武汉大学 2018-2019 第一学期线性代数 B 期末试题 A 解答

1. （10 分）计算行列式 $\begin{vmatrix} a & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & a & 3 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 2 & a & \cdots & n-2 & n-1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & a \end{vmatrix}$ $(a-i\neq 0, i=1,2,\cdots,n-1)$.

解 原式 $=\begin{vmatrix} a & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 1-a & a-2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1-a & 0 & a-3 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1-a & 0 & 0 & 0 & a-(n-1) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a-\sum\limits_{i=2}^{n-1} i\dfrac{a-1}{a-i} & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 0 & a-2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-3 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-(n-1) \end{vmatrix}$

$=(a-\sum\limits_{i=2}^{n-1} i\dfrac{a-1}{a-i})\prod\limits_{i=2}^{n-1} a(a-i)$ 10 分

2. （10 分）设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $AB=A^{-1}-B$，求矩阵 $B^{-1}-A$.

解 $\because AB=A^{-1}-B \quad \therefore (A+E)B=A^{-1}$，$A+E=A^{-1}B^{-1} \quad \therefore A(A+E)=B^{-1}$（4 分）

则 $B^{-1}=A(A+E)=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 8 分

故 $B^{-1}-A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 10 分

3. （10 分）考虑向量 $\alpha_1=(1\ \ 3\ \ 2\ \ 0)^T, \alpha_2=(7\ \ 0\ \ 14\ \ 3)^T, \alpha_3=(2\ \ -1\ \ 0\ \ 1)^T$, $\alpha_4=(5\ \ 1\ \ 6\ \ 2)^T, \alpha_5=(2\ \ -1\ \ 4\ \ 1)^T$ (1) 求向量组的秩；(2) 求此向量组的一个极大线性无关组，并把其余向量分别用该极大线性无关组表示.

解 $\begin{pmatrix}1&7&2&5&2\\3&0&-1&1&-1\\2&14&0&6&4\\0&3&1&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\0&1&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$，向量组的秩为3, 7分

极大线性无关组为α_1、α_2、α_3 $\alpha_4=\frac{2}{3}\alpha_1+\frac{1}{3}\alpha_2+\alpha_3$ $\alpha_5=-\frac{1}{3}\alpha_1+\frac{1}{3}\alpha_2$ 10分

4.（10分）已知向量组$\beta_1=\begin{pmatrix}1&0&2\end{pmatrix}^T,\beta_2=\begin{pmatrix}1&\lambda&0\end{pmatrix}^T,\beta_3=\begin{pmatrix}1&1&\mu\end{pmatrix}^T$与向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1&1&1\end{pmatrix}^T$ $\alpha_2=\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}^T$有相同的秩，并且$\beta_3$ 可由 α_1,α_2线性表示，求λ，μ 的值。

解 β_3 可由 α_1,α_2线性表示，即β_3 ，α_1,α_2 线性相关

所以$|\beta_3,\alpha_1,\alpha_2|=0$，解得$\mu$=1 . 5分

又由β_1,β_2,β_3与α_1,α_2有相同的秩，即β_1,β_2,β_3 的秩为2

所以$|\beta_3,\beta_1,\beta_2|=0$ ，解得λ=2 . 10分

5、（16分）a 取何值时，方程组$\begin{cases}x_1+x_2-2x_3=a\\3x_1-x_2+2x_3=a\\x_1+5x_2-10x_3=6\end{cases}$ 有无穷多组解？并求通解。

解：方程组的增广矩阵

$$(A\mid B)=\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&-2&a\\3&-1&2&a\\1&5&-10&6\end{array}\right)\xrightarrow{r_2+r_1}\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&-2&a\\4&0&0&2a\\1&5&-10&6\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-5r_1}\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&-2&a\\4&0&0&2a\\-4&0&0&6-5a\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2}\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&-2&a\\0&0&0&6-3a\\-4&0&0&6-5a\end{array}\right)\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_2}\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&-2&a\\-4&0&0&6-5a\\0&0&0&6-3a\end{array}\right)$$ 9分

如果方程组有无穷多组解，则 $rank(A\mid B)=2$ $\therefore 6-3a=0$ 12

当$a=2$时原方程有无数个解，且原方程等价于$\begin{cases}x_1+x_2-2x_3=0\\-4x_1=-4\end{cases}$，$\begin{cases}x_1=1\\x_2=1+2c\\x_3=c\end{cases}$ 16分

6.（8分）若三阶方阵A与对角方阵$\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-3\end{pmatrix}$相似，求行列式$\left|6A^{-1}-2I\right|$ 的值（其中A^{-1}为矩阵A的逆矩阵）。

解： 因为 $|A|=1\times2\times(-3)=-6\neq0$，当$A$的特征值为$\lambda$，则$A^{-1}$的特征值为$\frac{1}{\lambda}$， 4分

又$\frac{6}{\lambda}-2$是$6A^{-1}-2I$的特征值，因为 3阶方阵**A**的特征值为1,、2、-3，所以3阶方阵$6A^{-1}-2I$的特征值为:4、1、-4， 则$\left|6A^{-1}-2I\right|=4\times1\times(-4)=-16$ 8分

