武汉大学 2018-2019 学年第二学期期末考试

线性代数 B 试题（A 卷）

一、（10 分）已知$|A|=\begin{vmatrix} k_1 & 2 & 1 & 2 \\ k_2 & 2 & 2 & 2 \\ k_3 & 1 & 3 & 4 \\ k_4 & 1 & 4 & 4 \end{vmatrix}=18$，试计算 $A_{12}+A_{22}$，$A_{32}+A_{42}$ 的值。

二、（12 分）求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-2,3,-1,2)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,2,-2,-3)^T$ $\boldsymbol{\alpha}_3=(5,0,7,-5,-4)^T$

，$\boldsymbol{\alpha}_4=(3,-1,5,-3,-1)^T$ 的秩和一个极大线性无关组，并将其余向量用极大线性无关组线性表示。

三、（14 分）设矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，

（1）求 $(A+B)^2-(A^2+2AB+B^2)$；（2）求 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵.

四、（15 分）设有线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=3 \\ x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda-1 \end{cases}$.

讨论 λ 为何值时,方程组有唯一解、无解、有无穷多解？并在有无穷多解时，求出其通解.

五、（16 分）设二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=X^TAX=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3\ \left(b>0\right)$，其中二次型的矩阵 A 的特征值之和为 1，特征值之积为 -12.

1、试确定 a,b 的值；2、用正交变换将二次型 f 化为标准形，并写出所用的正交变换矩阵。

六、（15 分）设 n 阶矩阵 A,B 满足条件 $A+B=AB$，其中 $B=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，且 $a_1=(1,0,1)$

$a_2=(2,1,0),a_3=(1,1,1)$，

1、求矩阵 A；

2、求秩 $r(A^*B^*)$，其中 A^*,B^* 分别为 A,B 的伴随矩阵；

3、设 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)B$，求 β_1,β_2,β_3；

七、（10 分）设 A、B 均是同阶方阵，B 是可逆矩阵，且满足 $A^2+AB+B^2=0$，证明 A、A^2+B^2 以及 $A^{-1}+B^{-1}$ 都是可逆矩阵。

八、（8 分）设 B 是 $m\times n$ 阶矩阵，其 m 个行向量是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，证明：对任一 m 阶可逆矩阵 C，CB 的行向量组也是 $Ax=0$ 的基础解系。