Eigenvalores y Eigenvectores

Métodos de Optimización

Universidad Nacional del Altiplano - Puno

1. ¿Qué son los Eigenvalores y Eigenvectores?

Imagina que tienes una matriz A que transforma vectores. Cuando multiplicas A por un vector cualquiera, normalmente el vector cambia de dirección y tamaño. Pero hay vectores especiales que solo cambian de tamaño, **sin cambiar de dirección**.

Definición 1 (Eigenvalor y Eigenvector)**.** *Si tenemos una matriz A y un vector $\mathbf{v}$, y al multiplicarlos obtenemos:*

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \tag{1}$$

donde λ es solo un número, entonces:

- *λ es un **eigenvalor** (cuánto se estira o encoge el vector)*
- *$\mathbf{v}$ es un **eigenvector** (la dirección especial que no cambia)*

Ejemplo visual: Si $\lambda = 2$, el vector se duplica. Si $\lambda = -1$, se invierte. Si $\lambda = 0{,}5$, se reduce a la mitad.

1.1. ¿Cómo Calcular Eigenvalores?

Paso 1: Forma la matriz $(A - \lambda I)$ restando λ a la diagonal de A
Paso 2: Calcula el determinante: $\det(A - \lambda I) = 0$
Paso 3: Resuelve la ecuación resultante para encontrar λ
Paso 4: Para cada λ, resuelve $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ para encontrar $\mathbf{v}$

Ejemplo 1 (Matriz Diagonal)**.** *Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. Encontrar eigenvalores y eigenvectores.*

Solución: *En matrices diagonales, ¡los eigenvalores están en la diagonal!*

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 5$$

Los eigenvectores son los vectores unitarios:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Verificación:

$$A\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1\mathbf{v}_1 \checkmark$$

Ejemplo 2 (Matriz 2×2 General)**.** *Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Encontrar eigenvalores y eigenvectores.*

Paso 1: *Forma $(A - \lambda I)$*

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

Paso 2: *Determinante*

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= (3-\lambda)(3-\lambda) - (1)(1) \\ &= 9 - 6\lambda + \lambda^2 - 1 \\ &= \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0 \end{aligned}$$

Paso 3: *Resolver (factorizar o usar fórmula cuadrática)*

$$(\lambda - 4)(\lambda - 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda_1 = 4, \; \lambda_2 = 2}$$

Paso 4a: *Eigenvector para* $\lambda_1 = 4$

$$(A - 4I)\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Primera fila: $-v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = v_1$

Tomamos $v_1 = 1$*, entonces* $v_2 = 1$*:* $\boxed{\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$

Paso 4b: *Eigenvector para* $\lambda_2 = 2$

$$(A - 2I)\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Primera fila: $v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = -v_1$

Tomamos $v_1 = 1$*, entonces* $v_2 = -1$*:* $\boxed{\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$

2. ¿Por qué son importantes en Optimización?

2.1. Conexión con la función $f(x)$

Cuando queremos optimizar una función $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, necesitamos:

1. Encontrar puntos críticos: donde $\nabla f = 0$ (gradiente cero)
2. Clasificar si es máximo, mínimo o punto silla

La **matriz Hessiana** H contiene las segundas derivadas:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}$$

Regla de Oro: Los eigenvalores de H nos dicen qué tipo de punto tenemos:

Eigenvalores	**Tipo de Punto**
Todos positivos ($\lambda_i > 0$)	Mínimo local
Todos negativos ($\lambda_i < 0$)	Máximo local
Positivos y negativos mezclados	Punto silla

Ejemplo 3 (Clasificar un Punto Crítico)**.** *Sea* $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1x_2$*. El punto* $(0, 0)$ *es crítico. ¿Es máximo, mínimo o silla?*

Paso 1: *Calcular segundas derivadas*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 6$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 2$$

Paso 2: *Formar la Hessiana*

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Paso 3: *Encontrar eigenvalores*

$$\det(H - \lambda I) = (2-\lambda)(6-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 8\lambda + 8 = 0$$

Usando la fórmula cuadrática:

$$\lambda = \frac{8 \pm \sqrt{64-32}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{32}}{2} \approx \begin{cases} 6{,}83 \\ 1{,}17 \end{cases}$$

Paso 4: *Clasificar*
Ambos eigenvalores son ***positivos*** $\Rightarrow (0,0)$ *es un* ***MÍNIMO LOCAL***

3. Ejercicios

Ejercicio 1. Encuentra los eigenvalores y eigenvectores de:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2. Calcula eigenvalores y eigenvectores de:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Pista: El determinante será $(1-\lambda)^2 - 4$
Ejercicio 3. Para la función $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2$:

a) Calcula la matriz Hessiana

b) Encuentra sus eigenvalores

c) Clasifica el punto crítico $(0,0)$

Ejercicio 4. Determina si el punto crítico $(0,0)$ de $f(x_1, x_2) = -x_1^2 - 2x_2^2$ es máximo o mínimo usando eigenvalores de la Hessiana.

Ejercicio 5. Verifica que $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ es eigenvector de $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ y encuentra su eigenvalor asociado λ.