武汉大学数学与统计学院

2020--2021 学年第二学期线性代数 B 期末考试试卷(A 卷) 答案

一、单项选择题（每小题 3 分共 12 分）：

（1）(D)　　（2）(B)　　（3）(A)　　（4）(B)

二、填空题（每小题 3 分共 12 分）：

（1）$(-1)^{mn}ab$　　（2）$k_1+k_2=0$　　（3）$c>6$　　（4）$S=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&1&2\\0&1&3\end{pmatrix}$，$\left(3,-5,2\right)^{\mathrm{T}}$.

三、（12 分）计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}0&1&1&\cdots&1\\1&0&2&\cdots&2\\1&2&0&\ddots&\vdots\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&2\\1&2&\cdots&2&0\end{vmatrix}$ 的值，这里 $n\geq 3$.

解　$D_n\overset{r_i-2r_1}{\underset{i\geq 2}{=\!=\!=}}\begin{vmatrix}0&1&\cdots&1\\1&-2&&\\\vdots&&\ddots&\\1&&&-2\end{vmatrix}\overset{c_1+\sum_{j\geq 2}\frac{1}{2}c_j}{=\!=\!=\!=\!=}\begin{vmatrix}\frac{n-1}{2}&1&\cdots&1\\&-2&&\\&&\ddots&\\&&&-2\end{vmatrix}=\dfrac{n-1}{2}(-2)^{n-1}$.

四、（12 分）已知矩阵方程 $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&2&2\\1&-1&0\end{pmatrix}\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&0\\2&1&1\end{pmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

解　因

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&-1&1&-1&1\\0&2&2&1&1&0\\1&-1&0&2&1&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&-1&1&-1&1\\0&2&2&1&1&0\\0&-2&1&1&2&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&-1&1&-1&1\\0&2&2&1&1&0\\0&0&3&2&3&0\end{array}\right)\xrightarrow[r_2\div 2]{r_3\div 3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&-1&1&-1&1\\0&1&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&1&\frac{2}{3}&1&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_1-r_2+r_3]{r_2-r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&\frac{11}{6}&\frac{1}{2}&1\\0&1&0&-\frac{1}{6}&-\frac{1}{2}&0\\0&0&1&\frac{2}{3}&1&0\end{array}\right),$$

所以 $\boldsymbol{X}=\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}11&3&6\\-1&-3&0\\4&6&0\end{pmatrix}$.

或解：因 $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&2&2\\1&-1&0\end{pmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}2&1&4\\2&1&-2\\-2&2&2\end{pmatrix}$（过程略），所以 $\boldsymbol{X}=\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}11&3&6\\-1&-3&0\\4&6&0\end{pmatrix}$.

五、（12 分）设非齐次线性方程组$\begin{cases}-x_1-2x_2+ax_3=1\\ x_1+x_2+2x_3=b\\ 4x_1+5x_2+10x_3=2\end{cases}$，试问：当$a,b$满足什么条件时，方程组有（1）唯一解；（2）无解；（3）有无穷多解？在有无穷多解时，求出对应的齐次线性方程组的基础解系以及该非齐次方程组的通解.

解 系数矩阵的行列式$|\boldsymbol{A}|=a+4$，故

(1) 当$a\neq -4$时，$|\boldsymbol{A}|\neq 0$，方程组有唯一解；

(2) 当$a=-4$时，对增广矩阵作初等行变换，有

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{ccc:c}-1&-2&-4&1\\ 1&1&2&b\\ 4&5&10&2\end{array}\right)\xrightarrow{r}\left(\begin{array}{ccc:c}-1&-2&-4&1\\ 0&-1&-2&b+1\\ 0&0&0&3-3b\end{array}\right),$$

当$b\neq 1$时，则$R(\boldsymbol{A})=2<R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=3$，方程组无解；

(3) 当$a=-4,b=1$时，$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=2<3$，此时方程组有无穷多解，

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\xrightarrow{r}\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&0&3\\ 0&1&2&-2\\ 0&0&0&0\end{array}\right),$$

非齐次线性方程组的一个特解为$\eta^*=\begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix}$，对应的齐次线性方程组的基础解系为$\xi=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$. 非齐次方程组的通解为$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix}$，$c$为任意实数.

六、（12 分）已知向量组$\alpha_1=(1,2,-3)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(3,0,1)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(9,6,-7)^{\mathrm{T}}$与向量组$\beta_1=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$，$\beta_2=(a,2,1)^{\mathrm{T}},\beta_3=(b,1,0)^{\mathrm{T}}$具有相同的秩，且$\beta_3$可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，求$a,b$的值.

