Analisi I

Luca Vettore

Primo semestre 2021

1 Insiemi numerici

Prima di cominciare a studiare i concetti dell'analisi matematica è necessario definire alcuni elementi di base, primi tra tutti gli insiemi numerici.

1.1 Gli insiemi $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$

Il primo insieme da considerare è l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$. L'esistenza di questo insieme e le sue proprietà sono spesso postulate. $\mathbb{N}$ è formato dai numeri interi non negativi (nella definizione più comune non include lo 0).

$\mathbb{N}_0$ è definito come $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

L'insieme dei numeri interi relativi $\mathbb{Z}$ include numeri interi positivi e negativi, oltre allo 0.
$\mathbb{Z}$ ha alcune proprietà:

- Possiede l'inverso della somma: $n + (-n) = 0 \ \forall n \in \mathbb{Z}$
- $(\mathbb{Z}, +)$ è u gruppo (l'addizione è associativa, commutativa e ha un inverso)
- $(\mathbb{Z}, \cdot)$ non è un gruppo perché non è chiuso ($\exists n : \frac{1}{n} \notin \mathbb{Z}$)

1.2 L'insieme $\mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}$ è l'insieme dei numeri razionali ($\{r = \frac{p}{q}; \, p, q \in \mathbb{Z}, \, q \neq 0\}$). Ha le seguenti proprietà:

- Possiede l'inverso della somma: $r + (-r) = 0 \ \forall r \in \mathbb{Q}$
- $(\mathbb{Q}, +)$ è u gruppo (l'addizione è associativa, commutativa e ha un inverso)
- $(\mathbb{Q}, \cdot)$ è un gruppo perché è chiuso ($r \neq 0 \to r \cdot \frac{1}{r} = 1$)
- Ogni elemento può essere rappresentato da infinite coppie p e q, ma solo una in cui p e q sono coprimi
- Ogni elemento può essere rappresentato univocamente da un allineamento decimale del tipo $c_o, c_1 c_2 ... c_n$ con $n \in \mathbb{N}$ e $n \leq q$

Teorema: allineamenti decimali
Ogni $r \in \mathbb{Q}$ può essere rappresentato da un allineamento decimale con $n \in \mathbb{N}$ e $n \leq q$.

Dimostrazione:

1. Se denotiamo con c_0 la parte intera di r, c_n la cifra ennesima e p_n il resto ennesimo: $\frac{p}{q} = c_o + \frac{p_0}{q}$
2. Allo stesso modo: $\frac{p_0}{q} = \frac{1}{10} \cdot \frac{10p_0}{q} = \frac{1}{10} \cdot \left(c_1 + \frac{p_1}{q}\right) = \frac{c_1}{10} + \frac{p_1}{10q} \qquad 0 \leq c_1 \leq 9$ e $p_1 < q$
3. Applicando ripetutamente lo stesso procedimento per i resti successivi otteniamo: $r = c_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \frac{c_3}{10^3} + ... + \frac{c_n}{10^n} + ...$

   I resti possibili sono sempre $0 \leq p_n < q - 1$, quindi dopo un massimo di q passaggi otteniamo resti uguali ai precedenti. In questo caso chiamiamo l'allineamento periodico e definiamo periodo la parte decimale che si ripete e antiperiodo la precedente.

   Gli allineamenti con periodo 9 risultano identici agli allineamenti con periodo 0 ($0, \bar{9} = 1$). Questo algoritmo non produce mai i numeri con periodo $\bar{9}$.

1.3 L'insieme $\mathbb{R}$

L'insieme $\mathbb{Q}$ non contiene la totalità degli allineamenti decimali, non contiene ad esempio $1,101001000100001...$ (dove ogni 1 è preceduto sempre da un numero maggiore di 0). Alcuni dei numeri che incontriamo come risultati di comuni equazioni non possono essere rappresentati da un allineamento razionale.

Teorema: irrazionalità di $\sqrt{2}$
L'equazione $x^2 = 2$ non ha soluzioni in $\mathbb{Q}$.

Dimostrazione:
Supponendo per assurdo che esista una coppia di numeri naturali p e q primi tra loro tali che $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$ otteniamo che $2 = \frac{p^2}{q^2} \to p^2 = 2q^2$, da cui deduciamo che p deve essere pari. $2m = p \to 4m^2 = 2p^2 \to 2m^2 = p^2$, quindi p è pari, ma p e q sono primi fra loro per ipotesi $\to$ assurdo.

Un numero reale è definito come un allineamento decimale (periodico o no) preceduto da segno $\pm$. Per definizione $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ e l'insieme $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ è chiamato insieme dei numeri irrazionali.

1.3.1 Ordinamento

Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq \beta$ non negativi (una definizione analoga vale per negativi e discordi) e siano a_n e b_n le prime cifre diverse, allora se $a_n > b_n \to \alpha > \beta$ e viceversa.

L'ordinamento in $\mathbb{R}$ ha le seguenti proprietà:

1. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vale solo una delle relazioni $\alpha = \beta$ oppure $\alpha < \beta$ opure $\alpha > \beta$
2. $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ se $\alpha < \beta$ e $\beta < \gamma$ allora $\alpha < \gamma$

Sia $A \subset \mathbb{R}$ e $A \neq \emptyset$

- A è superiormente limitato se $\exists \Lambda \in \mathbb{R}$: $\forall a \in A \ a \leq \Lambda$
- A è inferiormente limitato se $\exists \lambda \in \mathbb{R}$: $\forall a \in A \ a \geq \lambda$
- A è limitato se valgono le due condizioni precedenti

Un numero reale M è detto massimo di un insieme $A \neq \emptyset$; $A \subset \mathbb{R}$ se $M \in A$ e $\forall a \in A \ M \geq a$ e si denota max A
Un numero reale m è detto minimo di un insieme $A \neq \emptyset$; $A \subset \mathbb{R}$ se $m \in A$ e $\forall a \in A \ m \leq a$ e si denota min A
Un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ non ha necessariamente massimo e minimo, ma se esistono questi sono necessariamente unici.

Un numero reale Λ è maggiorante di $A \subset \mathbb{R}$ se $\Lambda \in \mathbb{R}$ e $\forall a \in A \ \Lambda \geq a$
Un numero reale λ è minorante di $A \subset \mathbb{R}$ se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\forall a \in A \ \lambda \leq a$
Massimo e minimo sono rispettivamente maggioranti e minoranti di un insieme, ma un maggiorante o un minorante non sono necessariamente massimo e minimo.
Un insieme $A \subset \mathbb{R}$; $A \neq \emptyset$ ha sicuramente maggioranti e minoranti, ma non massimo e minimo.

Sia $A \subset \mathbb{R}$, se A è superiormente limitato è detto estremo superiore ($supA$) il minimo dei maggioranti, se A è inferiormente limitato è detto estremo inferiore ($infA$) il massimo dei minoranti. ($\Lambda = \sup A \Leftrightarrow \forall x \in A \ \Lambda > x$ e $\forall \epsilon > 0 \exists x \in A : L - \epsilon < x$.)
Estremo superiore e inferiore sono unici. Se A non è superiormente limitato per convenzione $supA = +\infty$, allo stesso modo se A non è inferiormente limitato $infA = -\infty$.

Teorema: completezza di $\mathbb{R}$
Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme superiormente limitato, allora l'insieme dei maggioranti ha minimo. Se A è inferiormente limitato, allora l'insieme dei minoranti ha massimo.

Dimostrazione:
Ci limitiamo a dimostrare la prima condizione, con tutti i maggioranti ≥ 0, gli altri casi sono analoghi.

