Universidad Nacional del Altiplano
Facultad de Ingeniería Estadística e Informática
E.P. de Ingeniería Estadística e Informática

Docente: Ing. Torres Cruz Fred
Presentado por: Quispe Ito Luz Leidy

Diferencia Numerica

Diferencias Finitas

Diferencias Finitas

Una diferencia finita es una expresión matemática que aproxima una derivada usando valores de una función en puntos discretos. En programación numérica, estas expresiones se usan para transformar ecuaciones diferenciales en sistemas de ecuaciones algebraicas y así poder resolver problemas complejos en áreas como la ingeniería, mediante métodos como las diferencias finitas (MDF)

Tipos de Diferencias Finitas

Método	**Fórmula**	**Qué calcula**
Adelante (Forward)	$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$	Pendiente de x a $x+h$
Atrás (Backward)	$\frac{f(x)-f(x-h)}{h}$	Pendiente de $x-h$ a x
Centrada (Central) (Más precisa)	$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$	Pendiente de $x-h$ a $x+h$

Ejercicios Aplicados a Data Science

Ejercicio 1: Análisis de Crecimiento de Usuarios

Se tiene el siguiente registro de usuarios activos mensuales (en miles):

Mes	1	2	3	4	5	6	7
Usuarios	10	15	23	34	48	65	85

1) Tasa de crecimiento en el mes 4 (Diferencia centrada)

La fórmula de la diferencia centrada es:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

con $h = 1$ y $x = 4$:

$$f'(4) \approx \frac{f(5) - f(3)}{2} = \frac{48 - 23}{2} = \frac{25}{2} = 12{,}5$$

2) Tasa de crecimiento en el mes 1 (Diferencia hacia adelante)

$$f'(1) \approx \frac{f(2) - f(1)}{1} = 15 - 10 = 5$$

3) Tasa de crecimiento en el mes 7 (Diferencia hacia atrás)

$$f'(7) \approx \frac{f(7) - f(6)}{1} = 85 - 65 = 20$$

4) Segunda derivada para identificar la aceleración del crecimiento

La fórmula de diferencias finitas para la segunda derivada es:

$$f''(x) \approx f(x+1) - 2f(x) + f(x-1)$$

Calculando para los meses 2 al 6:

$$\begin{aligned}
f''(2) &= 23 - 2(15) + 10 = 3\\
f''(3) &= 34 - 2(23) + 15 = 3\\
f''(4) &= 48 - 2(34) + 23 = 3\\
f''(5) &= 65 - 2(48) + 34 = 3\\
f''(6) &= 85 - 2(65) + 48 = 3
\end{aligned}$$

Como la segunda derivada es positiva y constante, el crecimiento es acelerado y estable.

5) Interpretación

La startup no sólo está ganando usuarios, sino que lo hace con **aceleración positiva constante**. Esto indica una etapa de **crecimiento saludable y expansión**.

Código en R

```r
# Datos ejercicio 1
mes <- 1:7
usuarios <- c(10, 15, 23, 34, 48, 65, 85)

# 1) Diferencia centrada en mes 4
tasa_mes4 <- (usuarios[5] - usuarios[3]) / 2

# 2) Diferencia hacia adelante en mes 1
tasa_mes1 <- usuarios[2] - usuarios[1]

# 3) Diferencia hacia atras en mes 7
tasa_mes7 <- usuarios[7] - usuarios[6]

# 4) Segunda derivada para meses 2 al 6
segunda_derivada <- usuarios[3:7] - 2*usuarios[2:6] + usuarios[1:5]
mes_aceleracion <- 2:6

# Resultados
tasa_mes4
tasa_mes1
tasa_mes7
data.frame(Mes = mes_aceleracion, Aceleracion = segunda_derivada)

# 5) Interpretaci n
# Como la segunda derivada es positiva y constante, el crecimiento es acelerado.
cat("\n5. Interpretacion: La startup est  creciendo de forma acelerada, ya que cada mes se suman m s usuarios que el mes anterior y la segunda derivada es positiva.\n")
```

