Análise Matemática II

Atividade 05 – Resolução de Teste B e A+B

Docente: Arménio Correia

José Fernando Esteves de Almeida nº 2019129077 – LEICE

Coimbra, 17 de Junho de 2020

Índice

Teste B (E. Normal 13/14)

1.

a) $$j(x,y)=\begin{cases}-\sqrt{32-f(x,y)}, & 16<x^2+y^2\leq 32\\ h(x,y) & \end{cases}$$

$$=\begin{cases}-\sqrt{32-f(x,y)}, & 16<x^2+y^2\leq 32\\ -g(x,y), & x^2+y^2\leq 16\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-\sqrt{32-f(x,y)}, & 16<x^2+y^2\leq 32\\ \sqrt{f(x,y)}, & x^2+y^2\leq 16\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-\sqrt{32-(x^2+y^2)}, & 16<x^2+y^2\leq 32\\ \sqrt{x^2+y^2}, & x^2+y^2\leq 16\end{cases}$$

Como um radicando nunca pode ser negativo (no conjunto dos números reais):

$$D_j=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2\ \geq\ 0\ \wedge\ 32-(x^2+y^2)\ >\ 0\}$$

$$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2\ \geq\ 0\ \wedge\ -(x^2+y^2)\ >\ -32\}$$

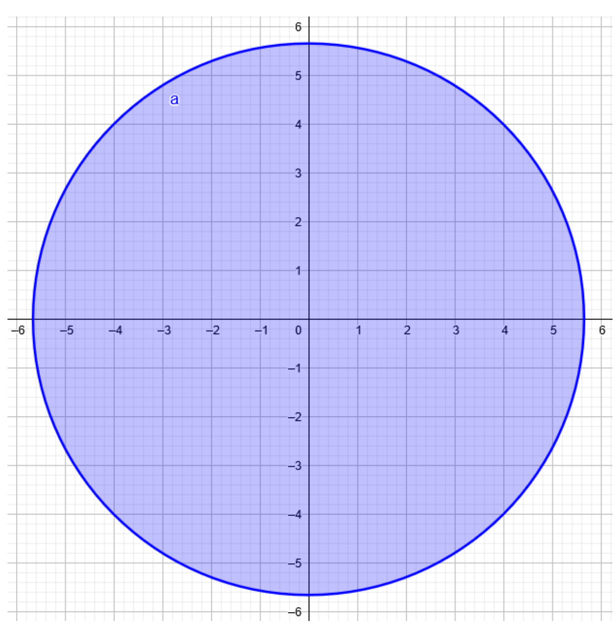
$$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2\ \geq\ 0\ \wedge\ x^2+y^2\ \leq\ 32\}$$

$$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 0\leq x^2+y^2\ \leq 32\}$$

Por outras palavras, o domínio de j, é um círculo de raio $\sqrt{32}$.

Neste caso, o domínio é fechado, pois inclui a circunferência de raio $\sqrt{32}$, que o delimita.

Domínio de j, representado no GeoGebra:

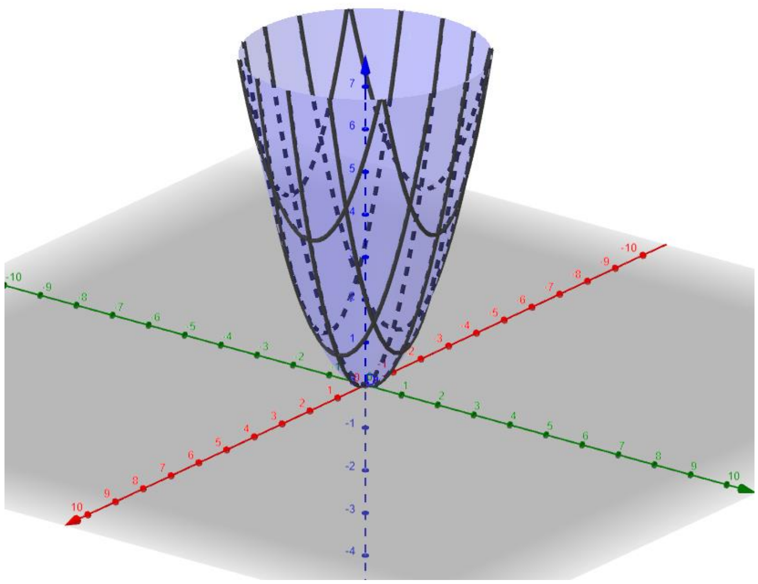


b)

$$j(x,y) = \begin{cases} se\ 16 < x^2 + y^2 \leq 32 \\ então\ z = -\sqrt{32 - (x^2 + y^2)} \\ senão\ se\quad x^2 + y^2 \leq 16 \\ então\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

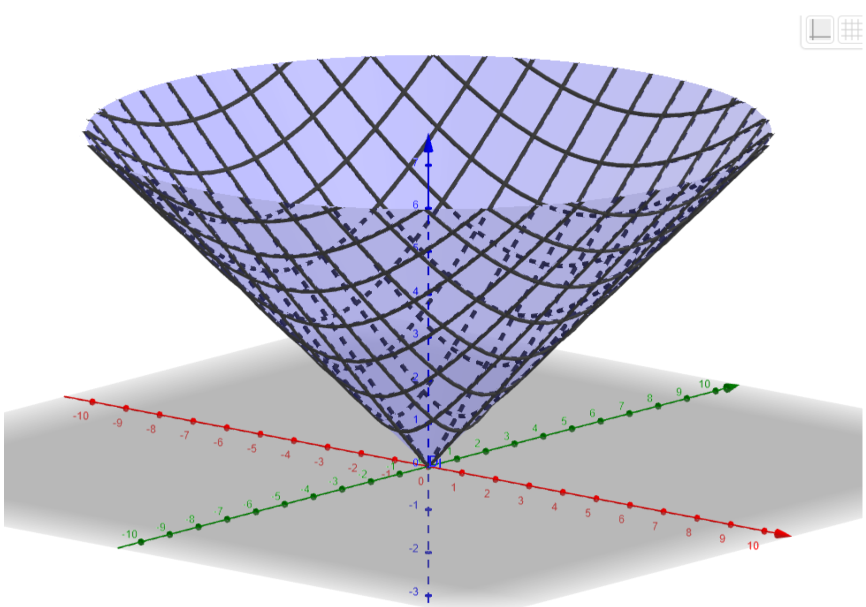
c) Função f: Equação de um paraboloide elítico, com a = b = 1.

Representação em GeoGebra:

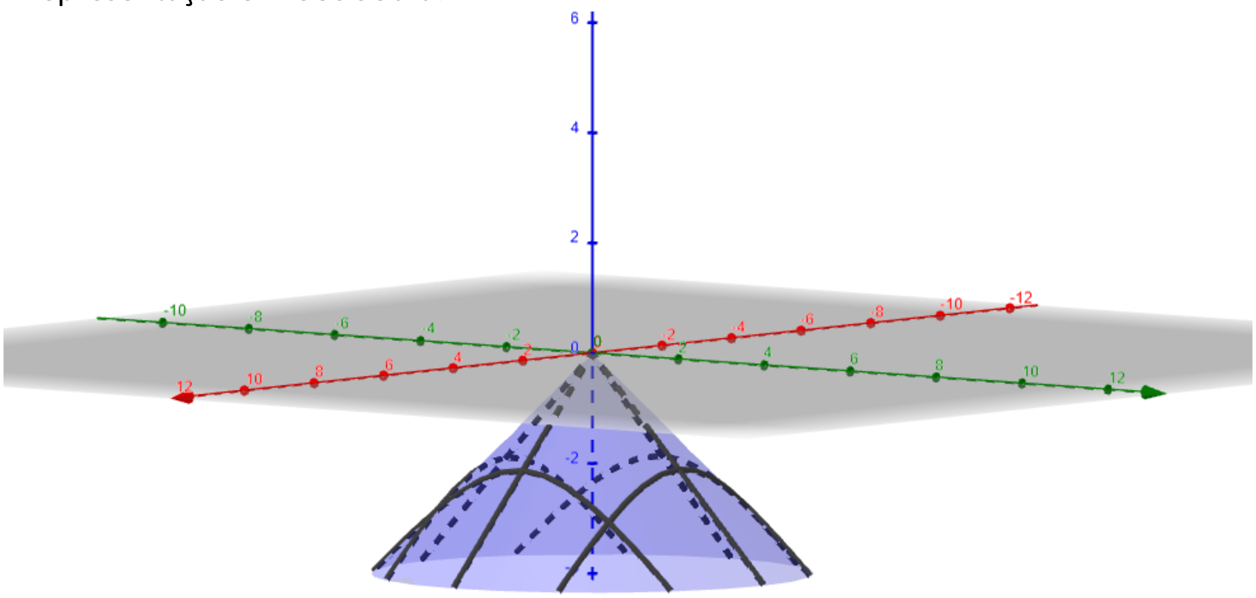


Função g: Equação de um cone elítico, com a = b = 1.

