1.

3.4 (1) $P=\{\{a\},\{\{a\}\},\{a,\{a\}\},\phi\}$

(2) $\cancel{P=\{\{1,\{2,3\}\},\{\{1,\{2,3\}\}\},\phi}$

$P=\{\phi,\{1,\{2,3\}\}\}$

(3) $P=\{\phi,\{\phi\},\{a\},\{\{b\}\},\{\phi,a\},\{\phi,\{b\}\},\{a,\{b\}\},\{\phi,a,\{b\}\}\}$

(4) $P(\phi)=\{\phi\}$ ，$2^0$

(5) $P(P(\phi))=P(\{\phi\})=\{\phi,\{\phi\}\}$ ，$2^1$

3.10 ①先证：$C\subseteq A \Rightarrow (A\cap B)\cup C=A\cap(B\cup C)$

~~$\because \forall c\in C, c\subseteq A$~~

$\because (A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

$\because C\subseteq A$，$\therefore A\cup C=A$

$\therefore$ 原式 $=\cancel{A\cup}\, A\cap(B\cup C)$

而 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)=(A\cap B)\cup C$

故得证。

再证：$(A\cap B)\cup C=A\cap(B\cup C) \Rightarrow C\subseteq A$.

左 $=(A\cup C)\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)=$ 右

又左 $=(A\cap B)\cup(C\cap C)=(A\cup A)\cap(B\cup C)=$ 右

$\therefore (A\cup C)\cap(B\cup C)=(A\cup A)\cap(B\cup C)$

$\therefore A\cup C=A\cup A$，同理 $A\cap C=C\cap C$

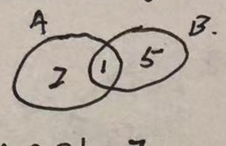
$\therefore A\cup C=A$，$A\cap C=C$

$\therefore C\subseteq A$，得证。

3.11. ∵ $|A|=3$, $|P(B)|=64$, ∴ $|B|=6$, $|P(A\cup B)|=256$

∴ $|A\cup B|=8$. ~~∴ $|A\cup B|=$~~

∴ $|A\cap B|=1$, 其甘特图为




∴ $|A-B|=2$, $|A\oplus B|=7$

综上. $|B|=6$, $|A\cap B|=1$, $|A-B|=2$, $|A\oplus B|=7$.

3.12. 4个元素有,假设 $\{A,B,C,D\}=S$

4: 1, 即 S 本身最小划分;

1+3: 4个

2+2: $C_4^2/A_2^2=3$个

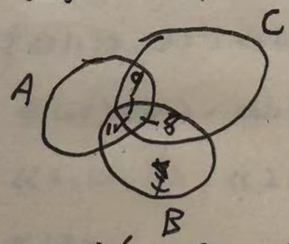
1+1+2: $C_4^2\cdot C_2^2/A_2^2=6$个

1+1+1+1: 1个.

故一共有15个划分

3.15. 设《每周新闻》为A;《时代》为B.《幸运》为C.

则甘特图为:




可知, $A=25$, $B=26$, $C=26$

$A\cap C=9$, $A\cap B=11$, $A\cap B\cap C=8$

∴ 只看B的有 ~~26−(25−9+26−9)~~

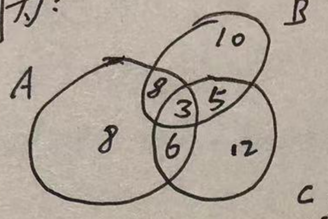
$52-16-17-9=10$人

同理，只看A有：52－(26+26－8)＝8人

只看C有：52－(A∪B)＝52－(25+26－11)＝12人

~~所以 阅读A、B、C的一共有：A∩C+A∩B+B∩C＝28人。~~

所以甘特图为：




∴阅读三种杂志有3个人，只阅读《每周新闻》的有8人，只阅读一种杂志的有30人。

4.1

(1) $A\times\{1\}\times B=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle\}\times\{a,b\}$

$=\{\langle\langle 1,1\rangle,a\rangle,\langle\langle 1,1\rangle,b\rangle,$
$\langle\langle 1,2\rangle,a\rangle,\langle\langle 1,2\rangle,b\rangle\}$

(2) $A^2\times B=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle\}\times\{a,b\}$

