. Si deve sempre verificare che $p \geq 3$ e $q \geq 3$.

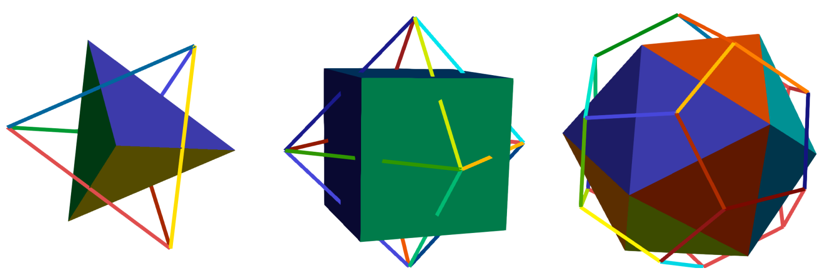


(a) Ottaedro
$p = 3$

(b) Ottaedro
$q = 4$

Figure 2: Simbolo di Schläfli $\{p, q\}$ dell'otteaedro.

2 Poliedro duale



(a) Tetraedro-Tetraedro (b) Cubo-Ottaedro (c) Icosaedro-Dodecaedro

Figure 3: Dualità. I vertici di questi poliedri sono stati proiettati sulla sfera di raggio 1 centrata nell'origine degli assi.

Il **duale** di un poliedro P è il nuovo poliedro Q, ottenuto dal precedente scambiando il ruolo di vertici e facce. La dualità è una proprietà simmetrica. In particolare, per costruire in duale di un poliedro

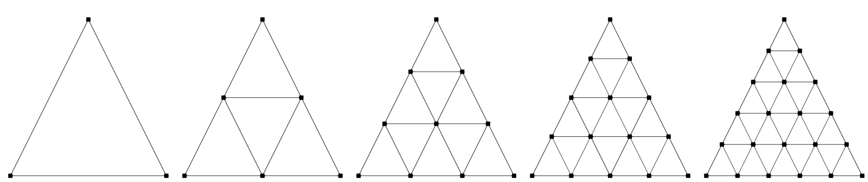
- si definiscono i baricentri delle facce;
- si unisce ogni baricentro di una faccia a tutti i baricentri delle facce adiacenti alla faccia corrispondente;
- così facendo si ottiene un poliedro che ha tanti vertici quanti erano le facce del precedente, tante facce quanti erano i vertici precedenti e lo stesso numero di lati.

I solidi platonici sono duali a coppie: cubo e ottaedro sono duali tra loro, cosí come dodecaedro e icosaedro. Il tetraedro è il duale di sé stesso. Vedi Figura 3.

3 Poliedri Geodetici e i loro duali

Un poliedro geodetico è un poliedro convesso costituito da facce triangolari. Nella notazione di Magnus Wenniger [2], un poliedro geodetico è definito da $\{3, q+\}_{b,c}$, dove $\{3, q\}$ è il simbolo di Schläfli del solido di partenza, mentre b e c rappresentano una triangolazione delle sue facce. Il simbolo $+$ indica la valenza da incrementare, il che significa che solidi geodetici con simmetrie diverse si ottengono incrementando il valore di q. I valori che assumono b e c dividono questi poliedri in 3 classi:

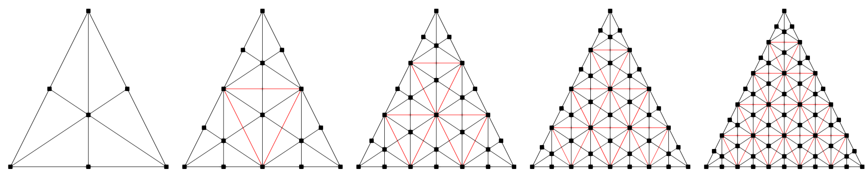
- $b = 0$ e $c \geq 1$ oppure $c = 0$ e $b \geq 1$ prevedono una triangolazione come quella prevista in Figura 4. Il poliedro $\{3, q+\}_{b,0}$ corrisponde al poliedro $\{3, q+\}_{0,c}$ con $b = c$.
- $b = c$ e $b \geq 1$ prevedono una triangolazione come quella prevista in Figura 5.
- $b \neq c$, caso che non tratteremo.