Chiamiamo B l'insieme dei maggioranti di A. L'insieme delle parti intere di B ha minimo non negativo ($\leftarrow$ l'insieme parti intere di B è $\subset \mathbb{N}$). Denotiamo con c_0 questo minimo e definiamo $B_0 := \{\beta \in B$: la parte intera di β è $c_0\}$.
L'insieme delle prime cifre decimali c_1 degli elementi di B_0 ha minimo ($\leftarrow c_1 \in \mathbb{N}$ e $0 \leq c_1 \leq 9$). Definiamo quindi $B_1 := \{\beta \in B_0$: la prima cifra decimale di β è $c_1\}$.
Possiamo applicare lo stesso procedimento per $B_k := \{\beta \in B_{k-1}$: la k-esima cifra di β è $c_k\}$. $\forall k \ B_k \neq \emptyset$ e $B_k \subseteq B_{k-1}$.
Poniamo $\gamma := c_0, c_1 c_2 ... c_k ...$

- $\gamma \in \mathbb{R}$:
  Supponiamo per assurdo che γ abbia periodo 9 $\rightarrow \gamma \notin \mathbb{R}$. c_k è minimo delle k-esime cifre decimali di B_k, quindi $c_k = 9$ $\rightarrow$ tutti gli elementi di B_k hanno k-esima cifra = 9, ma allora $B_{k-1} = B_k = B_{k+1} = ...$ e quindi tutti gli elementi di B_{k-1} avrebbero periodo 9 che è assurdo.

- γ è maggiorante di A:
  Supponiamo per assurdo che γ non sia maggiorante di A. Allora $\exists \alpha \in A$: $\alpha > \gamma \rightarrow$ definito k il primo indice per cui $a_k \neq c_k$ $\alpha > \beta$ $\forall \beta \in B_k$

- γ è minimo dei maggioranti:
  Sia $\beta \in B$, allora
  o $\beta \in B_k \in B$ $\forall k \in \mathbb{N}_0 \rightarrow \beta = \gamma$
  oppure $\exists k \in \mathbb{N}_0 : \beta \notin B_k \rightarrow \beta > \gamma$

$\Rightarrow \gamma$ è $supA$

L'insieme $\mathbb{Q}$ non è completo (A := { $r \in \mathbb{Q}^+ : r^2 < 2\}$ è limitato, ma non esiste $supA \in \mathbb{Q}$).

Teorema: densità di $\mathbb{Q}$ e $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$
Tra due numeri reali esistono infiniti numerali razionali e irrazionali.

Dimostrazione:
Consideriamo il caso $x, y \in \mathbb{R}$; $0 < x < y$. Gli altri sono analoghi.

- $\Rightarrow \exists n : x_n < y_n$
- $\Rightarrow \exists k > n : x_k < 9$

$r = x_0, x_1x_2...x_n...x_{k-1}9\bar{0}$:

- $r \in \mathbb{Q}$
- $r < y \leftarrow$ la prima cifra diversa è la n-esima e $x_n = r_n < y_n$
- $r > x \leftarrow$ la prima cifra diversa è la k-esima e $r_k = 9 > x_k$

$z = x_0, x_1x_2...x_n...x_{k-1}90$ + [qualsiasi successione di numeri non periodica]:

- $z \notin \mathbb{Q}$
- $z < y \leftarrow$ la prima cifra diversa è la n-esima e $x_n = r_n < y_n$
- $z > x \leftarrow$ la prima cifra diversa è la k-esima e $r_k = 9 > x_k$

Ripetendo questo procedimento all'infinito si ha la tesi.

1.3.2 Troncamenti e operazioni

Tutte le operazioni algebriche possibili in $\mathbb{Q}$ si possono estendere a $\mathbb{R}$. Per estenderle è però necessario definire il concetto di troncamento.
Il troncamento k-esimo di $x \in \mathbb{R}$ è definito come: $x^{(k)} := x_0, x_1x_2...x_k\bar{0}$, dove $sup\{x^{(k)}; k \in \mathbb{N}\} = x$
A questo punto è possibile definire la somma di due numeri reali α e β come: $\alpha + \beta := sup\{\alpha^{(k)} + \beta^{(k)}; k \in \mathbb{N}\}$ e allo steso modo le altre operazioni.

2 Le funzioni

Il concetto di funzione può essere definito a partire dal prodotto cartesiano, ma per ora ci limitiamo a descriverle come una legge che dati due insiemi $X, Y \neq \emptyset$ associa ad ogni elemento di X uno e un solo elemento di Y.

- X è detto insieme di definizione o dominio.
- Y è detto insieme di arrivo o codominio.
- $f(x)$ è detta immagine di x tramite f.
- L'insieme $f(X) := \{f(x); x \in X\}$ è detta immagine di $f(x)$.

- L'insieme $graf(f) := \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x); x \in X\}$ è deto grafico di f
- L'insieme $\{x \in X : f(x) = y\}$ è detta controimmagine di f
- L'insieme $f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$, con $B \subset Y$ è detta controimmagine di B attraverso ad f

$f(X) \subset Y$ sempre, ma non necessariamente $f(X) = Y$.

- Una funzione è detta suriettiva se $f(X) = Y$
- Una funzione è detta iniettiva se $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
- Una funzione è detta biettiva se è iniettiva e suriettiva

Se $f(x)$ è biettiva allora è definita la funzione inversa $f^{-1}(y) := x$.

Siano $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ due funzioni, è detta funzione composta: $gof(x) := g(f(x))$. La composizione di due funzioni biunivoche è anch'essa biunivoca.

2.1 Le successioni

Sia $X \neq \emptyset$ un insieme, una successioni a valori in X è una qualunque funzione $f : \mathbb{N} \to X$. L'immagine $f(n)$ è generalmente denotata x_n. La successione può essere rappresentata dall'elenco dei suoi valori $(x_0, x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...)$ oppure con la notazione $\{x_n\}_{n \in N}$. L'insieme degli n è chiamato insieme degli indici.

Data una successione $\{x_n\}_{n \in N}$ e una successione crescente di interi $n_1, n_2, n_3, ..., n_k, ...$, è detta sottosuccessione di $\{x_n\}_{n \in N}$ la successione $\{x_{nk}\}_{k \in N}$.

2.2 La cardinalità

Sia $X \neq \emptyset$, si dice che X è finito se è in corrispondenza biunivoca con $\{1, 2, 3, ..., n\}$. Il numero n è detta cardinalità o potenza di X. Un insieme non vuoto si dice infinito se non è finito.
Due insiemi infiniti X, Y hanno la stessa cardinalità (o sono equipotenti) se $\exists (f : X \to Y)$ biunivoca e si denota $X \sim Y$.
$X \neq \emptyset$ è detto numerabile se $X \sim \mathbb{N}$.

Teorema
Sia $X, A \neq \emptyset$, X numerabile, A infinito e $A \subset X$, allora A è numerabile.

Dimostrazione
X numerabile $\Rightarrow \exists (f : \mathbb{N} \to X)$ biunivoca.
Poniamo: $a_1 = x_{k1}$ dove $k_1 = min\{k \in \mathbb{N} : x_k \in A\}$; $a_2 = x_{k2}$ dove $k_2 = min\{k > k_1 \in \mathbb{N} : x_k \in A\}$; ...
Per induzione troviamo una successione a_n, quindi una funzione $f : \mathbb{N} \to A$ biunivoca $\Rightarrow A$ è numerabile.

