武汉大学 2018-2019 第一学期线性代数 B 期末试题 A

1. （10 分）计算行列式 $\begin{vmatrix} a & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & a & 3 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 2 & a & \cdots & n-2 & n-1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & a \end{vmatrix}$ $(a-i\neq 0, i=1,2,\cdots,n-1)$.

2. （10 分）设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $AB=A^{-1}-B$，求矩阵 $B^{-1}-A$.

3. （10 分）考虑向量 $\alpha_1=(1\quad 3\quad 2\quad 0)^T,\alpha_2=(7\quad 0\quad 14\quad 3)^T,\alpha_3=(2\quad -1\quad 0\quad 1)^T$, $\alpha_4=(5\quad 1\quad 6\quad 2)^T,\alpha_5=(2\quad -1\quad 4\quad 1)^T$ (1) 求向量组的秩；(2) 求此向量组的一个极大线性无关组,并把其余向量分别用该极大线性无关组表示。

4.（10 分）已知向量组 $\beta_1=(1\quad 0\quad 2)^T,\beta_2=(1\quad \lambda\quad 0)^T,\beta_3=(1\quad 1\quad \mu)^T$ 与向量组 $\alpha_1=(1\quad 1\quad 1)^T$ $\alpha_2=(1\quad 2\quad 3)^T$ 有相同的秩，并且 β_3 可由 α_1,α_2 线性表示，求 m,n 的值。

5、（16 分）a 取何值时，方程组 $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=a \\ 3x_1-x_2+2x_3=a \\ x_1+5x_2-10x_3=6 \end{cases}$ 有无穷多组解？并求通解。

6.（8 分）若三阶方阵 A 与对角方阵 $\Lambda=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ 相似，求行列式 $|6A^{-1}-2I|$ 的值（其中 A^{-1} 为矩阵 A 的逆矩阵）。

7、（8 分）求向量 $\beta=(5\quad -1\quad 3)^T$，在基 $\alpha_1=(1\quad 0\quad 1)^T,\alpha_2=(1\quad 1\quad 0)^T,\alpha_3=(1\quad 1\quad 1)^T$ 下的坐标。

8、（12 分）设有矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$（1）写出矩阵 A 的二次型 f；（2）求一个正交相似变换矩阵 P，将 A 化为对角矩阵；（3）判断 f 是否是正定二次型。

9、（8 分）设 A、B 为 $m\times n$ 矩阵，证明 A 与 B 等价的充要条件为 $R(A)=R(B)$。

10、（8 分）设 A 是 n 阶方阵，I 是 n 阶单位矩阵，$A+I$ 可逆，且 $f(A)=(I-A)(I+A)^{-1}$，
证明（1） $(I+f(A))(I+A)=2I$；（2） $f(f(A))=A$