Simple Mathematical Analysis

路致远

2025 年 4 月 19 日

1 收敛性

“收敛性就是可交换。”——艾颖华

1.1 数项级数的敛散性

1.1.1 交换与结合

收敛即是和数列的极限存在。调整求和顺序会很大地影响和数列，因此，一般地不能交换求和顺序。特别地，有黎曼重排定理;

命题 1 (黎曼重排). *对收敛级数* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$，*有*:

(1) 若绝对收敛，则交换求和顺序 $n \to \gamma(n)$，*新级数收敛且* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{\gamma(n)}$

(2) 若条件收敛，则 $\forall \xi \in \mathbb{R}, \exists \gamma(n), s.t. \xi = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{\gamma(n)}$

最典型的例子就是 $ln(2)$ 的级数。

例 1. 由泰勒级数知道

$$ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

做如下的重排

$$S = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots$$

考虑部分和 S_m，当 m 是 3 的倍数时，有

$$S_{3k} = \sum_{n=1}^{k} [\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}] = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{k} [\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}] = \frac{1}{2}[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots] = \frac{1}{2} ln(2)$$

而当 m 并非 3 的倍数时，差异 $o \sim \frac{1}{n}$，因此重排后的 S

$$S = \frac{1}{2}ln(2)$$

由此知道，绝对收敛意味着求和顺序可以交换。然而，立刻就会想到，如果不是交换求和顺序，而是像我们之前的计算那样，对求和进行结合，这是可行的吗？一般而言，这是不行的。例如 $1-1+1-1+\cdots$ 是显然不收敛的，但是 $(1-1)+(1-1)+\cdots$ 却是收敛的。

命题 2. 若级数 $\sum a_n$ 收敛，则由 a_n 所结合成的 $A_l = \sum\limits_{n=n_{l-1}+1}^{n_l} a_n$ 所组成的级数 $\sum A_l$ 也收敛，且

$$\sum a_n = \sum A_l$$

分析 . 这是一个很简单的证明，只要你从部分和序列的角度来看，结合的影响不过是抽出原部分和序列的一个子列而已。

证明. 原级数部分和

$$S_m = \sum_{n=0}^{m} a_n$$

由于原级数收敛，数列 $\{S_m\}_{m=0}^{\infty}$ 收敛。
而结合级数部分和

$$S_k = \sum_{l=0}^{k} A_l = \sum_{n=0}^{n_k} a_n = S_{n_k}$$

所以数列 $\{S_k\}_{k=0}^{\infty}$ 是 $\{S_m\}_{m=0}^{\infty}$ 之子列。由于原数列收敛，其子列也一定收敛，且有相同的极限。 □

因此，在例 1 中，我们应当先证明级数收敛，再进行计算。但一旦我们研究具体的级数，和函数往往极难显式地写出，更何谈极限。因此，我们需要审敛法。

1.1.2 一般审敛

既然是要考虑的是完备空间上的和数列极限，只要是和数列是 Cauchy 列就可以了，即足够多项的和差异很小。

命题 3 (Cauchy 充要审敛)**.** 级数 $\sum a_n$ 收敛，当且仅当

$$\forall \epsilon > 0, \exists N, s.t. \forall m \geq n > N, |a_n + \cdots + a_m| < \epsilon$$

Cauchy 审敛往往用于理论性的证明，对付具体计算并不好用。但是，在一些非交错、非正项的级数中，或是证明级数发散时，Cauchy 审敛由于其充分必要性，将是我们除了定义外唯一的工具。

问题 1. *证明：例 1 中重排后的级数收敛。*

证明. $\because \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 收敛；

$$\therefore \forall \epsilon > 0, \exists N_0, s.t. \forall m \geq n > N_0, |\frac{(-1)^{n-1}}{n} + \cdots + \frac{(-1)^{m-1}}{m}| < \epsilon$$

考虑例 1 中级数的部分和差异

$$|S_p - S_q| = |F + [\frac{1}{2l-1} - \frac{1}{4l-2} - \frac{1}{4l}] + \cdots + [\frac{1}{2r-1} - \frac{1}{4r-2} - \frac{1}{4r}] + E|$$

F,E 是由于 p，q 非 3 整数倍引起的残项，有

$$|F| \leq \frac{1}{2n-1}, |E| \leq \frac{1}{2n-1}$$

$$\therefore \forall \epsilon > 0, \exists N = max[N_0, [\frac{2}{\epsilon} + \frac{1}{2}]], s.t. \forall p, q > N, |S_p - S_q| < \frac{1}{2}\epsilon + \frac{2}{2N-1} < \epsilon$$

从而收敛。 □

对于交错级数，则可用莱布尼兹审敛，但这并非必要条件。

命题 4 (Leibniz 审敛)**.** *对于级数 $\sum(-1)^n u_n$，若 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$，且 $\{u_n\}$ 单调递减，则级数收敛。*

除此之外，利用 Abel 变换，还可以给出两个收敛的充分条件

命题 5 (Abel 审敛)**.** *若级数 $\sum a_n$ 收敛，且 $\{b_n\}$ 单调有界，则级数 $\sum a_n b_n$ 收敛。*

命题 6 (Dirichlet 审敛)**.** *若部分和 $\sum\limits_{n=0}^{m} a_n$ 有界，且 $\{b_n\}$ 单调趋 0，则级数 $\sum a_n b_n$ 收敛。*

