Trabalho Prático 1

Aplicação para determinar Soluções PVI usando Métodos Numéricos

Trabalho realizado por:

- Pedro Jorge nº 2021142041 LEI
- Luís Travassos nº2021136600 LEI

1 - Introdução

1.1 Equação Diferencial

Em matemática, uma equação diferencial é uma equação cuja incógnita é uma função que aparece na equação sob a forma das respetivas derivadas.

Por exemplo podemos encontrar algo como:

$$x^2 * \frac{d^2y}{dx^2} + x * \frac{dy}{dx} + (x^2)y = 0$$

A ordem da equação diferencial é a ordem da derivada de maior grau presente na equação. Quando temos uma equação de ordem n, essa equação conterá n constantes.

1.2 PVI (Problema de Variável Inicial)

O problema de Variável Inicial é uma equação diferencial, tal como referido no tópico anterior, que é acompanhada do valor da função objetivo, sendo este valor nomeado como o valor inicial. Este problema pode apresentar várias vantagens em algumas áreas sendo um sistema que irá evoluir conforme as condições iniciais.

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

2 - Métodos Numéricos para resolução de PVI

2.1 Método de Euler

O método de Euler, é um procedimento numérico, por muitos conhecido como o mais simples para a resolução de PVI, e tem como objetivo solucionar equações diferenciais ordinárias com um valor inicial indicado.

2.1.1 Fórmulas

As fórmulas do método de Euler são:

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i), \ \ i = 0, 1, \dots, n-1$$

2.1.2 Algoritmo Utilizado

Inicialmente a função recebe como parâmetros os valores iniciais do algoritmo sendo estes:

- "f" Função de equação diferencial f(t,y)
- "a" Limite esquerdo/inferior do intervalo em analise
- "b" Limite direito/superior do intervalo em analise
- "n" Número dos pequenos intervalos
- "y0" Valor/Condição inicial

Por fim a função devolve apenas o "y", ou seja, um vetor(array) das soluções aproximadas.

Relativamente a programação inicialmente começamos por calcular o "h", ou seja, o tamanho de cada intervalo, calculando o h passamos a alocação de memória que permite o nosso programa/função ficar mais eficiente. Para a alocação de memória apenas utilizamos duas linhas, uma onde alocamos os valores das abcissas através do código "t = a:h:b" e os valores das ordenadas onde demos a y a seguinte organização de memória "y = zeros(1,n+1)", depois definimos a condição inicial onde o primeiro valor de y se torna igual ao valor de y0 indicado como parâmetro de entrada. Por fim apenas necessitamos de correr um ciclo onde através da fórmula transformada em sintaxe matlab calculamos o método de Euler.

2.2 Método de Euler Melhorado

O método de Euler Melhorado é considerado uma evolução do método de Euler "Normal" sendo este método mais eficiente devido á sua proximidade com o método de Runge-Kutta 2.

2.2.1 Fórmulas

As fórmulas analíticas do método de Euler Melhorado são:

$$x_{n+1} = x_n + h$$

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf(x_{n+1}, y_n + k_1)$$

$$y_{n+!} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

2.2.2 Algoritmo Utilizado

Inicialmente a função recebe como parâmetros os valores iniciais do algoritmo sendo estes:

- "f" Função de equação diferencial f(t,y)
- "a" Limite esquerdo/inferior do intervalo em analise
- "b" Limite direito/superior do intervalo em analise
- "n" Número dos pequenos intervalos
- "y0" Valor/Condição inicial

Por fim a função devolve apenas o "y" ou seja um vetor(array) das soluções aproximadas.

O funcionamento deste Método computacionalmente é muito semelhante ao método ao método de Euler e aos restantes métodos numéricos. Todo o condigo é basicamente igual com exceção do ciclo for utilizado para correr todas as n interações, neste caso aplicamos a fórmula do Euler melhorado indicada anteriormente e tivemos de calcular o K1 e K2, ou seja, a declive no início do intervalo e a declive no final do intervalo.

2.3 Método de Runge-Kutta 2 (RK2)

O método de RK2 é muito semelhante ao método anterior (Euler melhorado) sendo seu algoritmo e funcionamento muito semelhante assim como a sua eficiência na aproximação de soluções e resultados.