Teorema
Sia A_j una successione di insiemi numerabili, allora

- $A := \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$ è numerabile
- $A^k := \bigcup_{j=1}^{k} A_j$ è numerabile

Dimostrazione
Ogni A_j è numerabile $\Rightarrow \exists f_j : \mathbb{N} \to A_j$ biunivoca, ponendo $a_{jn} := f_j(n)$, otteniamo che $A_j = \{a_{j1}, a_{j2}, ..., a_{jn}, ...\}$, da cui:
$A_1 : a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}, ...$
$A_2 : a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, a_{25}, ...$
$A_3 : a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34}, a_{35}, ...$
Possiamo quindi definire una successione che elenchi tutti gli elementi dell'unione leggendo lungo le diagonali: $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j = \{a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{31}, a_{22}, a_{13}, ...\}$

Abbiamo così una funzione biunivoca tra $\mathbb{N}$ e $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$ semplicemente rinominando gli indici. Nel caso in cui ci fossero elementi presenti in più di un insieme sarebbe sufficiente eliminarli mano a mano mentre si applica lo stesso metodo.

$A^K := \bigcup_{j=1}^{K} A_j$ è numerabile $\Leftarrow A^K \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$

Teorema
Siano A e B due insiemi numerabili, allora il loro prodotto cartesiano $A \times B$ è numerabile.

Dimostrazione
A numerabile $\Rightarrow$ posso definire una successione a_n contenente tutti i suoi elementi, lo stesso vale per b.

$A \times B$:
$(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_2), (a_1, b_2), ...$
$(a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_2, b_2), (a_2, b_2), ...$
$(a_3, b_1), (a_3, b_2), (a_3, b_2), (a_3, b_2), ...$

Come nel teorema precedente, è sufficiente seguire le diagonali per ottenere un ordinamento.

Teorema: numerabilità di $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$
$\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ sono numerabili.

Dimostrazione
$\mathbb{Z} = \mathbb{N}_0 \cup -\mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{Z}$ è numerabile.

$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^-$

- $\mathbb{Q}^+ = \{\frac{p}{q}; p, q \in \mathbb{N}\} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N} \Rightarrow$ numerabile
- $\mathbb{Q}^- \sim \mathbb{Q}^+$

$\Rightarrow \mathbb{Q}$ è numerabile

Un insieme è detto al più numerabile se è finito o numarabile.
Un insieme ha la potenza del continuo se è equipotente a $\mathbb{R}$. Ogni intervallo in $\mathbb{R}$ ha la potenza del continuo (ad es: $f(x) = \frac{x}{1-|x|} : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ biunivoca).

Teorema: teorema di Cantor
$\mathbb{R}$ ha potenza maggiore del numerabile.

Dimostrazione
$(0, 1) \sim \mathbb{R} \Rightarrow$ basta dimostrare che $\nexists f : \mathbb{N} \to (0, 1)$ biunivoca.
Supponiamo per assurdo che $\exists f : \mathbb{N} \to (0, 1)$ biunivoca, possiamo quindi elencare gli elementi di (0,1). Considero gli allineamenti decimali:
$x_1 : 0, c_{11}c_{12}c_{13}c_{14}$
$x_2 : 0, c_{21}c_{22}c_{23}c_{24}$
...
$x_n : 0, c_{n1}c_{n2}c_{n3}c_{n4}$
Posso sempre costruire un $x \in (0, 1)$ non nell'elenco:

- $x = 0, c_1c_2c_3...c_n...$
- $c_1 \neq 0; c_1 \neq c_{11}; c_1 \neq 9$
- $c_2 \neq c_{22}; c_2 \neq 9$
- $c_n \neq c_{nn}; c_n \neq 9$

$x \in \mathbb{R} \Leftarrow$ non ha periodo 9, $x \in (0, 1)$, x non è nell'elenco che è assurdo.

Corollario
$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ non è numerabile.

3 Spazi euclidei

Sia $n \in \mathbb{N}$. Definiamo $\mathbb{R}^n := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}$ (per n volte) $= \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x \in \mathbb{R}\ \forall i = 1, 2, ..., n\}$. Un elemento di $\mathbb{R}^n$ si indica con $\underset{\sim}{x}$ e può essere rappresentato come un vettore n-dimensionale.
$\mathbb{R}^n$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, cioè al suo interno sono definite le operazioni vettoriali:

- $\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y} \in \mathbb{R}^n \quad \underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{y} = \{x_1 + y_1, ..., x_n + y_n\}$

- $\underline{x} \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha \cdot \underline{x} = \{\alpha \cdot x_1, ..., \alpha \cdot x_n\}$

Oltre a queste operazioni è anche possibile definire un prodotto interno (o prodotto scalare) con le seguenti proprietà:

- $< \underline{x}, \underline{y} >:= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$
- $< \underline{x}, \underline{y} >=< \underline{y}, \underline{x} >$
- $< \alpha \cdot \underline{x}, \underline{y} >= \alpha \cdot < \underline{x}, \underline{y} >$
- $< \underline{x} + \underline{y}, \underline{z} >=< \underline{x}, \underline{z} > + < \underline{y}, \underline{z} >$
- $< \underline{x}, \underline{x} >\geq 0$
- $< \underline{x}, \underline{x} >= 0 \Leftrightarrow \underline{x} = 0$

Uno spazio $\mathbb{R}^n$ dotato delle tre operazioni sopra citate è definito spazio euclideo.

Si definisce norma di un vettore $\underline{x}$ il numero reale $||\underline{x}|| = \sqrt{< \underline{x}, \underline{x} >}$

Teorema: diseguaglianza di Cauchy-Schwartz
$\forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n \quad | < \underline{x}, \underline{y} > | \leq ||\underline{x}|| \; ||\underline{y}||$

Dimostrazione
Se $\underline{y} = 0$ la tesi è vera.
Altrimenti: $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad 0 \leq ||\underline{x} + \lambda \underline{y}||^2 =< \underline{x} + \lambda \underline{y}, \underline{x} + \lambda \underline{y} >=< \underline{x}, \underline{x} > + < \underline{x}, \lambda \underline{y} > + < \lambda \underline{y}, \underline{x} > + < \lambda \underline{y}, \lambda \underline{y} > = ||x||^2 + 2\lambda < \underline{x}, \underline{y} > + \lambda^2 ||y||^2$ che è un polinomio di secondo grado, fissati $\underline{x}$ e $\underline{y} \Rightarrow 0 \geq \Delta = 4 < \underline{x}, \underline{y} >^2 - 4||\underline{x}||^2 ||\underline{y}||^2$
$\Rightarrow || < \underline{x}, \underline{y} > || \leq ||x|| \; ||y||$

Teorema: diseguaglianza triangolare
$\forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n \; ||\underline{x} + \underline{y}|| \leq ||x|| + ||y||$

Dimostrazione
$||\underline{x} + \underline{y}||^2 \leq ||x||^2 ||y||^2 \Rightarrow < \underline{x}, \underline{x} > + < \underline{x}, \underline{y} > + < \underline{y}, \underline{x} > + < \underline{y}, \underline{y} >= ||\underline{x}||^2 + 2 < \underline{x}, \underline{y} > + ||y||^2 \leq ||\underline{x}||^2 ||\underline{y}||^2$
$\Rightarrow ||\underline{x} + \underline{y}|| \leq ||x|| + ||y||$

4 Spazi metrici

Sia $X \neq \emptyset$ e $d : X \times X \to [0, +\infty]$ una funzione, (X, d) è detto spazio metrico se d rispetta le condizioni:

- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- $d(x, y) = d(y, x) \; \forall x, y \in X$ (simmetria)
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \; \forall x, y, z \in X$ (diseguaglianza triangolare)

$d(x, y)$ è detta distanza dal punto x al punto y.