运用这两个审敛法的关键是正确地分割级数。

1.1.3 正项审敛

由于单调有界必有极限，我们对绝对收敛，或说正项级数的审敛法尤其多。最为常用的就是比值审敛和根式审敛法，这里从略；此外，比较审敛也是非常常见的。

命题 7 (比较审敛法)**.** *若正项级数 $\sum b_n$ 收敛，且 $\exists N, s.t. \forall n > N, 0 \leq a_n \leq b_n$，则级数 $\sum a_n$ 收敛。*

命题 8 (极限比较审敛法)**.** *若 $\sum b_n, \sum a_n$ 都是正项级数，且*
(1)$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \in (0, \infty)$，*则 $\sum b_n, \sum a_n$ 同敛散。*
(2) 若 $l = 0$，则若 $\sum b_n$ 收敛，则 $\sum a_n$ 收敛。
(3) 若 $l \to \infty$，则若 $\sum a_n$ 收敛，则 $\sum b_n$ 收敛。

敛散性熟知的级数可以用于比较审敛。例如等比级数 $\sum r^n$，p 级数 $\sum \frac{1}{n^p}$，p 对数级数 $\sum \frac{1}{nln(n)^p}$ 等等。同时，由极限比较审敛，还可以利用一些熟知的极限来判断收敛性。

问题 2. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} exp[-\sum\limits_{m=1}^{n}\frac{1}{m!}]$ 的敛散性。

解 . 注意到 *(Taylor 公式)*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{exp[\sum\limits_{m=1}^{n}\frac{1}{m!}]}{1}=e^{e-1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} exp[-\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m!}]\text{发散}.$$

问题 3. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} exp[-\sum\limits_{m=1}^{n}\frac{1}{m}]$ 的敛散性。

解 . 注意到 *(Euler 常数)*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{exp[\sum\limits_{m=1}^{n}\frac{1}{m}]}{n}=exp[\lim_{n\to\infty}[\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}-ln(n)]]=e^{\gamma}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} exp[-\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}]\text{发散}.$$

类似地，

问题 4. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ 的敛散性。

解 .

$$\because \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\text{发散}.$$

事实上这个级数比调和级数发散得快，不是很需要使用极限判别法，但这是一个很重要的极限，因为其涉及到阶乘的估计。Stirling 公式推导中就利用了这个估计。

1.1.4 积分审敛

先复习如何证明极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e$$

证明. 考虑

$$ln(n!) = \sum_{m=1}^{n} ln(m)$$

由于 ln(x) 是单增的连续函数，有

$$\int_{1}^{n} ln(x)dx \leq \sum_{m=1}^{n} ln(m) = ln(n!) \leq \int_{1}^{n+1} ln(x)dx$$

积分，得

$$nln(n) - n + 1 \leq ln(n!) \leq (n+1)ln(n+1) - n$$

$$\frac{e^{n-1}}{n} \leq \frac{n^n}{n!} \leq e^{n-1}$$

由夹逼定理

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$$

□

这充分体现了积分审敛的原理，即把级数的部分和与一个积分作比较，利用定积分的收敛性来研究数列的收敛性。在使用时，往往省略中间的分析过程，直接把级数收敛性与积分收敛性等同起来。下面是一个常见的例子

命题 9. *级数* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{nln(n)^p}(p > 0)$ *在* $p \leq 1$ *时发散*,$p > 1$ *时收敛。*

证明. 由于函数 $\frac{1}{nln(n)^p}$ 单调减少；考虑积分

$$\int_{x=2}^{\infty} \frac{1}{xln(x)^p}dx = \int_{x=2}^{\infty} \frac{1}{ln(x)^p}dln(x)$$

在 $p \leq 1$ 时发散,$p > 1$ 时收敛。 □

之前对阶乘的估计是十分紧的，他可以替代大多数 Stirling 公式。

命题 10. *级数* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!e^n}{n^n}$ *是发散的。*

证明. 由之前估计，$\frac{n!e^n}{n^n} \geq e$，从而级数发散。 □

但是也有无法替代的情况，比如连考了 3 年的这个题

问题 5. *级数* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!}$ *的收敛性；*

分析 . *本题如果你将之前的积分估计带入，则会发现这个放缩总是过宽了 (大于一个收敛级数，小于一个发散级数)，因此，需要使用 Stirling 了。*
Stirling 公式：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n}=1$$

解 . *由 Stirling 公式*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!}\frac{2\sqrt{\pi n}(\frac{2n}{e})^{2n}}{2\pi n(\frac{n}{e})^{2n}4^n}=\frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!}\frac{1}{\sqrt{\pi n}}=1$$

而级数 $\sum\limits_{n=0}\sqrt{\pi n}$ 显然发散，所以原级数发散。

但是非斯特林不可吗？并非，你只需仔细地观察前后项的比，就会发现：

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2n+2}{2n+1}>1$$

这是一个正项递增的级数，怎么可能会收敛？我们应当反思，极限形式固然大多数时候有利于简化计算，但在某些时候它会掩盖某些信息，蒙蔽我们的双眼。

1.2 函数项级数

如果不止由一个和数列，而有很多和数列，而且有一个映射，将一个实数映射为一个和数列，我们就得到了和函数项数列，而由实数到数列的每一项的映射，即是级数的函数项。对于某些实数，和数列是收敛的，这些点的集合即是收敛域。

1.2.1 一致收敛性

对函数项级数，如果在某一个域上，收敛与自变量无关，则是一致收敛的。准确的定义复述如下：

定义 1. *函数项级数 $\sum u_n(x)$ 于 $I\subset\mathbb{R}$ 一致收敛，假若*

$$\forall\epsilon>0,\ \exists N\text{与 } x \text{ 无关, 使得部分和函数}S_n(x)\text{满足 } \forall n>N\ |S_n(x)-U(x)|<\epsilon\ \ \forall x\in I$$

