Trabalho Prático 2

Métodos Numéricos para resolução de Sistemas de ED

Trabalho realizado por:

- Pedro Jorge nº 2021142041 LEI
- Luís Travassos nº2021136600 LEI

1 - Introdução

1.1 Equação Diferencial

Em matemática, uma equação diferencial é uma equação cuja incógnita é uma função que aparece na equação sob a forma das respetivas derivadas.

Por exemplo podemos encontrar algo como:

$$\mathrm{x}^2 * \frac{\mathrm{d}^2\mathrm{y}}{\mathrm{dx}^2} + \mathrm{x} * \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} + (\mathrm{x}^2)\mathrm{y} = 0$$

A ordem da equação diferencial é a ordem da derivada de maior grau presente na equação. Quando temos uma equação de ordem n, essa equação conterá n constantes.

1.2 SED (Sistemas de equações diferenciais)

Os sistemas de equações diferenciais são bastante idênticos a um PVI, exceto que neste caso é nos dado duas funções diferenciáveis ao invés de uma só, sendo o esquema apresentado algo que nem o abaixo:

$$\begin{cases} \begin{cases} u' = f(t,u,v) \\ v' = g(t,u,v) \end{cases} \\ \quad t \in [a,b] \\ \begin{cases} u(a) = u_0 \\ v(a) = v_0 \end{cases} \end{cases}$$

2 - Métodos Numéricos para resolução de um SED

2.1 Método de Euler SED

O método de Euler, é um procedimento numérico, por muitos conhecido como o mais simples para a resolução de PVI, e tem como objetivo solucionar equações diferenciais ordinárias com um valor inicial indicado.

2.1.1 Fórmulas

As fórmulas do método de Euler para um SED são:

$$\begin{cases} u_{i+1} = u_i + h * f(t_i, u_i, v_i) \\ v_{i+1} = v_i + h * g(t_i, u_i, v_i) \end{cases}$$

2.1.2 Algoritmo Utilizado

Inicialmente a função recebe como parâmetros os valores iniciais do algoritmo sendo estes:

- “u” Função de equação diferencial f(t,u,v)
- “v” Função de equação diferencial g(t,u,v)
- “a” Limite esquerdo/inferior do intervalo em analise
- “b” Limite direito/superior do intervalo em analise
- “n” Número dos pequenos intervalos
- “u0” Valor/Condição inicial
- “v0” Valor/Condição inicial

Por fim a função devolve “u” e “v” ou seja, dois vetores (arrays) das soluções aproximadas.

Relativamente a programação inicialmente começamos por calcular o “h”, ou seja, o tamanho de cada intervalo, calculando o h passamos a alocação de memória que permite o nosso programa/função ficar mais eficiente. Para a alocação de memória apenas utilizamos duas linhas, uma onde alocamos os valores das abcissas através do código “t = a:h:b” e os valores das ordenadas onde demos a y a seguinte organização de memória “y = zeros(1,n+1)”, depois definimos a condição inicial onde o primeiro valor de y se torna igual ao valor de y0 indicado como parâmetro de entrada. Por fim apenas necessitamos de correr um ciclo onde através da fórmula transformada em sintaxe Matlab calculamos o método de Euler.

2.2 Método de Euler Melhorado SED

O método de Euler Melhorado para uma SED é idêntico ao para um PVI, sendo considerado uma evolução do método de Euler "Normal" sendo este método mais eficiente devido á sua proximidade com o método de Runge-Kutta 2.

2.2.1 Fórmulas

As fórmulas analíticas do método de Euler Melhorado são:

$$\begin{cases} u_{i+1} = u_i + h * \dfrac{f(t_i, u_i, v_i) + f\big(t_{i+1},\ u_i + h * f(t_i, u_i, v_i),\ v_i + h * g(t_i, u_i, v_i)\big)}{2} \\ v_{i+1} = v + h * \dfrac{g(t_i, u_i, v_i) + g\big(t_{i+1},\ u_i + h * f(t_i, u_i, v_i),\ v_i + h * g(t_i, u_i, v_i)\big)}{2} \end{cases}$$

2.2.2 Algoritmo Utilizado

Inicialmente a função recebe como parâmetros os valores iniciais do algoritmo sendo estes:

- "u" Função de equação diferencial f(t,u,v)
- "v" Função de equação diferencial g(t,u,v)
- "a" Limite esquerdo/inferior do intervalo em analise
- "b" Limite direito/superior do intervalo em analise
- "n" Número dos pequenos intervalos
- "u0" Valor/Condição inicial
- "v0" Valor/Condição inicial

Por fim a função devolve "u" e "v" ou seja, dois vetores (arrays) das soluções aproximadas.

