Trabalho Prático 3

Aplicação para solucionar problemas usando diferenças finitas

Trabalho realizado por:

- Pedro Jorge nº 2021142041 LEI
- Luís Travassos nº2021136600 LEI

1 - Introdução

1.1 Método das Diferenças Finitas

O método das diferenças finitas (MDF) é um método de resolução de equações diferenciais que se baseia na aproximação de derivadas por diferenças finitas. A fórmula de aproximação obtém-se da série de Taylor da função derivada.

Hoje, os (MDF's) são a abordagem dominante das soluções numéricas de equações diferenciais parciais.

Existem cinco tipos de fórmulas para as diferenças divididas, para dois pontos podemos usar as fórmulas de diferenças finitas progressivas e regressivas e para três pontos podemos usar as fórmulas de diferenças finitas progressivas, regressivas e centradas, sendo estas diferentes das anteriores.

Fórmulas de diferenças finitas em 2 pontos:

$$Progressivas \rightarrow \mathrm{f}'(x_k) = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{h}$$

$$Regressivas \rightarrow \mathrm{f}'(x_k) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{h}$$

Fórmulas de diferenças finitas em 3 pontos:

$$Progressivas \rightarrow \mathrm{f}'(x_k) = \frac{-3f(x_k) + 4f(x_{k+1}) - \mathrm{f}(x_{k+2})}{2h}$$

$$Regressivas \rightarrow \mathrm{f}'(x_k) = \frac{f(x_{k-2}) - 4f(x_{k-1}) + 3\mathrm{f}(x_k)}{2h}$$

$$Centradas \rightarrow \mathrm{f}'(x_k) = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_{k-1})}{2h}$$

1.2 Regra dos trapézios e Simpson

A regra dos trapézios é um método numérico para resolver uma Equação diferencial ordinária derivado da Regra dos trapézios para integrais computacionais e é descrito pelas seguintes fórmulas:

$$I_T(f) = \frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

$$|E_T| \leq \frac{b-a}{12}\, h^2 M_2, \qquad M_2 = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$$

A fórmula de Simpson, também conhecida como regra de Simpson, é uma forma de se obter uma aproximação da integral definida e baseia-se em aproximar a integral definida pela área sob arcos de parábola que interpolam a função pelas seguintes fórmulas:

$$I_S(f) = \frac{h}{3}[f(x0) + 4f(x1) + 2f(x2) + \cdots + 2f(xn-2) + 4f(xn-1) + f(xn)]$$

$$|Es| \leq \frac{b-a}{180}\, h^4 M_4, \qquad M_4 = \max_{x\,\in\,[a,\,b]} |f^{(4)}(x)|$$

1.3 Funções harmónicas

Uma função harmônica é uma qualquer função cujas derivadas de primeira e segunda ordem são contínuas, cuja verificação é necessária para o uso de certos tipos de métodos de calculo de funções.

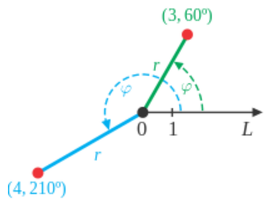
1.4 Coordenadas Polares, Cilíndricas e Esféricas

As coordenadas polares são um sistema de coordenadas bidimensional em que cada ponto no plano é determinado por uma distância e um ângulo em relação a um ponto fixo de referência.

O ponto de referência (análogo a origem no sistema cartesiano) é chamado de polo, e a semirreta do polo na direção de referência é o eixo polar. A distância a partir do polo é chamada coordenada radial ou raio, e o ângulo é chamado coordenada angular, ângulo polar ou azimute.

Polares

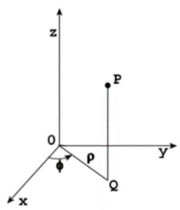
$$T_P = \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}; \qquad J = \rho$$



O sistema de coordenadas Cilíndricas foi concebido a partir da definição das coordenadas polares, em segunda instância, pode-se pensar nele como uma evolução do modelo polar adaptado para o espaço tridimensional.

Cilíndricas

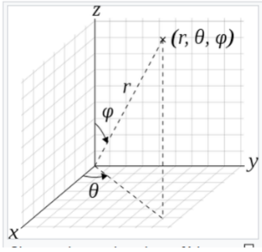
$$T_C = \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,; \\ z = z \end{cases} \qquad J = \rho$$



O sistema de coordenadas esférico é um sistema de referenciamento que permite a localização de um ponto qualquer em um espaço de formato esférico através de um conjunto de três valores, chamados de coordenadas esféricas, semelhantes às definidas anteriormente.

Esféricas

$$T_E = \begin{cases} x = R\,\text{sen}\,\varphi\cos\theta \\ y = R\,\text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\theta\,; \qquad J = -R^2\,\text{sen}\,\varphi \\ z = R\cos\varphi \end{cases}$$



1.5 Integral Múltiplo

A integral múltipla é uma integral definida para funções de múltiplas variáveis.

Assim como a integral definida de uma função positiva de uma variável representa a área entre o gráfico e o eixo x, a integral dupla de uma função de duas variáveis representa o volume entre o gráfico e o plano que contém seu domínio. Se houver mais de duas variáveis, a integral representa o hipervolume de funções multidimensionais.

