Universidad Nacional del Altiplano
Facultad de Ingeniería Estadística e Informática

E.P. de Ingeniería Estadística e Informática

Docente: Ing. Torres Cruz Fred
Presentado por: Quispe Ito Luz Leidy

Eigenvalores y Eigenvectores

Metodos de Optimizacion

1. ¿Qué son los Eigenvalores y Eigenvectores?

Los **eigenvalores** y **eigenvectores** (también llamados valores y vectores propios) son conceptos fundamentales del álgebra lineal que describen cómo una matriz transforma ciertos vectores especiales.

Sea A una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$. Un vector no nulo $v \in \mathbb{R}^n$ es un **eigenvector** de A si existe un escalar λ tal que se cumple:

$$Av = \lambda v.$$

El escalar λ recibe el nombre de **eigenvalor** asociado al eigenvector v.

donde λ es solo un número, entonces:

- λ es un **eigenvalor**: indica cuánto se estira, encoge o invierte el vector.
- v es un **eigenvector**: es la dirección especial que no cambia cuando actúa la matriz.

Interpretación

Cuando una matriz transforma un vector arbitrario, normalmente cambia su dirección. Sin embargo, los eigenvectores son direcciones especiales que la matriz **no cambia**; solo los estira, encoge o invierte su sentido, y la cantidad de cambio está dada por el eigenvalor.

Ejemplo Simple

Considere la matriz diagonal:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Los vectores:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

son eigenvectores de A, y sus eigenvalores correspondientes son:

$$\lambda_1 = 2, \qquad \lambda_2 = 3.$$

Esto significa que:

$$Av_1 = 2v_1, \qquad Av_2 = 3v_2,$$

es decir, la matriz estira la primera dirección por un factor de 2 y la segunda por un factor de 3.

2. Ejercicios Resueltos

Ejercicio 1

Sea:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Es una matriz diagonal, los eigenvalores son los elementos de la diagonal:

$$\lambda_1 = 4, \qquad \lambda_2 = 7.$$

Eigenvectores correspondientes (vectores que no cambian de dirección):

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Verificación rápida:

$$Av_1 = (4,0)^T = 4v_1, \qquad Av_2 = (0,7)^T = 7v_2.$$

```r
#EJERCICIO 1
A <- matrix(c(4,0,0,7), nrow=2)
eig_A <- eigen(A)
print("Eigenvalores:")
print(eig_A$values)
print("Eigenvectores:")
print(eig_A$vectors)
```

```
> print("Eigenvalores:")
[1] "Eigenvalores:"
> print(eig_A$values)
[1] 7 4
> print("Eigenvectores:")
[1] "Eigenvectores:"
> print(eig_A$vectors)
     [,1] [,2]
[1,]    0   -1
[2,]    1    0
```

Ejercicio 2

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Formamos el polinomio característico:

$$\det(B - \lambda I) = (1-\lambda)^2 - 4 = (1-\lambda)^2 - 4.$$

Expandimos:

$$(1-\lambda)^2 - 4 = 1 - 2\lambda + \lambda^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3.$$

Resolvemos:

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0.$$

Usando la fórmula cuadrática:

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}.$$

Entonces:

$$\lambda_1 = 3, \qquad \lambda_2 = -1.$$

Eigenvectores:

Para $\lambda = 3$:

$$(1-3)v_1 + 2v_2 = -2v_1 + 2v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = v_1.$$

Tomamos:

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Para $\lambda = -1$:

$$(1-(-1))v_1 + 2v_2 = 2v_1 + 2v_2 = 0 \Rightarrow v_1 + v_2 = 0.$$

Tomamos:

$$v^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

```r
#EJERCICIO 2
B <- matrix(c(1,2,2,1), nrow=2)
eig_B <- eigen(B)
print("Eigenvalores:")
print(eig_B$values)
print("Eigenvectores:")
print(eig_B$vectors)
```

```
> print("Eigenvalores:")
[1] "Eigenvalores:"
> print(eig_B$values)
[1]  3 -1
> print("Eigenvectores:")
[1] "Eigenvectores:"
> print(eig_B$vectors)
          [,1]       [,2]
[1,] 0.7071068 -0.7071068
[2,] 0.7071068  0.7071068
```