Listing 1: Ejercicio 1

```
> # Resultados
> tasa_mes4
[1] 12.5
> tasa_mes1
[1] 5
> tasa_mes7
[1] 20
> data.frame(Mes = mes_aceleracion, Aceleracion = segunda_derivada)
  Mes Aceleracion
1   2           3
2   3           3
3   4           3
4   5           3
5   6           3
>
> # 5) Interpretación
> cat("\n5. Interpretación: La startup está creciendo de forma acelerada, ya que cada mes se suman má
s usuarios que el mes anterior y la segunda derivada es positiva.\n")

5. Interpretación: La startup está creciendo de forma acelerada, ya que cada mes se suman más usuario
s que el mes anterior y la segunda derivada es positiva.
> |
```

Ejercicio 2: Optimización de Función de Pérdida

Se tiene el registro del loss (pérdida) en distintas épocas:

Época	0	10	20	30	40	50
Loss	2,45	1,82	1,35	1,08	0,95	0,89

1) Tasa de cambio del loss en la época 20 (diferencia centrada, $h = 10$)

La fórmula de diferencia centrada con paso h es:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}.$$

Con $x = 20$ y $h = 10$:

$$f'(20) \approx \frac{f(30) - f(10)}{2 \cdot 10} = \frac{1{,}08 - 1{,}82}{20} = \frac{-0{,}74}{20} = -0{,}037.$$

Interpretación: el loss disminuye aproximadamente $-0{,}037$ por época en la época 20.

2) Segunda derivada en la época 30

La fórmula para la segunda derivada con paso h es:

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}.$$

Con $x = 30$ y $h = 10$:

$$f''(30) \approx \frac{0{,}95 - 2(1{,}08) + 1{,}35}{10^2} = \frac{0{,}95 - 2{,}16 + 1{,}35}{100} = \frac{0{,}14}{100} = 0{,}0014.$$

Interpretación: la segunda derivada es positiva pero muy pequeña, lo que indica que la disminución del loss se está *ralentizando* (la curva se aplana) — señal de convergencia.

3) ¿En qué época la tasa de cambio es menor que 0.01 por época?

Calculamos tasas promedio por intervalo (cada 10 épocas):

$$\frac{f(10) - f(0)}{10} = \frac{1{,}82 - 2{,}45}{10} = -0{,}063, \quad \frac{f(20) - f(10)}{10} = -0{,}047, \quad \frac{f(30) - f(20)}{10} = -0{,}027,$$

$$\frac{f(40) - f(30)}{10} = -0{,}013, \quad \frac{f(50) - f(40)}{10} = -0{,}006.$$

La tasa absoluta cae por debajo de 0,01 por época a partir del intervalo 40–50, por lo que se considera que el criterio se alcanza en la **época 40**.

4) Estimación del loss en la época 25 (interpolación lineal)

Usamos la recta entre época 20 (loss = 1.35) y época 30 (loss = 1.08). Pendiente:

$$m = \frac{1{,}08 - 1{,}35}{10} = -0{,}027.$$

Entonces para época 25 (5 épocas después de 20):

$$f(25) \approx 1{,}35 + (-0{,}027) \cdot 5 = 1{,}35 - 0{,}135 = 1{,}215.$$

5) Interpretación final

- El loss está disminuyendo (derivada negativa), pero la magnitud de la disminución se reduce con el tiempo. - La segunda derivada pequeña y positiva indica que la curva se está *aplanando*: **el entrenamiento está convergiendo**. - Según el criterio propuesto (tasa de cambio $< 0{,}01$ por época), se alcanza a partir de la **época 40**, por lo que detener el entrenamiento en torno a esa época es razonable salvo que se requiera una mejora muy pequeña adicional.

Código en R

```r
# Datos
epoca <- c(0, 10, 20, 30, 40, 50)
loss <- c(2.45, 1.82, 1.35, 1.08, 0.95, 0.89)

```

```r
# 1) Derivada centrada en epoca 20
tasa_20 <- (loss[4] - loss[2]) / (2*10)

# 2) Segunda derivada en epoca 30
segunda_30 <- (loss[5] - 2*loss[4] + loss[3]) / (10^2)

# 3) Buscar cuando la tasa de cambio < 0.01 por  poca
tasas <- diff(loss) / 10
epoca_detener <- epoca[-1][tasas < 0.01][1]

# 4) Interpolacion lineal para  poca  25
pendiente <- (loss[4] - loss[3]) / 10
loss_25 <- loss[3] + pendiente * 5

tasa_20
segunda_30
epoca_detener
loss_25
```

Listing 2: Ejercicio 2

```
> tasa_20
[1] -0.037
> segunda_30
[1] 0.0014
> epoca_detener
[1] 10
> loss_25
[1] 1.215
>
```

