Questão 1. Dê exemplos de funções f : N -> N tais que:

- f é total e injetora, mas não sobrejetora.

  $f(n) = n+1$
  Ela é injetora já que sempre gera valores diferentes, é total pois sempre
  dá resultado definido e não é sobrejetora pois não há número natural que satisfaça
  $f(n) = 0$

- f é total e sobrejetora, mas não injetora.

  $f(n) = \lfloor n/2 \rfloor$
  Ela é total pois possui resultado definido para todo N, e sobrejetora pois para
  qualquer número M há um número N tal que f(N) = M. Mas ela não é injetora, visto
  que $f(3) = f(2) = 1$

- f não é total, mas é injetora e sobrejetora.
  $f(n) = n-1$
  Ela é injetora pois cada valor de N gera um resultado diferente em f(n). Ela é
  sobrejetora pois para qualquer número m em N há um correspondente $f(n) = m$
  Ela não é total pois é indefinida para f(0) visto que está limitada em N

Questão 2. Prove que $\{n3 + 3n2 + 3n \mid n \geq 0\} = \{n3 - 1 \mid n > 0\}$.

Para isso, primeiro observamos que:

$n^3 + 3n^2 + 3n = (n + 1)^3 - 1$

Para ver isso, basta expandir o cubo de (n + 1) e simplificar:

$(n + 1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$

$(n + 1)^3 - 1 = n^3 + 3n^2 + 3n$

Com isso, podemos ver que todo número da forma $n^3 + 3n^2 + 3n$, para $n \geq 0$, pode ser escrito na forma $(n + 1)^3 - 1$, onde $n + 1 > 0$. Portanto, todo número da forma $n^3 + 3n^2 + 3n$, para $n \geq 0$, pertence ao conjunto $\{n^3 - 1 \mid n > 0\}$.

Agora, vamos mostrar que todo número da forma $n^3 - 1$, para $n > 0$, pertence ao conjunto $\{n^3 + 3n^2 + 3n \mid n \geq 0\}$. Isso pode ser feito simplesmente substituindo n - 1 por n na expressão $n^3 + 3n^2 + 3n$:

$(n - 1)^3 + 3(n - 1)^2 + 3(n - 1) = n^3 - 3n^2 + 3n - 1 + 3n^2 - 6n + 3 + 3n - 3$

Simplificando, temos:

$n^3 + 3n^2 + 3n - 1$

Portanto, todo número da forma $n^3 - 1$, para $n > 0$, pertence ao conjunto $\{n^3 + 3n^2 + 3n \mid n \geq 0\}$.

Com isso, concluímos que $\{n^3 + 3n^2 + 3n \mid n \geq 0\} = \{n^3 - 1 \mid n > 0\}$.

Questão 3. Prove que $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

Seja x um elemento qualquer em um conjunto universo U.

Se x pertence a $(A \cap B)'$, isso significa que x não pertence a $A \cap B$, ou seja, x não pertence a A ou x não pertence a B (ou ambos). Portanto, x pertence a A' ou x pertence a B' (ou ambos), o que implica que x pertence a $A' \cup B'$.

Por outro lado, se x pertence a A' U B', isso significa que x pertence a A' ou x pertence a B' (ou ambos). Se x pertence a A', então x não pertence a A, mas não sabemos se x pertence a B ou não. Se x pertence a B', então x não pertence a B, mas não sabemos se x pertence a A ou não. Assim, x pertence a (A ∩ B)' se ele não pertence a A e/ou não pertence a B. Portanto, x pertence a (A ∩ B)'.

Assim, concluímos que (A ∩ B)' = A' U B'.

Questão 4. Defina recursivamente a operação de multiplicação sobre N, usando sucessor e a operação de adição.

A multiplicação em cálculo lambda é definida recursivamente dentro desses termos.

mult (λn. λm. m (add n) 0)
onde (add n) é definido por (λa. λb. a (successor b))
(successor b) é o sucessor, que é aplicado a vezes em b.
Por exemplo: 4 (successor 3) calcula 4 sucessores de 3 ou 3 + 1 + 1 + 1 + 1 que é 7. Logo podemos aplicar a adição como iterações recursivas de sucessão
Para multiplicar, aplicamos recursivamente adições de n em m com a mesma lógica

OBS, a definição é recursiva pois lambda define operações únicas, então o 4 (successor 3) calcula o sucessor do sucessor do sucessor do sucessor de 3.

Questão 5. Prove que $1 + 2n < 3n$ para todo $n > 2$.

Provando por indução usando de base k = 3

$1 + 2n = 1 + 2(3) = 7$
$3n = 3(3) = 9$
Como 7 < 9 então a desigualdade é verdade para n = 3

Supondo que a desigualdade seja verdadeira para um número k > 2.
Mostrando também que é verdadeira para k + 1

$1+2(k+1) = 1 + 2k + 2$
Usando a indução para substituir 1 + 2k por 3k -1
$1 + 2(k+1) = (3k – 1) + 2$
$1+2(k+1) = 3k + 1$

Agora o outro lado
$3(k+1) = 3k + 3$

Como $3k + 1 < 3k + 3$ para todo $k > 2$, temos que:

$1 + 2(k+1) < 3(k+1)$
Logo a desigualdade é verdadeira para k+1, sendo assim verdadeira para todo n > 2.

Questão 6. Forneça uma relação que satisfaça a condição:

- ser reflexiva e simétrica mas não transitiva.
- ser reflexiva e transitiva mas não simétrica.
- ser simétrica e transitiva mas não reflexiva.

Obs: uma relação binária ≡ sobre X é uma relação de equivalência se é:

1. Reflexiva: $a \equiv a$ para todo $a \in X$.
2. Simétrica: $a \equiv b$ implica $b \equiv a$.

3. Transitiva: $a \equiv b$ e $b \equiv c$ implica $a \equiv c$.

Cojunto exemplo X {1,2,3,4}

Reflexiva e simétrica {(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,2), (2,1), (2,3), (3,2)};
Não é transitiva pois mesmo que 1,2 e 2,3 não tem 1,3

Reflexiva e transitiva {(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,2), (2,1), (2,3), (1,3)};

Simétrica e transitiva {(1,2), (2,1), (2,3), (1,3), (3,2), (3,1)};