Sia (X, d) uno spazio metrico, è detta bolla aperta di raggio $r > 0$ e centro $x \in X$ (o intorno) l'insieme
$B_r(x) := \{y \in X : d(x, y) < r\}$

Teorema: proprietà di Hausdorff
Sia (X, d) spazio metrico, $x, y \in X$, $x \neq y$ allora $\exists r > 0 : B_r(x) \cap B_r(y) = \emptyset$

Dimostrazione
Poniamo $r = \frac{1}{3} d(x, y)$. Sia $z \in B_r(x) \Rightarrow$ per la disuguaglianza triangolare $3r = d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \leq r + d(y, z)$
$\Rightarrow d(y, z) \geq 2r$ quindi $z \notin B_r(y)$

4.1 Classificazione dei punti

Sia $E \subset X$, un punto $p \in E$ si dice:

- interno se $\exists r > 0 : B_r(p) \subset E$ ($p \in E$ necessariamente)
- esterno se $\exists r > 0 : B_r(p) \subset E^c$ ($p \notin E$ necessariamente)

- di frontiera se $\forall r > 0 \ B_r(p) \cap E \neq \emptyset, B_r(p) \cap E^c \neq \emptyset$ (p può appartenere a E o E^c)

Un punto $p \in E$ è detto di accumulazione se $\forall r > 0 \ \exists x \neq p : x \in B_r(p) \cap E$ oppure isolato se $\exists r > 0 : B_r(p) \cap E = \{p\}$
Un punto di accumulazione non appartiene necessariamente all'insieme, un punto isolato si.

L'insieme E^0 è l'insieme dei punti interni di E, ∂E l'insieme dei punti di frontiera e E' l'insieme dei punti di accumulazione.

Teorema
Sia (X, d) spazio metrico e $E \subset X, p \in E$, allora $p \in E' \Leftrightarrow \forall r > 0 \ B_r(p) \cap E$ contiene infiniti punti di E.

Dimostrazione
Supponiamo per assurdo $p \in E'$ e $\exists r > 0 : B_r(p) \cap E \setminus \{p\} = \{x_1, .., x_n\}, n \in \mathbb{N}$
Poniamo $\bar{r} < min\{d(x,p), \forall x \in B_r(p) \cap E \setminus \{p\}\}$, allora $B_{\bar{r}}(p) \cap E = \{p\}$ che è assurdo.

Corollario
Se $p \in E'$ allora $\exists \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset (E \setminus \{p\}) : d(x_n, p) < \frac{1}{n}$

4.2 Insiemi limitati in (X, d)

In uno spazio metrico generico (X, d) non esiste necessariamente l'ordine, ma esiste la distanza. Definiamo quindi $diam(E) := sup_{x,y \in E} d(x, y)$. Si dice che $E \subset X$ è limitato se $diam(E) < +\infty$, altrimenti è illimitato.
Sia $E \in X, E \neq \emptyset$, E è limitato $\Leftrightarrow \exists x_0 \in X, \exists r > 0 : E \subset B_r(x_0)$.
Ogni $E \subset X$ finito è limitato.
Se $E_1, E_2 \subset X$ sono limitati allora $E_1 \cup E_2$ è limitato.

4.3 Insiemi aperti e chiusi

Sia (X, d) uno spazio metrico, un insieme $E \subset X$ è detto:

- aperto $\Leftrightarrow E = E^0$
- chiuso $\Leftrightarrow E^c$ è aperto

Teorema:
Sia (X, d) uno spazio metrico, $E \subset X$ è chiuso $\Leftrightarrow E' \subset E$

Dimostrazione

- E chiuso $\Rightarrow E^c$ aperto. Sia $p \in E'$, supponiamo per assurdo che $p \notin E \Rightarrow \exists r > 0 : B_r(p) \subset E^c \Rightarrow B_r(p) \cap E = \emptyset \Rightarrow p \notin E'$ che è assurdo.
- $E' \subset E \Rightarrow \forall p \in E^c$ si ha che $p \notin E'$, quindi $\exists r > 0 : (B_r(p) \cap E) \setminus \{p\} = \emptyset$, ma $p \notin E \Rightarrow B_r(p) \subset E^c \Rightarrow p$ è interno a E^c.

Sia $E \subset X$, (X, d) metrico, è detta chiusura di E l'insieme $\bar{H} = E \cup E'$

Sia (X, d) metrico, $E, F \subset X$

- $\bar{E}$ è chiuso
- F chiuso, $E \subset F \Rightarrow \bar{E} \subset F$
- F chiuso $\Rightarrow \bar{E} = E$
- $F \subset E \Rightarrow \bar{F} \subset \bar{E}$

Teorema: unioni e intersezioni
Sia (X, d) metrico:

1. se $\{E_i\}_{i \in I}$ è na famiglia di aperti allora $\bigcup_{i \in I} E_i$ è aperto
2. se $\{E_1, .., E_n\}$ è una famiglia finita di aperti $\bigcap_{i=1}^{N} E_i$ è aperto
3. se $\{E_i\}_{i \in I}$ è na famiglia di chiusi allora $\bigcap_{i \in I} E_i$ è chiuso
4. se $\{E_1, .., E_n\}$ è una famiglia finita di aperti $\bigcup_{i=1}^{N} E_i$ è chiuso

Dimostrazione

1. Sia $E = \bigcup_{i\in I} E_i$ dove E_i è aperto. Sia $x \in E \Rightarrow \exists i_o \in I : x \in E_{i0}$ (aperto) $\Rightarrow \exists r > 0 : B_r(x) \subset E_{i0} \subset E$
2. Sia $E = \bigcap_{i=1}^{N} E_i, E_i$ aperto. Sia $x \in E \Rightarrow x \in E_i \forall i = 1, .., N \Rightarrow \exists r_1, .., r_n > 0 : B_{r_i}(x) \subset E_i \forall i = 1, ..., N$. Sia $0 < r = min\{r_1, ..., r_N\} \Rightarrow B_{r_i}(x) \subset B_r(x) \forall i \Rightarrow E \subset B_r(x)$
3. Per dimostrare i punti 3 e 4 utilizziamo un lemma (leggi di Morgan) (dim sul libro):
   - $\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} E_i^c$
   - $\left(\bigcap_{i\in I} E_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} E_i^c$

   $\left(\bigcap_{i\in I} E_i\right)^c$ è aperto $\Leftarrow \bigcup_{i\in I} E_i^c$ chiuso
4. $\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right)^c$ è aperto $\Leftarrow \bigcap_{i\in I} E_i^c$ chiuso

5 Limiti di successioni

5.1 In spazi metrici

Sia (X, d) spazio metrico, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione a valori in X. Si dice che x_n converge a $p \in X$ se $\forall\epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon)$: $\forall n > N$ $d(x_n, p) < \epsilon$. P è detto limite di x_n e si scrive: $lim_{n\to+\infty} x_n = p$
$x_n \to p$ per $n \to +\infty \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0$ $\exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N$ $x_n \in B_\epsilon(p)$

Non tutte le successioni convergono (es: $x_n = (-1)^n$)

Teorema: unicità del limite
Sia (X, d) spazio metrico e $\{x_n\}$ una successione convergente. Il limite di x_n è unico.

