CONJUNTOS

EQUIPO
#7

- Magaña López Luz Janeth
- Santiago Islas Angelica
- Santiago Pérez Daniela
- Torres Arenas Katherine C.

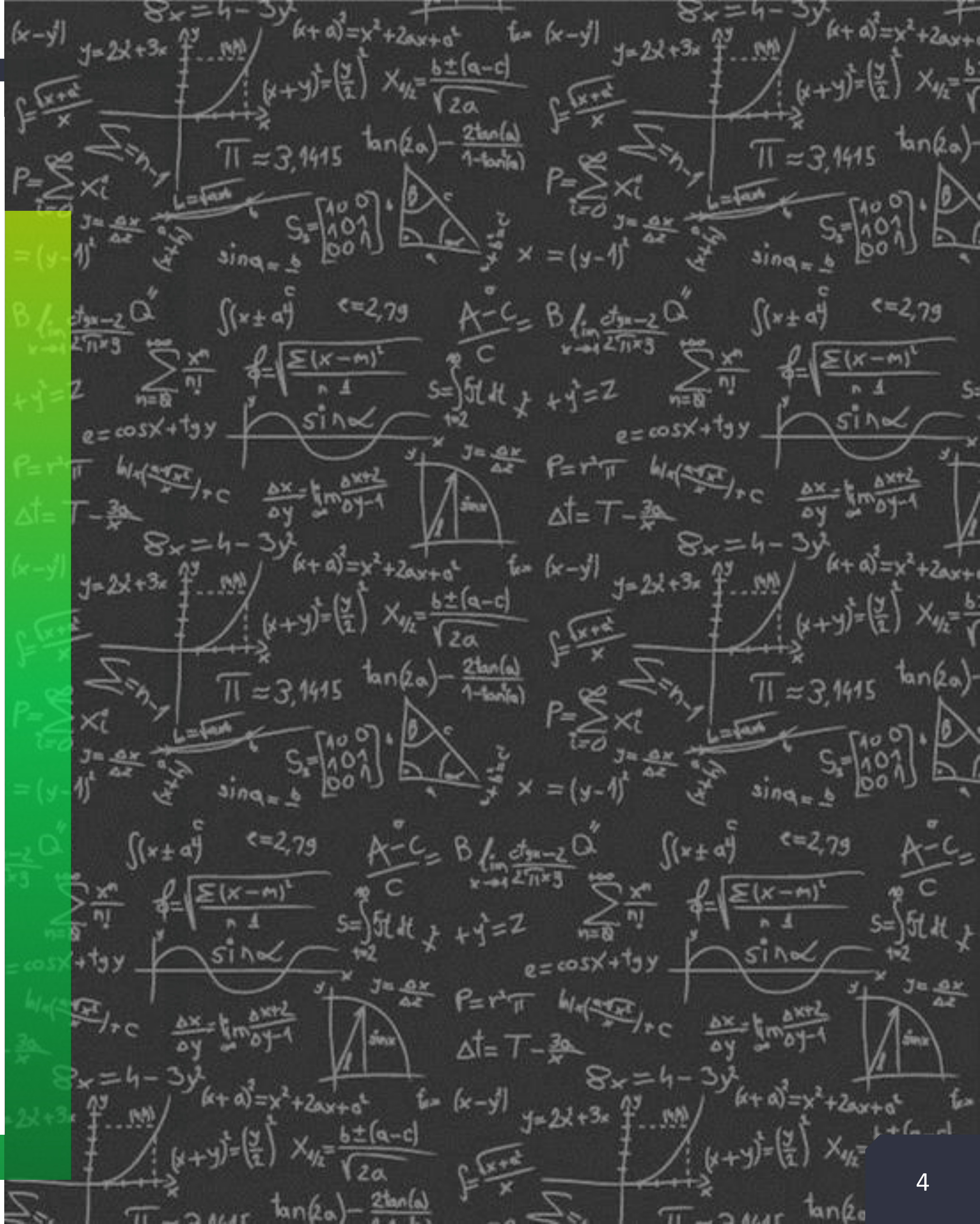
Georg Cantor
(1845-1918)

HISTORIA:

A finales del siglo XIX, Georg Cantor fue el primero en darse cuenta de la utilidad potencial de investigar propiedades de los conjuntos en general, a diferencia de las propiedades de los elementos que se componen. Muchos matemáticos de su tiempo se resistieron a aceptar la validez del trabajo de Cantor. Sin embargo, ahora, la abstracta teoría de conjuntos es considerada como el fundamento del pensamiento matemático. Todos los objetos matemáticos pueden definirse en términos de conjuntos y el lenguaje de la teoría de conjuntos se utiliza en todos los temas matemáticos.