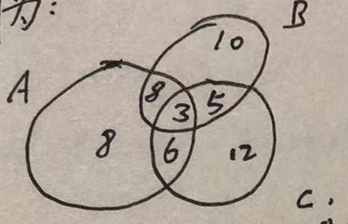
$=\{\langle\langle 1,1\rangle,a\rangle,\langle\langle 1,1\rangle,b\rangle,$
$\langle\langle 1,2\rangle,a\rangle,\langle\langle 1,2\rangle,b\rangle,$
$\langle\langle 2,1\rangle,a\rangle,\langle\langle 2,1\rangle,b\rangle,$
$\langle\langle 2,2\rangle,a\rangle,\langle\langle 2,2\rangle,b\rangle\}$

同理，只看A有：52－(26+26－8)＝8人

只看C有：52－(A∪B)＝52－(25+26－11)＝12人

~~所以阅读A,B,C的一共有：A∩C+A∩B+B∩C＝28人~~

所以文氏图为：



∴阅读三种杂志有3个人，只阅读《每周新闻》的有8人，

只阅读一种杂志的有30人．

4.1

(1) $A\times\{1\}\times B=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle\}\times\{a,b\}$

$=\{\langle\langle 1,1\rangle,a\rangle,\langle\langle 1,1\rangle,b\rangle,$

$\langle\langle 1,2\rangle,a\rangle,\langle\langle 1,2\rangle,b\rangle\}$

(2) $A^2\times B=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle\}\times\{a,b\}$

$=\{\langle\langle 1,1\rangle,a\rangle,\langle\langle 1,1\rangle,b\rangle,$

$\langle\langle 1,2\rangle,a\rangle,\langle\langle 1,2\rangle,b\rangle,$

$\langle\langle 2,1\rangle,a\rangle,\langle\langle 2,1\rangle,b\rangle,$

$\langle\langle 2,2\rangle,a\rangle,\langle\langle 2,2\rangle,b\rangle\}$

4.2. 证：若 $X\times X=Y\times Y$，则 $X=Y$.

证：集合X上的全域关系，等于Y上的全域关系时，

$\forall x_i\in X$，则 $x_i\in Y$；$\forall y_i\in Y$，则 $y_i\in X$，

$\therefore X=Y$.

4.3 $Z_1=\{\langle a,s\rangle\}$，$Z_2=\{\langle b,s\rangle\}$，$Z_3=\{\langle c,s\rangle\}$

$Z_4=\{\langle a,s\rangle,\langle b,s\rangle\}$，$Z_5=\{\langle a,s\rangle,\langle c,s\rangle\}$

$Z_6=\{\langle b,s\rangle,\langle c,s\rangle\}$，$Z_7=\{\langle a,s\rangle,\langle b,s\rangle,\langle c,s\rangle\}$

$Z_8=\Phi$.

4.~~11~~ 证：若S是传递的，$\because t(S)=S\cup S^2\cup S^3\cdots=S$.

$\therefore S^2\subset S$.

设 $\langle x,y\rangle\in S$. 又因为S是自反且传递的.

$\therefore \langle x,x\rangle\in S$，$\langle y,x\rangle\in S$. 根据复合关系定义，有

$\langle x,y\rangle\in S\circ S$，$\therefore$ ~~~~ $S\subseteq S\circ S$

$\therefore S\circ S=S$.

但逆不为真.

~~~~ $S\circ S\subseteq S$，

$S\circ S=S \Rightarrow$ ~~~~ ~~~~，$\therefore t(S)=S$

即只能说~~~~明S是传递的，不能保证 $r(R)=R$.
~~~~

4.16

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \cancel{r(R) = M_R + I_R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_r = M + E$$

$$\therefore \cancel{s(R) = M_R + M}$$

$$M_s = M + M^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4.17.

