武汉大学数学与统计学院

2021--2022 学年第一学期线性代数 B 期末考试试卷(A 卷)

一、单项选择题（每小题 3 分共 12 分）：

(1) (D). **(2)** (C) **(3)** (D). **(4)** (B).

二、填空题（每小题 3 分共 12 分）：

(1) $-\dfrac{2^{2n-1}}{3}$. **(2)** $c(2,1,0,-1)^{\mathrm{T}}+(0,1,2,3)^{\mathrm{T}}$，$c$ 为任意实数.

(3) $\left(\frac{1}{2},1,-\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{T}}$. **(4)** -54.

三、(10 分) 计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ 1 & a+1 & 3 & \cdots & n\\ 1 & 2 & a+1 & \cdots & n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 2 & 3 & \cdots & a+1\end{vmatrix}$$

解

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ 1 & a+1 & 3 & \cdots & n\\ 1 & 2 & a+1 & \cdots & n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 2 & 3 & \cdots & a+1\end{vmatrix}\overset{r_i-r_1}{\underset{i=2,3,\cdots,n}{=\!=\!=\!=\!=}}\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ 0 & a-1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & a-2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-(n-1)\end{vmatrix}$$

$=(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)$.

四、(12 分)设有向量组(A)：$\alpha_1=(a,2,10)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=(-2,1,5)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3=(-1,1,4)^{\mathrm{T}}$，及向量 $\beta=(1,b,-1)^{\mathrm{T}}$，问 a,b 为何值时：

(1) 向量 β 能由向量组(A)线性表示，且表示式唯一；

(2) 向量 β 不能由向量组(A)线性表示；

(3) 向量 β 能由向量组(A)线性表示，且表示式不唯一，并求一般表示式.

解 β 能否由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，相当于对应的非齐次方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$ 是否有解的问题，可转换为方程组求解的情形进行讨论.

方法 1：设有一组数 x_1,x_2,x_3 使得 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$，该方程组的系数行列式

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a & -2 & -1\\ 2 & 1 & 1\\ 10 & 5 & 4\end{vmatrix}=-a-4,$$

故

（1）当 $a \neq -4$ 时，$\left|\boldsymbol{A}\right| \neq 0$，方程组有唯一解，$\beta$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，且表示式唯一.

（2）当 $a = -4$ 时，对增广矩阵作行初等变换，有

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & b \\ 10 & 5 & 4 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_2+2r_1 \\ r_3-5r_1}]{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & 2b+1 \\ 0 & 0 & -1 & -1-5b \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & 2b+1 \\ 0 & 0 & 0 & -3b \end{array}\right),$$

此时若 $b \neq 0$，则方程组无解，β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

若 $b = 0$，$R(\boldsymbol{A}) = R(\overline{\boldsymbol{A}}) = 2 < 3$，方程组有无穷多解，$\beta$ 能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，但表示式不唯一，进一步对上面矩阵进行初等行变换，可得：

$$\beta = k\alpha_1 - (2k+1)\alpha_2 + \alpha_3，k \text{ 为任意实数}.$$

方法 2：直接对下面矩阵作初等行变换，有

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \left(\begin{array}{ccc|c} a & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & b \\ 10 & 5 & 4 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2-\frac{a}{2}r_1]{\substack{r_1 \leftrightarrow r_2 \\ r_3-5r_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & b \\ 0 & -2-\frac{a}{2} & -1-\frac{a}{2} & 1-\frac{ab}{2} \\ 0 & 0 & -1 & -1-5b \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2+(1+\frac{a}{2})r_3]{r_3\cdot(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & b \\ 0 & -2-\frac{a}{2} & 0 & 1-\frac{ab}{2}+(1+5b)(1+\frac{a}{2}) \\ 0 & 0 & 1 & 1+5b \end{array}\right),$$