CONCEPTO:

Se considera la palabra conjunto como un termino primitivo; intuitivamente, un conjunto será una colección de objetos, los cuales se llamarán elementos. Usualmente, se representa a los conjuntos con letras mayúsculas; por ejemplo, A, B, C, D, ... , y a los elementos de los conjuntos, con letras minúsculas: a, b, c, d, ...



COMO SE LEEN:

$$A = \underset{\text{el conjunto de todos}}{\{} x \in S \underset{\text{tal que}}{\mid} P(x)\},$$

"el conjunto de todos los x en S tales que P de x".

En teoría de conjuntos, como en cualquier rama de las matemáticas, la notación es importante, y poder determinar el grado de verdad de algunas proposiciones dependen de que se entienda lo que se escribe.

LOS CONJUNTOS SE DEFINEN:

A partir de dos conjuntos, A y B, se definen los conjuntos:

- unión, como $A \cup B = \{x / x \in A \lor x \in B\}$
- intersección, como $A \cap B = \{x / x \in A \land x \in B\}$
- diferencia, como $A - B = \{x / x \in A \land x \notin B\}$
- Complemento de $\bar{A}$ con respecto a U como: $\bar{A} = U - A$
- diferencia simétrica, como $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$
- producto cartesiano de A y B como el conjunto

$A \times B = \{(a, b) / a \in A \land b \in B\}$

- cardinalidad de un conjunto A, que se denota $|A|$, como el número de elementos de este.