O funcionamento deste Método computacionalmente é muito semelhante ao método ao método de Euler e aos restantes métodos numéricos. Todo o condigo é basicamente igual com exceção do ciclo for utilizado para correr todas as n interações, neste caso aplicamos a fórmula do Euler melhorado indicada anteriormente e tivemos de calcular o K1 e K2, ou seja, a declive no início do intervalo e a declive no final do intervalo.

2.3 Método de Runge-Kutta 2 (RK2) para SED

O método de RK2 é muito semelhante ao método anterior (Euler melhorado) sendo seu algoritmo e funcionamento muito semelhante assim como a sua eficiência na aproximação de soluções e resultados.

2.3.1 Fórmulas

As fórmulas analíticas do método de RK2 para uma SED são:

$$\begin{cases} u_{i+1} = u_i + \dfrac{h * f(t_i, u_i, v_i) + h * f\big(t_{i+1},\ u_i + h * f(t_i, u_i, v_i),\ v_i + h * g(t_i, u_i, v_i)\big)}{2} \\ v_{i+1} = v_i + \dfrac{h * g(t_i, u_i, v_i) + h * g\big(t_{i+1},\ u_i + h * f(t_i, u_i, v_i),\ v_i + h * g(t_i, u_i, v_i)\big)}{2} \end{cases}$$

2.3.2 Algoritmo Utilizado

Inicialmente a função recebe como parâmetros os valores iniciais do algoritmo sendo estes:

- “u” Função de equação diferencial f(t,u,v)
- “v” Função de equação diferencial g(t,u,v)
- “a” Limite esquerdo/inferior do intervalo em analise
- “b” Limite direito/superior do intervalo em analise
- “n” Número dos pequenos intervalos
- “u0” Valor/Condição inicial
- “v0” Valor/Condição inicial

Por fim a função devolve “u” e “v” ou seja, dois vetores (arrays) das soluções aproximadas.

O seu algoritmo é muito semelhante aos outros métodos sendo a sua única diferença assim como o Método de Euler Melhorado é o cálculo do K1 e K2 e neste caso também alteramos a sua fórmula para a fórmula respetiva do método y(i + 1)=y(i) + (k1 + k2)/2 .

2.4 Método de Runge-Kutta 4 (RK4) para SED

O método de RK4 é muito semelhante ao método RK2 mas neste caso a sua precisão de analise será superior aos outros métodos devido ao número de inclinações analisadas ou seja temos de calcular a declive no inicio do intervalo, no ponto médio do intervalo, declive novamente no ponto médio do intervalo e por fim o declive no final do intervalo.

2.4.1 Fórmulas

As fórmulas analíticas do método de RK4 são:

$$
\begin{cases}
\begin{cases}
\begin{cases}
\begin{cases}
uK1 = h * f\big(t(i), u(i), v(i)\big) \\
vK1 = h * g\big(t(i), u(i), v(i)\big)
\end{cases} \\
\begin{cases}
uK2 = h * f\left(t(i) + \frac{h}{2}, u(i) + 0.5 * uK1, v(i) + 0.5 * vK1\right) \\
vK2 = h * g\left(t(i) + \frac{h}{2}, u(i) + 0.5 * uK1, v(i) + 0.5 * vK1\right)
\end{cases}
\end{cases} \\
\begin{cases}
\begin{cases}
uK3 = h * f\left(t(i) + \frac{h}{2}, u(i) + 0.5 * uK2, v(i) + 0.5 * vK2\right) \\
vK3 = h * g\left(t(i) + \frac{h}{2}, u(i) + 0.5 * uK2, v(i) + 0.5 * vK2\right)
\end{cases} \\
\begin{cases}
uK4 = h * f(t(i+1), u(i) + uK3, v(i) + vK3) \\
vK4 = h * g(t(i+1), u(i) + uK3, v(i) + vK3)
\end{cases}
\end{cases}
\end{cases} \\
\begin{cases}
\begin{cases}
uK = \frac{uK1 + 2 * uK2 + 2 * uK3 + uK4}{6} \\
vK = \frac{vK1 + 2 * vK2 + 2 * vK3 + vK4}{6}
\end{cases} \\
\begin{cases}
u(i + 1) = u(i) + uK \\
v(i + 1) = v(i) + vK
\end{cases}
\end{cases}
\end{cases}
$$

2.4.2 Algoritmo Utilizado

Inicialmente a função recebe como parâmetros os valores iniciais do algoritmo sendo estes:

- “u” Função de equação diferencial f(t,u,v)
- “v” Função de equação diferencial g(t,u,v)
- “a” Limite esquerdo/inferior do intervalo em analise
- “b” Limite direito/superior do intervalo em analise
- “n” Número dos pequenos intervalos
- “u0” Valor/Condição inicial
- “v0” Valor/Condição inicial

Por fim a função devolve “u” e “v” ou seja, dois vetores (arrays) das soluções aproximadas.

A codificação deste método é basicamente o mesmo de todos os outros métodos, mas neste caso dentro do ciclo de incrementação do número das interações, é alterado a fórmula do método e é calculado as outras duas inclinações necessárias neste método.

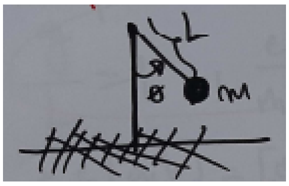
3 – Resolução de exercícios envolvendo SED

3.1 “Problema do Pêndulo”

A ODE que descreve o problema é a seguinte:

$$\theta'' + \frac{c}{mL}\theta' + \frac{g}{L}sin\theta = 0$$

Sendo a legenda a seguinte:



$m = massa \qquad g = const.\ Gravidade$

$L = comprimento \qquad c = coef.\ de\ amortecimento$

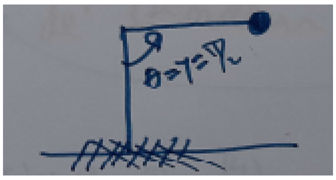
De seguida é necessário simplificar a função:

Sabendo que

$$\frac{g}{L} = 1, \qquad \frac{c}{mL} = 0.3$$

$$t \in [a, b] = [0,15]$$

$$\theta = y, \qquad y(0) = \frac{\pi}{2}, \qquad y'(0) = 0$$



Podemos construir o sistema seguinte

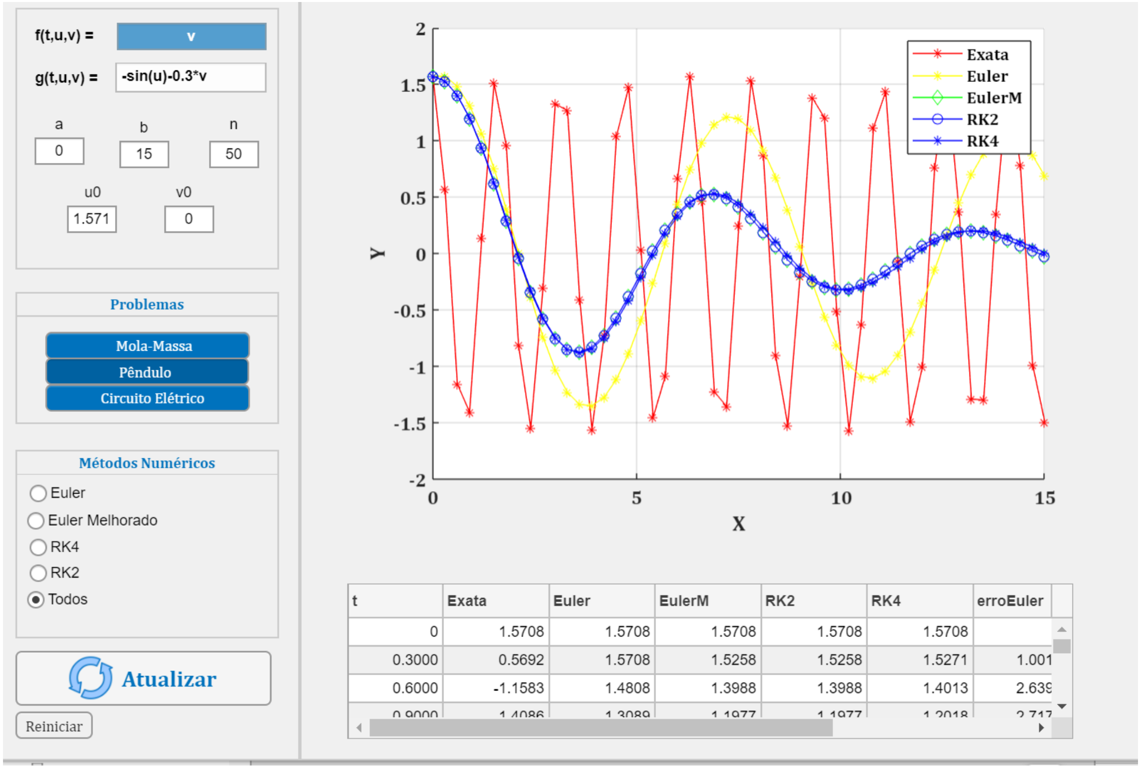
$$\begin{cases} y'' + 0.3 * y' + sin * y = 0 \\ \qquad t \in [0,15] \\ \begin{cases} y(0) = \dfrac{\pi}{2} \\ y'(0) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Após a simplificação é necessário transformar este PVI em um SED:

$$\begin{cases} u = y \\ v = y' \end{cases} (=) \begin{cases} u' = y' \\ v' = y'' \end{cases} (=) \begin{cases} u' = v \\ v' = -sin * u - 0.3 * v \end{cases} (=) \begin{cases} u' = f(t,u,v) \\ v' = g(t,u,v) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} u' = f(t,u,v) \\ v' = g(t,u,v) \end{cases} \\ t \in [a,b] \\ \begin{cases} u(0) = u_0 \\ v(0) = \ v_0 \end{cases} \end{cases} (=) \begin{cases} \begin{cases} u' = v \\ v' = -sin * u - 0.3 * v \end{cases} \\ t \in [0{,}15] \\ \begin{cases} u(0) = \dfrac{\pi}{2} \\ v(0) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

De seguida basta aplicar os métodos para SED com o fim de obter o gráfico pretendido:

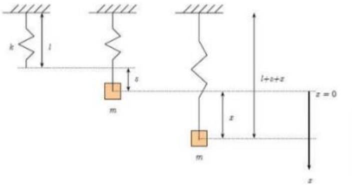


3.2 “Problema da mola-massa sem amortecimento”

A ODE que descreve o problema, com amortecimento, é a seguinte:

$$mx'' + kx = 0$$

Sendo a legenda a seguinte:



$m = massa$ $\qquad$ $k = const.\ da\, mola$

$x = deslocamento$

De seguida é necessário simplificar a função:

Sabendo que

$k = 16, \qquad m = 1$

$t \in [a, b] = [0,8]$

$u(0) = 9, \qquad v(0) = 0$

Podemos construir o sistema seguinte

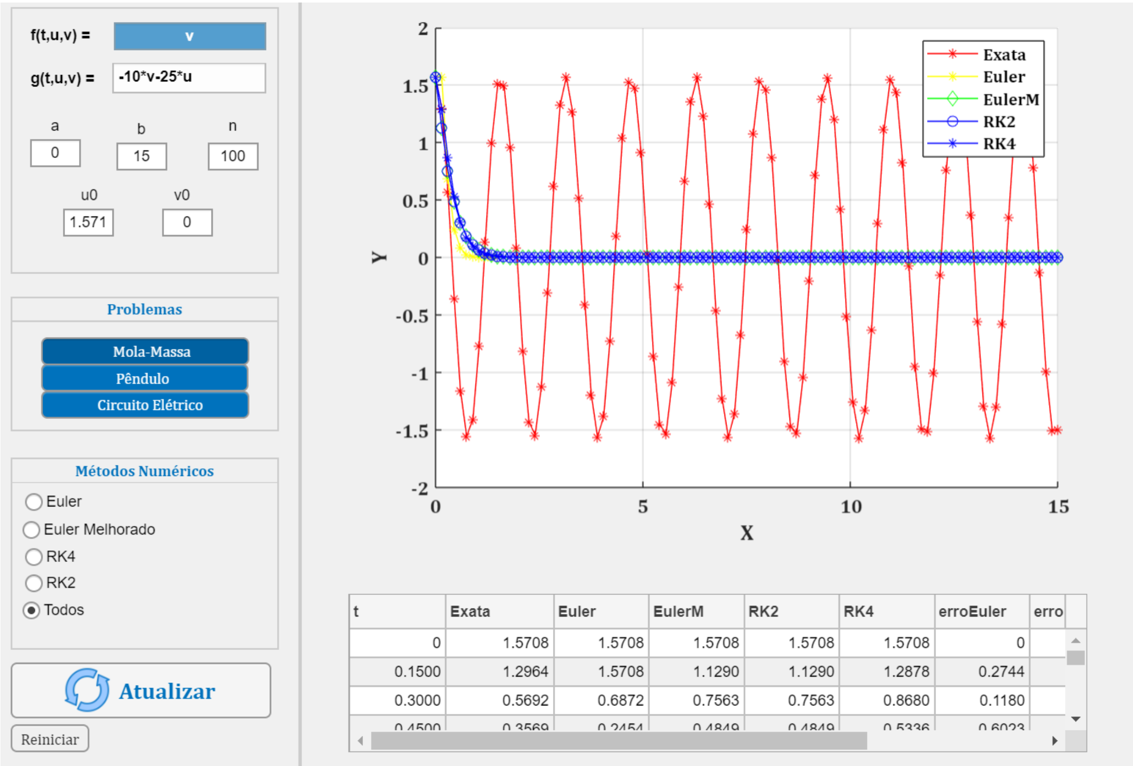
$$\begin{cases} x'' = -\dfrac{k}{m}x \\ t \in [0,8] \\ \begin{cases} x(0) = 9 \\ x'(0) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Após a simplificação é necessário transformar este PVI em um SED:

$$\begin{cases} u = x \\ v = x' \end{cases} (=) \begin{cases} u' = x' \\ v' = x'' \end{cases} (=) \begin{cases} u' = v \\ v' = -\dfrac{k}{m}x \end{cases} (=) \begin{cases} u' = f(t,u,v) \\ v' = g(t,u,v) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} u' = f(t,u,v) \\ v' = g(t,u,v) \end{cases} \\ t \in [a,b] \\ \begin{cases} u(0) = u_0 \\ v(0) = \ v_0 \end{cases} \end{cases} (=) \begin{cases} \begin{cases} u' = v \\ v' = -16x \end{cases} \\ t \in [0{,}15] \\ \begin{cases} u(0) = 9 \\ v(0) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

De seguida basta aplicar os métodos para SED com o fim de obter o gráfico pretendido:



4. Conclusão

Este trabalho permitiu nos ter uma perspetiva melhor sobre os métodos numéricos diferentes que existem para a resolução de um PVI, assim como nos possibilitou o entendimento da necessidade destes métodos para a resolução de problemas matemáticos em engenharia e no mundo.

5. Bibliografia

https://www.mathworks.com/matlabcentral/

https://moodle.isec.pt/moodle/course/view.php?id=12631

6. Autoavaliação e heteroavaliação do trabalho submetido numa escala de 0 a 5 valores.

- Consideramos o nosso trabalho ser merecedor de 4 em 5 valores.