依据这个定义，我们可以移植数项级数中的各种审敛法，只需要在恰当的位置加上一致性即可。

命题 11. *(Cauchy 充要审敛) 级数 $\sum u_n$ 一致收敛于 I，当且仅当*

$$\forall\epsilon>0,\exists N\text{与 } x \text{ 无关}, s.t.\forall m\geq n>N, |u(x)_n+\cdots+u(x)_m|<\epsilon\ \ \forall x\in I$$

证明级数并非一致收敛时，往往用反证法，用 Cauchy 充要条件或是定义推出矛盾。

命题 12. 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 于 $I=[0,1)$ 不一致收敛。

证明. 部分和函数 $S_n(x)=\frac{1-x^n}{1-x}$，从而级数于 [0,1) 上逐点地收敛于 $S(x)=\frac{1}{1-x}$
用反证法，假设级数一致收敛，由 Cauchy 充要条件，令 $m=n$，有

$$\forall\epsilon>0,\exists N\text{与 x 无关},s.t.\forall n>N,|x^n|<\epsilon\ \ \forall x\in I,\ \text{即对于一个固定的}n,\ |x^n|<\epsilon$$

$$\therefore \lim_{x\to 1}\ |x^n|=1\leq\epsilon$$

矛盾！ □

命题 13. 级数 $x+(x^2-x)+(x^3-x^2)+\cdots$ 于 $I=[0,1)$ 不一致收敛。

证明. 部分和函数 $S_n(x)=x^n$，从而级数于 [0,1) 上逐点地收敛于 $S(x)=0$
用反证法，假设级数一致收敛，由定义

$$\forall\epsilon>0,\exists N\text{与 x 无关},s.t.\forall n>N,|x^n|<\epsilon\ \ \forall x\in I,\ \text{即对于一个固定的}n,\ |x^n|<\epsilon$$

$$\therefore \lim_{x\to 1}\ |x^n|=1\leq\epsilon$$

矛盾！ □

从中，一个重大误区得以排除，即将逐点收敛与一致收敛混为一谈。一下是另外两个一般的审敛方法

命题 14 (Abel 审敛)**.** 若级数 $\sum a_n(x)$ 一致收敛,且 $\{b_n(x)\}$ 单调一致有界,则级数 $\sum a_n(x)b_n(x)$ 一致收敛。

命题 15 (Dirichlet 审敛)**.** 若部分和函数 $\sum_{n=0}^{m} a_n(x)$ 一致有界，且 $\{b_n(x)\}$ 单调一致趋 *0*，则级数 $\sum a_n(x)b_n(x)$ 一致收敛。

对以上，第二次作业中的题目的各个题目都是很好的练习。
移植后的比值审敛和根式审敛分别给出一种计算收敛半径的方法，在此从略。
即使如此，这个一致收敛定义的图像并不清晰，相对令人困惑。为了更好地理解一致收敛性，引入一致收敛度量，即 Chebyshev 度量。

1.2.2 Chebyshev 度量

函数项级数本质上还是和函数列的极限，就是和函数“很接近”某个唯一确定的函数。究竟有多“接近”？为此，引入 Chebyshev 度量。

定义 2 (Chebyshev 度量)**.** *对定义在 $I \subseteq \mathbb{R}$ 的函数 $f(x), g(x)$，其 Chebyshev 距离为*

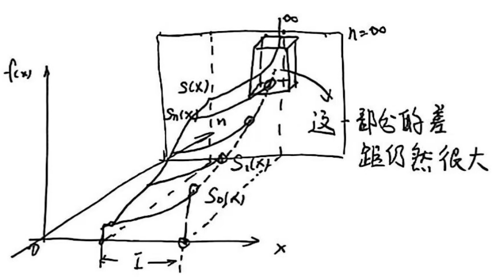
$$d_{Chebyshev} = sup_{x \in I}|f(x) - g(x)|$$

容易验证，其满足正定性、交换性和三角不等式。由此定义好了函数间的距离，就可以写出一个等价的一致连续定义。

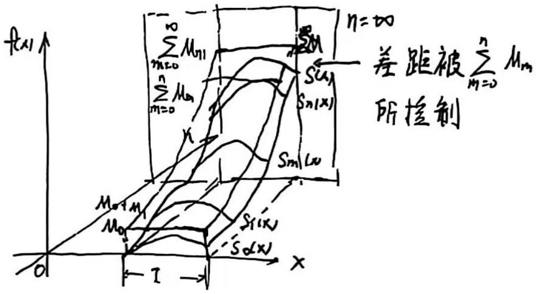
定义 3. *函数项级数 $\sum u_n(x)$ 于 $I \subset \mathbb{R}$ 一致收敛，假若*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \text{与 } x \text{ 无关, 使得部分和函数} S_n(x) \text{满足 } \forall n > N,\ d[S_n(x), U(x)] < \epsilon$$

从函数列极限角度去理解，一致收敛的很多性质几乎是显然的：
(1) 一致收敛不等价于逐点收敛。如图所示，即使逐点收敛，因为上确界未必在集合内，两个函数间依然可以有有限的距离。



(2)Weierstrass 强级数审敛：如图所示，它利用常数数项级数控制了和函数与部分和函数之间的距离。



但是，这个图像不能代替以下的严谨叙述和证明。

命题 16 (Weierstrass M-test). 设 $\{f_n(x)\}$ 是定义在集合 D 上的一列函数，且存在一列正数 $\{M_n\}$，使得对于所有 $x \in D$ 和所有 $n \in \mathbb{N}$，有

$$|f_n(x)| \leq M_n. \tag{1}$$

如果级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n \tag{2}$$

收敛，则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \tag{3}$$

在 D 上一致收敛。

证明. 假设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ 收敛。根据柯西收敛准则，对于任意 $\epsilon > 0$，存在正整数 N，使得对于所有 $m > n \geq N$，有