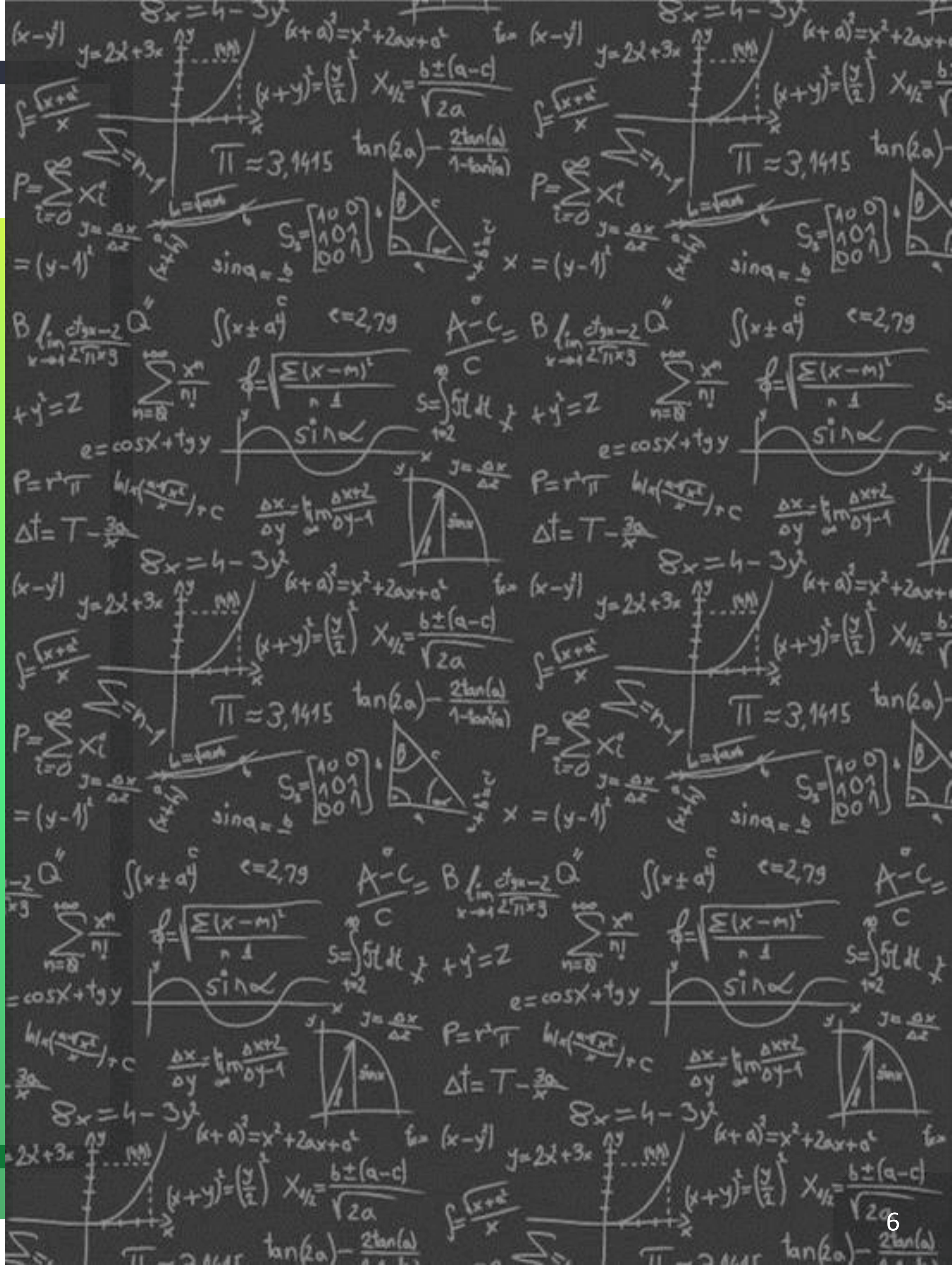
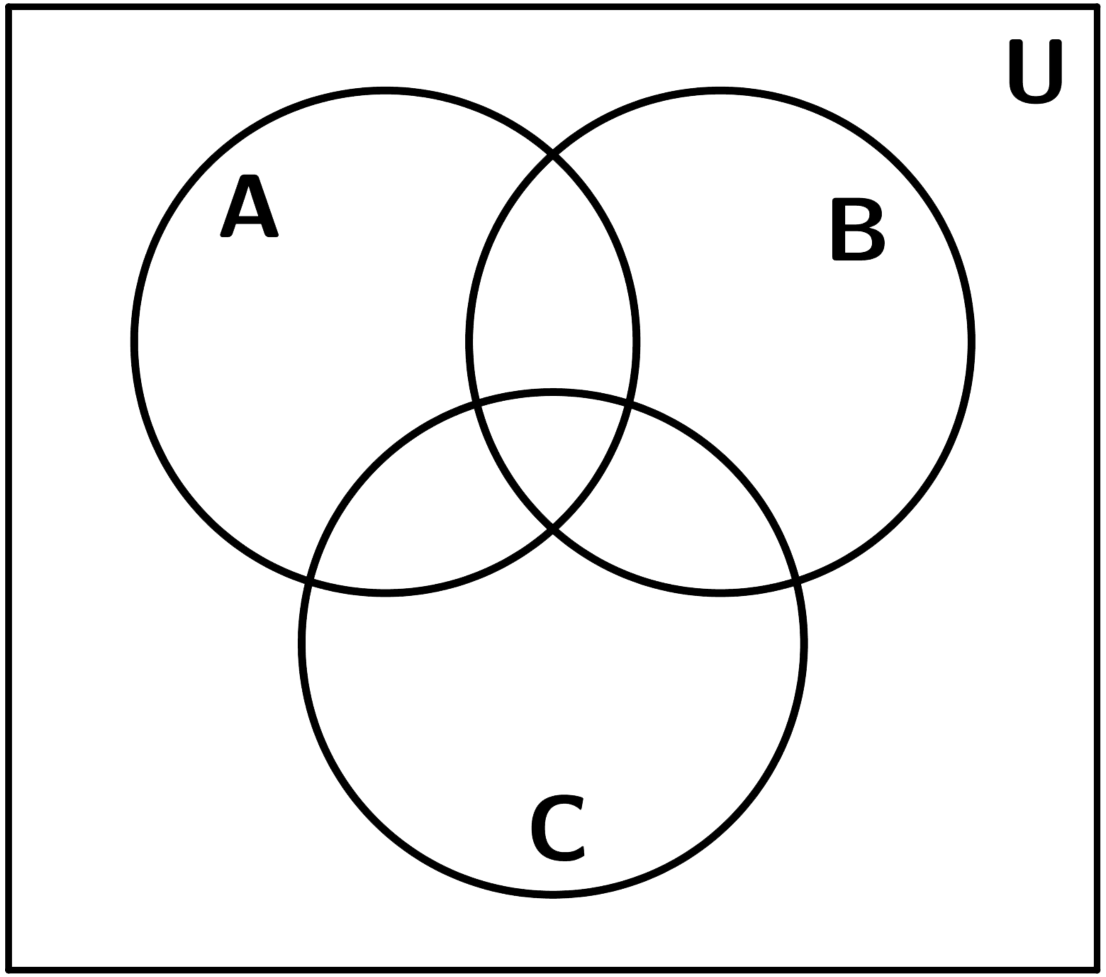


