武汉大学数学与统计学院

2021--2022 学年第一学期线性代数 B 期末考试试卷(A 卷)

符号说明：$\det(\boldsymbol{A})$ 指方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式；$\boldsymbol{A}^*$ 指方阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵；$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 指矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵；$R(\boldsymbol{A})$ 指矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩；$\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵.

一、单项选择题（每小题 3 分共 12 分）：

(1) 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为同阶可逆方阵，则________

(A) $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.　(B) 存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$，使有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

(C) 存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$，使有 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.　(D) 存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$.

(2) 设向量组 α_1，α_2，α_3 线性无关，则下列向量组中，线性无关的是________.

(A) $\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3-\alpha_1$

(B) $\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3$

(C) $\alpha_1+2\alpha_2$，$2\alpha_2+3\alpha_3$，$3\alpha_3+\alpha_1$

(D) $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，$2\alpha_1-3\alpha_2+22\alpha_3$，$3\alpha_1+5\alpha_2-5\alpha_3$

(3) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的导出组，则下列结论正确的是_______.

(A) 当 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解；

(B) 当 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解；

(C) 当 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解；

(D) 当 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解.

(4) n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 具有 n 个不同的特征值是 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵相似的_______.

(A) 充分必要条件　(B) 充分而非必要条件

(C) 必要而非充分条件　(D) 既非充分也非必要条件

二、填空题（每小题 3 分共 12 分）：

(1) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，$\left|\boldsymbol{A}\right|=2,\left|\boldsymbol{B}\right|=-3$，则 $\left|2\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^{-1}\right|=$________.

(2) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 4 元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的 3 个解向量，且 $R(\boldsymbol{A})=3$，$\alpha_1=(0,1,2,3)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2+\alpha_3=(2,3,4,5)^{\mathrm{T}}$，$c$ 表任意常数，则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=$______.

(3) 设 3 维向量 β 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标为 $(1,2,1)^{\mathrm{T}}$，则 β 关于基 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 下的坐标为________.

(4) 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1，-1，2，求 $\left|\boldsymbol{A}^{-1}+3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}\right|$ 的值为_______.

三、(10 分) 计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ 1 & a+1 & 3 & \cdots & n\\ 1 & 2 & a+1 & \cdots & n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 2 & 3 & \cdots & a+1\end{vmatrix},$$

四、(12 分)设有向量组(A)：$\alpha_1=(a,2,10)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=(-2,1,5)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3=(-1,1,4)^{\mathrm{T}}$，及向量$\beta=(1,b,-1)^{\mathrm{T}}$，问$a,b$为何值时：

(1) 向量β能由向量组(A)线性表示，且表示式唯一；

(2) 向量β不能由向量组(A)线性表示；

(3) 向量β能由向量组(A)线性表示，且表示式不唯一，并求一般表示式.

五、(12 分) 求向量组$\boldsymbol{a}_1=(1,-1,1,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_2=(-1,3,5,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_3=(3,-2,-1,b)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_4=(-2,6,10,a)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_5=(4,-1,6,10)^{\mathrm{T}}$的秩和一个极大无关组.

六、(12 分)设(I)和(II)都是 3 元非齐次线性方程组，

(I)的通解为：$\xi_1+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$，其中$\xi_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$，$k_1,k_2$为任意常数；

(II)的通解为：$\xi_2+k\beta$，其中$\xi_2=(0,1,2)^{\mathrm{T}}$，$\beta=(1,1,2)^{\mathrm{T}}$，$k$为任意实数.

求(I)和(II)的公共解.

七、(12 分)试利用正交变换将二次型$f(x,y,z)=x^2+4y^2+z^2-4xy-8xz-4yz$化为标准形，判定其正定性，并求$f(x,y,z)$在条件$x^2+y^2+z^2=1$下的最大值.

八、(9 分)对n阶方阵$\boldsymbol{A}$，证明：$R(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases}n, & R(\boldsymbol{A})=n;\\ 1, & R(\boldsymbol{A})=n-1;\\ 0, & R(\boldsymbol{A})\le n-2.\end{cases}$

九、(9 分)判断下列命题是否正确，并说明理由：

(1)若$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则对任意实数$t$，有$t\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\sim t\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$；

(2)设$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则它们一定相似于同一对角矩阵；

(3)设$\boldsymbol{A}$为 4 阶方阵，$R(\boldsymbol{A})=3$，$\lambda=0$是$\boldsymbol{A}$的 3 重特征值，则$\boldsymbol{A}$一定不能相似于对角矩阵.