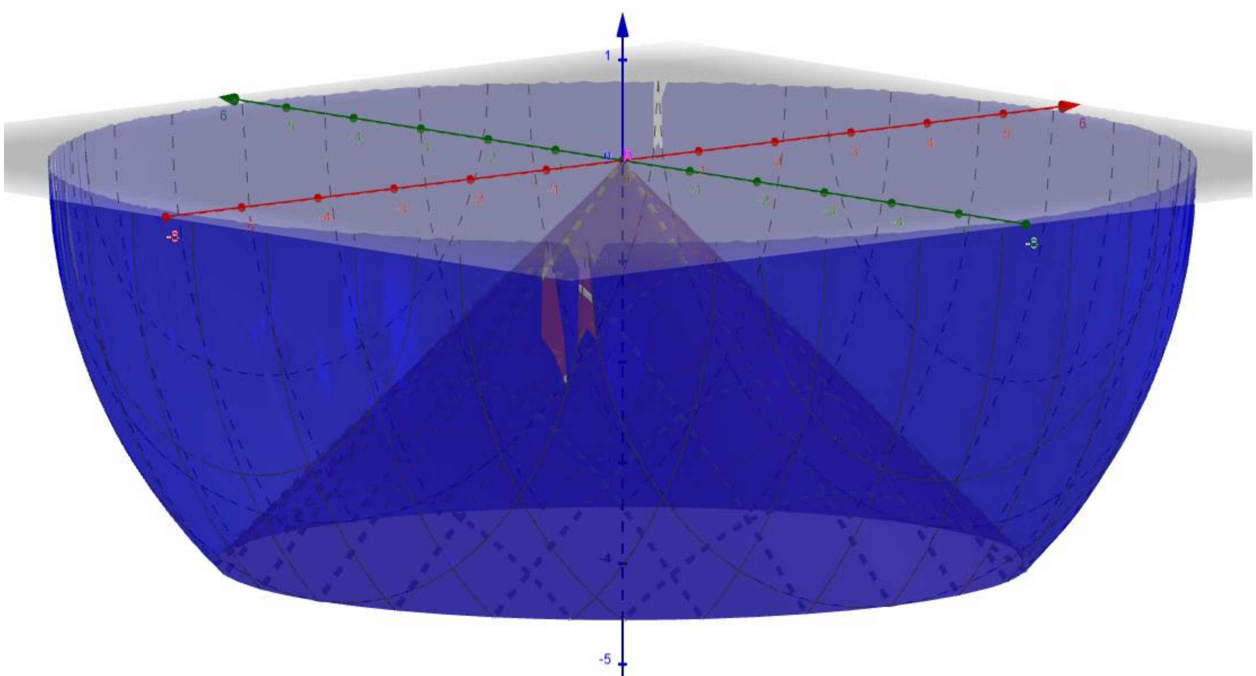
Representação em GeoGebra:



Função h: Igual à função g, mas simétrica em relação ao plano xOy e com o seu domínio restrito a pontos que respeitem a condição $x^2 + y^2 \leq 16$ (círculo de raio 4). Representação em GeoGebra:



Função j: Reunião da função h com a superfície semiesférica inferior originada por uma superfície esférica centrada origem e de raio $\sqrt{32}$. O cone secciona a essa superfície.
Representação em GeoGebra:



d)

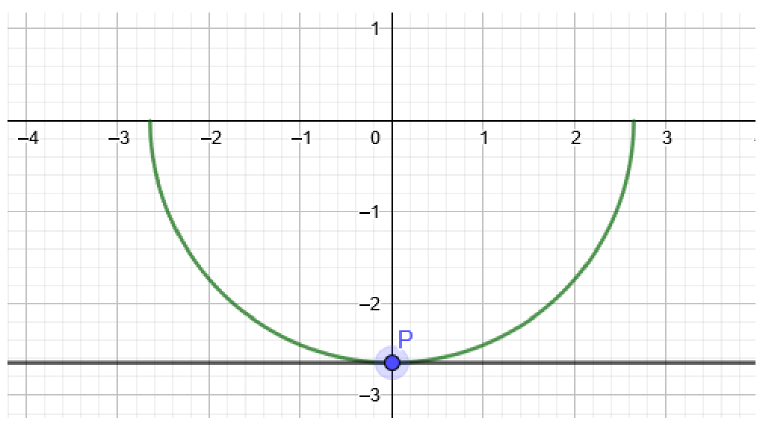
i) A afirmação é verdadeira, pois nas figuras 1 e 3 existe mais do que um valor de z para certos pontos do domínio, logo não se tratam de uma funções, onde a cada objeto corresponde uma e uma só imagem, sendo que a figura 2 respeita estas condições.

ii) Seja $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 16 < x^2 + y^2 \leq 32\}$

Sabemos que $P(0, -5, -\sqrt{7}) \in D_1$, logo:

$$C = \begin{cases} z = -\sqrt{32 - (x^2 + y^2)} \\ y = -5 \end{cases} = \begin{cases} z = -\sqrt{32 - (x^2 + 25)} \\ y = -5 \end{cases} = -\sqrt{7 - x^2}$$
$$= [x, -5, -\sqrt{7 - x^2}]$$

$-\sqrt{7 - x^2}$ é um arco de circunferência de raio $r = 7$. Representação:



Assim, a reta tangente à curva é a reta horizontal $z = -\sqrt{7}$, o que significa que a reta tangente à curva se representa por $[x, -5, -\sqrt{7}]$. Logo, a afirmação do enunciado é falsa.

iii) A função $j(x,y)$ é contínua nos pontos do cordão de soldadura (x_0,y_0) se e só se $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} j(x,y)$ existir e for igual a $j(x_0,y_0)$.

Como $(x_0,y_0) \in C$, sabemos que ${x_0}^2 + {y_0}^2 = 16$.

Temos então:

$j(x_0,y_0) = h(x_0,y_0)$ (dado que ${x_0}^2 + {y_0}^2 \leq 16$)

$$
\begin{aligned}
&= -\sqrt{{x_0}^2 + {y_0}^2} \\
&= -\sqrt{16} \\
&= -4
\end{aligned}
$$

Consideremos: $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 16 < x^2 + y^2 \leq 32\}$
$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 16\}$

$$
\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} j(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left(-\sqrt{32-(x^2+y^2)}\right) \\
(x_0,y_0) \in D_1 \quad &= -\sqrt{32-({x_0}^2+{y_0}^2)} \\
&= -\sqrt{32-16} \\
&= -\sqrt{16} \\
&= -4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} j(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left(-\sqrt{x^2+y^2}\right) \\
(x_0,y_0) \in D_2 \quad &= -\sqrt{{x_0}^2+{y_0}^2} \\
&= -\sqrt{16} \\
&= -4
\end{aligned}
$$

A partir dos dois resultados anteriores, deduzimos que existe $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} j(x,y)$ e tem valor -4.

Como $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} j(x,y) = j(x_0,y_0) = -4$, sabemos então que a função $j(x,y)$ é contínua nos pontos do cordão de soldadura, logo, a afirmação é verdadeira.

iv) De facto, atendendo à representação visual acima apresentada, as funções f e g têm mínimos absolutos em $(0,0)$, que seria o vértice das superfícies por elas equacionadas. No entando, a função h, devido a representar uma superfície cónica simétrica à superfície cónica de g, o vértice em $(0,0)$ torna-se num máximo absoluto. Relativamente à função j, esta é limitada superior e inferiormente por uma circunferência, logo contém uma linha de máximos absolutos no planos $z = 0$ e uma linha de mínimos absolutos no plano $z = -\sqrt{32}$.

v) Conteúdo não abordado nas aulas do presente ano letivo.

e)

i) Para calcular a taxa de variação máxima, temos de calcular o gradiente da função $T = g(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Esse gradiente é dado por:

$$\nabla T(x,y) = T_x(x,y)\hat{\imath} + T_y(x,y)\hat{\jmath}$$

Onde $T_x(x,y)$ e $T_j(x,y)$ são as derivadas parciais de T em ordem a x e a y, respetivamente.

$$\begin{aligned} T_x(x,y) &= \frac{\partial T}{\partial x} \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2) \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{aligned}$$

De forma idêntica,

$$T_y(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Temos então:

$$\nabla T(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\hat{\imath} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\hat{\jmath}$$