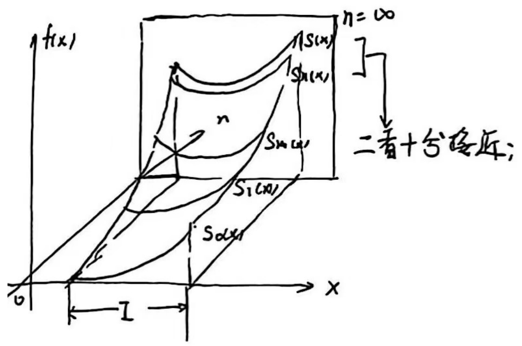
$$\sum_{k=n+1}^{m} M_k < \epsilon. \tag{4}$$

由于对于所有 $x \in D$，有 $|f_k(x)| \leq M_k$，因此

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{m} M_k < \epsilon. \tag{5}$$

这表明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 D 上满足柯西一致收敛准则，因此一致收敛。 $\square$

(3) 一致收敛性造成的可交换：如图所示，由于两个函数十分接近，应当允许其极限、积分和导数都十分接近。



再次重申，以上图像不可以代替严格的数学叙述和证明。

命题 17 (求和与极限的可交换). 设 $\{f_n(x)\}$ 是定义在集合 D 上的一列函数，如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 D 上一致收敛，且 $\lim_{x\to a} f_n(x)$ 都存在，则

$$\lim_{x\to a}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to a} f_n(x), \tag{6}$$

命题 18 (求和与导数的可交换). 设 $\{f_n(x)\}$ 是定义在区间 I 上的一列可导函数，且对于每个 $x\in I$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ 都收敛。如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ 在 I 上一致收敛，则

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)'=\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x). \tag{7}$$

命题 19 (求和与积分的可交换). 设 $\{f_n(x)\}$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的一列连续函数，且对于每个 $x\in[a,b]$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 收敛。如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，则

$$\int_a^b\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx. \tag{8}$$

由于一致连续性具有以上良好性质，其经常用于各种计算之中。

1.2.3 和函数的计算

一个简单的例子，但是却包含了所有常见的计算技巧：

问题 6. 求级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n(n^2-1)}$ 的和.

解 .

$$\because \frac{1}{2^n(n^2-1)} < \frac{1}{2^n}, \ \therefore \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n(n^2-1)} \text{收敛 (交换顺序的前提条件)}$$

$$\therefore \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n(n^2-1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}(n-1)} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}(n+1)} = \frac{5}{32} - \frac{3}{4}\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$$

注意到

$$\int_x^{\infty} \frac{1}{t^{n+1}} dt = \frac{1}{nx^n}$$

而考虑级数 $\sum_{n=3}^{\infty} u_n(t) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{t^{n+1}}$ 于 $[1.5, 2.5]$ 上一致收敛，因为

$$\exists M_n = (\frac{2}{3})^{n+1} \geq u_n(x), \text{ 且} \sum_{n=3}^{\infty} M_n \text{收敛}$$

$$\therefore \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n2^n} = \sum_{n=3}^{\infty} \int_2^{\infty} \frac{1}{t^{n+1}} dt = \int_2^{\infty} [\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{t^{n+1}}] dt = ln(2) - \frac{5}{8}$$

$$\therefore \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n(n^2-1)} = \frac{5}{32} - \frac{3}{4}\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n2^n} = \frac{5}{8} - \frac{3}{4} ln(2)$$

即为所求.

2023 年的 5. 题更加精彩，还包括了通过改变零测集上的函数值，利用变限积分换元等技巧。

问题 7. 记 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n \ln x$. 证明:

$$\int_0^1 f(x)\, dx = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

证明. 注意到该级数在 (0,1) 上内闭一致收敛，且可以直接算出

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n \ln x = \frac{x}{1-x} ln(x), \quad \forall x \in [a, b], \ 0 < a \leq b < 1$$

注意到以下两个极限

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to 1} f(x) = -1$$

积分的困难主要集中在两个端点附近，我们试图对函数在两个端点的值进行替换。首先考虑将端点 1 纳入计算 (答案中则先将 0 纳入计算)。连续化，得到

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} -1 \quad for\ x = 1; \\ \frac{x}{1-x} ln(x) \quad for\ x \in [a, 1); \end{cases}$$

由于只改变了零测集的值，有

$$\int_a^1 f(x)dx = \int_a^1 \bar{f}(x)dx$$

考虑对对数函数的 Taylor 展开

$$ln(x) = ln(1-(1-x)) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)^n}{n}$$

该级数收敛半径为 1，由于 a<1，上式是成立的。且因为 $\bar{f}(x)$ 是连续的，变上限积分函数 $\phi(a)$ 也是连续的。

$$\therefore \phi(a) = \int_a^1 \bar{f}(x)dx = \int_a^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-x}{1-x}\frac{(1-x)^n}{n}dx - \int_a^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)^{n-1}}{n}dx$$

而这些级数是一致收敛的，这由 Weierstrass 强级数审敛所保证。

$$|\frac{(1-x)^n}{n}| \leq \frac{(1-a)^n}{n}, \quad |\frac{(1-x)^{n-1}}{n}| \leq \frac{(1-a)^{n-1}}{n}$$

这两个数项级数是收敛的，这由 Dirichlet 审敛所保证。

$$\therefore \phi(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^1 \frac{(1-x)^n}{n}dx - \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^1 \frac{(1-x)^{n-1}}{n}dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-a)^{n+1}}{n(n+1)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-a)^n}{n^2}$$