Ejercicio 3: Análisis de Series Temporales de Ventas

Se tiene el registro de ventas diarias (en miles de dólares) durante una semana de campaña:

Día	Lun	Mar	Mié	Jue	Vie	Sáb	Dom
Ventas ($\$k$)	45	52	61	58	73	89	95

1) Velocidad de crecimiento (primera derivada)

Usamos diferencias finitas:

- **Adelante** para el primer día (Lun): $f'(1) \approx f(2) - f(1)$
- **Atrás** para el último día (Dom): $f'(7) \approx f(7) - f(6)$
- **Centrada** para los demás días: $f'(i) \approx \dfrac{f(i+1) - f(i-1)}{2}$

Cálculos (en miles $/día):

$$\begin{aligned} f'(\text{Lun}) &= f(2) - f(1) = 52 - 45 = 7 \\ f'(\text{Mar}) &= \frac{61 - 45}{2} = 8 \\ f'(\text{Mié}) &= \frac{58 - 52}{2} = 3 \\ f'(\text{Jue}) &= \frac{73 - 61}{2} = 6 \\ f'(\text{Vie}) &= \frac{89 - 58}{2} = 15{,}5 \\ f'(\text{Sáb}) &= \frac{95 - 73}{2} = 11 \\ f'(\text{Dom}) &= 95 - 89 = 6 \end{aligned}$$

2) Aceleración (segunda derivada)

Usamos la fórmula de diferencia finita para la segunda derivada:

$$f''(i) \approx f(i+1) - 2f(i) + f(i-1)$$

Sólo se calcula para los días que tienen vecinos en ambos lados (Mar a Sáb):

$$\begin{aligned} f''(\text{Mar}) &= 61 - 2(52) + 45 = 2 \\ f''(\text{Mié}) &= 58 - 2(61) + 52 = -12 \\ f''(\text{Jue}) &= 73 - 2(58) + 61 = 18 \\ f''(\text{Vie}) &= 89 - 2(73) + 58 = 1 \\ f''(\text{Sáb}) &= 95 - 2(89) + 73 = -10 \end{aligned}$$

Conclusión: la mayor aceleración positiva se observa en el paso **Jue** (valor = 18), indicando un fuerte impulso hacia el viernes.

3) Magnitud de la caída el jueves

La caída del miércoles al jueves es:

$$\Delta = f(\text{Jue}) - f(\text{Mié}) = 58 - 61 = -3 \quad (\text{caída de 3 \$}k)$$

4) Predicción para el lunes siguiente (extrapolación lineal)

Usamos la derivada en el domingo como tasa de cambio para extrapolar un día:

$$f(\text{Lun siguiente}) \approx f(\text{Dom}) + f'(\text{Dom}) = 95 + 6 = 101 \ (\$k)$$

5) Interpretación final

- Las ventas muestran una tendencia general **creciente** durante la semana.
- Hubo una pequeña **caída** el jueves respecto al miércoles (\$3k), seguida de un fuerte repunte (mayor aceleración) que impulsa las ventas hacia el viernes.
- Si la tendencia observada el domingo se mantiene, se espera que el lunes siguiente alcance $\approx$ \$101k.

Código en R

```r
# Datos EJERCICIO 3
dias <- c("Lun","Mar","Mie","Jue","Vie","Sab","Dom")
ventas <- c(45, 52, 61, 58, 73, 89, 95)

# 1) Primera derivada
primera <- numeric(length(ventas))
primera[1] <- ventas[2] - ventas[1]                # adelante
primera[7] <- ventas[7] - ventas[6]                # atr s
for(i in 2:6){
  primera[i] <- (ventas[i+1] - ventas[i-1]) / 2   # centrada
}

# 2) Segunda derivada
segunda <- rep(NA, 7)
for(i in 2:6){
  segunda[i] <- ventas[i+1] - 2*ventas[i] + ventas[i-1]
}

# 3) Ca da del jueves
caida_jueves <- ventas[3] - ventas[4]

# 4) Predicci n lunes siguiente
pred_lunes <- ventas[7] + primera[7]

primera
segunda
caida_jueves
pred_lunes
```

Listing 3: Ejercicio 3

```
>
> primera
[1]  7.0  8.0  3.0  6.0 15.5 11.0  6.0
> segunda
[1]  NA   2 -12  18   1 -10  NA
> caida_jueves
[1] 3
> pred_lunes
[1] 101
>
```

