



Metoda zbiorów odniesienia

Metoda punktów odniesienia -wstęp

Poszukiwane jest rozwiązanie problemów optymalizacji wielokryterialnej typu:

$$[(F_1, \dots, F_N): U \rightarrow E] \rightarrow \min(\theta) \quad (1)$$

gdzie U i E oznaczają odpowiednio przestrzeń decyzji i przestrzeń kryteriów (tj. zbiór, w którym wartości przyjmuje funkcja F), $F = (F_1, F_2, \dots, F_N)$ jest wektorową funkcją celu, a θ jest domkniętym i wypukłym stożkiem, wprowadzającym częściowy porządek w E .

W najbardziej powszechnym przypadku:

$$\theta = \mathbb{R}_+^N, E = \mathbb{R}^N$$



Punkt odniesienia

Punkt odniesienia definiujemy jako element przestrzeni kryteriów reprezentujący wartości kryteriów o szczególnym znaczeniu dla decydenta

Funkcja użyteczności

Definiujemy:

$$v: E \rightarrow \mathbb{R}$$

Funkcja v jest silnie monotonicznie rosnąca, tzn:

$$\forall x, y \in E \quad (x \leq_{\theta} y, x \neq y \Rightarrow v(x) < v(y))$$

W konsekwencji minimum funkcji v może być osiągnięte tylko na zbiorze niezdominowanych wartości $F: FP(U, \theta)$ i określa najlepsze kompromisowe rozwiązanie problemu (1).

Problem wielokryterialnego podejmowania decyzji dla (1) sprowadza się do znalezienia lub oszacowania v i rozwiązania problemu minimalizacji

$$v: (F(U) \rightarrow \mathbb{R}) \rightarrow \min \quad (2)$$

Z silnej monotoniczności v wynika, że:

$$\arg \min \{v(x) : x \in F(U)\} \subset FP(U)$$

Schemat rozwiązywania z zastosowaniem zbiorów odniesienia

1. Sformułowanie wielokryterialnego problemu optymalizacji
2. Wielokryterialne podejmowanie decyzji
3. . Wprowadzenie dodatkowej informacji o preferencjach
 - ograniczenia na współczynniki substytucji,
 - punkty odniesienia,
 - ograniczenia w przestrzeni celów.
4. Oszacowanie funkcji użyteczności, wygenerowanie propozycji rozwiązania kompromisowego
5. Ocena decydenta: prośba o aktualizację rozwiązania, aktualizacja dodatkowej informacji, formułowania problemu, zatwierdzenie rozwiązania.

Interpretacja punktów odniesienia poprzez ich estymowaną użyteczność

Każdy punkt odniesienia można scharakteryzować za pomocą dwóch typów informacji:

- znaczenie dla decydenta, określane na ogół a priori przez ekspertów zaangażowanych we wspomaganie decyzji, zwykle bez brania pod uwagę ograniczeń problemu optymalizacji wektorowej
- relacja do zbioru osiągalnych wartości kryteriów w problemie optymalizacji wektorowej (1)

Klasyfikacja punktów odniesienia

Klasyfikacja oparta o informację przekazaną decydentowi z zewnątrz przez ekspertów:

A_0 - granice optymalności - punkty odniesienia, które określają dolną granicę obszaru Q , gdzie optymalizacja kryteriów ma sens.

Szacowana użyteczność: taka sama jak dla punktów docelowych tj.: $v(A_0) = a_1 > 0$.

A_1 - punkty docelowe (poziomy aspiracji, punkty idealne) - elementy E , które modelują idealne rozwiązanie pożądane przez decydenta.

Szacowana użyteczność: $v(A_1) = a_1 > 0$.

A_2 - Rozwiązania status quo (poziomy zastrzeżone, wartości pożądane) - wartości kryteriów, które muszą być przekroczone podczas procesu decyzyjnego.

Szacowana użyteczność: $v(A_2) = a_2$ gdzie $a_2 < a_1$.

A_3 - Antyidealne punkty odniesienia (poziomy porażki) - elementy przestrzeni kryteriów, które odpowiadają rozwiązaniom niekorzystnym.