而在 $[0.1, 0]$ 上，后两个关于 a 的级数显然是一致收敛的，因为她们总是小于等于 p=2 的 p 级数。

$$\therefore \int_0^1 f(x)dx = \lim_{a\to 0} \phi(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{a\to 0} \frac{(1-a)^{n+1}}{n(n+1)} - \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{a\to 0} \frac{(1-a)^n}{n^2} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

□

证明的核心在于两次一致收敛的证明。这个证明利用幂级数的优良特性 (积分易于计算、于收敛域内闭一致收敛)，相较答案有了一定简化。
类似地技巧还有下面这个题，也用到了延拓的技巧。

问题 8. *求函数* $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt$ *的幂级数表示。*

具体的计算过程就省略了。另外的一些计算技巧则是利用了一些序列的和。例如，关于 Eular 常数，有一个巧妙的证明。

问题 9. *证明：* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ *收敛于* $ln(2)$;

证明. 由 Eular 的结论：

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=ln(n)+\gamma+o(n)$$

$$\lim_{n\to\infty}o(n)=0$$

令

$$P_n=\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{2m-1}$$

$$Q_n=\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{2m}$$

因此

$$P_n+Q_n=ln(2n)+\gamma+o_1(n)\quad\cdots\cdots(1)$$

$$2Q_n=ln(n)+\gamma+o_2(n)\quad\cdots\cdots(2)$$

(1)-(2) 即有

$$P_n-Q_n=ln(2)+(o_1(n)-o_2(n))$$

$$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\lim_{n\to\infty}P_n-Q_n=ln(2)$$

□

1.2.4 Taylor 展开的计算

问题 10. *求函数 $arcsin(x)$ 在 0 附近的展开.*

解 . 注意到

$$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=arcsin(x)$$

而由 *Taylor* 展开

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}x^{2n}$$

收敛半径为 *1.* 因此

$$\exists r<1,\forall x\in[-r,r],u_n(x)=\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}x^{2n}\leq\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}r^{2n}$$

因此 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}x^{2n}$ 于 $[-r,r]$ 一致收敛。

$$\therefore arcsin(x)=\int\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}x^{2n}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}x^{2n}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{4^n(2n+1)(n!)^2}x^{2n+1}$$

即为所求。

2 微分学

“连续函数都是连续的，但有一些函数更加连续。”

2.1 连续、可微与解析

从之前的讨论中，可以隐约感受到所谓的连续性，就是指一个映射把“很接近的点”映射为“仍然很接近的点”的性质。为了量度“到底有多近”，度量拓扑就必须引入了。由此给出连续性的定义：

定义 4. 设 (X, τ_X) 和 (Y, τ_Y) 是两个拓扑空间。函数 $f: X \to Y$ 是连续的，如果对于每一个开集 $V \in \tau_Y$，其原像 $f^{-1}(V)$ 是 X 中的开集，即

$$f^{-1}(V) \in \tau_X.$$

或更简洁的: 开集的原像是开集。但是，对于这样的连续性不能使得我们满意。我们希望对于某些“更连续”的函数，线性近似是好的。因此，可以引入可微性的概念。

定义 5 (微分)**.** 设 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 在点 $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ 处可微，如果存在一个线性映射 $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$，使得

$$\lim_{\mathbf{h} \to \mathbf{0}} \frac{\|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - L(\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

这个线性映射 L 称为 f 在 $\mathbf{x}_0$ 处的微分，记作 $df(\mathbf{x}_0)$。如果 f 在 $\mathbf{x}_0$ 处可微，则 $L(\mathbf{h}) = J_f(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}$，其中 $J_f(\mathbf{x}_0)$ 是 f 在 $\mathbf{x}_0$ 处的雅可比矩阵。

不难得到可微的充分条件：

命题 20. 假若映射 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 的各个分量 $f_k: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 于 $\mathbf{x_0}$ 皆是 C^1 光滑的，则 f 于 $\mathbf{x_0}$ 可微.

可微函数由于偏离线性函数不远，具有以下良好性质：

命题 21. 若函数 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 于 $\mathbf{x_0}$ 可微，则
(1)f 于 $\mathbf{x_0}$ 连续.
(2)f 各个方向导数皆存在，且 $\partial_{\vec{v}} f = \vec{v} \cdot \nabla f$

应当注意的是，这并非充要条件。即使 f 连续且 $\partial_{\vec{v}} f = \vec{v} \cdot \nabla f$，也不能推出可微。可导和可微在多元函数中没有关系，毕竟他们本身描述的图像就不一样。譬如下面的例子。

例 2. 二元函数 $f(x,y):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 为

$$f(x,y)=\begin{cases}0 \quad for\ y=0;\\ (1-cos[\frac{x^2}{y}])\sqrt{x^2+y^2} \quad for\ y\neq 0;\end{cases}$$

其连续、可导，且 $\partial_{\vec{v}}f=\vec{v}\cdot\nabla f$，但是并不可微。

证明. 由于 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，$r=\sqrt{x^2+y^2}\neq 0$，修正成立

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{r\to 0}(1-cos[\frac{rcos(\theta)^2}{sin(\theta)}])r=0=f(0,0)$$

f(0,0) 在 (0,0) 连续。并且，其各个方向导数也存在。不失一般性地，仅就模为 1 的方向向量证明。

$$\partial_{\vec{\theta}}f(x,y)=\lim_{r\to 0}\frac{(1-cos[\frac{rcos(\theta)^2}{sin(\theta)}])r-0}{r}=1-cos[0]=0$$