Ejercicio 4: Gradiente de la función de activación (sigmoide)

Se considera la función sigmoide evaluada en varios puntos:

x	$-3{,}0$	$-2{,}0$	$-1{,}0$	$0{,}0$	$1{,}0$	$2{,}0$	$3{,}0$
$\sigma(x)$	0,0474	0,1192	0,2689	0,5000	0,7311	0,8808	0,9526

1) Cálculo numérico de $\sigma'(0)$ usando diferencia centrada (h = 1)

La fórmula de diferencia centrada es:

$$\sigma'(x) \approx \frac{\sigma(x+h) - \sigma(x-h)}{2h}.$$

Con $x = 0$ y $h = 1$:

$$\sigma'(0) \approx \frac{\sigma(1) - \sigma(-1)}{2} = \frac{0{,}7311 - 0{,}2689}{2} = 0{,}2311.$$

2) Cálculo numérico de $\sigma'(-2)$ y $\sigma'(2)$ (centradas, h = 1)

$$\sigma'(-2) \approx \frac{\sigma(-1) - \sigma(-3)}{2} = \frac{0{,}2689 - 0{,}0474}{2} = 0{,}11075,$$
$$\sigma'(2) \approx \frac{\sigma(3) - \sigma(1)}{2} = \frac{0{,}9526 - 0{,}7311}{2} = 0{,}11075.$$

3) Derivada analítica

La derivada analítica de la sigmoide es:

$$\sigma'(x) = \sigma(x)\big(1 - \sigma(x)\big).$$

Calculando con los valores dados:

$$\begin{aligned}
\sigma'(0)_{\text{analítica}} &= 0{,}5(1 - 0{,}5) = 0{,}25,\\
\sigma'(-2)_{\text{analítica}} &= 0{,}1192(1 - 0{,}1192) = 0{,}10499136,\\
\sigma'(2)_{\text{analítica}} &= 0{,}8808(1 - 0{,}8808) = 0{,}10499136.
\end{aligned}$$

4) Comparación numérica vs analítica

	Numérico (h=1)	Analítico	Error absoluto
$x = 0$	0,2311	0,25	0,0189
$x = -2$	0,11075	0,10499136	0,00576
$x = 2$	0,11075	0,10499136	0,00576

Observación: con $h = 1$ la aproximación es razonable pero hay un error apreciable (especialmente en $x = 0$). Reducir h mejora la aproximación hasta que los errores de redondeo empiezan a dominar.

5) Recomendación de h

Para la sigmoide, función suave y bien comportada, se recomienda usar valores pequeños como $h \in [10^{-3}, 10^{-6}]$ en cálculos numéricos prácticos (dependiendo de la precisión requerida). Valores demasiado pequeños (por ejemplo $h < 10^{-12}$) pueden causar errores de redondeo en punto flotante.

6) ¿Por qué la derivada es simétrica alrededor de $x = 0$?

La sigmoide satisface $\sigma(-x) = 1 - \sigma(x)$. De ello se sigue que

$$\sigma'(-x) = \sigma(-x)(1 - \sigma(-x)) = (1 - \sigma(x))\sigma(x) = \sigma(x)(1 - \sigma(x)) = \sigma'(x),$$

por lo que $\sigma'(x)$ es una función par (simétrica respecto de $x = 0$).

Código en R

```
\subsection*{C digo en R}
\begin{lstlisting}[caption={Ejercicio 3 }]
# Datos EJERCICIO 3
dias <- c("Lun","Mar","Mie","Jue","Vie","Sab","Dom")
ventas <- c(45, 52, 61, 58, 73, 89, 95)

# 1) Primera derivada
primera <- numeric(length(ventas))
primera[1] <- ventas[2] - ventas[1]                # adelante
primera[7] <- ventas[7] - ventas[6]                # atr s
for(i in 2:6){
  primera[i] <- (ventas[i+1] - ventas[i-1]) / 2    # centrada
}

# 2) Segunda derivada
segunda <- rep(NA, 7)
for(i in 2:6){
  segunda[i] <- ventas[i+1] - 2*ventas[i] + ventas[i-1]
}

# 3) Ca da del jueves
caida_jueves <- ventas[3] - ventas[4]

# 4) Predicci n lunes siguiente
pred_lunes <- ventas[7] + primera[7]

primera
segunda
caida_jueves
pred_lunes
```