Podemos agora introduzir o ponto $P(-1,-1)$ na função gradiente:

$$\begin{aligned} \nabla T(x,y) &= \frac{-1}{\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2}}\hat{\imath} + \frac{-1}{\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2}}\hat{\jmath} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{1^2+1^2}}\hat{\imath} + \frac{-1}{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}}\hat{\jmath} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\imath} - \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\jmath} \end{aligned}$$

De onde retiramos o vetor $\vec{u} = < -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}>} >$. Temos agora de o normalizar, por isso vamos calcular a sua norma:

$$||\vec{u}|| = \sqrt{(-\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + (-\frac{1}{\sqrt{2}>})^2}$$
$$= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}$$
$$= 1$$

Como a sua norma é 1, já se encontra normalizado. Ou seja, a taxa de variação máxima ocorre na direção e sentido do vetor $\vec{u} = < -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}>} >$, e a taxa de variação mínima na direção e sentido do vetor -$\vec{u}$ $= < \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}>} >$ e, por isso, a resposta à pergunta do enunciado é não.

ii) Temos:

$$\Delta V \approx dV = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy$$

Para $(-1, -1)$:

$$dx = dy = -1.33 - (-1) = -0.33$$

Então:

$$dV = \frac{-1}{\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2}} dx + \frac{-1}{\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2}} dy$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} dx \ - \frac{1}{\sqrt{2}} dy$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}(-0.33) - \frac{1}{\sqrt{2}}(-0.33)$$
$$= 2(\frac{0.33}{\sqrt{2}}) \ = 0.33\sqrt{2}$$

iii) Temos $z = g(x, y)^2 = x^2 + y^2$. Logo:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x})$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(2y) + \frac{\partial}{\partial y}(2y) + \frac{\partial}{\partial x}(2x)$$

$$= 0 + 2 + 2$$

$$= 4$$

$$2\frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2} = 2\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right) \quad = 2\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial}{\partial \rho}(x^2+y^2)\right)$$

$$= 2\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2 cos^2(\theta) + \rho^2 sin^2(\theta)\right)\right)$$

$$= 2\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2\left(cos^2(\theta) + sin^2(\theta)\right)\right)\right)$$

$$= 2\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2(1)\right)\right)$$

$$= 2\frac{\partial}{\partial \rho}(2\rho)$$

$$= 2\frac{\partial}{\partial \rho}(2\rho)$$

$$= 4$$

Assim, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2\frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2}$ *q.e.d.*

iv) $z = 4 - f(x-2, y-2),\ \ (x-2)^2 + (y-2)^2 \le 16$
$\quad = 4 - (x-2)^2 + (y-2)^2,\ \ (x-2)^2 + (y-2)^2 \le 16$

Seja $b(x,y) \ = \ z$. O plano T_b tangente à superfície $b(x,y)$ no ponto $P(2{,}2{,}4)$ é dado por

$$T_b(x,y) = b_x(x_0,y_0)(x-x_0) + b_y(x_0,y_0)(y-y_0) + b(x_0,y_0)$$
$$= b_x(2,2)(x-2) + b_y(2,2)(y-2) + b(2,2)$$

Derivadas parciais:

$$
\begin{aligned}
b_x(x,y) = \frac{\partial b}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(4-(x-2)^2+(y-2)^2) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(4) - \frac{\partial}{\partial x}(x-2)^2 + \frac{\partial}{\partial x}(y-2)^2 \\
&= -\frac{\partial}{\partial x}(x^2-4x-4\ ) + (y-2)^2 = -2x+4
\end{aligned}
$$

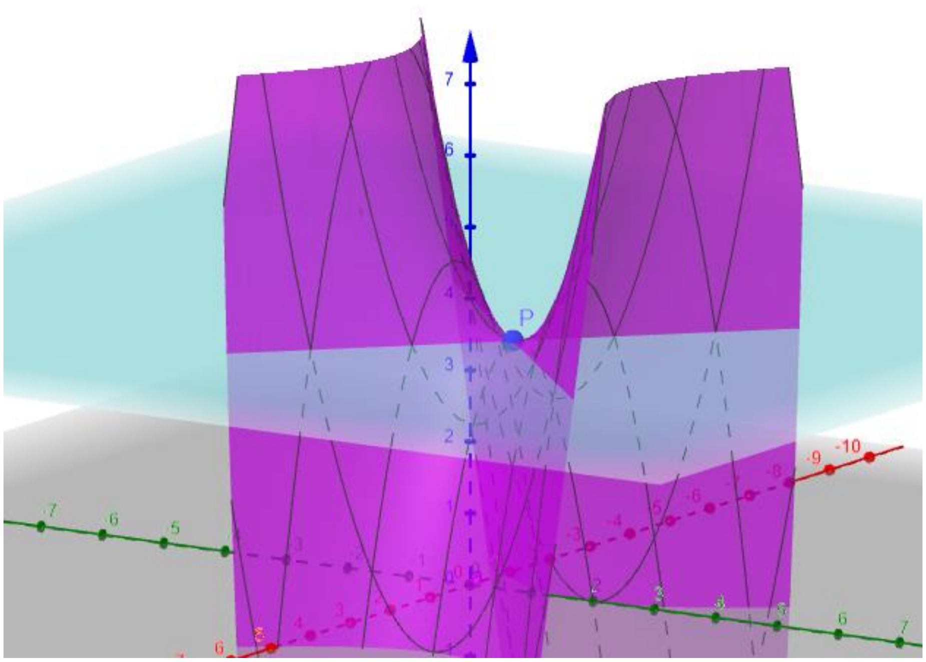
De forma análoga: $b_y(x,y) = -2y+4$

Então:

$$T_b(x,y) = b_x(2,2)(x-2) + b_y(2,2)(y-2) + b(2,2)$$

$$= 0(x-2) + 0(y-2) + 4 = 4\ (plano\ de\ equação\ z = 4)$$

Representação em GeoGebra da superfície e do plano tangente:



2.

a) O sólido S é constituído por 3 partes: um cone de raio 4 e altura 4, um cilindro de raio 4 e altura 4 e um segmento de esfera de raio $\sqrt{32}$. Vamos obter as equações destes 3 sólidos.

<u>Cone:</u>

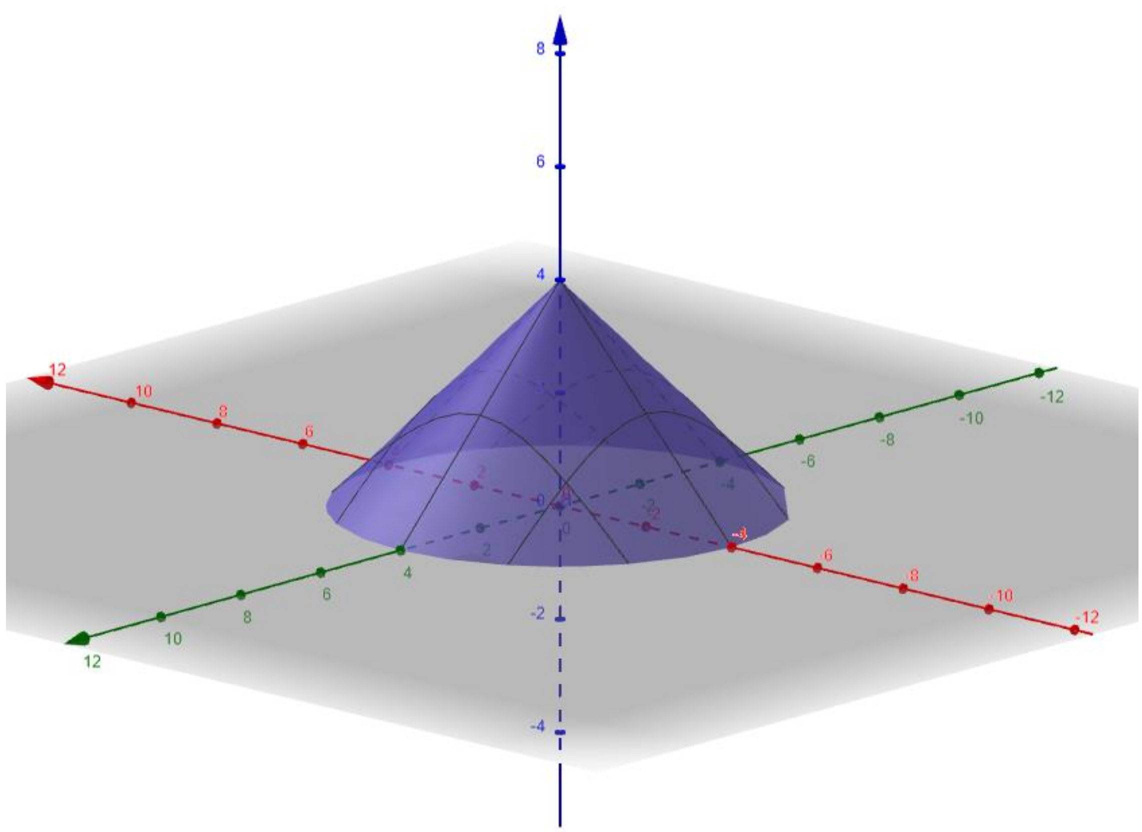
A equação de cone centrada na origem e de raio 4 é