2.3.1 Fórmulas

As fórmulas analíticas do método de RK2 são:

$$k_1 = hf(t_i, y_i); \;\; k_2 = hf(t_{i+1}, y_i + k_1)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2), \;\; i = 0, 1, \ldots, n-1$$

2.3.2 Algoritmo Utilizado

Inicialmente a função recebe como parâmetros os valores iniciais do algoritmo sendo estes:

- "f" Função de equação diferencial f(t,y)
- "a" Limite esquerdo/inferior do intervalo em analise
- "b" Limite direito/superior do intervalo em analise
- "n" Número dos pequenos intervalos
- "y0" Valor/Condição inicial

Por fim a função devolve apenas o "y" ou seja um vetor(array) das soluções aproximadas.

O seu algoritmo é muito semelhante aos outros métodos sendo a sua única diferença assim como o Método de Euler Melhorado é o cálculo do K1 e K2 e neste caso também alteramos a sua fórmula para a fórmula respetiva do método y(i + 1)=y(i) + (k1 + k2)/2 .

2.4 Método de Runge-Kutta 4 (RK4)

O método de RK4 é muito semelhante ao método RK2 mas neste caso a sua precisão de analise será superior aos outros métodos devido ao número de inclinações analisadas ou seja temos de calcular a declive no inicio do intervalo, no ponto médio do intervalo, declive novamente no ponto médio do intervalo e por fim o declive no final do intervalo.

2.4.1 Fórmulas

As fórmulas analíticas do método de RK4 são:

$$k_1 = hf(t_i, y_i);\;\; k_2 = hf(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_1);\;\; k_3 = hf(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_2);\;\; k_4 = hf(t_{i+1}, y_i + k_3)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),\;\; i = 0, 1, \dots, n-1$$

2.4.2 Algoritmo Utilizado

Inicialmente a função recebe como parâmetros os valores iniciais do algoritmo sendo estes:

- “f” Função de equação diferencial f(t,y)
- “a” Limite esquerdo/inferior do intervalo em analise
- “b” Limite direito/superior do intervalo em analise
- “n” Número dos pequenos intervalos
- “y0” Valor/Condição inicial

Por fim a função devolve apenas o “y”, ou seja, um vetor(array) das soluções aproximadas.

A codificação deste método é basicamente o mesmo de todos os outros métodos, mas neste caso dentro do ciclo de incrementação do número das interações, é alterado a fórmula do método e é calculado as outras duas inclinações necessárias neste método.

2.4 Método Midpoint

O método Midpoint é um método numérico que bastante semelhante ao método numérico de Euler em que a principal diferença seria que existe uma "iteração" extra entre t_n e t_{n+1}, para isso adicionando-se $\frac{h}{2}$ $a\ (t)\ e\ a\ (y)$ na função.

2.4.1 Fórmulas

As fórmulas analíticas do método de RK4 são:

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(t_n, y_n)\right)$$

2.4.2 Algoritmo Utilizado

Inicialmente a função recebe como parâmetros os valores iniciais do algoritmo sendo estes:

- "f" Função de equação diferencial f(t,y)
- "a" Limite esquerdo/inferior do intervalo em analise
- "b" Limite direito/superior do intervalo em analise
- "n" Número dos pequenos intervalos
- "y0" Valor/Condição inicial

Por fim a função devolve apenas o "y", ou seja, um vetor(array) das soluções aproximadas.

A codificação deste método é semelhante à dos outros métodos, sendo a sua função a coisa mais diferente a se denotar. Em termos de eficácia é superior ao método de Euler e Euler melhorado, ficando ao mesmo nível de RK2.

3. Exemplos de aplicação e teste dos métodos

3.1 Exercício 3 do Teste Farol

3. Considere o problema de valor inicial $y' = -2ty,\ y(0) = 2,\ t \in [0{,}1.5]$

(a) Verifique que $y(t) = 2\exp(-t^2)$ é a solução exata do problema.

$$\rightarrow y' = -2t * y \ (=)\ \frac{dy}{dt} = -2t * y \ (=)\ (-2t * y)dt + (-1)dy = 0$$

$$\rightarrow u(t, y) = \frac{1}{y*-1} = -\frac{1}{y}$$

$$\rightarrow -\frac{1}{y}\big((-2ty)dt + (-1)dy\big) = 0 \ (=)\ (2t)dt + \left(\frac{1}{y}\right)dy = 0$$

$$\rightarrow \int 2t\, dt + \int \frac{1}{y}\, dy = \int 0 \ (=)\ 2 * \frac{1}{2}\, t^2 + \ln|y| = C \ (=)$$

