武汉大学 2017-2018 学年第二学期期末考试线性代数 B 试题（A）参考解答

1、（10 分）若$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$都是四维列向量，且四阶行列式$|\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_1|=m,|\alpha_1\alpha_2\beta_2\alpha_3|=n,$计算四阶行列式$\left|\alpha_3\alpha_2\alpha_1(\beta_1+\beta_2)\right|$.

解　由行列式的性质，可得

$$\left|\alpha_3\alpha_2\alpha_1(\beta_1+\beta_2)\right|=|\alpha_3\alpha_2\alpha_1\beta_1|+|\alpha_3\alpha_2\alpha_1\beta_2|=-|\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_1|+|\alpha_1\alpha_2\beta_2\alpha_3|=-m+n.$$

2、（10 分）已知 3 阶方阵$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\-2&0&1\end{pmatrix}$，3 阶矩阵$B$满足方程 $A^2B-A-B=E$，试求矩阵B.

解：由题设有 $(A^2-E)B=A+E$ 且$\left|A^2-E\right|=\begin{vmatrix}-2&0&2\\0&3&0\\-4&0&-2\end{vmatrix}=36\neq 0,$故$(A^2-E)$可逆。

在等式左右两边左乘$(A^2-E)^{-1}$得

$$B=(A^2-E)^{-1}(A+E)\quad=(A-E)^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-2&0&0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&-1/2\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

3、（10 分）已知向量$\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$不共面，试判断向量$\alpha=3\vec{e}_1+2\vec{e}_2-\vec{e}_3,\beta=\vec{e}_1+\vec{e}_2-\vec{e}_3,\gamma=-\vec{e}_1+4\vec{e}_2+5\vec{e}_3$是否共面。

解 法一 因为向量$\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$不共面，而$(\alpha,\beta,\gamma)=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)\begin{pmatrix}3&1&-1\\2&1&4\\-1&-1&5\end{pmatrix}$且$\begin{vmatrix}3&1&-1\\2&1&4\\-1&-1&5\end{vmatrix}\neq 0$

向量$\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$不共面，所以向量$\alpha,\beta$，$\gamma$不共面。

法二 $k_1\alpha+k_2\beta+k_3\gamma=0$，即 $(3k_1+k_2-k_3)\vec{e}_1+(2k_1+k_2+4k_3)\vec{e}_2+(-k_1-k_2+5k_3)\vec{e}_3=0$

由向量$\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$不共面，所以有$\begin{cases}3k_1+k_2-k_3=0\\2k_1+k_2+4k_3=0\\-k_1-k_2+5k_3=0\end{cases}$，由$\begin{vmatrix}3&1&-1\\2&1&4\\-1&-1&5\end{vmatrix}\neq 0$

所以向量α,β，γ不共面。

4、（10 分）设$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$为 4 阶方阵，其中$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$是 4 维列向量，且$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，$\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$. 已知向量$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，试求线性方程组$Ax=\beta$的通解.

解:由$\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$知$A$列向量组线性相关，从而$R(A)<4$，因$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，则$R(A)\geq 3$，故$R(A)=3$，由$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$知$\eta=(1,1,1,1)^T$为$Ax=\beta$一个特解，由$\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$得$\xi=(1,1,1,-1)^T$为$Ax=0$一个解, 由$R(A)=3$知$Ax=0$的基础解系中有 4-3=1 个向量，从而$\xi$就构成$Ax=0$的基础解系，由线性方程组解的结构知$Ax=\beta$的通解为$x=k(1,1,1,-1)^T+(1,1,1,1)^T$.

5、（12 分）设有向量组$\alpha_1=(1,3,3,1)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=(1,4,1,2)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3=(1,0,2,1)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_4=(1,7,2,k)^{\mathrm{T}}$

（1）问k为何值时，该向量组线性相关？（2）在线性相关时求出该向量组的一个极大线性无关组并将其余向量用该极大线性无关组线性表示。

解 （1）令 $A=\left(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4\right)$，对 A 作初等行变换：$A\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&k-2\end{pmatrix}$，故 $k=2$ 时，该向量组线性相关；（2）$k=2$ 时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是给定向量组一个极大线性无关组，且 $\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$

6、（10 分）设 A 是 3 阶方阵，互换 A 的第一、第二列，得矩阵 B；再将 B 的第二列加到第三列上得矩阵 C；然后再将矩阵 C 的第一列乘以 2 得到矩阵 D;求满足 $AX=D$ 的可逆矩阵 X .