DIAGRAMA DE VEEN:

Los conjuntos y el resultado de operaciones entre ellos se pueden representar de una forma gráfica e intuitiva por medio de los diagramas de Venn. Es importante aclarar que estas representaciones gráficas fueron propuestas por el lógico inglés John Venn (1834-1882) –de allí su nombre–



LEYES DE CONJUNTOS:

Doble Complemento (DC) $A = A$

De Morgan (DM) $A \cup B = A \cap B$, $A \cap B = A \cup B$

Conmutativa (Con.) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$

Asociativa (Aso.) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Distributiva (Dis.) $A \cup (B \cap C)=(A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C)=(A \cap B) \cup (A \cap C)$

Idempotencia (Ide.) $A \cap A = A$, $A \cup A = A$

Neutro (Ne.) $A \cup \emptyset = A$, $A \cap U = A$

Inversos (Inv.) $A \cup A = U$, $A \cap A = \emptyset$

Dominación (Dom.) $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cup U = U$

Absorción (Abs.) $A \cup (A \cap B) = A$, $A \cap (A \cup B) = A$

EJEMPLO 1.-

1.-Si A = {a, b, c, e}, B = {b, c, d} y C = {a, c, e, f} es posible calcular los conjuntos:

$A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$

$A \cap B = \{b, c\}$

$A - B = \{a, e\}$

$(A \cap B) \cup (A - B) = \{b, c\} \cup \{a, e\} = \{a, b, c, e\}$

$B - A = \{d\}$

$(A \cup C) - (B \cap C) = \{a, b, c, e, f\} - \{c\} = \{a, b, e, f\}$

$C - B = \{a, e, f\}$

$A \Delta B = \{a, e\} \cup \{d\} = \{a, d, e\}$

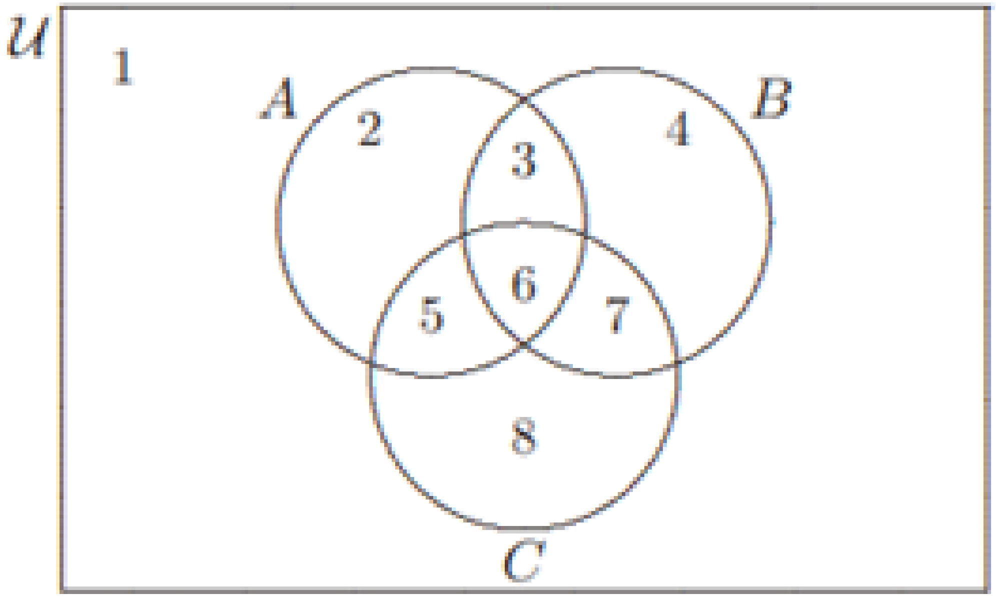
EJEMPLO 2.-

Si A = {1, 2}, B = {a, b} y C = {5}, entonces C × A =

C × A ={(5, 1),(5, 2)}; además, A × B = {(1, a),(1, b),(2, a),(2, b)}.