Dimostrazione
Supponiamo per assurdo che $p, p' = lim_{n\to+\infty} x_n$. Per la proprietà di Hausdorff: $\exists r > 0 : B_r(p) \cap B_r(p') = \emptyset$, ma $\forall r > 0$ $x_n \in B_r(p)$ e $x_n \in B_r(p')$ definitivamente, che è una contraddizione.

Teorema
Se una successione è convergete, allora è limitata.

Dimostrazione
Fisso $\epsilon = 1 \to \exists N(1) : \forall n > N$ $d(x_n, p) < 1 \Rightarrow \forall m, n > N(1)$ $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, p) + d(x_m, p) \leq 2$, quindi $E_n = \{x_n; n > N\}$ è limitato e $E = \{x_n; n \in \mathbb{N}\} = \{x_1, ..., x_n\} \cup E_n$ è anch'esso limitato.

Essere limitata è condizione necessaria, ma non sufficiente.

Una successione è detta di Cauchy se soddisfa la condizione:$\forall\epsilon > 0$ $\exists N : \forall n, m > N$ $d(x_n, x_m) < \epsilon$
Uno spazio metrico è detto completo se ogni successione di Cauchy converge. $\mathbb{R}$ è completo.

Teorema: convergenza → Cauchy
Una successione convergente è una successione di Cauchy.

Teorema:
Ogni successione di Cauchy è limitata.

Teorema: convergenza sottosuccesioni:
Sia $\{x_n\}$ una successione a valori in (X, d) metrico, se $x_n \to p$ allora ogni sottosuccesione di x_n converge p.

Dimostrazione
Sia $\{x_{nk}\}$ una sottosuccessione di $\{x_n\}$, poiché n_k è una successione crescente di interi $\exists K_0 : n_{k_0} \geq N(\epsilon) \Rightarrow$ [...]

Teorema: convergenza e punti di accumulazione
Sia $\{x_n\}$ una successione a valori in (X, d) metrico, se $p \in X$ è punto di accumulazione per $E = \{x_; n \in N\}$ allora esiste una sottosuccessione di x_n che converge a p.

Dimostrazione
Se p è di accumulazione allora $\forall r > 0$ $B_r(p)$ contiene infiniti elementi.
Scelgo $r = 1, 1/2, ..., 1/k, ...$ e $n_1 \in B_1(p) \to d(p, x_{n_1}) < 1$, ..., $n_k \in B_{1/k}(p) \to d(p, x_{n_k}) < 1$ e ottengo una sottosuccessione convergente a p.

5.2 In $\mathbb{R}$

Sia $\{x_n\}$ una successione a valori in $\mathbb{R}$, usando la metrica euclidea, si dice che x_n tende a p oppure $lim_{n\to+\infty}x_n = p \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow \forall\epsilon > 0\ \exists N = N(\epsilon) : \forall n > N\ |x_n - p| < \epsilon$

In $\mathbb{R}$ si può definire anche la convergenza per eccesso o per difetto:

- x_n converge per eccesso $\Leftrightarrow \forall\epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) : \forall n > N\ p \leq x_n < p + \epsilon$
- x_n converge per difetto $\Leftrightarrow \forall\epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) : \forall n > N\ p + \epsilon < x_n \leq p$

Il limite di una successione se esiste è unico.
Si possono inoltre definire le successioni divergenti:

- una successione x_n si dice convergente se $\exists p \in \mathbb{R} : lim_{n\to+\infty}x_n = p$
- si dice divergente a $+\infty$ se $\forall M > 0\ \exists N = N(M) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N\ x_n > M$ e si denota $lim_{n\to+\infty}x_n = +\infty$
- si dice divergente a $-\infty$ se $\forall M > 0\ \exists N = N(M) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N\ x_n < -M$ e si denota $lim_{n\to+\infty}x_n = -\infty$

Una successione si dice regolare se ha limite e irregolare se non lo ha.

5.2.1 Monotonia

Sia $\{x_n\}$ una successione a valor in $\mathbb{R}$:

- si dice monotona crescente se $x_n \leq x_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}$
- si dice monotona decrescente se $x_n \geq x_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}$

Teorema
Ogni funzione monotona è regolare, in particolare:

- se x_n è crescente allora $lim_{n\to+\infty} = sup\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$
- se x_n è decrescente allora $lim_{n\to+\infty} = inf\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$

Dimostrazione
Consideriamo solo il primo caso, l'altro è analogo.
Sia $E = \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$, allora ci sono due possibilità:

- E è superiormente limitato:
  Sia $L = sup(E) \Rightarrow \forall\epsilon > 0\ \exists N = N(\epsilon) : L - \epsilon < x_n \leq L$ dalla definizione, ma x_n è crescente $\Rightarrow \forall n \geq N\ L - \epsilon < x_n \leq L$
  $\Rightarrow lim_{n\to+\infty}x_n = sup(E)$
- E non è superiormente limitato:
  $\forall M > 0\ \exists N = N(M) : x_N > M$ dalla definizione, ma x_n è crescente $\Rightarrow \forall n \geq N\ x_n > x_n > M$
  $\Rightarrow lim_{n\to+\infty}x_n = +\infty = sup(E)$

Corollario
Una successione monotona e limitata è regolare.

5.2.2 Calcolo di limiti

Esistono dei teoremi che forniscono risultati utili al calcolo dei limiti in $\mathbb{R}$.

Teorema: confronto per successioni divergenti
Siano $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ due successioni tali che $x_n \leq y_n$ definitivamente, allora:

- se $x_n \to +\infty$ allora $y_n \to +\infty$
- se $y_n \to -\infty$ allora $x_n \to -\infty$

Dimostrazione
Dimostriamo solo il primo caso, il secondo è analogo.
$x_n \to +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \ \exists N = N(M) : \forall n > N \ x_n > M$, ma $y_n \geq x_n \Rightarrow y_n \to +\infty$

Teorema: confronto per successioni convergenti
Siano x_n, y_n, z_n successioni a valori reali tali che $x_n \leq z_n \leq y_n$ definitivamente, se $x_n \to l \in \mathbb{R}$ e $x_n \to l \in \mathbb{R}$ allora $x_n \to l$

Dimostrazione
La dimostrazione è analoga alla precedente

Teorema: permanenza del segno
Sia $\{x_n\}$ una successione a valori reali, se $x_n \to p$, $p > 0$ allora $x_n > 0$ definitivamente.

Dimostrazione
Dalla definizione $x_n \to p \Rightarrow \forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) : p - \epsilon < x_n \ \forall n > N$, scegliendo ϵ tale che $p - \epsilon > 0$ e un N appropriato ho la tesi.

Per le successioni convergenti si possono dimostrare alcune proprietà algebriche:

- $a_n + b_n \to a + b$, dove a e b sono i limiti di a_n e b_n
- $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$ con $b \neq 0$
- $a_n \cdot b_n = a \cdot b$

Risultati simili si possono ricavare per successioni divergenti, con degli accorgimenti:

- $a_n \to +\infty$, $b_n \to b \Rightarrow a_n + b_n \to +\infty$
- $a_n \to -\infty$, $b_n \to b \Rightarrow a_n + b_n \to -\infty$
- $a_n \to +\infty$, $b_n \to b > 0 \Rightarrow a_n \cdot b_n \to +\infty$
- $a_n \to +\infty$, $b_n \to b < 0 \Rightarrow a_n \cdot b_n \to -\infty$
- $a_n \to \pm\infty, \Rightarrow \frac{1}{a_n} \to 0$
- $a_n \to \pm 0, a_n > 0, \Rightarrow \frac{1}{a_n} \to +\infty$
- $a_n \to \pm 0, a_n < 0, \Rightarrow \frac{1}{a_n} \to -\infty$

Restano escluse tutte le forme riconducibili a $+\infty - \infty$, $\pm\infty \cdot 0$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ che sono dette forme di indecisione e andranno valutate caso per caso.