$$(=)\ \ln|y| = C - t^2 \ (=)\ y = e^{C-t^2}$$

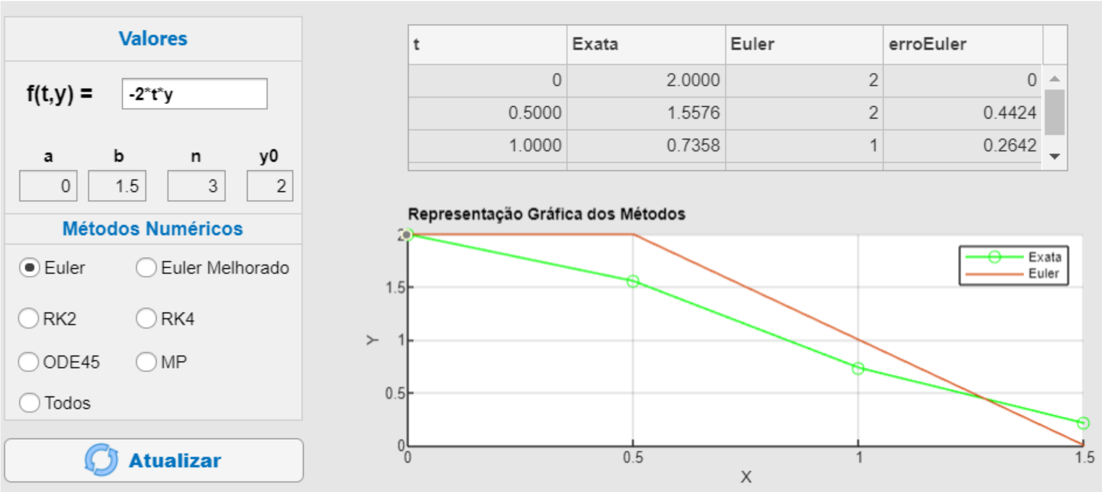
$$\rightarrow 2 = e^{C-0^2} \ (=)\ 2 = e^{C} \ (=)\ C = \ln|2|$$

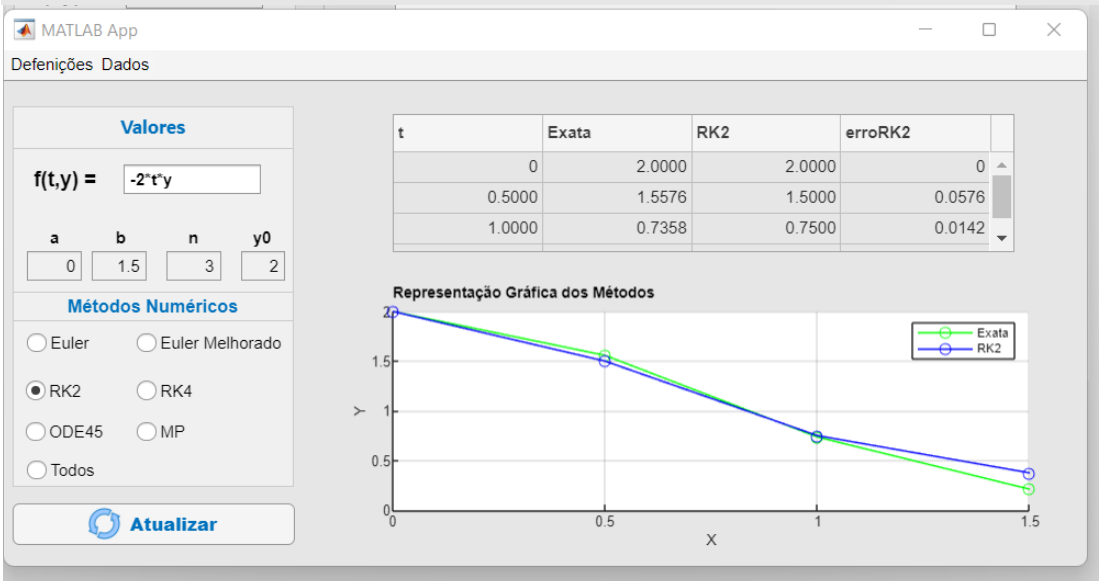
$$y = e^{\ln|2|-t^2} \ (=)\ y = \frac{e^{\ln|2|}}{e^{t^2}} \ (=)\ y = \frac{2}{e^{t^2}} \ (=)\ y = 2e^{-t^2}$$

(b) Complete a tabela seguinte e interprete os resultados obtidos. Para o preenchimento da coluna das aproximações de Euler, deve apresentar os cálculos das iterações da aplicação da fórmula do método de Euler.