7、（8分）求向量$\beta=\begin{pmatrix}5&-1&3\end{pmatrix}^T$，在基$\alpha_1=\begin{pmatrix}1&0&1\end{pmatrix}^T,\alpha_2=\begin{pmatrix}1&1&0\end{pmatrix}^T,\alpha_3=\begin{pmatrix}1&1&1\end{pmatrix}^T$下的坐标。

解 求向量$\beta=\begin{pmatrix}5 & -1 & 3\end{pmatrix}^T$，在基$\alpha_1=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix}^T$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix}^T$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}$下的坐标。

解 法一 设向量β在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的坐标为$(x_1,x_2,x_3)^T$，则

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\beta \quad \begin{cases}x_1+x_2+x_3=5\\ x_2+x_3=-1\\ x_1+x_3=3\end{cases} \quad（4\text{分}）\quad \begin{cases}x_1=6\\ x_2=2\\ x_3=-3\end{cases} \quad（8\text{分}）$$

法二 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\beta \quad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}\beta$ 4 分

而 $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 5\\0 & 1 & 1 & -1\\1 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 6\\0 & 1 & 0 & 2\\0 & 0 & 1 & -3\end{pmatrix}$ 故有 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\2\\-3\end{pmatrix}$ 8 分

8、（12 分）设有矩阵$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 3 & 2\\0 & 2 & 3\end{pmatrix}$.（1）写出矩阵$A$的二次型$f$；（2）求一个正交相似变换矩阵$P$，将$A$化为对角矩阵；（3）判断$f$是否是正定二次型。

解：（1）$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4x_2x_3$ 2 分

(2) $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda & 0 & 0\\0 & 3-\lambda & 2\\0 & 2 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)[(3-\lambda)(3-\lambda)-4]=-(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-5)=0$

可得特征值：$\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=5$ 5 分

相应的特征向量为：对于$\lambda_1=1$，解齐次线性方程组$(A-E)\vec{x}=\vec{o}$

$$(A-E)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 2\\0 & 2 & 2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad \begin{cases}x_1=0\\x_2=-x_3\Rightarrow\\x_3=x_3\end{cases}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} \quad \text{得基础解系} \quad \vec{\xi}_1=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

对于$\lambda_2=2$，解齐次线性方程组$(A-2E)\vec{x}=\vec{o}$，$(A-2E)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 1 & 2\\0 & 2 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & -3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$\begin{cases}x_1=x_1\\x_2=0\Rightarrow\\x_3=0\end{cases}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ 得基础解系 $\vec{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，对于$\lambda_3=5$，解齐次线性方程组$(A-5E)\vec{x}=\vec{o}$

$$(A-5E)=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\0 & -2 & 2\\0 & 2 & -2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad \begin{cases}x_1=0\\x_2=x_3\Rightarrow\\x_3=x_3\end{cases}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \quad \text{得基础解系} \quad \vec{\xi}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

实对称矩阵A三个特征不相同，$\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2,\vec{\xi}_3$必两两正交，对$\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2,\vec{\xi}_3$单位化

$$\vec{p}_1=\frac{\vec{\xi}_1}{\|\vec{\xi}_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix};\quad \vec{p}_2=\vec{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix};\quad \vec{p}_3=\frac{\vec{\xi}_3}{\|\vec{\xi}_3\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$P=\left(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\vec{p}_3\right)=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix} \qquad P^{-1}AP=P^{T}AP=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$$ 10 分

（3）因为$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$都为正，所以$f$是正定二次型。 12 分

9、(8 分) 设A、B为$m\times n$矩阵，证明A与B等价的充要条件为$R(A)=R(B)$。

证明：(必要性）初等变换不改变矩阵的秩，所以$R(A)=R(B)$ 4 分

（充分性）设$R(A)=R(B)=r$，则 A、B 的标准型都为$\begin{pmatrix}I_r & O\\ O & O\end{pmatrix}$, 即 A、B 都与$\begin{pmatrix}I_r & O\\ O & O\end{pmatrix}$等价，从而 A 与 B 等价。 8 分

10、(8 分）设A是n阶方阵，I是n阶单位矩阵，$A+I$可逆，且$f(A)=(I-A)(I+A)^{-1}$，

证明（1） $(I+f(A))(I+A)=2I$；（2） $f(f(A))=A$

解 （1） 由$f(A)=(I-A)(I+A)^{-1}$所以有

$(I+f(A))(I+A)=(I+A)+(E-A)(I+A)^{-1}(I+A)=(I+A)+(I-A)=2I$ 4 分

（2）由$f(A)=(I-A)(I+A)^{-1}$，故$f(f(A))=(I-f(A))(I+f(A))^{-1}$

有（1）知，$(I+f(A))^{-1}=\frac{1}{2}(I+A)$且由已知$f(A)=(I-A)(I+A)^{-1}$

故有$f(f(A))=(I-f(A))(I+f(A))^{-1}=[I-(I-A)(I+A)^{-1}]\frac{1}{2}(I+A)$

$=[\frac{1}{2}(I+A)-\frac{1}{2}(I-A)=A$ 8 分