Szacowana użyteczność: $v(A_3) = a_3$, gdzie $a_3 < a_2 < a_1$

Niesprzeczność punktów odniesienia

Racjonalność procesu decyzyjnego

Proces decyzyjny będzie nazwany racjonalnym wtedy i tylko wtedy, gdy prowadzi do niezdominowanego rozwiązania problemu optymalizacji wielokryterialnej

Niesprzeczność procesu decyzyjnego

Proces podejmowania decyzji w oparciu o oszacowane użyteczności jest niesprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall x, y \in E (v^{\wedge}(x) < v^{\wedge}(y) \Rightarrow x \leq_{\theta} y \text{ lub } x \sim y)$$

gdzie $v^{\wedge}(x)$ jest oszacowaniem użyteczności v dla x , a $x \sim y$ oznacza relację nieporównywalności x i y .

Uwaga: Wartości oszacowane muszą być też zgodne z zasadą użyteczności w skalaryzacji przez odległości z powszechnym rozumieniem pojęcia punktów odniesienia.

Wewnętrzna i wzajemna niesprzeczność punktów odniesienia

Zbiór punktów referencyjnych jest **wewnętrznie niesprzeczny** wtedy i tylko wtedy gdy:

$\forall q_1, q_2 \in A_i$ q_1 oraz q_2 są nieporównywalne.

Klasy A_j oraz A_{j+1} są **wzajemnie niesprzeczne** jeśli

$\forall x \in A_j \exists y \in A_{j+1} : x \leq_{\theta} y$

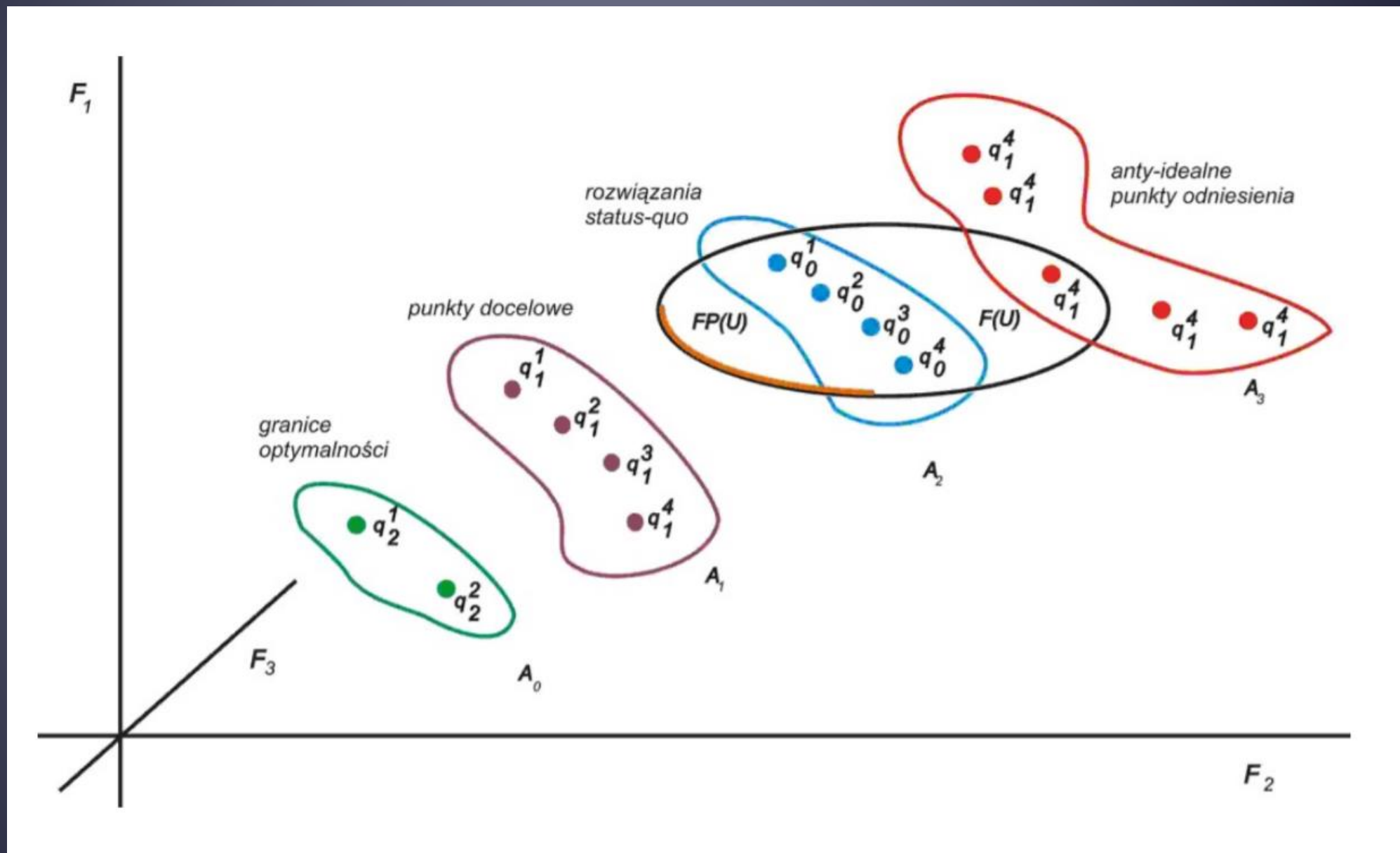
$\forall y \in A_{j+1} \exists x \in A_j : x \leq_{\theta} y$