			Aproximações		Erros	
i	ti	$y(t_i)$ Exata	y_i Euler	y_i RK2	$\vert y(t_i) - y_i\vert$ Euler	$\vert y(t_i) - y_i\vert$ RK2
0	0	2	2	2	0	0
1	0.5	1.5576	2.0000	1.5000	0.4424	0.0576
2	1	0.7357	1.0000	0.7500	0.2643	0.0142
3	1.5	0.2108	0.0000	0.3750	0.2108	0.1642

➤ Prints da APP





(c) Qual das figuras seguintes representa graficamente uma solução do PVI dado? Justifique a sua resposta.

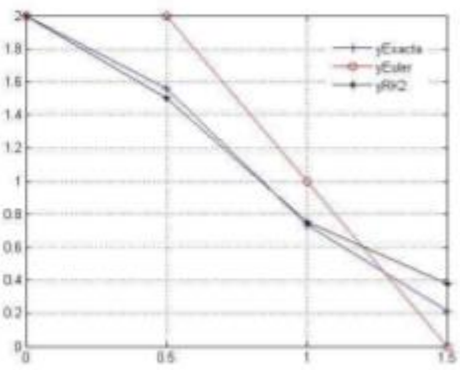


Figura 4

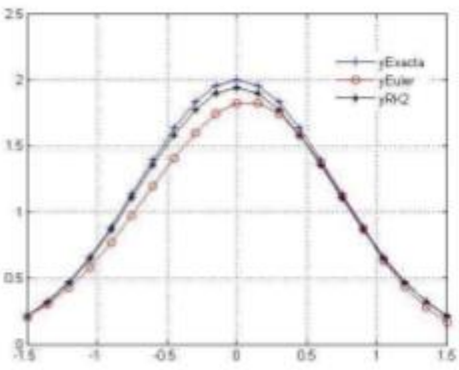


Figura 5

- A fig. 4 seria a mais propicia a representar graficamente as soluções do PVI, visto que os pontos calculados em (b) estão respetivamente representados na fig. 4 em todos os métodos analisados.

(d) Estabeleça um PVI cuja solução em modo gráfico coincide com a figura que excluiu na alínea anterior.

- PVI = $\begin{cases} y' = 2e^{-t^2} \\ t \in [-1.5, 1.5] \\ y(0) = 2 \end{cases}$

(e) Quais dos comandos seguintes em GeoGebra lhe permitiriam determinar a solução exata do PVI e a solução aproximada do mesmo.

- (C) $\rightarrow NSolveODE\ [\{-2xy\}, 0, \{2\}, 1.5]$

3.2 Problemas de aplicação do livro

(1.) If air resistance is proportional to the square of the instantaneous velocity, then the velocity v of a mass m dropped from a height h is determined from

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2, k > 0$$

Let $v(0) = 0, k = 0.125, m = 5\, slugs, and\ g = 32\ ft/s^2$.

(a) Use the Runge-Kutta method with h=1 to find an approximation to the velocity of the falling mass at t = 5 s.

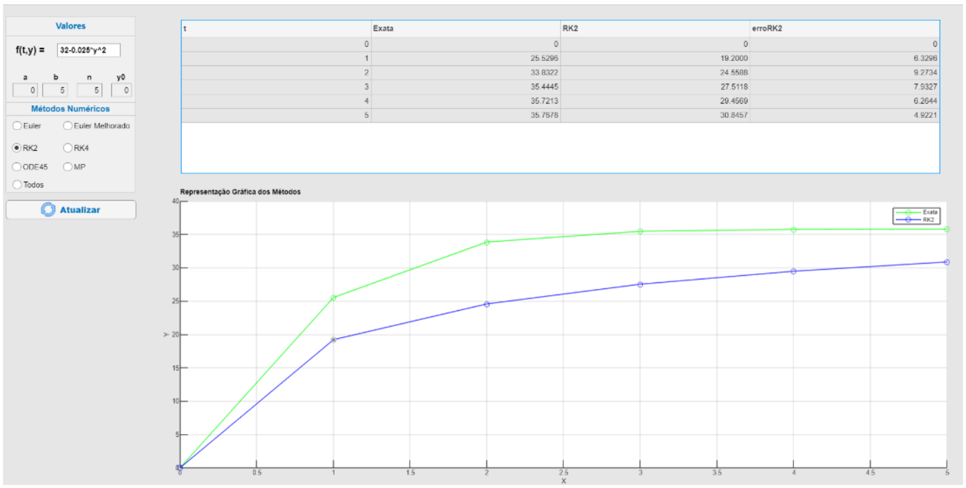
➢ Modelação matemática do problema

$$\rightarrow m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2 \ (=)\ v' = g - \frac{kv^2}{m} \ (=)\ v' = 32 - \frac{0.125 * v^2}{5}$$

$$Logo, \qquad PVI = \begin{cases} v' = 32 - \ 0.025 * v^2 \\ t \in [0; 5] \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

