武汉大学 2018-2019 学年第二学期期末考试

线性代数 B（A 卷解答）

一、（10 分）已知 $|A|=\begin{vmatrix} k_1 & 2 & 1 & 2 \\ k_2 & 2 & 2 & 2 \\ k_3 & 1 & 3 & 4 \\ k_4 & 1 & 4 & 4 \end{vmatrix}=18$，试计算 $A_{12}+A_{22}$，$A_{32}+A_{42}$ 的值。

解：由代数余子式的性质有 $\begin{cases} 2(A_{12}+A_{22})+(A_{32}+A_{42})=18 \\ 2(A_{12}+A_{22})+4(A_{32}+A_{42})=0 \end{cases}$ 6 分

由克莱姆法则知

$$A_{12}+A_{22}=\frac{\begin{vmatrix} 18 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}=12 \qquad A_{32}+A_{42}=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 18 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}=-6$$ 10 分

二、（12 分）求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-2,3,-1,2)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,2,-2,-3)^T$ $\boldsymbol{\alpha}_3=(5,0,7,-5,-4)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(3,-1,5,-3,-1)^T$ 的秩和一个极大线性无关组，并将其余向量用极大线性无关组线性表示。

解：设 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 7 & 5 \\ -1 & -2 & -5 & -3 \\ 2 & -3 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ 4 分

先对 A 施行行初等变换化为行最简形矩阵 $A \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 8 分

知向量组的秩 $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=R(A)=2$，易知 1、2 两列即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个极大无关组，且有 $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$. 10 分

三、（14 分）设矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，

（1）求 $(A+B)^2-(A^2+2AB+B^2)$；　　（2）求 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵.

解（1）　因为

$(A+B)^2-(A^2+2AB+B^2)=(A+B)(A+B)-A^2-2AB-B^2=BA-AB$ 4 分

而，$BA=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 8 & 6 & 6\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$，$AB=\begin{pmatrix}0 & 7 & 3\\ -2 & 5 & 2\\ -2 & 4 & 3\end{pmatrix}$

所以 $\boldsymbol{(A+B)^2-(A^2+2AB+B^2)=BA-AB=}\begin{pmatrix}1 & -8 & -3\\ 10 & 1 & 4\\ 2 & -5 & -2\end{pmatrix}$ 9 分

（2）$\boldsymbol{A^{-1}=\frac{1}{4}}\begin{pmatrix}-1 & 3 & -1\\ 3 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 3\end{pmatrix}$ 14 分

四、（15 分）设有线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+\lambda x_2+x_3=3\\ x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda-1\end{cases}$.

讨论 λ 为何值时,方程组有唯一解、无解、有无穷多解？并在有无穷多解时，求出其通解.

解：经计算系数行列式得 $|A|=(\lambda-1)^2(\lambda+2)$, 4分

于是由克莱姆法则有如下结论：

(1)当 $\boldsymbol{\lambda\neq 1}$ 且 $\boldsymbol{\lambda\neq -2}$ 时，$\boldsymbol{r(A)=r(B)=3,}$ **方程组有唯一解；**

(2)当 $\boldsymbol{\lambda=1}$ 时，$\boldsymbol{r(A)=1}$，$\boldsymbol{r(B)=2}$，**该情形方程组无解；**

(3)当 $\boldsymbol{\lambda=-2}$ 时，$\boldsymbol{r(A)=r(B)=2,}$**，此时方程组有无限多个解。** 10 分

而 $\boldsymbol{B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 3\\ 1 & 1 & -2 & -3\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -1\\ 0 & -1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},}$

由此得 $\boldsymbol{\begin{cases}x_1=x_3-1\\ x_2=x_3-2\\ x_3=x_3\end{cases}}$，**即** $\boldsymbol{\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\ -2\\ 0\end{pmatrix}}$，$\boldsymbol{(c\in R)}$. 15 分

五、（16 分）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3\ (b>0)$, 其中二次型的矩阵 A 的特征值之和为 1，特征值之积为 -12.

1、a,b 的值； 2、用正交变换将二次型 f 化为标准形，并写出所用的正交变换矩阵。

解 1、次型 f 的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}a & 0 & b\\ 0 & 2 & 0\\ b & 0 & -2\end{pmatrix}$. 设 A 的特征值为 $\lambda_i\ (i=1,2,3)$. 由题设，有

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=a+2+(-2)=1,\qquad \lambda_1\lambda_2\lambda_3=\begin{vmatrix}a & 0 & b\\ 0 & 2 & 0\\ b & 0 & -2\end{vmatrix}=-4a-2b^2=-12.$$

解得 $a=1,b=2$. 8 分

2、矩阵 A 的特征多项式 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & -2\\ - & \lambda-2 & 0\\ -2 & 0 & \lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+3)$, 得 A 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=-3$. 11 分

对于 $\lambda_1=\lambda_2=2$, 解方程组 $\left(2E-A\right)X=0$, 得其基础解系 $\xi_1=\left(2,0,1\right)^T, \xi_2=\left(0,1,0\right)^T$.