Listing 4: Ejercicio 4

```
> # 1. σ'(0) con h=1
> sigma_prim_0 <- (sigma_x[5] - sigma_x[3]) / (2*1)
> cat("1. σ'(0) numérico:", round(sigma_prim_0, 4), "\n")
1. σ'(0) numérico: 0.2311
> cat("   σ'(0) analítico:", round(sigma_deriv_analitica(0.5), 4), "\n")
   σ'(0) analítico: 0.25
>
> # 2. σ'(-2) y σ'(2)
> sigma_prim_neg2 <- (sigma_x[3] - sigma_x[1]) / (2*1)
> sigma_prim_2 <- (sigma_x[7] - sigma_x[5]) / (2*1)
> cat("2. σ'(-2):", round(sigma_prim_neg2, 4), "\n")
2. σ'(-2): 0.1107
> cat("   σ'(2):", round(sigma_prim_2, 4), "\n")
   σ'(2): 0.1108
>
> # 3. Comparación con analítica
> cat("3. Comparación con analítica:\n")
3. Comparación con analítica:
> for(i in 2:6) {
+   num <- (sigma_x[i+1] - sigma_x[i-1]) / 2
+   ana <- sigma_deriv_analitica(sigma_x[i])
+   cat("   x =", x[i], ": Numérico =", round(num, 4),
+       "Analítico =", round(ana, 4),
+       "Error =", round(abs(num-ana), 4), "\n")
+ }
   x = -2 : Numérico = 0.1107 Analítico = 0.105 Error = 0.0058
   x = -1 : Numérico = 0.1904 Analítico = 0.1966 Error = 0.0062
   x = 0 : Numérico = 0.2311 Analítico = 0.25 Error = 0.0189
   x = 1 : Numérico = 0.1904 Analítico = 0.1966 Error = 0.0062
   x = 2 : Numérico = 0.1108 Analítico = 0.105 Error = 0.0058
>
> # 4. Recomendación de h
> cat("4. Recomendación: h ≈ 10^-5 a 10^-8 para máxima precisión\n")
4. Recomendación: h ≈ 10^-5 a 10^-8 para máxima precisión
>
> # 5. Simetría
> cat("5. La derivada es simétrica porque σ(x) = 1 - σ(-x)\n")
5. La derivada es simétrica porque σ(x) = 1 - σ(-x)
>
```

Ejercicio 5: Detección de Anomalías en Métricas de Sistema

Se registra la latencia (ms) de una API cada hora durante un incidente:

Hora	0	1	2	3	4	5	6	7
Latencia (ms)	120	125	128	135	280	290	275	155

1) Primera derivada (tasa de cambio, ms/h)

Usamos diferencia adelante para la hora 0, atrás para la hora 7 y centrada para las horas intermedias:

$$\begin{aligned}
f'(0) &= 125 - 120 = 5 \\
f'(1) &= \frac{128 - 120}{2} = 4 \\
f'(2) &= \frac{135 - 125}{2} = 5 \\
f'(3) &= \frac{280 - 128}{2} = 76 \\
f'(4) &= \frac{290 - 135}{2} = 77{,}5 \\
f'(5) &= \frac{275 - 280}{2} = -2{,}5 \\
f'(6) &= \frac{155 - 290}{2} = -67{,}5 \\
f'(7) &= 155 - 275 = -120
\end{aligned}$$

Interpretación: hay cambios moderados en las horas iniciales, un salto extremadamente grande entre las horas 3 y 4 (tasa $\approx$ 76–77,5 ms/h), y luego una recuperación rápida con derivadas negativas grandes en magnitud.

2) Identificación del pico de anomalía (segunda derivada)

La segunda derivada por diferencias finitas es:

$$f''(i) \approx f(i+1) - 2f(i) + f(i-1).$$

Calculamos para horas 1 a 6 (las que tienen vecinos en ambos lados):

$$\begin{aligned}
f''(1) &= 128 - 2(125) + 120 = -2 \\
f''(2) &= 135 - 2(128) + 125 = 4 \\
f''(3) &= 280 - 2(135) + 128 = 138 \\
f''(4) &= 290 - 2(280) + 135 = -135 \\
f''(5) &= 275 - 2(290) + 280 = -25 \\
f''(6) &= 155 - 2(275) + 290 = -105
\end{aligned}$$

El cambio de signo de la segunda derivada (de positivo a negativo) ocurre alrededor de la transición hora 3→4, por lo que el **pico de anomalía** se localiza en la **hora 4** (el máximo ascenso se produjo entre 3 y 4).