解 由题意有 $A\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=B,B\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=C,C\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=D$ 于是

$A\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=D$，所以 $X=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\2&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

7、（10 分）若矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&2&0\\8&2&a\\0&0&6\end{pmatrix}$ 可以对角化，设与 A 相似的对角矩阵为 Λ；试求常数 a 的值及对角矩阵 Λ，可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP=\Lambda$；

解:矩阵 A 的特征多项式 $\left|A-\lambda E\right|=\begin{vmatrix}2-\lambda&2&0\\8&2-\lambda&a\\0&0&6-\lambda\end{vmatrix}=-(6-\lambda)^2(2+\lambda)$，故 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=6$，$\lambda_3=-2$。 由于 A 相似于对角矩阵 Λ，故对应于 $\lambda_1=\lambda_2=6$ 应有两个线性无关的特征向量，即齐次线性方程组 $(A-6E)x=0$ 的基础解系中应含两个解，所以 $R(A-6E)=1$，

而 $A-6E=\begin{pmatrix}-4&2&0\\8&-4&a\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-4&2&0\\0&0&a\\0&0&0\end{pmatrix}$，故 $a=0$

对 $\lambda_1=\lambda_2=6$，解 $(A-6E)x=0$， $A-6E\sim\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，得基础解系 $p_1=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},p_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

对 $\lambda_3=-2$，解 $(A+2E)x=0$， $A+2E\sim\begin{pmatrix}2&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，得基础解系 $p_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$

记矩阵 $\Lambda=\begin{pmatrix}6&0&0\\0&6&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$，则矩阵 $P=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&0&-2\\0&1&0\end{pmatrix}$ 即满足 $P^{-1}AP=\Lambda$。

8、（10 分）已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与 β_1,β_2,β_3 为所有 3 维实向量构成的线性空间 R^3 的两组基，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵为 $P=\begin{pmatrix}0&2&-1\\-1&0&2\\1&0&0\end{pmatrix}$ 且 $\alpha_1=\left(1,0,0\right)^T,\alpha_2=\left(1,1,0\right)^T,\alpha_3=\left(1,1,1\right)^T$，

试求：(1) 基β_1,β_2,β_3；(2) 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与 β_1,β_2,β_3 下有相同坐标的全体向量.

解:(1). 由基变换公式知

$$\left(\beta_1\,\beta_2\,\beta_3\right)=\left(\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\right)P=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2&-1\\-1&0&2\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2&1\\0&0&2\\1&0&0\end{pmatrix}$$

，故基β_1,β_2,β_3为$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$.

(2).设向量γ为任一在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与 β_1,β_2,β_3 下有相同坐标的向量,坐标均为$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，则坐标变换公式有$x=Px$，即$\left(P-E\right)x=0$，解方程组$\begin{pmatrix}-1&2&-1\\-1&-1&2\\1&0&-1\end{pmatrix}x=\begin{pmatrix}-1&2&-1\\-1&-1&2\\1&0&-1\end{pmatrix}$得通解$x=k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$($k$为任意常数),则$\gamma=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$

9、(8 分) 设n阶方阵A的伴随矩阵为A^*,证明：若$|A|=O$,则$|A^*|=O$；

证明　下分两种情况证明：

(1) 若$A=O$,此时显然有$A^*=O$,因而$|A^*|=0;$

(2) 若$A\neq O$,此时因$|A|=0$,有$AA^*=|A|E=O.$

下证$|A^*|=0$,用反证法证之. 若$|A^*|\neq 0$,则A^*为可逆矩阵，$\left(A^*\right)^{-1}$存在，由$AA^*=O$得到

$AA^*\left(A^*\right)^{-1}=O,$

即$A=O.$这与$A\neq O$矛盾，故$|A^*|=0.$再由（1）与（2）知，若$|A|=0$,则$|A^*|=0.$

10、(10 分) 设实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+ax_3)^2$其中$a$为参数。

(1) 求$f(x_1,x_2,x_3)=0$的解；(2) 求$f(x_1,x_2,x_3)$的规范形。

解　(1) $f(x_1,x_2,x_3)=0\Leftrightarrow\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0\\x_2+x_3=0\\x_1+ax_3=0\end{cases}$ 即$\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&1\\1&0&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$

系数矩阵$\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&1\\1&0&a\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&a-2\end{pmatrix}$，当$a\neq 2$时，$Ax=0$只有零解，

当$a=2$时，$\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&1\\1&0&a\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，方程组$Ax=0$有无穷组非零解$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix},c\in R$

(2) 当$a\neq 2$时，作变换$y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$可逆，则二次型的规范形为 $f=y_1^2+y_2^2+y_3^2$

当$a=2$时，$f=2x_1^2+2x_2^2+6x_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3+4x_2x_3$，二次型矩阵为：$B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

由$\left|B-\lambda I\right|=3\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2-\lambda & 0 \end{vmatrix}+(6-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}=-\lambda(\lambda^2-10\lambda+18)=0$

得$\lambda_1=0,\lambda_2=5+\sqrt{7},\lambda_3=5-\sqrt{7}$ 所以标准形为$f=$（$5+\sqrt{7}$）z_2^2+（$5-\sqrt{7}$）z_3^2