设 $M$ 为 $R$ 的关系矩阵，则 $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(1) $M_r = M + E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$M_s = M + M^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

求：$M_t$：

令 $A = M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$i=1$， $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$， $i=3$，$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$i=2$， $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$， $i=4$，$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\therefore M_r = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4.18，等价关系，即自反、对称和传递。

另一方面，从划分的角度，每个等价关系即为A的一个划分。

由于$|A|=5$，~~因~~其有划分数目为：

$5$ ： 1个

$1+4$ ： $C_5^4=5$个

$2+3$ ： $C_5^2=10$个

$1+1+3$ ： $C_5^3\cdot C_2^1/A_2^2=10$个

$1+2+2$ ： $C_5^2\cdot C_3^1/A_2^2=15$个

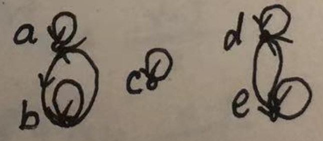
$1+1+1+2$ ： $C_5^2 C_3^1\cdot C_2^1/A_3^3=10$个

$1+1+1+1+1$ ： $C_5^1\cdot C_4^1\cdot C_3^1\cdot C_2^1/A_5^5=1$个，

① 因此一共有 $1+5+10+10+15+10+1=52$ 个等价关系。

② 即 $R=\{\langle a,b\rangle,\langle a,a\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle,$
$\langle d,d\rangle,\langle d,e\rangle,\langle e,d\rangle,\langle e,e\rangle\}$

③ 关系图：



4.19. ,

4.21. (1) $R=\{\langle 0,2\rangle,\langle 0,4\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 0,0\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 4,4\rangle$

$\langle 2,0\rangle,\langle 4,0\rangle,\langle 4,2\rangle,$

$\langle 1,1\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 5,5\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,5\rangle\langle 3,5\rangle$

$\langle 3,1\rangle,\langle 5,1\rangle,\langle 5,3\rangle.\}$

∴ R为一个划分即 $\{\{0,2,4\},\{1,3,5\}\}$.

∴ R是一个等价关系.

(2)

(3) $\{\{0,2,4\},\{1,3,5\}\}$.

:23 (1) $R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,1\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 1,6\rangle,\langle 1,8\rangle\langle 1,12\rangle,\langle 1,14$

$\langle 2,4\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,6\rangle,\langle 2,8\rangle,\langle 2,12\rangle,\langle 2,12\rangle,\langle 2,14$

$\langle 3,3\rangle,\langle 3,6\rangle,\langle 3,12\rangle,$

$\langle 4,4\rangle,\langle 4,8\rangle,\langle 4,12\rangle.$

$\langle 6,6\rangle,\langle 6,12\rangle,$

$\langle 8,8\rangle,$

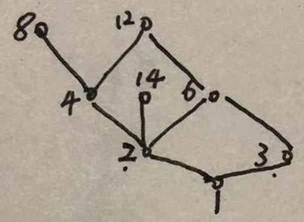
$\langle 12,12\rangle,$

$\langle 14,14\rangle\}$

∵ R是自反的，反对称的，传递的，∴ R是偏序关系.

6,8 不可比较, 8,12,14 不可比较. ~~[illegible]~~

因此哈斯图为:




∴ D的极大元 4, 6 , 极小元为 2, 3

最大元为:无 最小元为无.

(3) D的上界:无, D的上确界:无

D的下界:无 , 下确界:无.

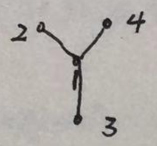
4.24. (a) $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,4\rangle,$

$\langle 2,2\rangle,$

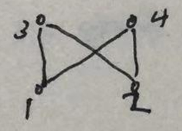
$\langle 3,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 3,4\rangle$

$\langle 4,4\rangle\}$

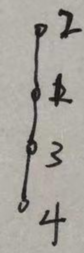
∴ 哈斯图为:



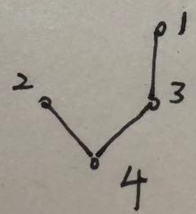

b: 哈斯图为




c: 哈斯图为:




d: 哈斯图为:




4.25. ① f(x)为双射, $f^{-1}(x)=\frac{x-3}{2}$

② g(x)为双射. $g^{-1}(x)=\frac{x-1}{3}$

③ h(x)为双射. $h^{-1}(x)=x-1$

$f \circ g \circ h = f(g(h(x)))$

$= f(3(x+1)+1) = 2 * [3(x+1)+1] + 3 = 6x+11$

$f \circ f \circ f = f(2(2x+3)+3) = f(4x+9) = 2(4x+9)+3 = 8x+21$

$f \circ h \circ h \circ = f(x+1+1) = \cancel{2x+3}. \ 2(x+2)+3 = 2x+7.$