EJEMPLO 3.-

Sean A, B y C conjuntos arbitrarios, con $A \cap B \cap C = \emptyset$. Represente el conjunto $[(A \Delta C) - B] \cup (B \cap \hat{C})$ en un Diagrama de Veen.



$[\,(A\Delta C) - B\,] \cup (\,B \cap \hat{C}\,)$

$=(\{2, 3, 5, 6\}\{5, 6, 7, 8\}) - \{3, 4, 6, 7\} \cup \{3, 4, 6, 7\} \cap \{5, 6, 7, 8\}$

$= \{2, 3, 7, 8\} - \{3, 4, 6, 7\} \cup \{3, 4, 6, 7\} \cap \{1, 2, 3, 4\}$

$= \{2, 8\} \cup \{3, 4\}$

$= \{2, 3, 4, 8\}$

EJEMPLO 4.-

Pruebe que la igualdad $(A \cup \overline{B}) \cap \left[\overline{(A \cup \overline{B})} \cup \overline{B}\right] = \overline{B}$

Solución. Tome la expresión del lado izquierdo y pruebe que es igual al lado derecho:

$(A \cup \overline{B}) \cap \left[\overline{(A \cup \overline{B})} \cup \overline{B}\right]$	**Justificación**
$= \left[(A \cup \overline{B}) \cap \overline{(A \cup \overline{B})}\right] \cup \left[(A \cup \overline{B}) \cap \overline{B}\right]$	Distributividad
$= \varnothing \cup \overline{B}$	Inversos y Absorción
$= \overline{B}$	Neutro

con lo cual se prueba la igualdad. ■

EJEMPLO 5.-

Suponga que, de un grupo de 30 personas, 15 saben inglés, 10 francés y 5 hablan los dos idiomas. ¿Cuántas personas no saben inglés ni francés?

Sean A y B los conjuntos formados por las personas que saben inglés y francés respectivamente, se tiene:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 15 + 10 - 5 = 20$$

de donde se concluye que son $30 - 20 = 10$ las personas que no saben inglés ni francés.

EJEMPLO 6.-

En un restaurante se ofrece el plato ejecutivo, donde se puede escoger entre 2 tipos de refresco, 4 tipos de plato principal, 3 tipos de ensalada y 4 tipos de postres. La cantidad de posibles combinaciones, es decir, ¿la cantidad de posibles platos completos diferentes que se ofrecen, es?

Es de $2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 = 96$.

EJEMPLO 7.-

Para los conjuntos A = {1, 2} y B = {a, b, c}, es claro que A contiene 2 elementos y B tiene 3 elementos, por lo que |A| = 2 y |B| = 3.

$$|P(A)| = 2^2 = 4,$$

$$|P(B)| = 2^3 = 8.$$

EJEMPLO 8.-

Observe que S = {0}, {0, 5}, {2, x, 6}, {x, y} es una familia finita de conjuntos.

Donde se puede tomar como conjunto de índices a I = {1, 2, 3, 4} y como elementos de esta familia a A1 = {0}, A2 ={0, 5}, A3 = {2, x, 6}, A4 = {x, y}. Con esta notación, es posible escribir S = {Ai}i∈I .

CON ESTE EJERCICIO TERMINAMOS EL TEMA DE CONJUNTOS.

TE INVITAMOS A QUE SIGAS PRACTICANDO.

BIBLIOGRAFIAS:

S. Epp. Susanna

Matemáticas Discretas con Aplicaciones

CENGABE

México

2012

Manuel Murillo Tsijli

Introducción a la Matemáticas discretas

Editorial Tecnológica de Costa Rica

Cuarta edición

Costa Rica

2010