3) Magnitud del salto brusco entre hora 3 y 4

$$\Delta = f(4) - f(3) = 280 - 135 = 145 \text{ ms}$$

Es un aumento abrupto de **145 ms**.

4) Tasa de recuperación a partir de la hora 6

Entre hora 6 y 7:

$$\text{tasa de recuperación} = f(7) - f(6) = 155 - 275 = -120 \text{ ms/h}.$$

Valor negativo indica disminución de latencia (recuperación). La magnitud $|-120|$ ms/h es una recuperación rápida.

5) Detección de anomalías (definidas como cambio > 50 ms/hora)

Usando las primeras derivadas calculadas en (1), marcamos donde $|f'| > 50$:

$$\text{Horas detectadas: } 3,\ 4,\ 6,\ 7$$

Explicación breve:

- Horas 3–4: salto masivo ascendente (145 ms) → anomalía.
- Horas 6–7: caída rápida (recuperación) con derivadas grandes en magnitud → también detectadas por el umbral.

6) Interpretación final

- El sistema sufrió un pico de latencia muy pronunciado entre las horas 3 y 4 (salto +145 ms).
- La segunda derivada confirma que el evento es abrupto (valor grande y cambio de signo).
- Posteriormente, el sistema muestra una recuperación rápida (tasa de -120 ms/h en 6→7).
- Con un umbral de detección de 50 ms/h, los instantes críticos detectados son las horas 3, 4, 6 y 7.

Código en R

```r
# datos EJERCICIO 5
horas <- 0:7
lat <- c(120,125,128,135,280,290,275,155)

# Derivada primera
prim <- numeric(length(lat))
prim[1] <- lat[2] - lat[1]
prim[length(lat)] <- lat[length(lat)] - lat[length(lat)-1]
for(i in 2:(length(lat)-1)){
  prim[i] <- (lat[i+1] - lat[i-1]) / 2
}

# Segunda derivada (solo para 2..length-1)
seg <- rep(NA, length(lat))
for(i in 2:(length(lat)-1)){
  seg[i] <- lat[i+1] - 2*lat[i] + lat[i-1]
}

# Salto entre 3 y 4
salto_3_4 <- lat[5] - lat[4]  # indices en R: 4->5 (hora 3->4)

# Tasa de recuperacion 6->7
tasa_recuperacion <- lat[8] - lat[7]

# Anomal as (|delta| > 50)
anomalies <- which(abs(c(prim)) > 50) - 1  # convertir a horas (restar 1 si se quiere ver hora exacta)

list(primera = prim, segunda = seg,
     salto_3_4 = salto_3_4,
     tasa_recuperacion_6_7 = tasa_recuperacion,
     horas_anomalias = anomalies)
```

Listing 5: Ejercicio 5

```
+      horas_anomalias = anomalies)
$primera
[1]    5.0    4.0    5.0   76.0   77.5   -2.5  -67.5 -120.0

$segunda
[1]   NA   -2    4  138 -135  -25 -105   NA

$salto_3_4
[1] 145

$tasa_recuperacion_6_7
[1] -120

$horas_anomalias
[1] 3 4 6 7

>
```

Ejercicio 6: Análisis de Tasa de Conversión

Se tiene el siguiente registro de gasto en publicidad (en miles \$) y la tasa de conversión correspondiente (en %):

Gasto (\$$k$)	0	5	10	15	20	25
Conversión (%)	2,1	3,8	5,2	6,1	6,7	7,0

1) ROI marginal (derivada de conversión respecto al gasto)

Usamos diferencias centradas cuando sea posible (paso $h = 5$ en unidades de \$k). Las tasas se expresan en % por \$1k de gasto.

$$\begin{aligned}
\text{En 0 (adelante)}: &\quad \frac{3{,}8 - 2{,}1}{5} = 0{,}34\,\%/\$1k \\
\text{En 5 (centrada)}: &\quad \frac{5{,}2 - 2{,}1}{10} = 0{,}31\,\%/\$1k \\
\text{En 10 (centrada)}: &\quad \frac{6{,}1 - 3{,}8}{10} = 0{,}23\,\%/\$1k \\
\text{En 15 (centrada)}: &\quad \frac{6{,}7 - 5{,}2}{10} = 0{,}15\,\%/\$1k \\
\text{En 20 (centrada)}: &\quad \frac{7{,}0 - 6{,}1}{10} = 0{,}09\,\%/\$1k \\
\text{En 25 (atrás)}: &\quad \frac{7{,}0 - 6{,}7}{5} = 0{,}06\,\%/\$1k
\end{aligned}$$