(a) $b = 1$ (b) $b = 2$ (c) $b = 3$ (d) $b = 4$ (e) $b = 5$

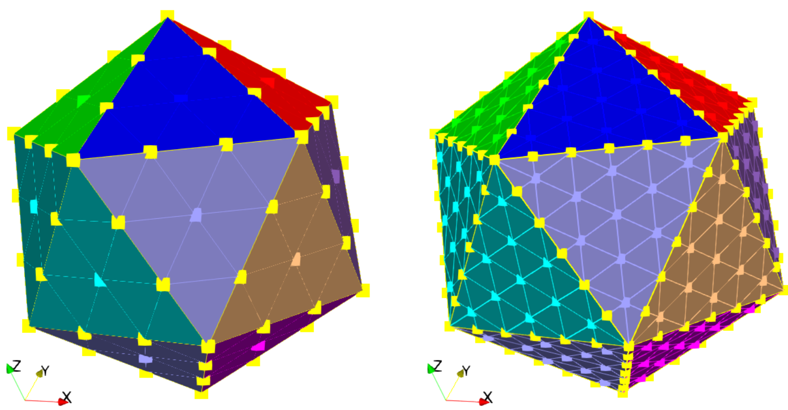
Figure 4: Triangolazione caratterizzante le facce dei poliedri geodetici di classe I, per $c = 0$.

Dopo aver triangolato tutte le facce in modo tale da non produrre duplicati nei vertici e nei lati appartenenti a più facce, il solido apparirà come in Figure 6.



(a) $b = 1$ (b) $b = 2$ (c) $b = 3$ (d) $b = 4$ (e) $b = 5$

Figure 5: Triangolazione caratterizzante le facce dei poliedri geodetici di classe II, per $c = b$. I triangoli rossi sottostanti indicano la triangolazione relativa di classe I, con lo stesso valore per b e $c = 0$.



(a) $\{3, 5+\}_{3,0}$ (b) $\{3, 5+\}_{3,3}$

Figure 6: Solido geodetico con simmetria icosaedrica prima della proiezione dei vertici sulla spesa.

Il solido così ottenuto avrà

$$\begin{aligned} V &= 2T + 2 \qquad E = 6T, \qquad F = 4T \qquad \text{if } q = 3 \\ V &= 4T + 2 \qquad E = 12T, \qquad F = 8T \qquad \text{if } q = 4 \\ V &= 10T + 2 \qquad E = 30T, \qquad F = 20T \qquad \text{if } q = 5 \end{aligned} \tag{1}$$

con

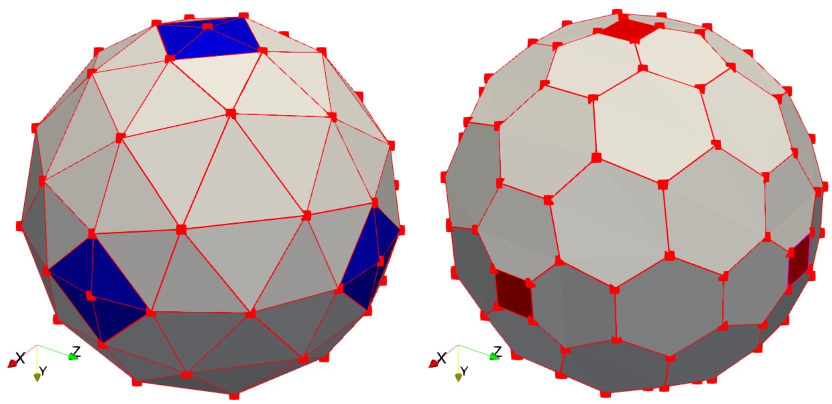
$$T = b^2 + bc + c^2. \tag{2}$$

I vertici avranno valenza

$$\begin{aligned} 3\{4\} \text{ e } 6\{2(T-1)\} \qquad & \text{if } q = 3, \\ 4\{6\} \text{ e } 6\{4(T-1)\} \qquad & \text{if } q = 4, \\ 5\{12\} \text{ e } 6\{10(T-1)\} \qquad & \text{if } q = 5. \end{aligned} \tag{3}$$

