武汉大学数学与统计学院 2019－2020 第一学期

《线性代数 B》 （A 卷）

一、（10 分）计算下列行列式；$D_n=\begin{vmatrix} a_1-x & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2-x & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3-x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n-x \end{vmatrix}$；

二、 （10 分分）设非齐次线性方程组$\begin{cases} 2x_1+x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4=b_1 \\ x_1-2x_2+a_{23}x_3+a_{24}x_4=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+2x_3-3x_4=b_3 \end{cases}$ 有三个解向量：

$$\xi_1=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 1\end{pmatrix}^T,\xi_2=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1 & 1\end{pmatrix}^T,\xi_3=\begin{pmatrix}3 & 2 & 4 & 2\end{pmatrix}^T$$

求此方程组系数矩阵的秩，并求其通解（其中$a_{ij},b_i,i=1,2,3;j=1,2,3,4$为已知常数）。

三、（10 分）设m维向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$和向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$有关系

$$\begin{cases} \beta_1=\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_m \\ \beta_2=\alpha_1+\alpha_3+\cdots+\alpha_m \\ \qquad\cdots\cdots \\ \beta_m=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{m-1} \end{cases}$$

问m维向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$和向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$是否同秩？证明你的结论。

四、（10 分）已知矩阵X满足$X+A^{-1}X=A^*+A^{-1}$其中$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$，求矩阵$X$.

五、（10 分）讨论a,b取何值时，方程组$\begin{cases} ax_1+x_2+x_3=4 \\ x_1+bx_2+x_3=3 \\ x_1+2bx_2+x_3=4 \end{cases}$ 有解。.

六（10 分）设 3 阶方阵$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$，试求：

（1） A的特征值和特征向量； （2） A^k（k为正整数）及其特征值和特征向量。

七、（8 分）设A和B为n阶矩阵，且满足$A^2=A$，$B^2=B$，$r(A+B-E)=n$，证明：$r(A)=r(B)$.

八、（10 分）已知 $\alpha_1=(-1,0,1)^T,\alpha_2=(2,2,0)^T,\alpha_3=(0,1,1)^T$

（1）求向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的一个极大线性无关组；（2）求生成的子空间$L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$的一个标准正交基。

九、（12 分）已知实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$经过正交变换$X=PY$化为$y_1^2+2y_2^2$.

（1）判断二次型$f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$是否正定？（2）计算行列式$|A|$的值；

（3）若 $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$，求矩阵 A.

十、（10 分）在四维实向量构成的线性空间 R^4 中, 已知：$\alpha_1=(1,0,0,0)^T$，$\alpha_2=(1,1,0,0)^T$，$\alpha_3=(1,1,1,0)^T$，$\alpha_4=(1,1,1,1)^T$；$\beta_1=(1,-1,a,1)^T$，$\beta_2=(-1,1,2-a,1)^T$，$\beta_3=(-1,1,0,0)^T$，$\beta_4=(1,0,0,0)^T$.（1）求 a 使 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 为 R^4 的基；（2）求由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 到 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 的过渡矩阵 P.