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 16 \wedge 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}\}$$

Como o nosso cone se encontra com o vértice em $z = 4$ e lhe foi aplicada uma simetria em relação ao plano xOy, então a sua equação é:

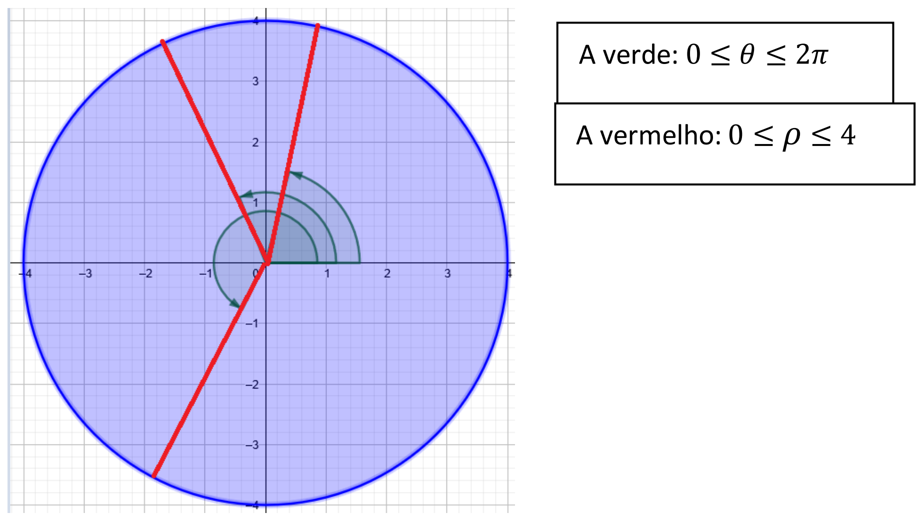
$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 16 \wedge -\sqrt{x^2 + y^2} + 4 \leq z \leq 0\}$$

Aqui está a representação da superfície cónica correspondente a esse cone (GeoGebra):

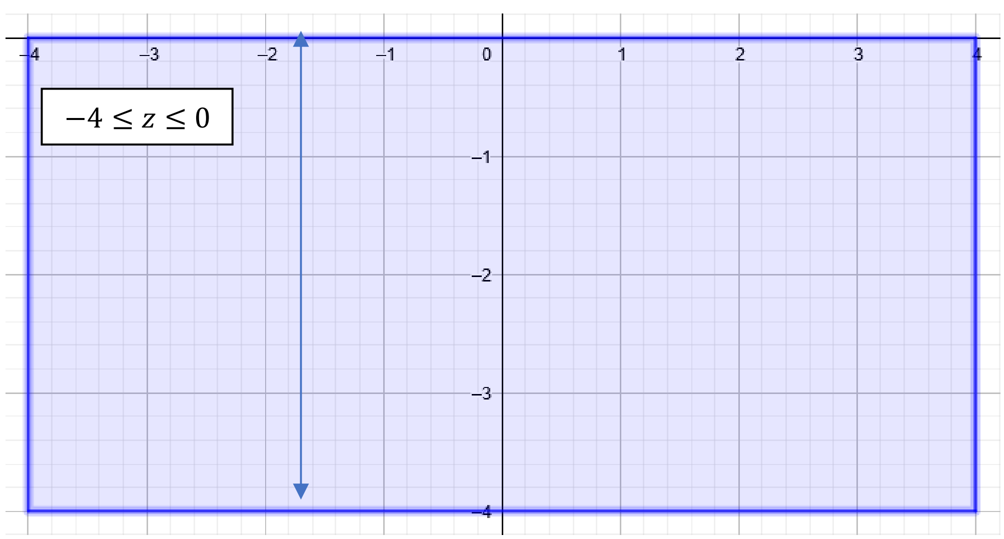


Cilindro:

Um cilindro é facilmente representado através das coordenadas cilíndricas. Mas, para isso, vamos primeiro representá-lo em coordenadas cartesianas. Primeiro, determinamos a sua base (no plano xOy), que é um círculo de raio 4. A partir dessa representação, podemos retirar alguma da informação necessária à passagem para coordenadas cilíndricas (θ e ρ):



Temos agora de representar o cilindro projetado no plano yOz (para retirarmos o valor de z):

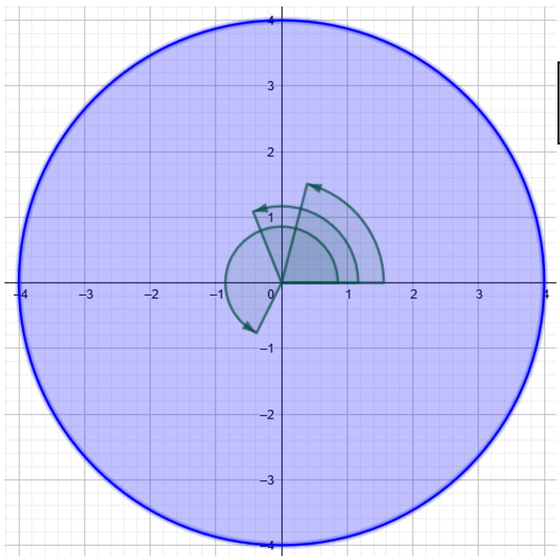


Assim, o cilindro, em coordenadas cilíndricas, pode ser representado por:

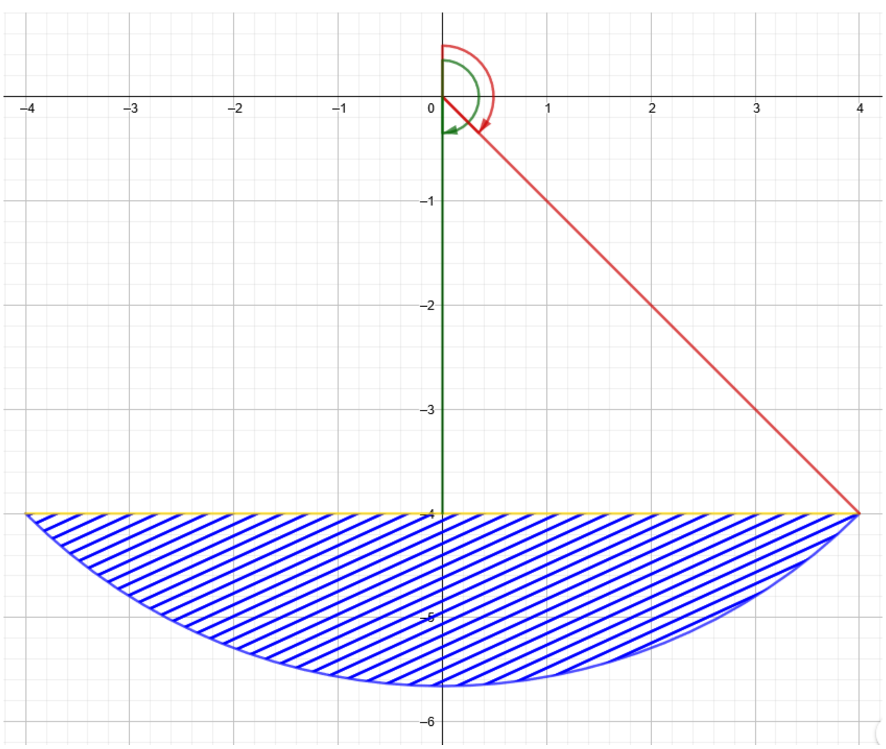
$$S_2 = \{(\rho, \theta, z): 0 \leq \rho \leq 4 \wedge 0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge -4 \leq z \leq 0\}$$

<u>Segmento de esfera:</u>

O segmento de esfera será representado em coordenadas esféricas, portanto temos, como no cilindro, de o projetar nos planos xOy e yOz para retirar informação importante:



A verde: $0 \leq \theta \leq 2\pi$



φ percorre todos os ângulos entre o ângulo vermelho e o ângulo verde (π). O ângulo vermelho é obtido através de um triângulo retângulo e da trigonometria:

$cos(\varphi) = \frac{4}{\sqrt{32}} \leftrightarrow \varphi = cos^{-1}(\frac{\sqrt{2x4^2}}{8}) \leftrightarrow \varphi = cos^{-1}(\frac{\sqrt{2}}{2}) \leftrightarrow \varphi = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

Logo, $\frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \pi$

Já R percorre os valores entre o segmento de reta a amarelo e o arco circular a azul. Então, temos de obter a equação da reta $z = -4 \wedge x = 0$ em coordenadas esféricas. Podemos aplicar a seguinte mudança de variável:

$$z = Rcos(\varphi) \leftrightarrow -4 = Rcos(\varphi) \leftrightarrow -4 = Rcos(\varphi)$$

$$\leftrightarrow R = \frac{-4}{cos(\varphi)}$$

Logo, $\frac{-4}{cos(\varphi)} \leq R \leq \sqrt{32}$, ou seja,

$$S_3 = \{(R, \theta, \varphi): 0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge \frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \pi \wedge \frac{-4}{cos(\varphi)} \leq R \leq \sqrt{32}\}$$

Por fim, ao reunirmos os 3 sólidos, obtemos o sólido pretendido:

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \qquad q.e.d$$

b) Conteúdo não abordado nas aulas teóricas do presente ano letivo.

c) $V(S) = V(S_1) + V(S_2) + V(S_3)$

Para $V(S_1)$, temos a fórmula para calcular o volume de um cone:

$$V(S_1) = \frac{1}{3}A_b h = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi 4^2 4 = \frac{64}{3}\pi$$

Para $V(S_2)$, temos a fórmula para calcular o volume de um cilindro:

$$V(S_2) = A_b h = \pi r^2 h = \pi 4^2 4 = 64\pi$$

Para $V(S_3)$, não temos fórmula direta para calcular. Logo, teremos de efetuar o cálculo através do integral triplo:

$$V(S_3) = \iiint_S 1\, dxdydz = \int_0^{2\pi} \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \int_{\frac{-4}{cos(\varphi)}}^{\sqrt{32}} R^2 sin(\varphi)\, dRd\varphi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} sin(\varphi) \int_{\frac{-4}{cos(\varphi)}}^{\sqrt{32}} R^2\, dRd\varphi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} sin(\varphi) [\frac{R^3}{3}]_{\frac{-4}{cos(\varphi)}}^{\sqrt{32}}\, d\varphi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} sin(\varphi)(\frac{\sqrt{32}^3}{3} - \frac{(\frac{-4}{cos(\varphi)})^3}{3})\; d\varphi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} sin(\varphi)(\frac{\sqrt{32}^3}{3} + \frac{64}{3cos^3(\varphi)})\; d\varphi d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} sin(\varphi)(32\sqrt{32} + \frac{64}{cos^3(\varphi)})\; d\varphi d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} (32\sqrt{32}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} sin(\varphi) d\varphi \; - \; 64\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} -sin(\varphi)\, cos^{-3}(\varphi)\;\; d\varphi) d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} (32\sqrt{32}[-cos(\varphi)]_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} - \; 64\left[\frac{cos^{-2}(\varphi)}{-2}\right]_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi})d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \left(32\sqrt{32(}- cos(\pi) + cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) - 64\left(\frac{cos^{-2}(\pi)}{-2} - \frac{cos^{-2}\left(\frac{3\pi}{4}\right)}{-2}\right))d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \left(32\sqrt{32(}1 + cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right) - 64\left(-\frac{1}{2cos^2(\pi)} + \frac{1}{2cos^2\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)}\right))d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \left(32\sqrt{32(}1 - cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) - 32\left(-\frac{1}{cos(\pi)cos(\pi)} + \frac{1}{cos\left(\frac{\pi}{4}\right)cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}\right))d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \left(32\sqrt{32(}1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 32\left(-\frac{1}{1} + \frac{1}{\frac{2}{4}}\right))d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \left(32\sqrt{32(}1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 32\;)d\theta$$

$$= \frac{32}{3}\int_0^{2\pi} (\sqrt{32} \; - \; \frac{\sqrt{32}\sqrt{2}}{2} \; - \; 1\;)d\theta$$

$$= \frac{32}{3}\int_0^{2\pi} (\sqrt{32} \; - \; \frac{8}{2} \; - 1)d\theta$$

$$= \frac{32}{3}\int_0^{2\pi} (\sqrt{32} \; - \; 5)d\theta$$

$$= \frac{32}{3}\left(\sqrt{32} - 5\right)\int_0^{2\pi} 1\, d\theta$$

$$= \frac{32\sqrt{32} - 160}{3}[\theta]_0^{2\pi}$$
$$= \frac{128\sqrt{2} - 160}{3}2\pi$$
$$= \frac{256\sqrt{2}}{3}\pi - \frac{320}{3}\pi$$

Assim,

$$V(S) = V(S_1) + V(S_2) + V(S_3)$$
$$= \frac{64}{3}\pi + 64\pi + \frac{256\sqrt{2}}{3}\pi - \frac{64}{3}\pi$$
$$= \frac{256\sqrt{2}}{3}\pi + 64\pi$$

Massa do sólido: $M(S) = \iiint_S \rho(x,y,z)dzdydx = \iiint_S 2dzdydx$

$$= 2\iiint_S 1dzdydx$$
$$= 2V(S)$$
$$= \frac{512\sqrt{2}}{3}\pi + 128\pi$$

d)

i) Equação de uma esfera de raio r, em coordenadas esféricas:

$$S = (R,\theta,\varphi): 0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge 0 \leq \varphi \leq \pi \wedge 0 \leq R \leq r$$

Vamos calcular o seu volume através do seguinte integral triplo:

$$V(S) = \iiint_S 1\,dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r} R^2 sin(\varphi)\,dRd\varphi d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} sin(\varphi)\int_0^{r} R^2\,dRd\varphi d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} sin(\varphi)\left[\frac{R^3}{3}\right]_0^r d\varphi d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} sin(\varphi)\frac{r^3}{3}d\varphi d\theta$$
$$= \frac{r^3}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} sin(\varphi)\,d\varphi d\theta$$

$$= \frac{r^3}{3}\int_0^{2\pi} [-cos(\varphi)]_0^{\pi}\, d\theta$$
$$= \frac{r^3}{3}\int_0^{2\pi} -cos(\pi) + cos(0)\, d\theta$$

$$= \frac{r^3}{3}\int_0^{2\pi} 2\, d\theta$$
$$= 2\frac{r^3}{3}[\theta]_0^{2\pi}$$
$$= 4\frac{r^3}{3}\pi$$
$$= \frac{4}{3}\pi r^3 \quad q.e.d$$

ii) Equação do cone que limita o sólido, em coordenadas cartesianas:

$$S_1 = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 16 \wedge -\sqrt{x^2 + y^2} + 4 \leq z \leq 0$$

Seja $g(x, y) = -\sqrt{x^2 + y^2} + 4$

$$D_g = x^2 + y^2 \leq 16$$

$$g_x(x, y) = \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(-\sqrt{x^2 + y^2} + 4) = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2)$$
$$= -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

e, de forma idêntica:

$$g_y(x, y) = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

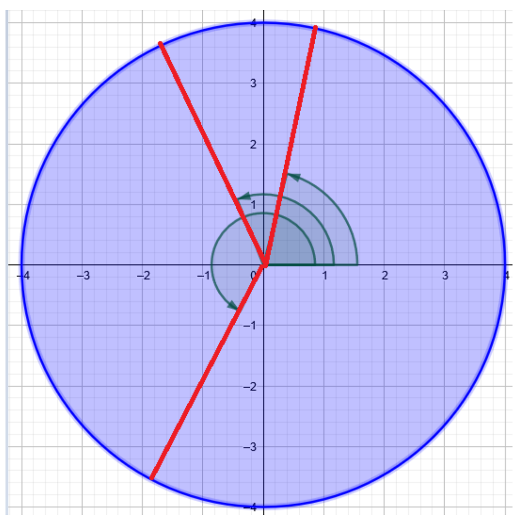
$$A(S) = \iint_D \sqrt{(g_x(x, y))^2 + (g_y(x, y))^2 + 1 dydx}$$
$$= \iint_D \sqrt{\left(-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + \left(-\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + 1 dydx}$$

$$= \iint_D \sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} + 1}dydx$$

$$= \iint_D \sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} + 1}dydx$$

$$= \iint_D \sqrt{1+1}dydx$$

Como o domínio da função é um círculo, vamos fazer a transformação para coordenadas polares. Ou seja:



A verde: $0 \leq \theta \leq 2\pi$

A vermelho: $0 \leq \rho \leq 4$

$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^4 \rho \, d\rho d\theta$$

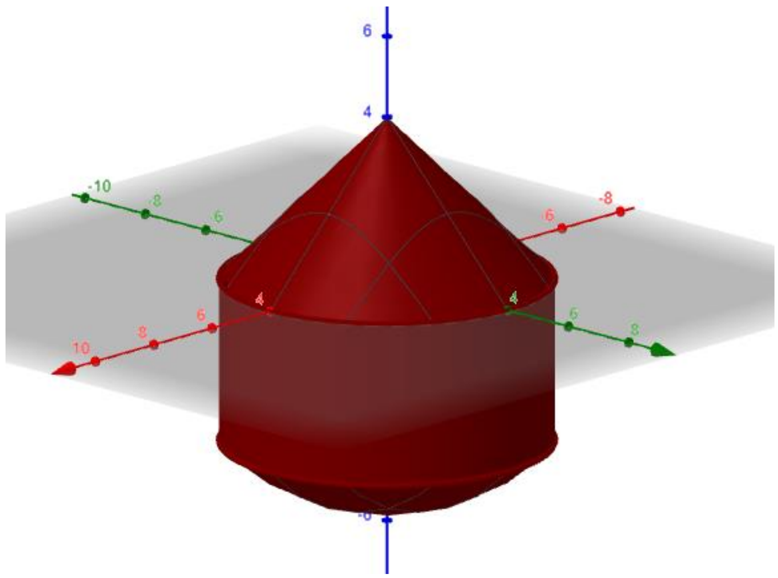
$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^4 d\theta$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} 8 \, d\theta$$

$$= 8\sqrt{2}[\theta]_0^{2\pi}$$

$$= 16\sqrt{2}\pi \qquad q.e.d.$$

iii) Sim, pois este sólido é delimitado superiormente por um cone, que lembra o bico do lápis, e inferiormente por um sólido que lembra a outra extremidade do lápis. Representação em GeoGebra:



iv) Conteúdo não abordado nas aulas teóricas do presente ano letivo.

Teste A + B (E. Normal 13/14)

1. Conteúdo não abordado nas aulas do presente ano letivo.

2.

   a)

A Interpoladora de Newton das Diferenças Divididas permite-nos obter o polinómio P_n (de grau n) tal que $P_n(x) \approx f(x)$, $x \in [a, b]$ ou seja, o polinómio é aproximadamente igual à função no intervalo $[a, b]$, o que nos permite determinar aproximadamente valores de pontos da função $f(x)$ nesse intervalo sem a conhecer diretamente.

Tem a seguinte fórmula:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

Onde $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ são constantes a descobrir e $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ são abcissas de pontos que usamos para as descobrir.

Por hipótese, temos que $\text{grau de } P = n = 2$. Para definirmos um polinómio de 2º grau, precisamos, no mínimo, de 3 pontos de f . Consideremos, por exemplo:

- $f(-2) = 4\sqrt{1 - \frac{(-2)^2}{4}} = 4\sqrt{1 - 1} = 0$
- $f(0) = 4\sqrt{1 - \frac{(0)^2}{4}} = 4\sqrt{1} = 4$
- $f(2) = 4\sqrt{1 - \frac{2^2}{4}} = 4\sqrt{1 - 1} = 0$

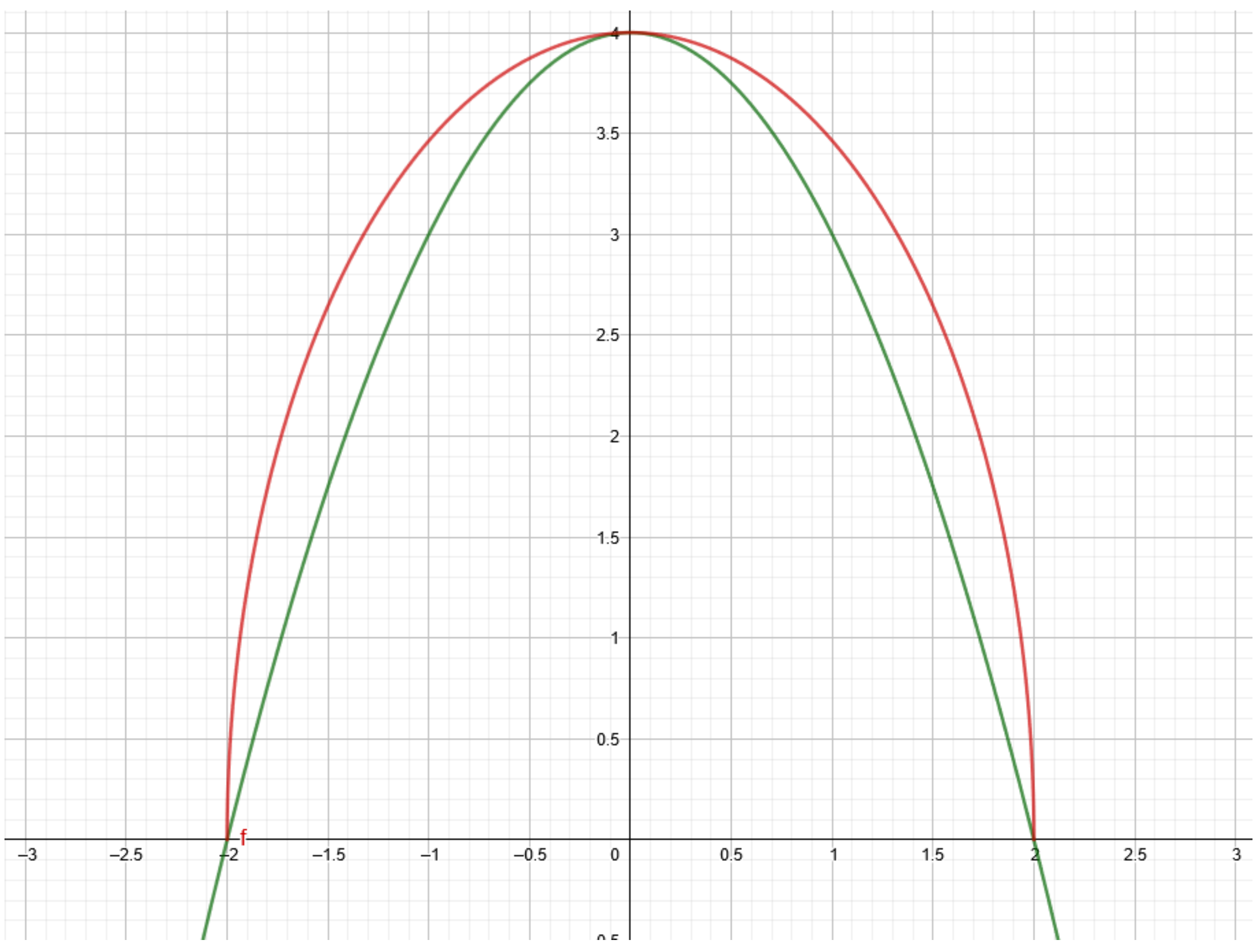
Resolvendo através da Tabela das Diferenças Divididas:

x_i	$f(x_i)$	$f_{i,i+1}$	$f_{i,i+2}$
-2	$a_0 = 0$		
		$a_1 = \frac{4-0}{0-(-2)} = \frac{4}{2} = 2$	
0	4		$a_2 = \frac{-2-2}{2-(-2)} = \frac{-4}{4} = -1$
		$\frac{0-4}{2-0} = \frac{-4}{2} = -2$	
2	0		

Logo, temos:

$$\begin{aligned}
P_2(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) \\
&= 0 + 2\big(x - (-2)\big) - 1\big(x - (-2)\big)(x - 0) \\
&= 2(x + 2) - x(x + 2) \\
&\approx f(x)
\end{aligned}$$

Visualização no GeoGebra:

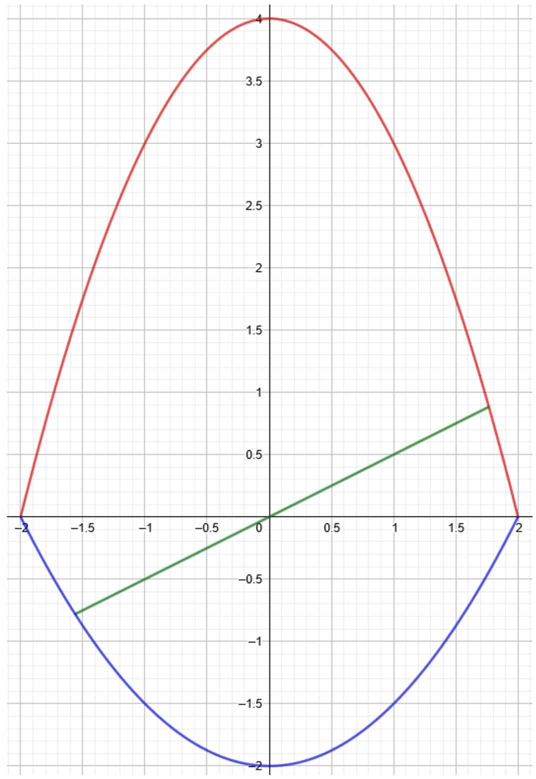


A verde: $P_2(x)$

A vermelho: $f(x)$

b)

Por exemplo:



(Representado no GeoGebra)

c) A aproximação de um integral I pela Regra de Simpson é dada por:

$$I_S(l) = \frac{h}{3}[l(x_0) + 4l(x_1) + 2l(x_2) + \cdots + 2l(x_{n-2}) + 4l(x_{n-1}) + l(x_n)]$$

Neste caso, temos que

$$l(x) = f(x) - g(x) = 4\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} - (-\sqrt{4 - x^2}) = 4\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} + \sqrt{4 - x^2}$$

e também que $x_0 = -2$ e $x_n = 2$.