故当 $-2-\dfrac{a}{2} \neq 0$，即 $a \neq -4$ 时，向量 β 能由向量组(A)线性表示，且表示式唯一；

当 $-2-\dfrac{a}{2} = 0$，即 $a = -4$ 时，进一步有

$$\overline{\boldsymbol{A}} \xrightarrow{r} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & -3b \\ 0 & 0 & 1 & 1+5b \end{array}\right),$$

从而当 $b = 0$ 时，方程组有无穷多解，β 能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示（表示法略去）；$b \neq 0$ 时，则方程组无解, 即 β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

五、(12 分) 求向量组 $\boldsymbol{a}_1 = (1,-1,1,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_2 = (-1,3,5,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_3 = (3,-2,-1,b)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_4 = (-2,6,10,a)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_5 = (4,-1,6,10)^{\mathrm{T}}$ 的秩和一个极大无关组.

解 对下列矩阵作初等行变换，

$$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4,\boldsymbol{a}_5)=\begin{pmatrix}1&-1&3&-2&4\\-1&3&-2&6&-1\\1&5&-1&10&6\\3&1&b&a&10\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-3r_1]{\substack{r_2+r_1\\r_3-r_1}}\begin{pmatrix}1&-1&3&-2&4\\0&2&1&4&3\\0&6&-4&12&2\\0&4&b-9&a+6&-2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-2r_2]{r_3-3r_2}\begin{pmatrix}1&-1&3&-2&4\\0&2&1&4&3\\0&0&-7&0&-7\\0&0&b-11&a-2&-8\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-(b-11)r_3]{r_3\div(-7)}\begin{pmatrix}1&-1&3&-2&4\\0&2&1&4&3\\0&0&1&0&1\\0&0&0&a-2&3-b\end{pmatrix}.$$

故

(1) 当$a=2,b=3$时，向量组的秩为 3，$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$（或$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_5$）为一个极大无关组；

(2) 当$a\neq 2$时，向量组的秩为 4，$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$为一个极大无关组；

(3) 当$b\neq 3$时，向量组的秩为 4，且$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_5$为一个极大无关组.

六、(12 分)设(I)和(II)都是 3 元非齐次线性方程组，

(I)的通解为：$\xi_1+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$，其中$\xi_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$，$k_1,k_2$为任意常数；

(II)的通解为：$\xi_2+k\beta$，其中$\xi_2=(0,1,2)^{\mathrm{T}}$，$\beta=(1,1,2)^{\mathrm{T}}$，$k$为任意实数.
求(I)和(II)的公共解.

解 因公共解具有$\xi_2+k\beta$的形式，即它也是(I)的解，从而存在k_1,k_2使得

$$\xi_2+k\beta=\xi_1+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2.$$

于是$\xi_2+k\beta-\xi_1$可用α_1,α_2线性表示，即

$$R(\alpha_1,\alpha_2,\xi_2+k\beta-\xi_1)=R(\alpha_1,\alpha_2),$$

对下面矩阵$(\alpha_1,\alpha_2,\xi_2+k\beta-\xi_1)$进行初等行变换：

$$\begin{pmatrix}1&1&k-1\\1&2&k+1\\0&1&2k+1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&1&k-1\\0&1&2\\0&1&2k+1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&1&k-1\\0&1&2\\0&0&2k-1\end{pmatrix},$$

得$k=\dfrac{1}{2}$，从而(I)和(II)有公共解：

$$\xi_2+k\beta=\xi_2+\frac{1}{2}\beta=\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ 3\right)^{\mathrm{T}}.$$

七、(12 分)试利用正交变换将二次型$f(x,y,z)=x^2+4y^2+z^2-4xy-8xz-4yz$化为标准形，判定其正定性，并求$f(x,y,z)$在条件$x^2+y^2+z^2=1$下的最大值.

解 二次型对应的矩阵为：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&-4\\-2&4&-2\\-4&-2&1\end{pmatrix}$，由 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程

$$\left|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right|=\begin{vmatrix}\lambda-1&2&4\\2&\lambda-4&2\\4&2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-5)^2(\lambda+4)=0\text{，}$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=5$，$\lambda_3=-4$.

