

# PROBABILIDAD Y ESTADISTICA

## VARIABLES ALEATORIAS.

1

### Introducción

Normalmente, los resultados posibles ( $\Omega$ ) de un experimento aleatorio no son valores numéricos. **Por ejemplo**, si el experimento consiste en lanzar tres monedas al aire, para observar el número de caras (C) y sellos (S) que se obtienen, el ( $\Omega$ ) asociado al experimento aleatorio sería:

$$\Omega = \{CCC, CCS, CSC, CSS, SCC, SCS, SSC, SSS\}$$

En estadística resulta más fácil utilizar valores numéricos en lugar de trabajar directamente con los elementos de un espacio muestral como el anterior. Así preferimos identificar los sucesos {CSS, SCS, SSC} con el valor numérico 1 que representa el número de caras obtenidas al realizar el experimento. De este modo aparece el concepto de variable aleatoria unidimensional como el de toda función que atribuye un único número real  $x_e$ , a cada suceso elemental  $e$ , del espacio muestral  $\Omega$ .

$$X : \Omega \rightarrow R$$

$$e \rightarrow X(e) = x_e$$

2

Por ejemplo, en el ejemplo anterior, se define la variable aleatoria (v.a. en adelante)  $X$ : número de caras del siguiente modo:

$$\begin{aligned} X : \Omega &\rightarrow R \\ X(CCC) &= 3 \\ X(CCS) &= X(CSC) = X(SCC) = 2 \\ X(CSS) &= X(SCS) = X(SSC) = 1 \\ X(SSS) &= 0 \end{aligned}$$

•En función de los valores que tome la variable, esta puede ser clasificada en discreta o continua del siguiente modo:

•v. a. discreta es aquella que solo puede tomar un número finito o infinito numerable de valores. Por ejemplo,  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{IN}$

•v. a. continua es la que puede tomar un número infinito no numerable de valores.  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{IR}$

•Vamos a estudiar los conceptos más importantes relacionados con la distribución de probabilidad de una v.a., diferenciando entre los casos de v.a. discreta y v.a. continua.

3

## Variables aleatorias discretas

•Dada una v.a. discreta  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{IN}$ , su función de probabilidad  $f$ , se define de modo que  $f(x_i)$  es la probabilidad de que  $X$  tome ese valor:

$$f : N \rightarrow [0,1]$$

$$f(x_i) = P[X = x_i] = P[e / X(e)] = x_i$$

•Si  $x_i$  no es uno de los valores que puede tomar  $X$ , entonces  $f(x_i) = 0$ . La representación gráfica de la función de probabilidad se realiza mediante un **diagrama de barras** análogo al de distribución de frecuencias relativas para variables discretas.

•Por ejemplo, si retomamos el caso del lanzamiento de 3 monedas de forma que cada una de ellas tenga probabilidad  $1/2$  de dar como resultado cara o sello, se tiene que :

$$f(3) = P[X = 3] = P[\{CCC\}] = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$f(2) = P[X = 2] = P[\{CCS, CSC, SCC\}] = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

$$f(1) = \dots$$

$$f(0) = \dots$$

4

### Definición de función de probabilidad de v.a. discreta.

Sea  $X$  una variable aleatoria discreta, con cada resultado posible  $x_i$  asociamos un número

$$f(x_i) = P[X = x_i] \quad \text{llamado probabilidad de } x_i$$

Que debe cumplir las siguientes propiedades:

$$1) \quad f(x_i) \geq 0, \forall i$$

$$2) \quad \sum_1^{\infty} f(x_i) = 1$$

$X_i$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	.....	$x_n$
$f(x_i)=P(x_i)$	$P(x_1)$	$P(x_2)$	$P(x_3)$	.....	$P(x_n)$

5

Otro concepto importante es el de **función de distribución** de una variable aleatoria discreta, **F**, que se define de modo que si  $x_i$  es IR, **F(x<sub>i</sub>)** es igual a la probabilidad de que  $X$  tome un valor inferior o igual a  $x_i$ :

$$F : \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$$

$$F(x_i) = P[X \leq x_i] = P[e / X(e) \leq x_i]$$

Esta función se representa gráficamente del mismo modo que la distribución de frecuencias relativas acumuladas, Volviendo al ejemplo de las tres monedas, se tiene que:

$$F(0) = P[X \leq 0] = P[x = 0] = f(0) = \frac{1}{8}$$

$$F(1) = P[X \leq 1] = f(0) + f(1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8}$$

$$F(2) = \dots$$

$$F(3) = \dots$$

$$F(4) = \dots$$

$$F(17) = \dots$$

$$F(-1) = \dots$$

6

### DEFINICION DE LA FUNCION DE DISTRIBUCION DEL EJEMPLO DE LAS TRES MONEDAS.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{8} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{4}{8} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{7}{8} & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

7

### Variable aleatoria continua.

- Es aquella que puede tomar infinitos valores dentro de un intervalo de la recta real. Por ejemplo, la duración de las bombillas de una determinada marca y modelo.