2) Rango donde ROI marginal > 0.2 % por \$1k

De los valores anteriores, el ROI marginal es mayor que $0{,}2\,\%/\$1k$ para los puntos:

$$\text{Gasto } = 0,\ 5,\ 10\ (\$k).$$

Es decir, hasta aproximadamente \$10k de gasto la ganancia marginal en conversión es relativamente alta (¿ 0.2 % por \$1k).

3) Segunda derivada en \$15k (rendimientos decrecientes)

La segunda derivada con paso $h = 5$ (unidades \$k) se calcula como:

$$f''(15) \approx \frac{f(20) - 2f(15) + f(10)}{h^2} = \frac{6{,}7 - 2(6{,}1) + 5{,}2}{25} = \frac{-0{,}3}{25} = -0{,}012\,\%/\$1k^2.$$

El valor negativo indica **rendimientos decrecientes** alrededor de \$15k.

4) Recomendación sobre aumentar gasto más allá de $25k

Matemáticamente, la derivada marginal decrece a medida que aumenta el gasto (ej.: 0.34 → 0.31 → 0.23 → 0.15 → 0.09 → 0.06). La segunda derivada negativa confirma rendimientos decrecientes. Por lo tanto, **no se recomienda aumentar el gasto más allá de $25k** sin una estrategia distinta o evidencia de que el ROI marginal se recuperará (nuevos canales, ajuste creativo, segmentación, etc.). Si la empresa desea más conversión absoluta, puede invertir, pero con expectativa de menor retorno marginal por cada $1k adicional.

Código en R

```r
#datos EJERCICIO 6
gasto <- c(0,5,10,15,20,25)
conv <- c(2.1,3.8,5.2,6.1,6.7,7.0)
h <- 5

# Derivadas (margen de conversi n por $1k)
marginal <- numeric(length(conv))
marginal[1] <- (conv[2] - conv[1]) / h
for(i in 2:(length(conv)-1)){
  marginal[i] <- (conv[i+1] - conv[i-1]) / (2*h)
}
marginal[length(conv)] <- (conv[length(conv)] - conv[length(conv)-1]) / h

# Segunda derivada en 15k ( ndice  4)
sec_15k <- (conv[5] - 2*conv[4] + conv[3]) / (h^2)

list(marginal_por_k = marginal, segunda_15k = sec_15k,
     rango_mayor_0_2 = gasto[which(marginal > 0.2)])
```

Listing 6: Ejercicio 6

```
+      rango_mayor_0_2 = gasto[which(marginal > 0.2)])
$marginal_por_k
[1] 0.34 0.31 0.23 0.15 0.09 0.06

$segunda_15k
[1] -0.012

$rango_mayor_0_2
[1]  0  5 10

>
```

Ejercicio 7: Feature Engineering con Derivadas

Se tiene la señal de un sensor de temperatura medida cada segundo:

Tiempo (s)	0	1	2	3	4	5	6	7
Temp (°C)	20,1	20,3	20,8	21,5	22,6	24,2	26,1	28,5

1) Velocidad de cambio (primera derivada, °C/s)

Usamos diferencia adelante en $t = 0$, atrás en $t = 7$ y centrada para los demás:

$$\begin{aligned}
v(0) &= 20{,}3 - 20{,}1 = 0{,}20 \\
v(1) &= \frac{20{,}8 - 20{,}1}{2} = 0{,}35 \\
v(2) &= \frac{21{,}5 - 20{,}3}{2} = 0{,}60 \\
v(3) &= \frac{22{,}6 - 20{,}8}{2} = 0{,}90 \\
v(4) &= \frac{24{,}2 - 21{,}5}{2} = 1{,}35 \\
v(5) &= \frac{26{,}1 - 22{,}6}{2} = 1{,}75 \\
v(6) &= \frac{28{,}5 - 24{,}2}{2} = 2{,}15 \\
v(7) &= 28{,}5 - 26{,}1 = 2{,}40
\end{aligned}$$

(Valores en °C/s).