并且

$$\nabla f(x,y)|_{(x,y)=(0,0)}=(0,0),\ \partial_{\vec{v}}=\vec{v}\cdot\nabla f(0,0)$$

但是，f(x,y) 并不可微。考虑可导和可微的区别：可导只涉及直线路径，可微要求对任意路径都成立。对于这个例子，直线路径已经是对的，只能从曲线路径来考虑。令路径为

$$p(t)=(t,t^2)$$

$$\therefore\lim_{t\to 0}\frac{f[p(t)]-f[p(0)]-\partial_x f\cdot t-\partial_y f\cdot t^2}{\sqrt{t^2+t^4}}=\lim_{t\to 0}[1-cos(\frac{t^2}{t^2})]=1-cos(1)\neq 0$$

因此不可微。 □

类似地还有一些对直线成立，但是对曲线不成立的例子，例如下面的不连续函数

例 3. 二元函数 $f(x,y):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 为

$$f(x,y)=\begin{cases}0 \quad for\ (x,y)=(0,0);\\ \frac{x^2y}{x^4+y^2} \quad for\ (x,y)\neq(0,0);\end{cases}$$

其于 *(0,0)* 不连续. 证明略.

进一步地，为了能定量量度可微函数对线性的偏离，得到多元函数版本的微分中值定理和拉格朗日余项：

命题 22 (微分中值定理)**.** 设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 是在闭凸集 $D\subset\mathbb{R}^n$ 上连续，在 D 的内部可微的函数。对于 D 中的任意两点 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$，存在 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 之间的点 $\mathbf{c}$*(*即 $\mathbf{c}=\mathbf{a}+t(\mathbf{b}-\mathbf{a})$ 对于某个 $t\in(0,1)$*)*，使得

$$f(\mathbf{b})-f(\mathbf{a})=\nabla f(\mathbf{c})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a}),$$

命题 23 (拉格朗日余项). 设 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是在凸开集 $U \subset \mathbb{R}^n$ 上的 C^2 光滑函数。对于 U 中的任意两点 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$，存在 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 之间的点 $\mathbf{c}$(即 $\mathbf{c} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ 对于某个 $t \in (0,1)$)，使得

$$f(\mathbf{b}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) + \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a})^T H_f(\mathbf{c})(\mathbf{b} - \mathbf{a}),$$

其中，$H_f(\mathbf{c})$ 是 f 在 $\mathbf{c}$ 处的 *Hessian* 矩阵，$H_{f\ ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$。

应当注意的是，相比一元情形，增添了一个凸集的条件。这是因为证明是基于路径的，应当保证这样的路径是存在的。

如果我们仍然不满意，希望函数偏离多项式不远，于是就有了 Taylor 公式。利用 Peano 余项来度量偏离的程度：

命题 24 (Taylor 公式). 若函数 $f: D(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ 在 $\mathbf{x_0}$ 的某一开球邻域内是 C^m 光滑的，则在该邻域内，有

$$f(\mathbf{x_0} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x_0}) + h_i \partial_i f + \cdots + \frac{1}{m!} h_{k_1} \cdots h_{k_m} \partial_{k_1} \cdots \partial_{k_m} f + o^m(h)$$

且

$$\lim_{\mathbf{h} \to \mathbf{0}} \frac{o^m(\mathbf{h})}{|h|^m} = 0$$

更进一步地，希望最好是能展开为一个幂级数，就有了解析性的定义。

命题 25. 设 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是在点 $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ 处定义的函数。如果存在一个在 $\mathbf{a}$ 的某个邻域内收敛到 f 的幂级数

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^n} c_{\mathbf{k}} (\mathbf{x} - \mathbf{a})^{\mathbf{k}},$$

其中 $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ 是多指标，$c_{\mathbf{k}}$ 是系数，$(\mathbf{x} - \mathbf{a})^{\mathbf{k}} = (x_1 - a_1)^{k_1}(x_2 - a_2)^{k_2} \cdots (x_n - a_n)^{k_n}$，则称 f 在 $\mathbf{a}$ 处解析。

如果 f 在其定义域内的每一点都解析，则称 f 是解析函数。

需要注意的是，解析一定 C^∞ 光滑，反之不真。一个著名的例子来自所谓的“本性奇点”.

例 4. 函数

$$f(x,y) = e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}\ \ ((x,y) \neq (0,0));\ 0\ ((x,y) = (0,0))$$

是 C^∞ 光滑的，但其于 $(0,0)$ 不解析。

2.2 反函数定理

命题 26. 设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是在开集 $U\subset\mathbb{R}^n$ 上的连续可微函数。如果在点 $\mathbf{a}\in U$ 处，f 的雅可比行列式 $\det(J_f(\mathbf{a}))\neq 0$，则存在 $\mathbf{a}$ 的一个邻域 $V\subset U$，使得 f 在 V 上是双射的，并且 f^{-1} 也是连续可微的。此外，f^{-1} 在 $f(\mathbf{a})$ 处的雅可比矩阵为

$$J_{f^{-1}}(f(\mathbf{a}))=(J_f(\mathbf{a}))^{-1}.$$

也许会考察叙述。

2.3 一些常用技巧

“这是大错特错。”——李思

2.3.1 等高线方法

等高线是常用的用来描写多元函数的方法。在等高线上和不同等高线之间，多元函数的行为往往类似一个一元函数；一个好的例子来自第四次习题课的第 2 题；

问题 11. 设 $z=f(x,y)$ 是 C^1 光滑的函数，且满足 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$，$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$，若 $f(x,0)>0$，$\forall x\in\mathbb{R}$。证明: $f(x,y)>0$，$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$