Teorema: criterio del rapporto per successioni
Sia $\{x_n\}$ una successione a valori reali tale che $x_n > 0$, se $\exists lim_{n \to +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in [0, +\infty)$ allora:

- $0 \leq l < 1 \Rightarrow x_n \to 0^+$
- $1 < l \leq +\infty \Rightarrow x_n \to +\infty$

Dimostrazione
Consideriamo il primo caso.
Dall'ipotesi ricaviamo che $\forall \epsilon > 0 \exists N(\epsilon)$: $l - \epsilon < \frac{x_{n+1}}{x_n} < l + \epsilon$, da cui $x_{n+1} < (l + \epsilon) x_n$.
Per iterazione posso ottenere che $xN + k < (l + \epsilon)^k x_N \ \forall k \geq 1$, ponendo $n = N + k$ $0 < x_N < (l + \epsilon)^n (l + \epsilon)^{-N} x_N$, dove all'aumentare di $n \in \mathbb{N}$ $(l + \epsilon)^{-N} x_N$ rimane costante e $(l + \epsilon)^n \to 0$, per confronto quindi $x_n \to 0$.
Nel secondo caso basta porre $y_n = \frac{1}{x_n}$ e verifico le ipotesi della dimostrazione precedente.

Se $lim \frac{x_n}{y_n} = 0$ si denota $y_n >> x_n$ o $x_n << y_n$.
Usando questa notazione è possibile definire una "gerarchia degli infiniti": $(log_b n)^q << n^p << a^n << n! << n^n$ $(b > 1, q > 0, p > 0, a > 1)$

Siano x_n e y_n due successioni a valori reali, entrambe diverse da 0, si denota $x_n = o(y_n)$ se $\frac{x_n}{y_n} \to 0$ o $x_n \sim y_n$ se $\frac{x_n}{y_n} \to 1$. Se $x_n \sim y_n$ allora $x_n = y_n + o(y_n)$

- $x_n = o(y_n) \Rightarrow c \cdot x_n = o(y_n)$, $c \neq 0$

- $x_n = o(y_n) \Rightarrow x_n \cdot z_n = o(z_n \cdot y_n)$
- $x_n \sim y_n$ e $z_n = o(x_n) \Rightarrow a_n = o(y_n)$
- $x_n = o(z_n)$ e $y_n = o(z_n) \to x_n \pm y_n = o(z_n)$

6 Serie a valori reali

Sia $\{a_n\}$ una successione a valori reali, definisco la somma parziale $S_k := a_1 + a_2 + ... + a_k$, il limite per $k \to +\infty$ della successione delle somme parziali è detto serie a valori reali di termine generale a_n e corrisponde alla somma di tutti gli elementi di a_n e si denota $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$.

La serie si dice convergente se la successione delle somme parziali converge, divergente se diverge oppure irregolare se non esiste il limite. Calcolare le somme di infiniti termini in molti casi risulta difficile ed è spesso sufficiente studiarne il carattere (convergenza, ecc..) utilizzando appositi teoremi e riconducendosi a serie a carattere noto.

6.1 Teoremi sul carattere delle serie

Teorema: Criterio di Cauchy per le serie
La serie a_n converge se e solo se rispetta la condizione di Cauchy: $\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N} : \forall m \geq N\ \forall k \geq N\ \left|\sum_{n=m}^{m+k} a_n\right| < \epsilon$

Dimostrazione
$\sum_{n=m}^{m+k} a_n = S_{m+k} - S_{m-1}$, dove S_t è la somma parziale fino a t.
Ponendo $p = m-1$ e $q = m+k$ possiamo riscrivere la condizione di Cauchy come $(q > p)$ $\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon)$: $\forall q > p \geq N-1$ $|S_q - S_p| < \epsilon$, che è la condizione di Cauchy per la successione delle somme parziali e in $\mathbb{R}$ è condizione necessaria e sufficiente alla convergenza.

Teorema: condizione necessaria, ma non sufficiente
Se una serie comverge, il suo termine generale tende a 0.

Dimostrazione
Sia $S = \sum_{n=m}^{m+k} a_n$, $s \in \mathbb{R}$ allora $S_k \to S \Rightarrow (S_k - S_{k-1}) \to S - S = 0$

Teorema: serie definitivamente uguali
Due serie definitivamente uguali hanno lo stesso carattere

Teorema: prodotto per costante
Le serie $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=n_0}^{+\infty} c \cdot a_n$ hanno lo stesso carattere.

6.1.1 Serie a termine generale non negativo

I seguenti teoremi si applicano solo nel caso in cui il termine generale della serie sia maggiore o uguale a 0. Le somme parziali di una serie a termine generale non negativo costituiscono una successione non decrescente.

Teorema
Sia $a_n \geq 0$ allora $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ è regolare.

Teorema: criterio del confronto per le serie
Siano $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n$ due serie tali che $0 \leq a_n \leq b_n \forall n \in \mathbb{N}$, allora

1. se $\sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n$ converge anche $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ converge
2. se $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ diverge anche $\sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n$ diverge

Dimostrazione

1. Ponendo $S_k := \sum_{n=n_0}^{k} a_n$ e $T_k = \sum_{n=n_0}^{k} b_n$ si ha $0 \leq S_k \leq T_k$. Chiamando $\sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n = T \in \mathbb{R}$, T è maggiorante di $\{S_k\}$, quindi S_k è limitata e crescente, quindi converge.
2. E sufficiente applicare il teorema del confronto alle successioni delle somme parziali

Teorema: criterio asintotico
Siano $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n$ due serie a termine generale non negativo, tali che $a_n \sim b_n$, allora le due serie hanno lo stesso carattere.

Dimostrazione
Per ipotesi $lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, quindi $\forall \epsilon > 0$ $1 - \epsilon \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \epsilon + 1$
fissato un $\epsilon^* > 0$ si ha $0 < (1 - \epsilon^*) \cdot b_n < a_n < (\epsilon^* + 1) \cdot b_n$ definitivamente e posso quindi applicare il teorema del confronto.

Teorema: criterio del rapporto per le serie
Sia $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ una serie a termine generale non negativo tale che $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in [0, +\infty]$ allora:

- se $0 \leq l < 1$ la serie converge
- se $1 < l \leq +\infty$ la serie diverge
- se $l = 1$ non si può dire nulla sul carattere della serie

Teorema: criterio della radice
Sia $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ una serie a termine generale non negativo tale che $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l \in [0, +\infty]$ allora:

- se $0 \leq l < 1$ la serie converge
- se $1 < l \leq +\infty$ la serie diverge
- se $l = 1$ non si può dire nulla sul carattere della serie

Teorema: criterio di condensazione
Sia a_n una successione decrescente e positiva, le serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n a_{2^n}$ hanno lo stesso carattere. Quest'ultima è detta serie condensata.

6.1.2 Altri criteri di convergenza

Nel caso di serie a termine generale negativo è sufficiente moltiplicare per $c = -1$ e applicare i teoremi precedenti. Per serie il cui termine generale non è definitivamente positivo o negativo esistono alcuni criteri che possono essere applicati.

Teorema: convergenza assoluta
Se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ converge, allora anche $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.