对于 $\lambda_3=-3$, 解齐次线性方程组 $\left(-3E-A\right)X=0$, 得基础解系 $\xi_3=\left(1,0,-2\right)^T$.

由于 ξ_1,ξ_2,ξ_3 已是正交向量组，为得到规范正交向量组，只需将 ξ_1,ξ_2,ξ_3 单位化，由此得

$$\eta_1=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},0,\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^T, \eta_2=\left(0,1,0\right)^T, \eta_3=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},0,-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^T.$$

令矩阵 $Q=\left(\eta_1,\eta_2,\eta_3\right)=\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$. 则 Q 为正交矩阵. 在正交变换 $X=QY$ 下，有

$Q^TAQ=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, 且二次型的标准形为 $f=2y_1^2+2y_2^2-3y_3^2$.　　　　16 分

六、(15 分) 设 n 阶矩阵 A,B 满足条件 $A+B=AB$，其中 $B=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，且 $a_1=(1,0,1)$ $a_2=(2,1,0), a_3=(1,1,1)$，1、求矩阵 A；2、求秩 $r(A^*B^*)$，其中 A^*,B^* 分别为 A,B 的伴随矩阵；3、设 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)B$，求 β_1,β_2,β_3；

1) 由题设有 $A(B-I)=B$，而 $|B-I|=\begin{vmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=6\neq 0$ 可逆，

易算得：$(B-I)^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　　　　5 分

因而有 $A=B(B-I)^{-1}=\begin{pmatrix} & -3 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　　7 分

2) 由 A,B 均可逆，故 A^*,B^* 也均可逆，所以 $r(A^*B^*)=3$；　　　11 分

3) $b_1=a_1+2a_2=(5,2,1), b_2=-3a_1+a_2=(-1,1,-3), b_3=2a_3=(2,2,2)$

15 分

七、(10 分) 设 A、B 均是同阶方阵，B 是可逆矩阵，且满足 $A^2+AB+B^2=0$，证明 A、A^2+B^2 以及 $A^{-1}+B^{-1}$ 都是可逆矩阵。

证　因为 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=-\boldsymbol{B}^2$，则 $|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=(-1)^n|\boldsymbol{B}|^2\neq 0$

所以$|\boldsymbol{A}|\neq 0$，因而A和$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$可逆。　　　　　　　　　　5 分

注意　$\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2=-\boldsymbol{AB}$，$\left|\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2\right|=\left|-\boldsymbol{AB}\right|=\left|-\boldsymbol{A}\right|\left|\boldsymbol{B}\right|\neq 0$，因而$\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2$可逆。

注意　$A^{-1}+B^{-1}=A^{-1}A(A^{-1}+B^{-1})BB^{-1}=A^{-1}(A+B)B^{-1}$，

$$\left|A^{-1}+B^{-1}\right|=\left|A^{-1}\right|\left|(A+B)\right|\left|B^{-1}\right|$$

因为A、B、$A+B$均可逆，故$|\boldsymbol{A}|\neq 0, |\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|\neq 0, |\boldsymbol{B}^{-1}|\neq 0$

所以有　$|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}|\neq 0$　，　即$A^{-1}+B^{-1}$可逆。　　　10 分

八、（8 分）设B是$m\times n$阶矩阵，其m个行向量是齐次线性方程组$Ax=0$的一个基础解系，证明：对任一m阶可逆矩阵C，CB的行向量组也是$Ax=0$的基础解系。

解　有题意，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_m\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关，且$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{T}}{}_{\boldsymbol{i}}=0$

设$\boldsymbol{CB}=\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\ \boldsymbol{\beta}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\beta}_m\end{pmatrix}$，则　$\boldsymbol{CB}=\mathrm{C}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\ \boldsymbol{\beta}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\beta}_m\end{pmatrix}$　　　　　6 分

由于$\boldsymbol{C}$可逆，$\boldsymbol{CB}$的行向量组线性无关。而$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{CB})^{\boldsymbol{T}}=\boldsymbol{AP}^{\boldsymbol{T}}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1^{\boldsymbol{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\boldsymbol{T}},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m^{\boldsymbol{T}})\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{T}}=0$

故　$\boldsymbol{CB}$的行向量组也是$\boldsymbol{Ax}=0$的解向量，从而也是基础解系。　　　　8 分