Il solido geodetico finale si ottiene proiettando *in modo opportuno*, tutti i vertici sulle sfera di raggio unitario centrata nell'origine. Per semplicità, sarà sufficiente

proiettare tutti i vertici generati su tale sfera, anche se in questo modo la proprietà di convessità del solido risultante non è più garantita. Così procedendo non è più garantito che le facce del solido duale risultante siano planari. Vedere Figura 7a.
Per ottenere il duale $\{q+, p\}_{b,c}$ di questa tipologia di solidi, detto poliedro di Goldberg generalizzato, bisogna scambiare il ruolo delle vertici e delle facce, come spiegato nella sezione precedente e proiettare nuovamente i punti sulla sfera. Così procedendo non è più garantito che le facce del solido duale risultante siano planari. Vedere Figura 7b.



(a) $\{3, 4+\}_{4,0}$

(b) $\{4+, 3\}_{4,0}$

Figure 7: Un solido geodetico e il suo duale. Sinistra: In blu il vicinato (le facce adiacenti) dei vertici aventi valenza 4. Destra: In rosso le facce con numero di vertici pari a 4.

Si osservi che i solidi finali costituiscono un'approssimazione della sfera. Tali solidi vengono utilizzati in:

- architettura (geodesic dome).
- scienze della terra (geodesia).
- chimica (mimano la struttura di molecole).
- varie applicazioni che richiedono modelli sferici.

4 Svolgimento

Il progetto è costituito da due parti descritte nel seguito.
Dato in input una quadrupla di numeri interi (p, q, b, c):

1. Definire i solidi geodetici di classe I e i loro duali.

2. Definire i solidi geodetici di classe II e i loro duali.

Lo svolgimento della sola prima parte consente di arrivare ad un punteggio massimo di 28/30. Lo svolgimento di entrambe le parti consente di arrivare ad un punteggio massimo di 30L/30.
Ai fini di una valutazione positiva, è necessario aver consegnato:

1. Il codice sorgente C++ del progetto.
2. La relativa documentazione UML che descrive le unità logiche definite nel codice sorgente.

Infine, all'orale occorre portare una presentazione con slide dalla durata massima di **12 minuti** per gruppo. I gruppi possono essere costituiti da al massimo **tre persone**.
Il codice sorgente dovrà essere consegnato su una repository GitHub condivisa da tutti i membri del gruppo. Il link della repository dovrà essere consegnato sulla pagina **Elaborati** del portale. Il file .txt contenente il link dovrà essere denominato "ProgettoPCS2025_**Nome_Cognome**.txt". Dunque, ogni membro del gruppo dovrà condividere il link alla repository in maniera indipendente sul portale.
IMPORTANTE:

- Il materiale dovrà essere consegnato 3 giorni prima della prova orale e comunque non oltre il 31 luglio 2025, seguendo l'usuale modalità di consegna. La consegna del progetto entro le scadenze indicate permette di raggiungere la votazione massima, altrimenti il voto massimo della prova orale è 26/30.
- I vari membri del gruppo non sono tenuti a presentarsi all'esame nella stessa data.