* (g) é uma variável representante para a aceleração gravitacional, sendo o seu valor constante e igual a 32;

➢ Resolução através da App desenvolvida



(2.) A mathematical model for the area A (in cm) that a colony of bacteria (B. forbiddenkeyworddendroides) occupies is given by

$$\frac{dA}{dt} = A(2.128 - 0.0432A)$$

Suppose that the initial area is 0.24 cm.

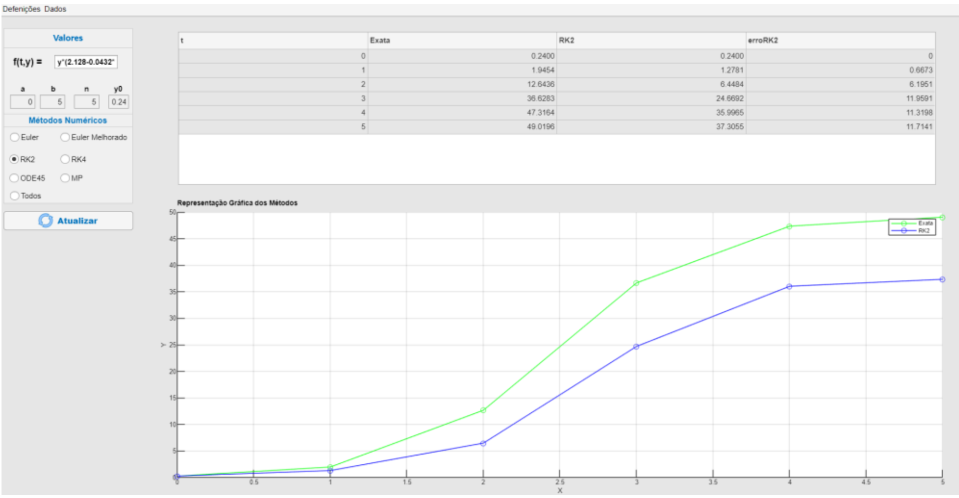
(a) Use the Runge-Kutta method with h = 0.5 to complete the following table.

t(days)	1	2	3	4	5
A(observed)	2.78	13.53	36.30	47.50	49.40
A(approximated) (RK4)	2.78	15.945	39.218	46.181	48.104

➢ Modelação matemática do problema

$$PVI = \begin{cases} A' = A(2.128 - 0.0432A) \\ A(0) = 0.24 \\ t \in [0; 5] \end{cases}$$

➢ Resolução através da App desenvolvida



3.3 Problemas de aplicação da alínea 2.b do teste Farol

(2.) Qual o valor lógico da seguinte afirmação? Justifique a sua resposta.

(b) A força eletromotriz e de um circuito RL com intensidade i , resistência R = 10 Ω(ohms) e indutância L = 0.5 h (henry), é igual à queda de tensão Ri mais a força eletromotriz de autoindução $L\frac{di}{dt}$.

Assim, a intensidade de corrente i , no instante t , se e = 3sin(2t) (em volts) e i = 6 quando t = 0 é dada pela solução particular $i(t) = \frac{609}{101}e^{-20t} - \frac{30}{101}sin2t + \frac{3}{101}cos2t$.

À medida que o tempo aumenta, o termo que envolve e^{-20t} perde influência no valor da intensidade da corrente.

Diz-se que este termo é o termo do estado transitório e o outro é o termo do estado permanente.

