Introducción a la Programación Numérica

1. Introducción

El conocimiento y la comprensión son requisitos previos para la implementación efectiva de cualquier herramienta. Sin importar cuán impresionante sea nuestro arsenal de herramientas, será prácticamente imposible reparar un automóvil si no entendemos cómo funciona. Esto es particularmente cierto cuando utilizamos computadoras para resolver problemas de ingeniería. Aunque tienen gran utilidad potencial, las computadoras son prácticamente inútiles sin una comprensión fundamental de cómo funcionan los sistemas de ingeniería.

La comprensión inicial se obtiene por medios **empíricos**, es decir, mediante observación y experimentación. Sin embargo, aunque esta información derivada empíricamente es esencial, es solo la mitad de la historia.

A través de años y años de observación y experimentación, los ingenieros y científicos han notado que ciertos aspectos de sus estudios empíricos ocurren repetidamente. Este comportamiento general puede entonces expresarse como **leyes fundamentales** que esencialmente incorporan la sabiduría acumulada de la experiencia pasada.

La mayoría de la resolución de problemas de ingeniería emplea un **enfoque de dos vertientes**:

1. **Empirismo** - Observación y experimentación
2. **Análisis teórico** - Generalización y modelado matemático

Estas dos vertientes están estrechamente acopladas. Las generalizaciones pueden servir como principios organizadores que se emplean para sintetizar observaciones y resultados experimentales en un marco coherente y comprensivo desde el cual se pueden extraer conclusiones.

2. Modelo Matemático Simple

Un **modelo matemático** puede definirse ampliamente como una formulación o ecuación que expresa las características esenciales de un sistema físico o proceso en términos matemáticos. En un sentido muy general, puede representarse como una relación funcional de la forma:

$$\text{Variable dependiente} = f\left(\begin{matrix}\text{variables}\\\text{independientes}\end{matrix}, \text{parámetros}, \begin{matrix}\text{funciones}\\\text{forzantes}\end{matrix}\right) \tag{1}$$

donde:

- La **variable dependiente** es una característica que usualmente refleja el comportamiento o estado del sistema

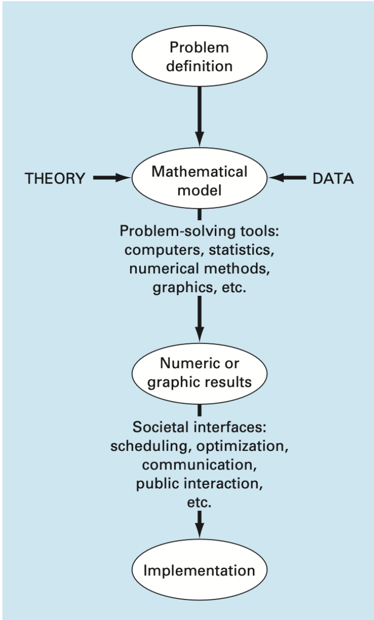

FIGURE 1.1
The engineering problem-solving process.

- Las **variables independientes** son usualmente dimensiones, como tiempo y espacio, a lo largo de las cuales se determina el comportamiento del sistema
- Los **parámetros** reflejan las propiedades o composición del sistema
- Las **funciones forzantes** son influencias externas que actúan sobre el sistema

2.1. Ejemplo: Segunda Ley de Newton

La expresión matemática real de la Ecuación (1) puede variar desde una relación algebraica simple hasta grandes conjuntos complicados de ecuaciones diferenciales. Por ejemplo, basándose en sus observaciones, Newton formuló su segunda ley del movimiento:

$$F = ma \tag{2}$$

donde F = fuerza neta actuando sobre el cuerpo (N), m = masa del objeto (kg), y a = su aceleración (m/s^2).

La segunda ley puede reformularse en el formato de la Ecuación (1) simplemente dividiendo ambos lados por m:

$$a = \frac{F}{m} \tag{3}$$

3. Caso de Estudio: El Paracaidista en Caída Libre

3.1. Desarrollo del Modelo

La segunda ley de Newton puede utilizarse para determinar la velocidad terminal de un cuerpo en caída libre cerca de la superficie terrestre. Consideremos un paracaidista como nuestro cuerpo en caída.

Expresando la aceleración como la tasa de cambio temporal de la velocidad (dv/dt) y sustituyéndola en la Ecuación (3):

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} \tag{4}$$

Para un cuerpo cayendo en las cercanías de la Tierra, la fuerza neta está compuesta por dos fuerzas opuestas:

- Fuerza descendente de gravedad: $F_D = mg$
- Fuerza ascendente de resistencia del aire: $F_U = -cv$

donde c = coeficiente de arrastre (kg/s) y g = constante gravitacional (9.8 m/s²).