Integrais múltiplas de uma função de n variáveis sobre um domínio D são geralmente representadas por sinais de integrais juntos na ordem reversa de execução (a integral mais à esquerda é computada por último) seguidos pela função e pelos símbolos de diferenciais das variáveis de integração na ordem apropriada (a variável mais à direita é integrada por último). O domínio de integração é representado simbolicamente em todos os sinais de integração ou é, frequentemente, abreviado por uma letra no sinal de integração mais à direita:

$$\iint \dots \int_D f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)\, dx_1, dx_2, \dots, dx_n$$

Uma vez que é impossível calcular a primitiva de uma função de múltiplas variáveis, não existem integrais múltiplas indefinidas. Assim, todas as integrais múltiplas são definidas.

2 – Algoritmos usados no trabalho

2.1 Verificação se a função é harmónica

```
function YN = isHarmonica(~,f)
    syms z(x,y)
    if (diff(f,x,2)+diff(f,y,2)==0)
        YN = 1;
    else
        YN = 0;
    end
end
```

2.2 Derivada Normal

```
function [x,y,dydx] = NDerivadaDFP(~,f,a,b,h,y)
    x = a:h:b;
    n = length(x);
    if nargin == 5
        y = f(x);
    end
    dydx = zeros(1,n);
    for i = 1:n-1
        dydx(i) = (y(i+1)-y(i))/h;
    end
    dydx(n) = dydx(n-1);
end
```

2.3 Derivada Centrada de 3 pontos

```
function [x,y,dydx]= DFCentradas_3pontos(~,f,a,b,h,y)
    x=a:h:b;
    n=length(x);
    if nargin==4
        y=f(x);
    end
    dydx=zeros(1,n);
    dydx(1)=(y(2)-y(1))/h;
    for i=2:n-1
        dydx(i)=(y(i+1)-y(i-1))/(2*h);
    end
    dydx(n)=(y(n)-y(n-1))/h;
end
```

2.4 Derivada Regressiva em 2 pontos

```
function [x,y,dydx]=DFRegressivas_2pontos(~,f,a,b,h,y)
    x=a:h:b;
    n=length(x);
    if nargin==4
        y=f(x);
    end
    dydx=zeros(1,n);
    dydx(1)=(y(2)-y(1))/h;
    for i=2:n
        dydx(i)=(y(i)-y(i-1))/h;
    end
end
```

2.5 Derivada Regressiva em 3 pontos

```
function [x,y,dydx]=DFRegressivas_3pontos(~,f,a,b,h,y)
    x=a:h:b;
    n=length(x);
    if nargin==4
        y=f(x);
    end
    dydx=zeros(1,n);
    dydx(1)=( (-3)*y(1) + 4*y(2) - y(3) )/(2*h);
    dydx(2)=( (-3)*y(2) + 4*y(3) - y(4) )/(2*h);
    for i=3:n
        dydx(i)=( y(i-2) - 4*y(i-1) + 3*y(i) )/(2*h);
    end
end
```

2.6 Derivada Progressiva em 3 pontos

```
function [x,y,dydx]=DFProgressivas_3pontos(~,f,a,b,h,y)
        x=a:h:b;
        n=length(x);
        if nargin==4
            y=f(x);
        end
        dydx=zeros(1,n);
        for i=1:n-2
            dydx(i)=( (-3)*y(i) + 4*y(i+1) - y(i+2) ) / (2*h);
        end
        dydx(n-1)=( y(n-3) - 4*y(n-2) + 3*y(n-1) )/(2*h);
        dydx(n)=( y(n-2) - 4*y(n-1) + 3*y(n) )/(2*h);
end
```

2.7 Regra de Simpson

```
function S = RSimpson(~,f,a,b,n)
    h = (b-a)/n;
    x = a:h:b;
    s = 0;
    for i = 2:n-1
        if mod(i,2)==0
            s = s+2*f(x(i));
        else
            s = s+4*f(x(i));
        end
    end
    S = h/3*(f(a)+s+f(b));
end
```

2.8 Fórmula dos trapézios

```
function T = RTrapezios(~,f,a,b,n)
    h = (b-a)/n;
    s = 0;
    x=a;
    for i=1:n-1
        x=x+h;
        s = s+f(x);
    end
    T = h/2*((f(a) +2*s + f(b)));
end
```

4. Conclusão

Este trabalho permitiu nos ter uma perspetiva melhor sobre a complexidade das funções necessárias para o manuseio matemático de figuras geométricas, assim como da importância de sabermos manipular e representar estas em ambiente matemático.

5. Bibliografia

Coordenadas cilíndricas – Wikipédia, a enciclopédia livre

Coordenadas polares – Wikipédia, a enciclopédia livre

Fórmula de Simpson – Wikipédia, a enciclopédia livre

Função harmônica – Wikipédia, a enciclopédia livre

Integral múltipla – Wikipédia, a enciclopédia livre

Método das diferenças finitas – Wikipédia, a enciclopédia livre

Regra dos trapézios (equações diferenciais) – Wikipédia, a enciclopédia livre

Sistema esférico de coordenadas – Wikipédia, a enciclopédia livre

https://moodle.isec.pt/moodle/mod/assign/view.php?id=187222

6. Autoavaliação e heteroavaliação do trabalho submetido numa escala de 0 a 5 valores.

- Consideramos o nosso trabalho ser merecedor de 4 em 5 valores.