En el caso de variables aleatorias continuas no tiene sentido plantearse probabilidades de resultados aislados, por ejemplo, probabilidad de que una bombilla dure 100,34343434.... horas. La probabilidad sería 0.

- El interés de estas probabilidades está en conocer la probabilidad correspondiente a un intervalo. Dicha probabilidad se conoce mediante una curva llamada **función de densidad** y suponiendo que bajo dicha curva hay un área de una unidad.

- Conociendo esta curva, basta calcular el área correspondiente para conocer la probabilidad de un intervalo cualquiera.

8

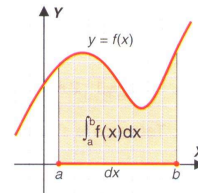
De este modo es necesario introducir un nuevo concepto que sustituya en v. a. continuas, **al de función de probabilidad de una v. a. discreta.**

Este concepto es el de **función de densidad** de una v. a. continua, que se define como una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  integrable, que verifica las dos propiedades siguientes: 1)  $f(x) \geq 0$

$$2) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

y que además verifica que dado  $a < b$ , se tiene que

$$P[a \leq x \leq b] = \int_a^b f(x) dx$$



9

La función de distribución de la v. a. continua, **F**, se define de modo que dado **x** real, **F(x)** es la probabilidad de que **X** sea menor o igual que x, es decir

$$F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$$

$$F(x) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^x f(u) du$$

#### PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES DE DISTRIBUCIÓN

- a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0.$
- b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1.$
- c) Si  $x_1 < x_2$ , entonces  $F(x_1) \leq F(x_2).$
- d)  $F$  es continua por la derecha:  $\lim_{h \rightarrow 0} F(x+h) = F(x)$  (siendo  $h > 0$ ).

10

**EJEMPLO:**

La función de densidad de una v. a. continua viene definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

- a) Halla la función de distribución.  
b) Calcula la media y la varianza.

Solución:

- a) La función de distribución se obtiene integrando la función de densidad, es decir,  
A la izquierda de 0, su valor 0.  
A la derecha de 1, su valor es 1  
Entre 0 y 1:

b)

$$F(x) = p(X \leq x) = \int_0^x 2x dx = x^2 \Big|_0^x = x^2$$

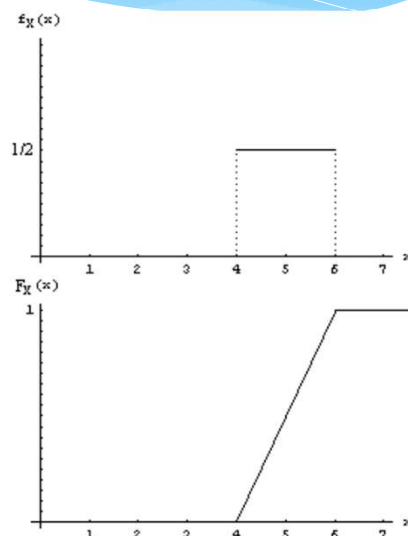
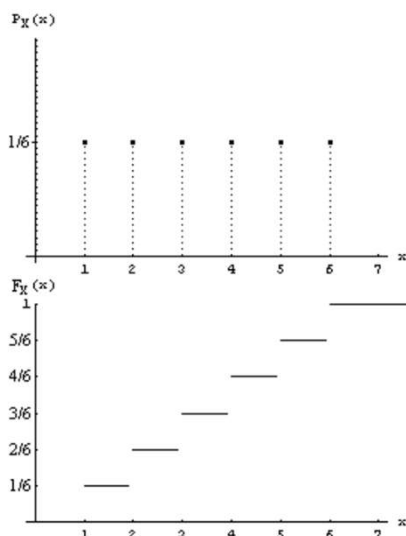
$$\mu = \int_a^b x \cdot f(x) \cdot dx = \int_0^1 x \cdot 2x \cdot dx = \frac{2}{3}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{para } x > 1 \end{cases}$$

Cálculo de la varianza:

$$\sigma^2 = \int_a^b x^2 f(x) dx - \mu^2 = \int_0^1 x^2 \cdot 2x \cdot dx - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$$