解 显然$R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\geq 2$，因$|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=0$，故$R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$，得$R(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=2$，有$|\beta_1,\beta_2,\beta_3|=0$，即$\begin{vmatrix}0&a&b\\ 1&2&1\\ -1&1&0\end{vmatrix}=3b-a=0$。

又因β_3可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，得$R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ \beta_3)$，因

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ \beta_3)=\left(\begin{array}{ccc:c}1&3&9&b\\ 2&0&6&1\\ -3&1&-7&0\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1&3&9&b\\ 0&-6&-12&1-2b\\ 0&0&0&\frac{5-b}{3}\end{array}\right),$$

得$b=5$，$a=15$。

七、（12 分）设齐次线性方程组

$$\begin{cases}2x_1+ax_2+x_3=0,\\ (a+2)x_1-2x_2+2x_3=0,\\ 4x_1+(a-1)x_2+2x_3=0\end{cases}$$

有非零解，且 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值为 $-4, 2, 2$，对应的特征向量分别有

$$\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix}1\\2a\\3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}a-1\\a+2\\a+1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_3=\begin{pmatrix}a+2\\a+1\\1\end{pmatrix}.$$

试确定参数 a，并求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

解 3×3 齐次线性方程组有非零解，则系数行列式为 0，即

$$\begin{vmatrix}2 & a & 1\\ a+2 & -2 & 2\\ 4 & a-1 & 2\end{vmatrix}=-(a-2)(a+1)=0,$$

得 $a=2$ 或 -1.

若 $a=2$，则 $\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{x}_2$，与 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的特征向量矛盾！故 $a=-1$．当 $a=-1$ 时，

$$\boldsymbol{x}_1=(1,-2,3)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{x}_2=(-2,1,0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{x}_3=(1,0,1)^{\mathrm{T}},$$

显然 $\boldsymbol{x}_2$，$\boldsymbol{x}_3$ 线性无关，从而 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\boldsymbol{x}_3$ 线性无关.

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{x}_3)$，则 $\boldsymbol{P}$ 可逆，可求得 $\boldsymbol{P}^{-1}=\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}-1 & -2 & 1\\ -2 & 2 & 2\\ 3 & 6 & 3\end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}(-4,2,2)$，得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\,\mathrm{diag}(-4,2,2)\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ -2 & -2 & 2\\ 3 & 6 & -1\end{pmatrix}.$$

八、证明（16 分，每小题 8 分）：

(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶方阵，试证：若 3 维非零向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 满足 $\boldsymbol{A}\alpha_1=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{A}\alpha_2=\alpha_1$，$\boldsymbol{A}^2\alpha_3=\alpha_1$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.

(2) 假设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶实对称矩阵，并且 $\boldsymbol{A}$ 的特征值均大于 a，$\boldsymbol{B}$ 的特征值均大于 b，证明：$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的特征值均大于 $a+b$.

证 (1) 设有数 k_1,k_2,k_3，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=\boldsymbol{0}, \qquad (1)$$

等式两边左乘 $\boldsymbol{A}$，由 $\boldsymbol{A}\alpha_1=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{A}\alpha_2=\alpha_1$，有

$$k_2\boldsymbol{A}\alpha_2+k_3\boldsymbol{A}\alpha_3=k_2\alpha_1+k_3\boldsymbol{A}\alpha_3=\boldsymbol{0} \qquad (2)$$

等式两端再左乘 $\boldsymbol{A}$，得

$$k_2\boldsymbol{A}\alpha_1+k_3\boldsymbol{A}^2\alpha_3=k_3\alpha_1=\boldsymbol{0} \qquad (3)$$

所以 $k_3=0$．由(2)得 $k_2=0$．再由(1)知 $k_1=0$．所以向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.

(2) 依题设条件有，实对称矩阵 $\boldsymbol{A}-a\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}-b\boldsymbol{E}$ 的特征值全为正，故 $\boldsymbol{A}-a\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}-b\boldsymbol{E}$ 均正定，因此 $(\boldsymbol{A}-a\boldsymbol{E})+(\boldsymbol{B}-b\boldsymbol{E})=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-(a+b)\boldsymbol{E}$ 也正定，故 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的特征值全大于 $\mathrm{a}+\mathrm{b}$.