武汉大学2017-2018学年第二学期期末考试线性代数B试题（A）

1、（10分）若$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$都是四维列向量，且四阶行列式$|\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_1|=m,|\alpha_1\alpha_2\beta_2\alpha_3|=n,$计算四阶行列式$|\alpha_3\alpha_2\alpha_1(\beta_1+\beta_2)|$.

2、（10分）已知3阶方阵$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\-2&0&1\end{pmatrix}$，3阶矩阵$B$满足方程 $A^2B-A-B=E$，试求矩阵B.

3、（10 分）已知向量$\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$不共面，试判断向量$\alpha=3\vec{e}_1+2\vec{e}_2-\vec{e}_3,\beta=\vec{e}_1+\vec{e}_2-\vec{e}_3,\gamma=-\vec{e}_1+4\vec{e}_2+5\vec{e}_3$是否共面。

4、（10 分）设$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$为4阶方阵，其中$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$是4维列向量，且$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，$\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$. 已知向量$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，试求线性方程组$Ax=\beta$的通解.

5、（12分）设有向量组$\alpha_1=(1,3,3,1)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_2=(1,4,1,2)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_3=(1,0,2,1)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_4=(1,7,2,k)^{\mathrm{T}}$

（1）问k为何值时，该向量组线性相关？（2）在线性相关时求出该向量组的一个极大线性无关组并将其余向量用该极大线性无关组线性表示。

6、（10分）设A是3阶方阵，互换A的第一、第二列，得矩阵B；再将B的第二列加到第三列上得矩阵C；然后再将矩阵C的第一列乘以2得到矩阵D;求满足$AX=D$ 的可逆矩阵X.

7、（10分）若矩阵$A=\begin{pmatrix}2&2&0\\8&2&a\\0&0&6\end{pmatrix}$可以对角化，设与$A$相似的对角矩阵为$\Lambda$；（1）试求常数$a$的值及对角矩阵$\Lambda$，可逆矩阵$P$使得$P^{-1}AP=\Lambda$.

8、（10分）已知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与$\beta_1,\beta_2,\beta_3$为所有3维实向量构成的线性空间$R^3$的两组基，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的过渡矩阵为$P=\begin{pmatrix}0&2&-1\\-1&0&2\\1&0&0\end{pmatrix}$且$\alpha_1=(1,0,0)^T,\alpha_2=(1,1,0)^T,\alpha_3=(1,1,1)^T$,

试求：(1) 基β_1,β_2,β_3；(2) 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与 β_1,β_2,β_3 下有相同坐标的全体向量.

9、（8分）设n阶方阵A的伴随矩阵为A^*,证明：若$|A|=O,$则$|A^*|=O$；

10、（10分）设实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+ax_3)^2$其中$a$为参数。

（1）求$f(x_1,x_2,x_3)=0$的解；（2）求$f(x_1,x_2,x_3)$的标准形。