分析 . 注意到 ∇f 总是平行于 $(1,1)$，这意味着与之正交的 $x+y=const$ 上 $f(x,y)$ 是等值的，其行为更类似一个一元函数。

证明. 做连续的换元

$$p=x+y,\ x=\frac{p+q}{2}$$

$$q=x-y,\ y=\frac{p-q}{2}$$

对 $f[x(p,q),y(p,q)]=h(p,q)$

$$\frac{\partial f}{\partial p}=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}}{2}=\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial q}=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}}{2}=0$$

$$\therefore f(x,y)=h(p)$$

$$\therefore f(x,y)=h(x+y)=f(x+y,0)>0$$

□

以上是一个简单的例子，这个想法在 24 年 6 题、22 年 7 题和 21 年的 7 题中皆有所体现等高线其实意味着由函数方程决定的隐函数。对此，我们有隐函数定理：

命题 27 (隐函数定理). 给定 $k \le n$ 个 C^1 光滑的函数 $F_1, \ldots, F_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, 设 $\mathbf{x}_0 = (a_1, \ldots, a_n)$ 是它们的公共零点. 如果 $k \times k$ 矩阵

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_{1 \le i,j \le k}$$

在 $\mathbf{x}_0$ 处可逆, 则存在 $(a_1, \ldots, a_{n-k})$ 在 $\mathbb{R}^{n-k}$ 中的开邻域 U, 以及 k 个 C^1 光滑的函数 $g_{n-k+1}, \ldots, g_n : U \to \mathbb{R}$, 使得对每个 $(n-k+1) \le j \le n$ 有 $g_j(a_1, \ldots, a_{n-k}) = a_j$, 且对每个 $(x_1, \ldots, x_{n-k}) \in U$, 有

$$\begin{cases} F_1(x_1, \ldots, x_{n-k}, g_{n-k+1}(x_1, \ldots, x_{n-k}), \ldots, g_n(x_1, \ldots, x_{n-k})) = 0, \\ \vdots \\ F_k(x_1, \ldots, x_{n-k}, g_{n-k+1}(x_1, \ldots, x_{n-k}), \ldots, g_n(x_1, \ldots, x_{n-k})) = 0. \end{cases}$$

2.3.2 最值定理与介值定理

对于连续函数的路径连通性与紧致性，分别有最值定理和介值定理

命题 28 (介值定理). 设函数$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 在路径连通的闭集D 上连续，且$a, b \in D$ 满足$f(a) \neq f(b)$那么对于任意介于$f(a)$ 和$f(b)$ 之间的值c, 都存在点$x \in D$, 使得$f(x) = c$

命题 29 (最值定理).

设函数$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 在紧致的集合D 上连续，则f 在D 上一定存在最大值和最小值。

对于最值定理的考察是很多的，例如下面的经典例题，即排除某些点的最值选举权.

问题 12. 若 $(p_1, q_1), (p_2, q_2), (p_3, q_3)$ 是三角形内一点到三角形三顶点的向量，试证明：

$$f(x, y) = e^{p_1 x + q_1 y} + e^{p_2 x + q_2 y} + e^{p_3 x + q_3 y}$$

于 $\mathbb{R}^2$ 上存在最小值。

证明. 记三顶点为 A,B,C，原点为 O，(x,y) 是点 P，由于 O 在 $\triangle ABC$ 内部，假设 $p_1 x + q_1 y, p_2 x + q_2 y, p_3 x + q_3 y$ 都小于等于 0，即 $\overrightarrow{OP}$ 与 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ 的三个夹角

$$\theta_{123} \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$$

$$\therefore \text{若} |\theta_1-\theta_2| \in [\frac{\pi}{2},\pi],\ |\theta_1-\theta_3|,\ |\theta_2-\theta_3| \le \frac{\pi}{2}$$

这与 O 在 $\triangle$ABC 内部矛盾。因此，至少存在一个 $p_i x + q_i y > 0$

$$\therefore \lim_{|\vec{x}|\to\infty} f(\vec{x}) \to +\infty$$

即

$$\forall M>0, \exists R>0, s.t. \forall |\vec{x}|>R, f(\vec{x})>M$$

令 $M=f(0,0)$, $\because \bar{B}_R(0,0)$ 是有界闭集，其是紧致的，由最值定理

$$\therefore \exists \vec{x}_0 \in \bar{B}_R(0,0),\ m=f(\vec{x}_0) \le f(\vec{x})\ \ \forall \vec{x} \in \bar{B}_R(0,0)$$

$$\forall \vec{x}, |\vec{x}|>R, f(\vec{x})>M=f(0,0)\ge m$$

即有最小值 m. □

2.3.3 不等式问题

Cauchy-Schwarz 不等式在很多不等式题目中都是常见的，类似的题目大多会出现类似于矢量模或者内积的构造。以下面的题目为例：

问题 13. *设 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 是光滑函数，满足当 $x^2+y^2=1$ 时有 $f(x,y)=1$，且在单位圆盘 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$ 上 $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$ 的值处处小于等于 1. 证明:*

$$x^2+y^2 \le f(x,y) \le 2-\sqrt{x^2+y^2}, \quad \forall (x,y)\in D.$$

分析 . *约束光滑函数的导数从而约束函数值的，往往通过微分中值定理实现。而所给条件*

$$\frac{\partial f}{\partial x}^2+\frac{\partial f}{\partial y}^2=|\nabla f|^2\le 1$$