11

**GRAFICOS DE FUNCIONES DE PROBABILIDAD Y FUNCIONES DE DISTRIBUCION PARA V.A. DISCRETAS Y CONTINUAS.**


12

## Media y varianza de una v.a. continua.

Existe cierta correspondencia entre la variable aleatoria discreta y la continua:

$$E[X] = \sum_1^n x_i f(x_i) \quad \text{Var}[X] = E[(X - E[X])^2] = \left\{ \sum_{i=1}^n (x_i - E[X])^2 f(x_i) \right\}; X : \text{disc}$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad \text{Var}[X] = E[(X - E[X])^2] = \dots\dots$$

Variable aleatoria discreta	Variable aleatoria continua
$\mu = \sum x_i \cdot p_i$	$\mu = \int_a^b x \cdot f(x) \cdot dx$
$\sigma^2 = \sum x_i^2 p_i - \mu^2$	$\sigma^2 = \int_a^b x^2 f(x) dx - \mu^2$

13

## PROPIEDADES DE LA ESPERANZA MATEMATICA

PROP.1: Si  $X=c$  (constante), entonces  $E(X)=c$

PROP.2: Si  $Y=X+c$ , entonces  $E(Y) = E(x)+c$

PROP 3: Si  $Y=c X$ , entonces  $E(Y) =c E(x)$

PROP 4: Si  $Y=X_1+X_2+. . .+X_n$ , entonces  $E(Y)= E(X_1)+E(X_2)+. . . +E(X_n)$

PROP 5: Si  $Y=X_1 X_2$  y ambas var. son independientes, entonces  $E(Y)= E(X_1) E(X_2)$ .

## PROPIEDADES DE LA VARIANZA.

PROP.1: Si  $X=c$ , entonces  $V(X)=0$

PROP.2: Si  $Y=X+c$ , entonces  $V(Y)= V(X)$

PROP.3: Si  $Y=c X$ , entonces  $V(Y)= c^2 V(X)$

PROP.4: Si  $Y=X_1+X_2$  y ambas son independientes, entonces  $V(Y) =V(X_1)+V(X_2)$

14

**EJEMPLO:**

Una embotelladora de gaseosas anuncia premios en las chapas de las botellas, asegurando que por cada mil chapas existen 500 con “inténtelo otra vez”, 300 con premio de 5 soles, 150 con premios de 10 soles, 40 con premios de 50 soles, y 10 con premios de 100 soles. Un individuo compra una botella cuyo costo es de 10 soles. Expresar su ganancia mediante una variable aleatoria. ¿Es razonable su decisión? Calcular su probabilidad de perder dinero.

15

**SOLUCION:**

Estamos considerando la variable aleatoria discreta  $X = \text{«Ganancia»} = \text{«Premio»} - 10$ . Su función de masa es:

$$\begin{cases} P(X = 0 - 10 = -10) = 500 / 1000 = 0,5 \\ P(X = 5 - 10 = -5) = 300 / 1000 = 0,3 \\ P(X = 10 - 10 = 0) = 150 / 1000 = 0,15 \\ P(X = 50 - 10 = 40) = 40 / 1000 = 0,04 \\ P(X = 100 - 10 = 90) = 10 / 1000 = 0,01 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{«Ganancia esperada»} &= E[\text{Ganancia}] = E[X] = \sum x_i P(x_i) \\ &= (-10)(0,5) + (-5)(0,3) + (0)(0,15) + (40)(0,04) + (90)(0,01) = -4. \end{aligned}$$

$$P(\text{Perder dinero}) = P(X < 0) = 0,5 + 0,3 = 0,8.$$

16



**EJEMPLO:** apliquemos todo lo anterior a la variable aleatoria continua  $X$  caracterizada por la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} k \frac{x^2}{36} & \text{si } 0 \leq x \leq 6 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Lo primero que necesitamos es el valor de  $k$ . Sabemos que una función de densidad es no negativa y, además, tiene que verificar:

$$1 = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \int_0^6 k \frac{x^2}{36} dx = 2k$$

Por tanto:

$$k = 1/2$$

En definitiva, la función de densidad queda, exactamente:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{72} & \text{si } 0 \leq x \leq 6 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

En consecuencia, tenemos:

$$\mu = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx = \int_0^6 x \frac{x^2}{72} dx = 4,5$$

$$\sigma^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x) dx - \mu^2 = \int_0^6 x^2 \frac{x^2}{72} dx - (4,5)^2 = 1,35$$

$$\sigma = \sqrt{1,35} = 1,16$$

Para obtener la función de distribución tenemos que calcular  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$ .  
Para  $x < 0$ ,  $F(x) = 0$ ; para  $x \geq 6$ ,  $F(x) = 1$ ; para  $x \in [0, 6)$ :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \int_0^x \frac{x^2}{72} dx = \frac{x^3}{216}$$