Dimostrazione
Definiamo parte positiva di a_n come $a_n^+ = \max(a_n, 0)$ e parte negativa di a_n come $a_n^- = \max(-a_n, 0)$. [nota: a_n^- è sempre positivo!]
$a_n = a_n^+ - a_n^-$ e $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$, quindi $0 \leq a_n^+ \leq |a_n|$ e $0 \leq a_n^- \leq |a_n|$ $\forall n$, quindi se $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ converge, per confronto anche $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^+$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^-$ convergono e quindi la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^-$ converge.

Una serie si dice assolutamente convergente se la serie dei moduli converge.

Teorema: criterio di Leibniz
Sia $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ una serie tale che:

- $a_n > 0$ $\forall n$
- $a_n > a_{n+1}$ $\forall n$
- $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

la serie converge e in particolare se denotiamo con S la somma della serie e con S_m la sua somma parziale $|S - S_m| \leq a_{m+1}$

Dimostrazione

6.1.3 Serie notevoli

Esistono alcune serie con carattere (e a volte somma) noto che possono risultare utili.

- **Serie di Mengoli:** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$

- **Serie geometrica:** $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$
  - se $q \geq 1$ diverge a $+\infty$
  - se $|q| < 1$ converge a $\frac{1}{1-q}$
  - se $q \leq -1$ è irregolare
- **Serie armonica:** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge a $+\infty$
- **Serie armonica generalizzata:** $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^p \log^q n}$
  - converge per
    - $p > 1$ e $q \in \mathbb{R}$
    - $p = 1$ e $q > 1$
  - diverge per
    - $p = 1$ e $q \leq 1$
    - $p < 1$ e $q \in \mathbb{R}$
- **Serie telescopica di passo uno:** $\sum_{n=1}^{+\infty}(b_{n+1} - b_n) = l - b_1$ con $b_n \to l$

6.2 Riordinamenti

In alcuni casi cambiare l'ordine dei termini non cambia la somma, mentre in altri si.
Definiamo un riordinamento della serie $\sum a_n$ come $\sum a_{\pi(n)}$, dove $\pi(n)$ è una funzione biunivoca $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Teorema: convergenza incondizionata
Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge assolutamente, allora $\forall \pi(n)$ $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{\pi(n)}$

Dimostrazione
Sia $S = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, $b_n = a_{\pi(n)}$, $A_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$ e $B_k = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$
Consideriamo il caso in cui $a_n \geq 0$ $\forall n$, negli altri consideriamo parte positiva e negativa e procediamo allo stesso modo.
$\forall k \in \mathbb{N}$ $B_k = \sum_{n=1}^{k} b_n \leq S$ (la somma di tutti gli elementi positivi della successione sarà sempre maggiore della somma di una parte degli elementi).
B_k è quindi crescente e superiormente limitata da S, quindi $\lim B_k = B \leq S$.
Considero $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ come riordinamento di $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ e con un ragionamento analogo ottengo che $\lim A_k = S \leq B$, da cui $S = B$.

Teorema: di Riemann
Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, ma non assolutamente allora $\forall S \in \bar{\mathbb{R}}$ $\exists \pi : \sum_{n=1}^{+\infty} a_{\pi(n)} = S$ e $\exists \pi$ tale che la serie risulti irregolare.

7 Limiti di funzioni

E' possibile estendere il concetto di limite dalle successioni alle funzioni in spazi metrici con definizioni simili.

7.1 Funzioni in spazi metrici

Siano (X_1, d_1) e (X_2, d_2) spazi metrici e $E \subset X_1, E \neq \emptyset$. Siano $p \in E'$ e $l \in X_2$, allora $\lim_{x \to p} f(x) = l$
$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0$ $\exists \delta(\epsilon) > 0 : \forall x \in E$ con $0 < d_1(x, p) < \delta$ si ha che $d_2(f(x), l) < \epsilon$
$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0$ $\exists \delta(\epsilon) > 0 : \forall x \in [E \cap (B_r(p) \setminus \{p\})]$ si ha $f(x) \in b_\epsilon(l)$
$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0$ $\exists \delta(\epsilon) > 0 : f(E \cap (B_r(p) \setminus \{p\})) \subset B_\epsilon(l)$

Teorema
Siano $f : [E \subset X_1] \to X_2$, $p \in E'$ e $l \in X_2$,
allora $\lim_{x \to p} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = l$ $\forall [\{x_n\} \subset (E \setminus \{p\}) : x_n \to p]$

Dimostrazione

- Sia $\{x_n\} \subset (E \setminus \{p\}) : x_n \to p$
  $\lim_{x \to p} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0$ $\exists \delta(\epsilon) > 0 : \forall x \in E$ con $0 < d_1(x, p) < \delta$ si ha che $d_2(f(x), l) < \epsilon$
  $x_n \to p \Rightarrow$ per qualsiasi $\delta(\epsilon)$ $\exists N(\delta(\epsilon)) : \forall n \geq N$ $0 < d_1(x_n, p) < \delta$
  $\Rightarrow d_2(f(x_1), l) < \epsilon$ $\forall n \geq N(\delta(\epsilon)) \Rightarrow \lim_{x \to p} f(x) = l$

Teorema: unicità
Il limite di una funzione se esiste è unico

7.2 Funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Ponendo $X_1 = X_2 = \mathbb{R}$ e utilizzando la metrica euclidea la definizione di limite diventa:
$\lim_{x \to p} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \ \exists \delta(\epsilon) > 0 : \forall [x \in E : 0 < |x - p| < \delta] \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$

$+\infty$ e $-\infty$ sono punti di accumulazione per $\mathbb{R}$, si possono quindi definire i limiti all'infinito come:
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \ \exists M(\epsilon) > 0 : \forall x \in E$ con $x > M \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$

e i limiti infiniti:
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall M > 0 \ \exists \delta(M) : \forall x \in E$ con $0 < |x - p| < \delta \Rightarrow f(x) > M$

Grazie alle proprietà di ordine e completezza i seguenti teoremi validi per le successioni valgono anche per le funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

- monotonia $\to$ regolarità
- teoremi del confronto
- algebra dei limiti

8 Continuità

Siano (X_1, d_1) e (X_2, d_2) spazi metrici, una funzione $f : [E \subset (X_1, d_1)] \to (X_2, d_2)$ è detta continua in un punto $p \in E$:
$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \ \exists \delta(\epsilon, p) : \forall x \in E$ con $d_1(x, p) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(p)) < \epsilon$
$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \ \exists \delta(\epsilon, p) : \forall x \in [E \cap B_\delta(p)] \Rightarrow f(x) \in B_\epsilon(f(p))$

f continua in $p \Leftrightarrow \lim_{x \to p} f(x) = f(p)$.
Tutte le funzioni elementari sono continue sul loro dominio.

8.1 In spazi metrici

Teorema; continuità della funzione composta
Siano (X_1, d_1), (X_2, d_2), (X_3, d_3) spazi metrici. Siano $E \subset X_1$ e $p \in E$. Siano $f : E \to X_2$ e $g : X_2 \to X_3$ continue in p, allora la funzione composta $gof : E \to X_3$ è continua in p.

Dimostrazione
Se p è isolato la funzione composta è continua.
Se $p \in E'$, considero una successione $\{x_n\}$ tale che $\{x_n\} \in E$ e $x_n \to p$. Per la continuità di f $f(x_n) \to f(p)$ e per la continuità di g $g(f(x_n)) \to g(f(p))$, da cui la tesi attraverso il limite.

Teorema: continuità globale
$f : (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ è continua in $X_1 \Leftrightarrow \forall A \subset X_2$ aperto $f^{-1}(A)$ è aperto.