3.2. Ecuación Diferencial Resultante

Combinando estas fuerzas, obtenemos:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m}v \tag{5}$$

Esta es una **ecuación diferencial** porque está escrita en términos de la tasa de cambio diferencial (dv/dt) de la variable que nos interesa predecir.

3.3. Solución Analítica

Si el paracaidista está inicialmente en reposo ($v = 0$ en $t = 0$), el cálculo puede utilizarse para resolver la Ecuación (5):

$$v(t) = \frac{gm}{c}\left(1 - e^{-(c/m)t}\right) \tag{6}$$

4. Métodos Numéricos

4.1. Aproximación por Diferencias Finitas

Cuando no es posible obtener una solución analítica exacta, debemos recurrir a **métodos numéricos**. Estos son métodos en los que el problema matemático se reformula para que pueda resolverse mediante operaciones aritméticas.

La tasa de cambio temporal de la velocidad puede aproximarse por:

$$\frac{dv}{dt} \approx \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \tag{7}$$

4.2. Método de Euler

Sustituyendo esta aproximación en nuestra ecuación diferencial:

$$v(t_{i+1}) = v(t_i) + \left[g - \frac{c}{m}v(t_i)\right](t_{i+1} - t_i) \tag{8}$$

Esta es la fórmula fundamental del **Método de Euler**, que puede expresarse como:

$$\boxed{\text{Nuevo valor} = \text{valor anterior} + \text{pendiente} \times \text{tamaño del paso}}$$

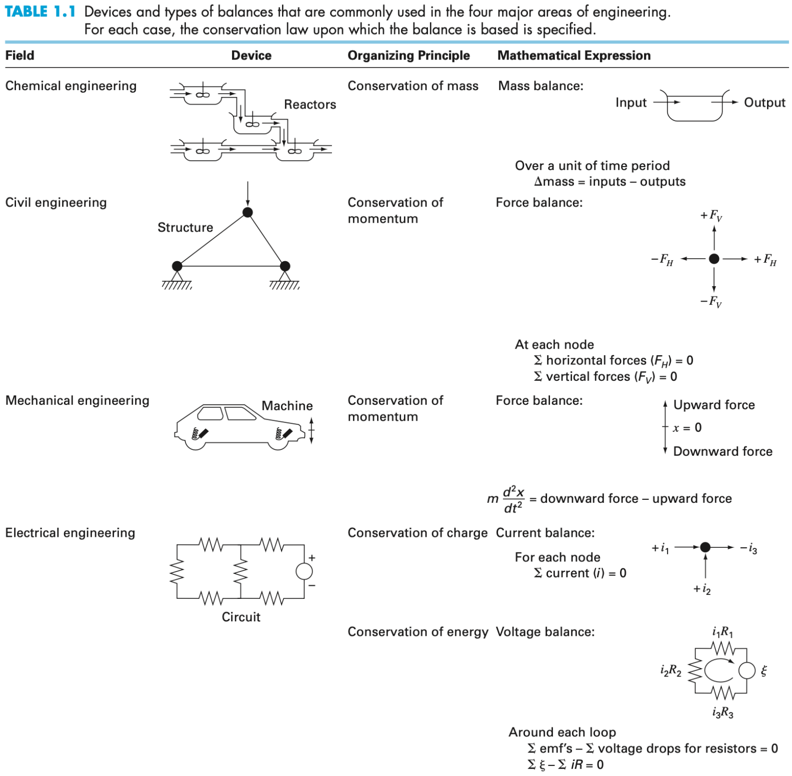

TABLE 1.1 Devices and types of balances that are commonly used in the four major areas of engineering. For each case, the conservation law upon which the balance is based is specified.

Field	Device	Organizing Principle	Mathematical Expression
Chemical engineering	Reactors	Conservation of mass	Mass balance: Input → Output Over a unit of time period Δmass = inputs − outputs
Civil engineering	Structure	Conservation of momentum	Force balance: $+F_V$, $-F_H$, $+F_H$, $-F_V$ At each node Σ horizontal forces (F_H) = 0 Σ vertical forces (F_V) = 0
Mechanical engineering	Machine	Conservation of momentum	Force balance: Upward force, $x = 0$, Downward force $m\frac{d^2x}{dt^2}$ = downward force − upward force
Electrical engineering	Circuit	Conservation of charge	Current balance: $+i_1$, $-i_3$, $+i_2$ For each node Σ current (i) = 0
		Conservation of energy	Voltage balance: i_1R_1, i_2R_2, ξ, i_3R_3 Around each loop Σ emf's − Σ voltage drops for resistors = 0 Σ ξ − Σ iR = 0

Figura 1: Aplicaciones

5. Aplicaciones por Disciplina

“La programación numérica es el puente entre la teoría matemática y la aplicación práctica en ingeniería”