Ejercicio 3

Función:

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2.$$

a) Matriz Hessiana

La Hessiana es:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}.$$

Cálculo de segundas derivadas:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 4, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = -2.$$

Por tanto:

$$H = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Eigenvalores

Calculamos:

$$\det(H - \lambda I) = (4 - \lambda)(2 - \lambda) - 4 = \lambda^2 - 6\lambda + 4 = 0.$$

Usando la fórmula cuadrática:

$$\lambda = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 16}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 3 \pm \sqrt{5}.$$

Por tanto:

$$\lambda_1 = 3 + \sqrt{5} \approx 5{,}236, \qquad \lambda_2 = 3 - \sqrt{5} \approx 0{,}764.$$

c) Clasificación

Como ambos eigenvalores son positivos,

$$H \text{ es definida positiva}$$

y por lo tanto:

$$(0,0) \text{ es un } \textbf{MÍNIMO LOCAL}.$$

```r
#EJERCICIO 3
H3 <- matrix(c(4,-2,-2,2), nrow=2)
eig_H3 <- eigen(H3)
print("Eigenvalores:")
print(eig_H3$values)
if(all(eig_H3$values>0)) print("M NIMO LOCAL")
```

```
> print("Eigenvalores:")
[1] "Eigenvalores:"
> print(eig_H3$values)
[1] 5.236068 0.763932
> if(all(eig_H3$values>0)) print("MÍNIMO LOCAL")
[1] "MÍNIMO LOCAL"
>
```

Ejercicio 4

$$f(x_1, x_2) = -x_1^2 - 2x_2^2.$$

Hessiana:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = -2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = -4, \qquad \text{mixtas} = 0.$$

Por tanto:

$$H = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Los eigenvalores son:

$$\lambda_1 = -2, \qquad \lambda_2 = -4.$$

Ambos negativos H definida negativa

$$(0,0) \text{ es un máximo local.}$$

```r
#EJERCICIO 4
H4 <- matrix(c(-2,0,0,-4), nrow=2)
eig_H4 <- eigen(H4)
print("Eigenvalores:")
print(eig_H4$values)
if(all(eig_H4$values<0)) print("MAXIMO LOCAL")
```

```
> print("Eigenvalores:")
[1] "Eigenvalores:"
> print(eig_H4$values)
[1] -2 -4
> if(all(eig_H4$values<0)) print("MÁXIMO LOCAL")
[1] "MÁXIMO LOCAL"
>
```

Ejercicio 5

Matriz:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Verificación:

$$Cv = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Para ser eigenvector, Cv debe ser múltiplo de v:

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Esto daría $\lambda = 4$ de la primera componente, pero $\lambda = 6$ de la segunda, por lo que no es múltiplo.

Recalculando: Probemos resolver para el eigenvalor.

Si v fuera eigenvector:

$$Cv = \lambda v \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Esto produce el sistema:

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}.$$

De la primera ecuación:

$$8 = 2\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = 4.$$

De la segunda ecuación:

$$6 = \lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = 6.$$

Como se obtiene una contradicción, se concluye que:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{no es eigenvector de } C.$$

```
#EJERCICIO 5
C <- matrix(c(3,2,1,4), nrow=2)
v <- c(2,1)
resultado <- C %*% v
lambda1 <- resultado[1]/v[1]
lambda2 <- resultado[2]/v[2]
if(abs(lambda1-lambda2)<1e-10) {
  print("ES eigenvector")
  print(paste("    =", lambda1))
} else {
  print("NO es eigenvector")
}
```