➢ Modelação matemática do problema

$\rightarrow$ *Pela interpretação do exercício podemos criar um*

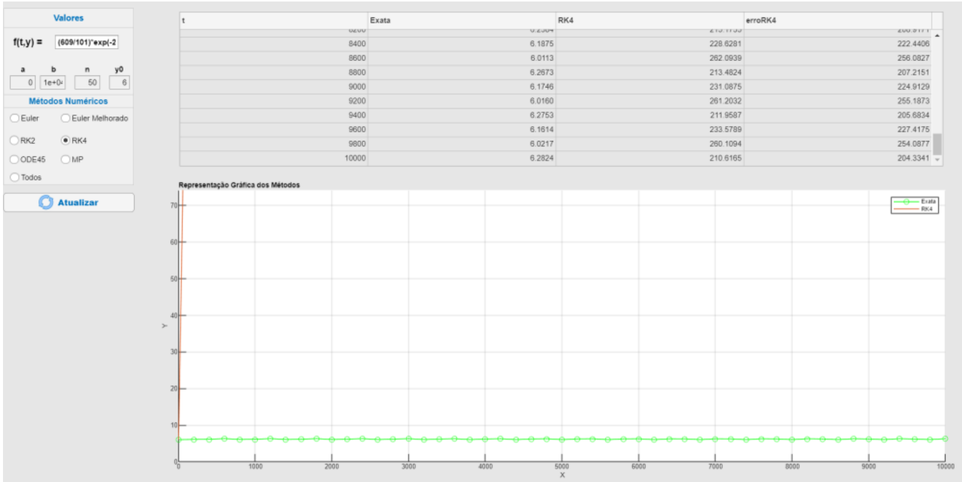
$$PVI = \begin{cases} i(t) = \frac{609}{101}e^{-20t} - \frac{30}{101}sin2t + \frac{3}{101}cos2t \\ t \in [0; +\infty] \\ i(0) = 6 \end{cases}$$

Que o principal objetivo vai ser para provar que

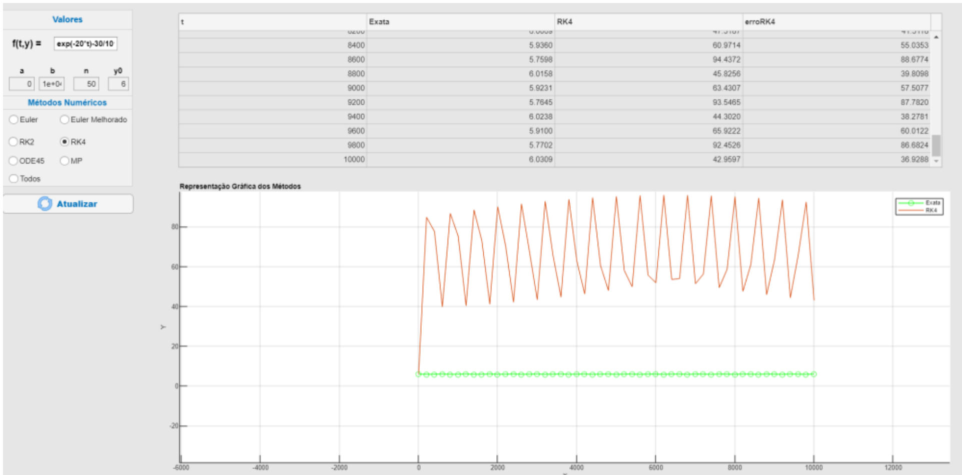
$$i(t)_{t\rightarrow+\infty} = e^{-20t} - \frac{30}{101}\sin 2t + \frac{3}{101}\cos 2t$$

Se isto se comprovar então o valor lógico da pergunta será verdade, caso contrário é mentira;

➢ Resolução através da App desenvolvida



*Solução de $i(t) = \frac{609}{101} * e^{-20t} - \frac{30}{101} * \sin 2 * t + \frac{3}{101} * \cos 2 * t$



*Solução de $i(t) = 1 * e^{-20t} - \frac{30}{101} * \sin 2 * t + \frac{3}{101} * \cos 2 * t$

➢ Como é possível observar pelas figuras acima, os desvios entre os dois tipos de função são bastante significativos, portanto só podemos concluir que o valor lógico da função é falso.

4. Conclusão

Este trabalho permitiu nos ter uma perspetiva melhor sobre os métodos numéricos diferentes que existem para a resolução de um PVI, assim como nos possibilitou o entendimento da necessidade destes métodos para a resolução de problemas matemáticos em engenharia e no mundo.

5. Bibliografia

https://www.mathworks.com/matlabcentral/

https://en.wikipedia.org/wiki/Midpoint_method

https://moodle.isec.pt/moodle/course/view.php?id=12631

6. Autoavaliação e heteroavaliação do trabalho submetido numa escala de 0 a 5 valores.

- Consideramos o nosso trabalho ser merecedor de 4 em 5 valores.