Consideremos, por exemplo, $h = 1$. Pela Regra de Simpson, temos:

$$I_S(l) = \frac{1}{3}[l(-2) + 4l(-1) + 2l(0) + 4l(1) + l(2)]$$

$$= \frac{1}{3}[0 + 4 * (4\sqrt{\frac{3}{4}} + \sqrt{3}) + 2 * 6 + 4 * (4\sqrt{\frac{3}{4}} + \sqrt{3}) + 0)]$$

$$= \frac{1}{3}[8\sqrt{2^2\frac{3}{4}} + 4\sqrt{3} + 12 + 8\sqrt{2^2\frac{3}{4}} + 4\sqrt{3})]$$

$$= \frac{1}{3}[8\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 12 + 8\sqrt{3} + 4\sqrt{3})]$$

$$= \frac{24}{3}\sqrt{3} + 4$$

$$\approx 17.8564$$

Cálculos Auxiliares:

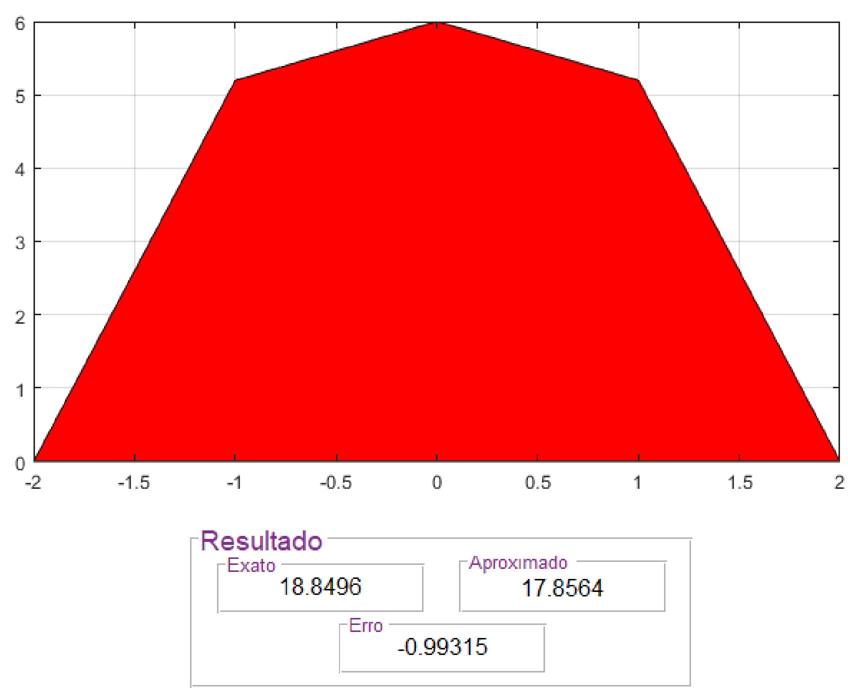
$$l(0) = 4\sqrt{1 - \frac{0}{4}} + \sqrt{4 - 0} = 4 + 2 = 6$$

$$l(-1) = l(1) = 4\sqrt{1 - \frac{1}{4}} + \sqrt{4 - 1} = 4\sqrt{\frac{3}{4}} + \sqrt{3}$$

$$l(-2) = l(2) = 4\sqrt{1 - \frac{4}{4}} + \sqrt{4 - 4} = 0$$

O resultado obtido é o valor da área limitada superiormente por f e inferiormente por g no intervalo $[-2,2]$, ou seja, é o valor da área a amarelo na figura.

Podemos verificar os cálculos introduzindo a informação na GUI da Atividade03, obtendo:



3.

a) Temos 4 linhas na tabela (3 subintervalos *n* com passo *h* = 1) logo:

i. $t_1 = 2;$

ii. $t_2 = 3;$

iii. $y(t_0) = y(1) = 1^2 = 1;$

iv. $y(t_2) = y(3) = 3^2 = 9;$

Erro: $|y_{exata} - y_{aprox}|$

Consideremos $f(t,y) = y' = \frac{2y}{t}$

Método de Euler:

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i), \quad i = 0,1,\dots,n-1$$

Neste caso:

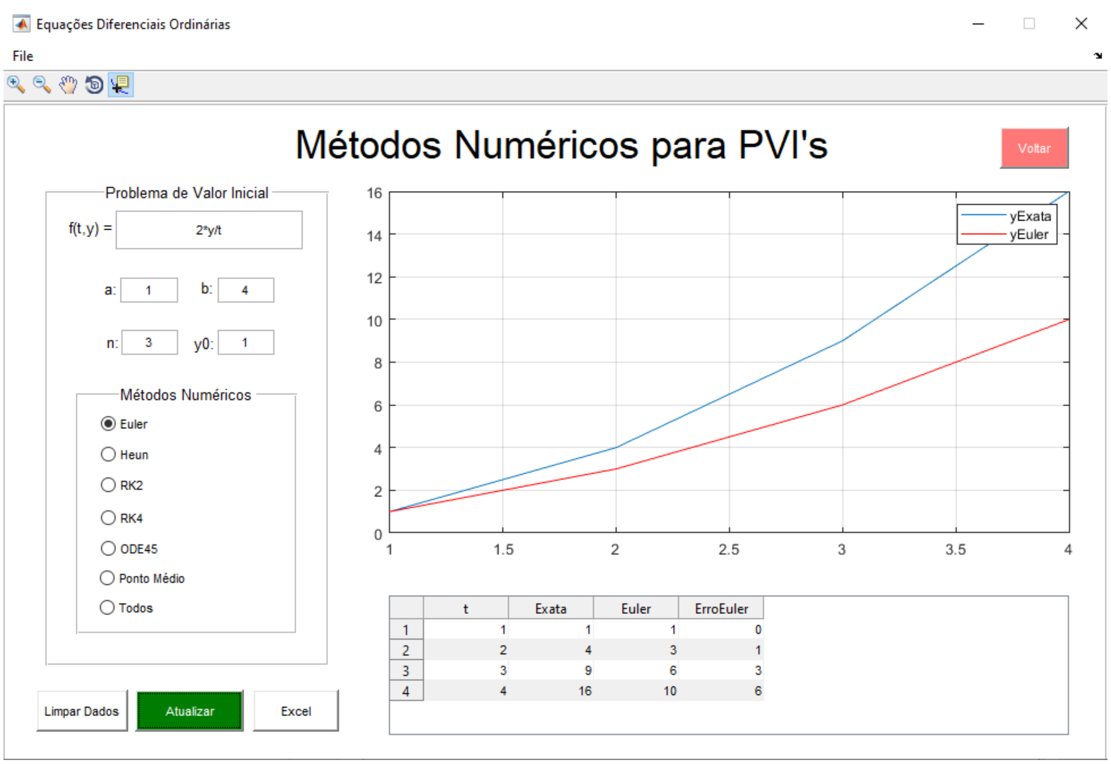
$y_0 = y(t_0) = y(1) = 1$ Erro = $|1 - 1| = 0$

$y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0) = y_0 + 1\frac{2 * y_0}{t_0} = 1 + \frac{2 * 1}{1} = 3$ Erro = $|4 - 3| = 1$

$y_2 = y_1 + hf(t_1, y_1) = y_1 + 1\frac{2 * y_1}{t_1} = 3 + \frac{2 * 3}{2} = 6$ Erro = $|9 - 6| = 3$

$y_3 = y_2 + hf(t_2, y_2) = y_2 + 1\frac{2 * y_2}{t_2} = 6 + \frac{2 * 6}{3} = 10$ Erro = $|16 - 10| = 6$