是矢量模长的形式，由此不难想到用 Cauchy-Schwarz 不等式来证明。

证明. 有微分中值定理，对 D 内任一点 $(rcos(\theta), rsin(\theta))$ $(r<1)$，由微分中值定理有

$$\exists t\in(r,1), f(rcos(\theta),rsin(\theta))-f(cos(\theta),sin(\theta))=((r-1)cos(\theta),(r-1)sin(\theta))\cdot\nabla f(tcos(\theta),tsin(\theta))$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式，有

$$|1-f(rcos(\theta),rsin(\theta))|\le|r-1||\nabla f|\le 1-\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\therefore \sqrt{x^2+y^2}\le f(x,y)\le 2-\sqrt{x^2+y^2}$$

□

另一个使用 Cauchy-Schwarz 不等式的例子是 Kato 不等式。

命题 30 (Kato 不等式)**.** *对光滑函数* $u:\mathbb{R}^{\ltimes}\to\mathbb{R}$*，有*

$$|\nabla|\nabla u||^2 \le \sum_{i,j=1}^{n}(\partial_i\partial_j u)^2$$

证明. 由于函数光滑

$$\nabla|\nabla u| = \nabla\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\partial_i u)^2} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\hat{e_j}\partial_i\partial_j u\partial_i u}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\partial_i u)^2}}$$

$$\therefore |\nabla|\nabla u||^2 = \sum_{j=0}^{n}\frac{(\sum_{i=1}^{n}\partial_i\partial_j u\cdot\partial_i u)^2}{\sum_{i=1}^{n}(\partial_i u)^2}$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式

$$|\nabla|\nabla u||^2 \le \sum_{j=0}^{n}\frac{\sum_{i=1}^{n}(\partial_i\partial_j u)^2\cdot\sum_{i=1}^{n}(\partial_i u)^2}{\sum_{i=1}^{n}(\partial_i u)^2} = \sum_{i,j=1}^{n}(\partial_i\partial_j u)^2$$

□

也有利用极值点/最值点的不等式的题目，这些题目的主要特征是对二阶或更高阶导数的约束，利用极值点可以使得一阶导为 0，减少困难。

问题 14. *令* $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$ *为开圆盘,* $S=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$ *为其边界. 设* C^2 *光滑函数* $u,v:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *满足: 在* D *中处处有*

$$-\Delta u-(1-u^2-v^2)u=0,\quad -\Delta v-(1-u^2-v^2)v=0,$$

且对 $(x,y)\in S$ *有* $u(x,y)=v(x,y)=0$*，其中* $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$*.*
证明: 对任何 $(x,y)\in D$ *有*

$$u^2(x,y)+v^2(x,y)\le 1.$$

证明. 为证 $u^2(x,y)+v^2(x,y)\le 1.$，考虑 $u^2(x,y)+v^2(x,y)=f(x,y)$ 的最大值。由于 $D\cap S$ 是有界闭集，即是紧致的，由最值定理，

$$\exists(x_0,y_0)\in D\cap S,\ f(x_0,y_0)\ge f(x,y)\quad\forall(x,y)\in D\cap S\supset D$$

只需证 $1\ge f(x_0,y_0)$ 由于 $f(x,y)\in C^2[D\cap S\to\mathbb{R}]$，由二阶微分中值和费马原理,$\exists\theta\in(0,1)$

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\Delta x & \Delta y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\partial^2_{xx}f(\vec{x_0}+\theta\Delta\vec{x}) & \partial^2_{xy}f(\vec{x_0}+\theta\Delta\vec{x})\\ \partial^2_{yx}f(\vec{x_0}+\theta\Delta\vec{x}) & \partial^2_{yy}f(\vec{x_0}+\theta\Delta\vec{x})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{bmatrix}\le 0$$

对任意 $(\Delta x, \Delta y)$ 都成立，因此，Hessian 矩阵是不严格负定的，即

$$\partial_{xx}^2 f(\vec{x_0}+\theta\Delta\vec{x}) \le 0,\ \partial_{yy}^2 f(\vec{x_0}+\theta\Delta\vec{x}) \le 0$$

由此

$$\nabla^2 f(\vec{x}_0+\theta\Delta\vec{x}) \le 0$$

由于 C^2 连续，

$$\nabla^2 f(x,y) = \lim_{\theta\to 0}\nabla^2 f(\vec{x}_0+\theta\Delta\vec{x}) \le 0$$

$$\therefore \nabla^2(u^2+v^2) = \nabla\cdot(2u\nabla u+2v\nabla v) = 2|\nabla u|^2+2|\nabla v|^2+2u\nabla^2 u+2v\nabla^2 v \le 0$$

带入条件方程，于 (x_0, y_0) 有

$$u\nabla^2 u+v\nabla^2 v = (u^2+v^2)(u^2+v^2-1) \le 0$$

1. 若 $(u^2+v^2) \le 0$，考虑边界为 0，$u^2+v^2 \equiv 0 \le 1$
2. 若 $(u^2+v^2) > 0$，则 $(u^2+v^2-1) \le 0$，即

$$(u^2+v^2) \le 1$$

$$\therefore 1 \ge f(x_0, y_0) \le u(x,y)^2+v(x,y)^2 \quad \forall (x,y)\in D$$

□

3 写在最后

此笔记基于艾颖华老师之高等微积分课程授课内容，写作时间仓促，笔者水平亦有限，错漏难免，亦不全面，冀望各位高水平人士为之补全。笔者万分荣幸，感激不尽。

第二版改正了一些错误，增补了相关的习题和例子，特别感谢王翟同学、刘宏润同学、王博樊同学、丁睿立同学以及助教和老师的帮助、批评指正。

如果你觉得这篇笔记对你有帮助，且愿意请我喝咖啡的话，我个人是十分欢迎的。