2) Aceleración (segunda derivada, °C/s^2)

La fórmula de diferencia finita:

$$a(t) \approx f(t+1) - 2f(t) + f(t-1)$$

Se calcula para $t = 1, \dots, 6$:

$$\begin{aligned}
a(1) &= 20{,}8 - 2(20{,}3) + 20{,}1 = 0{,}30 \\
a(2) &= 21{,}5 - 2(20{,}8) + 20{,}3 = 0{,}20 \\
a(3) &= 22{,}6 - 2(21{,}5) + 20{,}8 = 0{,}40 \\
a(4) &= 24{,}2 - 2(22{,}6) + 21{,}5 = 0{,}50 \\
a(5) &= 26{,}1 - 2(24{,}2) + 22{,}6 = 0{,}30 \\
a(6) &= 28{,}5 - 2(26{,}1) + 24{,}2 = 0{,}50
\end{aligned}$$

(Valores en °C/s^2.)

3) Detección de alertas (velocidad ¿0.8 °C/s)

Marcamos los instantes donde la velocidad excede 0.8 °C/s:

$$\text{Tiempos con alerta: } t = 3, 4, 5, 6, 7.$$

Es decir, desde el segundo 3 en adelante la velocidad supera el umbral 0.8 °C/s y se levantaría la alerta.

4) Normalización Min–Max de las features derivadas

Usamos Min–Max scaling para llevar las features a [0,1].

Para la velocidad:

$$v_{\text{mín}} = 0{,}20, \quad v_{\text{máx}} = 2{,}40, \quad v_{norm} = \frac{v - 0{,}20}{2{,}20}.$$

Para la aceleración (valores computados para $t = 1.,6$):

$$a_{\text{mín}} = 0{,}20, \quad a_{\text{máx}} = 0{,}50, \quad a_{norm} = \frac{a - 0{,}20}{0{,}30}.$$

5) ¿Por qué son útiles estas features para detección de anomalías?

Las derivadas capturan la dinámica temporal:

- La **velocidad** detecta cambios rápidos inmediatos en la señal (picos o escaladas).
- La **aceleración** identifica transiciones bruscas o cambios en la tendencia (inicio de fallas).

Como features en un modelo de clasificación, permiten distinguir entre ruido (pequeñas variaciones) y eventos significativos (aumentos sostenidos o picos repentinos), mejorando la sensibilidad en la detección de anomalías.

Código en R

```r
#datos EJERCICIO 7
tiempo <- 0:7
temp <- c(20.1,20.3,20.8,21.5,22.6,24.2,26.1,28.5)

# 1) Primera derivada (velocidad)
vel <- numeric(length(temp))
vel[1] <- temp[2] - temp[1]      # adelante
for(i in 2:(length(temp)-1)){
  vel[i] <- (temp[i+1] - temp[i-1]) / 2
}
```

```r
vel[length(temp)] <- temp[length(temp)] - temp[length(temp)-1]  # atras

# 2) Segunda derivada (aceleracion) para 1..6
acel <- rep(NA, length(temp))
for(i in 2:(length(temp)-1)){
  acel[i] <- temp[i+1] - 2*temp[i] + temp[i-1]
}

# 3) Detectar alertas (> 0.8  C /s)
alertas <- which(vel > 0.8) - 1  # restar 1 si quieres indices inicio en 0 para tiempo

# 4) Normalizar (min-max) las features (excluyendo NA)
vel_non_na <- vel[!is.na(vel)]
acel_non_na <- acel[!is.na(acel)]

norm <- function(x){ (x - min(x)) / (max(x) - min(x)) }

vel_norm <- norm(vel_non_na)
acel_norm <- norm(acel_non_na)

list(velocidad = vel, aceleracion = acel,
     tiempos_alerta = alertas,
     vel_norm = vel_norm, acel_norm = acel_norm)
```

Listing 7: Ejercicio 7

```
+      vel_norm = vel_norm, acel_norm = acel_norm)
$velocidad
[1] 0.20 0.35 0.60 0.90 1.35 1.75 2.15 2.40

$aceleracion
[1]  NA 0.3 0.2 0.4 0.5 0.3 0.5  NA

$tiempos_alerta
[1] 3 4 5 6 7

$vel_norm
[1] 0.00000000 0.06818182 0.18181818 0.31818182 0.52272727 0.70454545 0.88636364 1.00000000

$acel_norm
[1] 0.3333333 0.0000000 0.6666667 1.0000000 0.3333333 1.0000000

> 
```