5 Parte I

La prima parte del progetto consiste nel:

1. Definire una struttura dati che permetta la memorizzazione di tutte le proprietà di un poliedro. Ogni poliedro deve essere rappresentato dalle
   - Celle $0D$ oppure vertici. Ogni vertice è caratterizzato da un identificativo (numero sequenziale a partire da 0), le 3 coordinate (x, y, z).
   - Cella $1D$ oppure lati. Ciascun lato è caratterizzato da un identificativo (numero sequenziale a partire da 0) e dagli ID dei vertici di origine e fine che individuano in maniera univoca il lato nel poliedro.
   - Cella $2D$ oppure faccia. Ciascuna faccia è caratterizzato da un identificativo (numero sequenziale a partire da 0), dal numero di vertici e di lati, e da due liste definite dagli ID dei vertici e dei lati che

le parti in rosso sono quelle da valutare e perfezionare

individuano in maniera univoca la faccia nel poliedro. In ciascuna faccia, i lati e i vertici devono essere ordinati in modo tale che, a meno dell'orientamento del lato, risulti

$$\begin{aligned} \text{faces.edges}[e].\text{end} &== \text{faces.edges}[(e+1)\%E].\text{origin} \\ \text{faces.vertices}[e] &== \text{faces.edges}[e].\text{origin} \end{aligned} \tag{4}$$

richiedere che venga fatto un test per questa cosa magari

- Cella $3D$ oppure poliedro. Ciascun poliedro è caratterizzato da un identificativo (numero sequenziale a partire da 0), dal numero di vertici, di lati e di facce, e da tre liste definite dagli ID dei vertici, dei lati e delle facce che individuano in maniera univoca il poliedro.

2. Dato in input una quadrupla di numeri interi $(p, q, b, 0)$ oppure $(p, q, 0, b)$, se $p = 3$ il programma deve restituire in output il poliedro geodetico **di classe I** corrispondente. In particolare, il programma deve restituire 4 file **.txt** denominati **Cell0Ds.txt**, **Cell1Ds.txt**, **Cell2Ds.txt** e **Cell3Ds.txt** riportanti le principali proprietà che caratterizzano le varie celle del poliedro (vedasi ad esempio l'esercizio 2 dell'esercitazione 5). Inoltre, il programma deve consentire la stampa su Paraview dei vertici e dei lati del poliedro. Non è richiesta la stampa delle facce e del poliedro stesso.

3. Dato in input una quadrupla di numeri interi $(p, q, b, 0)$ oppure $(p, q, 0, b)$, se $q = 3$ il programma deve restituire in output il poliedro di Goldberg **di classe I** corrispondente, consentendo gli output previsti dal punto precedente.

4. Costruire tali poliedri in modo tale che tutti i loro vertici giacciano sulla sfera di raggio 1 centrata nell'origine degli assi cartesiani.

5. Inoltre, se l'input è definito da una 6-tupla di numeri

$$(p, q, b, c, id\_vertice\_1, id\_vertice\_2), \tag{5}$$

trovare un cammino minimo che unisce i vertici contrassegnati dagli identificativi $id\_vertice\_1$ e $id\_vertice\_2$ (se validi) sul grafo avente come nodi i vertici del poliedro e come lati le celle 1D dello stesso. Il cammino minimo andrà evidenziato su Paraview, assegnando proprietà *ShortPath = 1* ai lati e ai vertici che appartengono al cammino minimo e *ShortPath = 0* a quelli che non vi appartengono. Inoltre, il programma deve stampare a schermo il numero di lati che compongono il cammino minimo e la somma delle loro lunghezze.

6. Verificare sempre la correttezza dell'input.

Per ogni unità logica è necessario verificarne il corretto funzionamento utilizzando i GoogleTest.

6 Parte II

La seconda parte del progetto consiste nel modificare l'algoritmo prodotto nella parte I del progetto, in modo tale da consentire la costruzione dei solidi geodetici di classe II ($b = c$).

References

[1] M.J. Wenninger. *Polyhedron Models.* first pub. Cambridge University Press, 1974.

[2] M.J. Wenninger. *Spherical Models.* Dover Publications, 2014.