Twierdzenie 1. Jeżeli wszystkie klasy punktów odniesienia A_i dla problemu (1),(2) są zarówno wewnętrznie, jak i wzajemnie niesprzeczne, wówczas proces rozwiązywania jest niesprzeczny.

Punkty odniesienia –warunki 1-4

Sytuacja w której początkowe oceny decydenta są zgodne z sytuacją rzeczywistą osiągalnych wartości jest przedstawiona poniżej jako Warunki 1-4:

- › **Warunek 1.** Docelowe punkty odniesienia powinny mieć niepustą część wspólną ze zbiorem nieosiągalnych, ściśle dominujących punktów.
- › **Warunek 2.** Rozwiązania status quo powinny być osiągalne.
- › **Warunek 3.** Anty-idealne punkty odniesienia powinny być zdominowane przez co najmniej jeden punkt osiągalny lub powinny być nieporównywalne z $FP(U)$.
- › **Warunek 4.** Dolne granice optymalności powinny być częściowo dominujące lub nieporównywalne.



Proces szacowania użyteczności

Proces szacowania użyteczności obejmuje trzy etapy:

- › przybliżone obliczenie poziomu użyteczności v dla zbiorów odniesienia A_j ,
- › określenie dziedziny E , gdzie zdefiniowane jest oszacowanie funkcji użyteczności v^\wedge ,
- › interpolacja v^\wedge w obszarach ograniczonych przez zbiory poziomów.

SFORMUŁOWANIE WIELOKRYTERIALNEGO PROBLEMU DECYZYJNEGO Z UWZGLĘDNIENIEM DODATKOWYCH INFORMACJI O PREFERENCJACH
↓
SPRAWDZANIE NIESPRZECZNOŚCI PUNKTÓW ODNIESIENIA
Sprawdzanie wewnętrznej niesprzeczności dla każdej klasy punktów odniesienia $A_i, 0 \leq i \leq K$
<p>Jeżeli wykryto sprzeczność:</p> <ul style="list-style-type: none"> po raz pierwszy: zaprezentowanie decydentowi możliwych metod usunięcia sprzeczności, w innym przypadku: użycie metody przyjętej wcześniej.
Sprawdzanie wzajemnej niesprzeczności kolejnych klas punktów odniesienia. Automatyczna lub interakcyjna poprawa sprzecznych ustaleń, o ile występują.
OSZACOWANIE FUNKCJI UŻYTECZNOŚCI
Aproksymacja poziomu zbiorów v^\wedge i znalezienie zakresu oszacowania Q .
Oszacowanie $FP(U, \theta)$ i znalezienie podobozaru R_j w Q_i , ograniczonego przez A_{j-1} oraz A_j , mającego niepustą część wspólną z $FP(U)$ dla maksymalnej wartości użyteczności w A_j .
Jeżeli właściwa konfiguracja zbiorów dopuszczalnych i zbiorów odniesienia nie jest osiągnięta, wówczas należy dokonać przeklasyfikowania punktów odniesienia
Oszacowanie użyteczności w obszarze R_j .
GENEROWANIE ROZWIĄZANIA KOMPROMISOWEGO
Obliczenie rozwiązania kompromisowego maksymalizującego użyteczność przy użyciu v^\wedge jako funkcji skalaryzującej
Wizualizacja rozwiązania kompromisowego, zbiorów $FP(U) \cap R_j, A_{j-1}, A_j$ oraz oszacowanie poziomu zbiorów (level sets) v^\wedge i prezentacja ich decydentowi.
↓
OCENA DECYDENTA