Podemos também resolver este exercício através do uso de uma GUI do MATLAB, neste caso a da Atividade01:



	t	Exata	Euler	ErroEuler
1	1	1	1	0
2	2	4	3	1
3	3	9	6	3
4	4	16	10	6

Método de RK (ordem 2):

$$k_1 = hf(t_i, y_i); \qquad k_2 = hf(t_{i+1}, y_i + k_1);$$

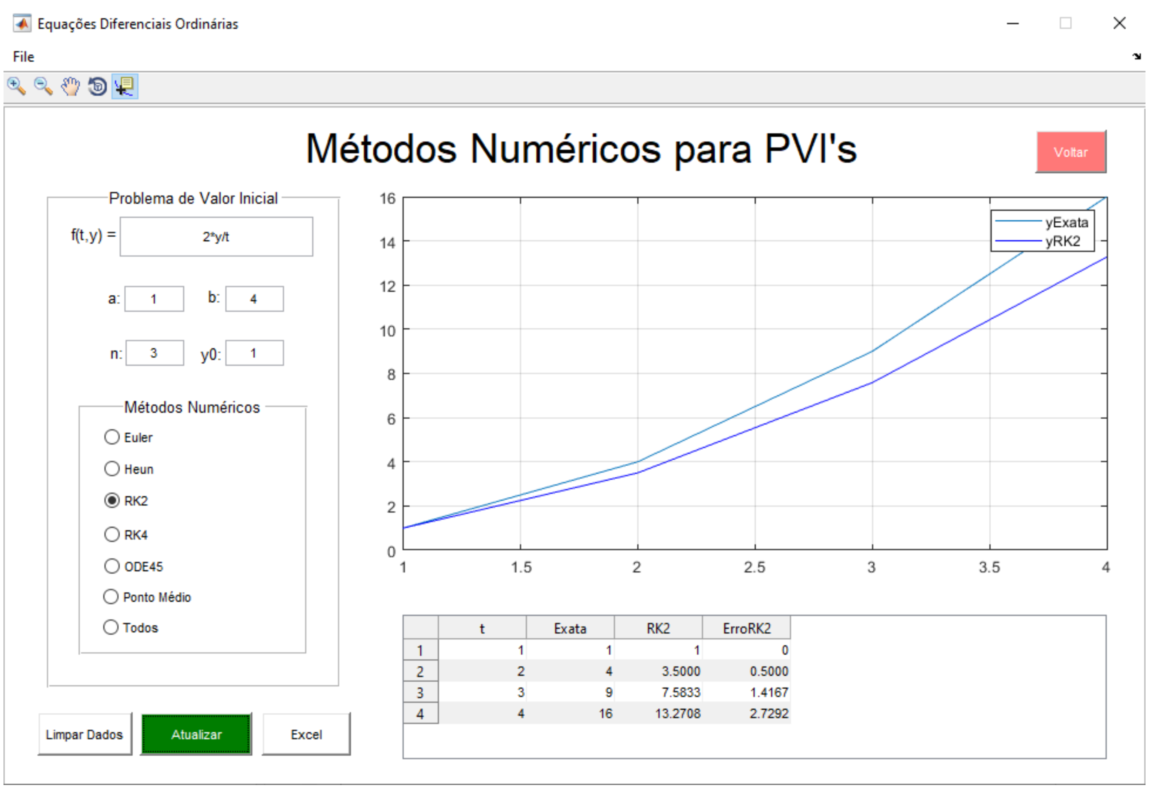
$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2), \quad i = 0,1, \dots, n-1$$

Neste caso:

$$y_0 = y(t_0) = y(1) = 1$$
$$k_1 = hf(t_1, y_1) = 1\ \frac{2 * y_1}{t_1} = \frac{2 * 3.5}{2} = 3.5$$
$$k_2 = hf(t_2, y_1 + k_1) = 1\ \frac{2 * (y_1 + k_1)}{t_2} = \frac{2 * (3.5+3.5)}{3} = 4.(6)$$
$$y_2 = y_1 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = 3.5 + \frac{1}{2}(3.5 + 4.(6)) \approx 7.58$$

Erro para i = 2 $\approx |4 - 3.5| = 0.5$
Erro para i = 4 $\approx |16 - 13.27| = 2.73$

Confirmando na GUI:



Método de RK (ordem 4):

Para $i = 0$: Erro = $|1 - 1| = 0$

Para $i = 2$: Erro = $|9 - 8.84| = 0.16$

Neste caso não precisamos de usar as fórmulas do Método RK4, pois é nos dado o erro:

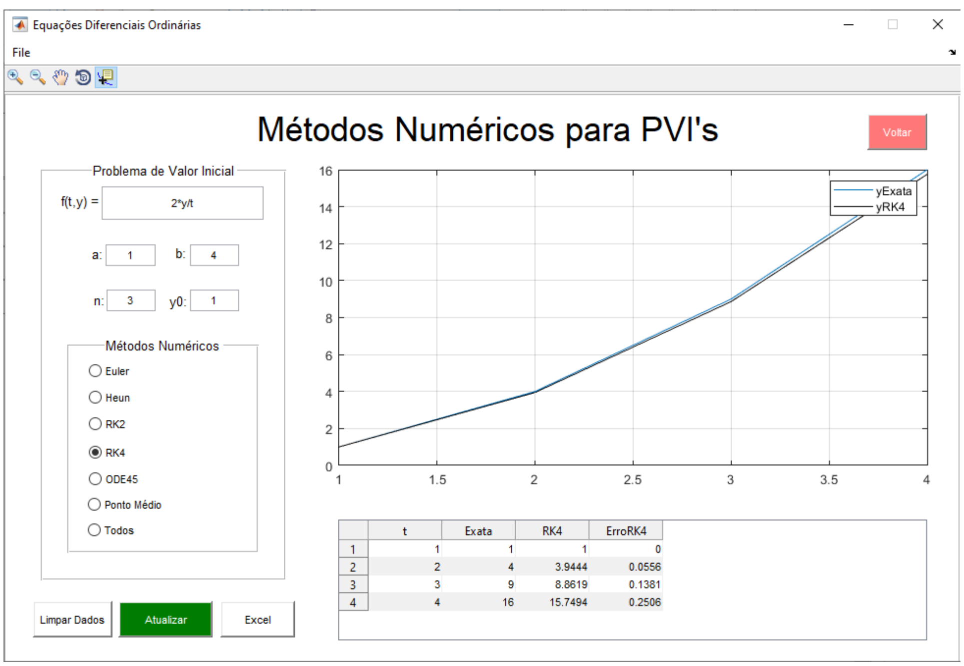
Para i = 1: Erro = $|4 - y_{aprox}| = 0.06 \leftrightarrow 4 - y_{aprox} = 0.06 \; (y_{aprox} > 0)$

$$\leftrightarrow y_{aprox} = 3.94$$

Para i = 3: Erro = $|16 - y_{aprox}| = 0.25 \leftrightarrow 16 - y_{aprox} = 0.25 \; (y_{aprox} > 0)$

$$\leftrightarrow y_{aprox} = 15.75$$

Ou, pela GUI:



Temos, por fim:

			Aproximações			Erros		
i	t_i	$y(t_i)$ Exata	y_i Euler	y_i RK2	y_i RK4	$\|y(t_i) - y_i\|$ Euler	$\|y(t_i) - y_i\|$ RK2	$\|y(t_i) - y_i\|$ RK4
0	1	1	1	1	1	0	0	0
1	2	4	3	3.50	3.94	1	0.5	0.06
2	3	9	6	7.58	8.86	3	1.42	0.14
3	4	16	10	13.27	15.75	6	2.73	0.25

b)

```
function y = NRK2(f,a,b,n,y0)
h=(b-a)/n;
t=a:h:b;
y=zeros(1, n+1);
y(1)=y0;
for i=1:n
    k1=h*f(t(i),y(i));
    k2=h*f(t(i + 1),y(i)+k1);
    y(i+1)=y(i)+(k1+k2)/2;
end
```

4.

a) Igual ao exercício 1. a) do teste B.

b) Igual ao exercício 1. c) do teste B.

c)

i) A afirmação é falsa, pois na figura 3 existe mais do que um valor de z para certos pontos do domínio, logo não se trata de uma função, onde a cada objeto corresponde uma e uma só imagem.

ii) Igual ao exercício 1. d) ii) do teste B.

iii) Igual ao exercício 1. d) iii) do teste B.

b)

i) Igual ao exercício 1. e) i) do teste B.

ii) Igual ao exercício 1. e) iii) do teste B.

5.

a) Igual ao exercício 2. a) do teste B.
b) Igual à primeira parte do exercício 2. c) do teste B.
c) Igual ao exercício 2. d) do teste B.