由 $(5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得基础解系 $\boldsymbol{x}_1=(1,-2,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{x}_2=(4,2,-5)^{\mathrm{T}}$，即属于 $\lambda_1=\lambda_2=5$ 的特征向量.

由 $(-4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})x=\boldsymbol{0}$ 得基础解系 $\boldsymbol{x}_3=(2,1,2)^{\mathrm{T}}$，即属于 $\lambda_3=-4$ 的特征向量.

对于实对称矩阵，不同特征值对应的特征向量正交，上面同一特征值对应的特征向量已经正交化，故只须单位化，令

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}&\frac{4}{3\sqrt5}&\frac23\\-\frac{2}{\sqrt5}&\frac{2}{3\sqrt5}&\frac13\\0&-\frac{5}{3\sqrt5}&\frac23\end{pmatrix},$$

经正交变换 $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}&\frac{4}{3\sqrt5}&\frac23\\-\frac{2}{\sqrt5}&\frac{2}{3\sqrt5}&\frac13\\0&-\frac{5}{3\sqrt5}&\frac23\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$，二次型化为标准形

$$f(x,y,z)=x^2+4y^2+z^2-4xy-8xz-4yz=5x'^2+5y'^2-4z'^2.$$

由其标准形易知该二次型不是正定二次型，且 $f=5x'^2+5y'^2-4z'^2\le5$，最大值为 5.

八、(9 分)对 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，证明：$R(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases}n, & R(\boldsymbol{A})=n;\\1, & R(\boldsymbol{A})=n-1;\\0, & R(\boldsymbol{A})\le n-2.\end{cases}$

证 由伴随矩阵性质有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=\left|\boldsymbol{A}\right|\boldsymbol{E}.$$

当 $R(\boldsymbol{A})=n$ 时，$\boldsymbol{A}$ 可逆，从而 $\boldsymbol{A}^*$ 可逆，此时 $R(\boldsymbol{A}^*)=n$.

当 $R(\boldsymbol{A})=n-1$ 时，$\left|\boldsymbol{A}\right|=0$，有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{O}$，且方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 仅有一个线性无关的解，又 $\boldsymbol{A}^*$ 的每个列向量是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解，故 $R(\boldsymbol{A}^*)=1$.

当 $R(\boldsymbol{A})\le n-2$ 时，由矩阵的秩的定义，$\boldsymbol{A}$ 的所有 $n-1$ 阶子式均为零，即 $A_{ij}=0$，由伴随矩阵的定义，有 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{O}$，此时 $R(\boldsymbol{A}^*)=0$.

九、(9 分) 判断下列命题是否正确，并说明理由：

(1)若 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$，则对任意实数 t，有 $t\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A} \sim t\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$；

(2)设 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$，则它们一定相似于同一对角矩阵；

(3)设 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶矩阵，$R(\boldsymbol{A})=3$，$\lambda=0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 3 重特征值，则 $\boldsymbol{A}$ 一定不能相似于对角矩阵.

解 (1)正确. 若 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$，即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$，从而对任意的实数 t，有 $t\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{t}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{-1}(t\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}$，故 $t\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A} \sim t\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$.

(2)错误. 任一矩阵 $\boldsymbol{A}$ 一定相似于它自身，但 $\boldsymbol{A}$ 不一定相似于对角矩阵，只有当 $\boldsymbol{A}$ 存在 n 个线性无关的特征向量时才相似于对角矩阵.

(3)正确. 由 $R(\boldsymbol{A})=3$ 可知 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系仅有 1 个解向量，即 $\lambda=0$ 仅有 1 个线性无关的特征向量，从而 $\boldsymbol{A}$ 不存在 4 个线性无关的特征向量，$\boldsymbol{A}$ 不能对角化.