Dimostrazione

- Sia f continua in X_1. Sia $A \subset X_2$ aperto. Sia $q \in A$ e $f(p) = q$.
  Scelto un $\epsilon > 0$ per la continuità di f esiste un $\delta > 0$: $f(B_\delta(p)) \subset B_\epsilon(q)$, da cui $B_\delta(p) \subset f^{-1}(B_\epsilon(q)) \subset f^{-1}(A)$, da cui l'apertura di A (tutti i punti sono interni)
- Sia $f^{-1}(A)$ aperto in X_1 per ogni A aperto in X_2. Sia $p \in X_1$ e $f(p) = q$.
  Scelto un $\epsilon > 0$ e posto $A = B_\epsilon(q)$ per ipotesi $f^{-1}(B_\epsilon(q))$ è aperto, quindi $\exists \delta > 0 : B_\delta(p) \subset f^{-1}(B_\epsilon(q))$, da cui $f(b_\delta(p)) \subset B_\epsilon(q)$, quindi f continua in p $\forall p \in X_1$

8.2 In $\mathbb{R}$

Le funzioni reali continue hanno alcune proprietà particolari.

Teorema: degli zeri
Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ con $b > a$ continua, $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora $\exists z \in (a, b) : f(z) = 0$

Teorema: valori intermedi
Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ con $b > a$ continua, essa assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$

Dimostrazione
Consideriamo il caso $f(a) < f(b)$, gli altri sono analoghi.
Sia $y_0 \in (f(a), f(b))$, definiamo $g(x) = f(x) - y_0$, $g(x)$ è continua su (a, b).
$g(a) < 0$ e $g(b) > 0$, quindi $g^{-1}(y_0) = 0$ e si applica il teorema degli zeri. Questo procedimento si può applicare $\forall y_0 \in (f(a), f(b))$.

Corollario
$f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I intervallo e f continua in I, allora $f(I)$ è un intervallo.

Teorema: proprietà algebriche della continuità
Siano $f, g : E \subset (X, d) \to \mathbb{R}$ continua in $x_0 \in E$ e sia (X, d) metrico, allora:

- $f \pm g$ è continua in x_0
- $f \cdot g$ è continua in x_0
- $\frac{f}{g}$ è continua in $x_0 : g(x_0) \neq 0$

Sia $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione non continua in $x_0 \in (a, b)$, allora se:

- $\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq f(x_0)$ la discontinuità è di prima specie o eliminabile
- $\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}, \exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_2 \in \mathbb{R}, l_1 \neq l_2$ la discontinuità è di seconda specie o a salto
- Se almeno uno dei due limiti è infinito o non esiste la discontinuità è di terza specie

Teorema:
Sia $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotona, essa ha al più un'infinità numerabile di discontinuità di prima specie e nessuna delle altre.

Teorema: continuità dell'inversa
Siano $i, J \subset \mathbb{R}$ intervalli e $f : I \to J$ continua e biunivoca, allora $f^-1 : J \to I$ è continua.

8.3 Compattezza

Per definire la proprietà di compattezza è necessario prima definire il concetto di copertura aperta.
Una copertura aperta di un insieme generico E è una famiglia di insiemi aperti $\{A_j\}_{j \in I}$ tali che $E \subset \bigcup_{j \in I} A_j$
Una famiglia finita di insiemi aperti estratta da una copertura aperta che verifica la medesima condizione è detta sottocopertura finita

Sia (X, d) metrico, $E \subset X, E \neq \emptyset$ è detto compatto se da ogni sua copertura aperta si può estrarre una sottocopertura finita ($\Leftrightarrow \forall \{A_j\} : E \subset \bigcup_{j \in I} A_j \ \exists \{A_{i_1}, ..., A_{i_N}\} : E \subset \bigcup_{i=1}^{N} A_{i_k}$)

Teorema: condizione necessaria alla compattezza
Sia (X, d) metrico, $E \subset X, E \neq \emptyset$ compatto $\Rightarrow$

1. E è chiuso e limitato
2. ogni insieme infinito contenuto in E ha almeno un punto di accumulazione

Dimostrazione

1. Considero la famiglia $\{B_1(p)\}_{p \in E}$. Per la compattezza di E $\exists \{p_1, ..., p_N\} : E \subset \bigcup_{k=1}^{N} B_1(P_k)$, ma $B_1(p_k)$ è limitato e chiuso $\forall k$, quindi E è chiuso e limitato perché unione finita di insiemi chiusi e limitati.
2. Sia $A \subset E$ infinito. Supponiamo per assurdo $A' = \emptyset$. Considero la copertura di E $\{B_{r(p)}(p)\}_{p \in E}$ con $r(p) : E \to \mathbb{R}$. Dalla compattezza di E $A \subset E \subset \bigcup_{k=1}^{N} B_{r(p)}(p_k)$, quindi E contiene un numero finito di elementi di A, ma A è infinito e contenuto in E che è assurdo.

Teorema: compattezza per successioni
Sia (X, d) metrico, $E \subset X, E \neq \emptyset$ compatto, allora $\forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ $\exists \{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ e $p \in E$ tali che $x_{n_k} \to p$

Teorema: Heine-Borel
$E \subset \mathbb{R}^n$ è compatto $\Leftrightarrow$ E è chiuso e limitato.

Teorema: Bolzano-Weierstrass

Sia $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una successione a valori in $(\mathbb{R}^n, d)$ con d metrica euclidea.
Se $A = \{x_i; i \in \mathbb{N}\}$ è limitato, allora $\exists p \in \mathbb{R}^n$ e $\{x_{i_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tali che $x_{i_n} \to p$

Dimostrazione
Se A è limitato in $\mathbb{R}^n$, allora $\exists z \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$ tali che $A \subset B_r(z) \subset \bar{B}_r(z)$ che è compatto.

Teorema: Weierstrass
Sia $f : k \in (X, d) \to \mathbb{R}$, con (X, d) metrico e compatto, f continua, allora $\exists x_M, x_m \in k : f(x_M) = \max f(x)$ e $f(x_m) = \min f(x)$

Dimostrazione
Considero solo il massimo, l'altro caso è analogo.

- supponiamo per assurdo $\sup k = +\infty$. Allora $\exists\{x_n\} \in k : f(x_n) \to +\infty$. Per la compattezza di k $\exists\{x_{n_k}\}$ e $x \in k$ tali che $x_{n_k} \to x$. Per la continuità di f in k $f(x_{n_k}) \to f(x) \in \mathbb{R}$, ma $+\infty \notin \mathbb{R}$.
-

Una funzione $f : E \subset (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ si dice uniformemente continua se $\forall\epsilon > 0$ $\exists\delta = \delta(\epsilon) : \forall x, p \in E$ con $d_1(x, p) < \delta$ si ha $d_2(f(x), f(p)) < \epsilon$. Una funzione uniformemente continua è anche continua.

Teorema: Heine-Cantor
Sia $f : k \subset (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ una funzione continua in k compatto, allora f è uniformemente continua.

9 Calcolo differenziale

9.1 La derivata

Sia $f : (a, b) \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a, b)$, essa è derivabile in x_0 se esiste finito il limite $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Derivabile in (a, b) se è derivabile $\forall x \in (a, b)$.

$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ è detto rapporto incrementale e il suo limite è detto derivata della funzione nel punto: $f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
Il rapporto incrementale corrisponde al coefficiente angolare della retta passante per i punto $p = (x_0, f(x_0)$ e $q = (x_0 + h, f(x_0) + h$. In una funzione derivabile il rapporto al limite raggiunge il coefficiente angolare della tangente nel punto x_0.

La derivata può anche essere definita come $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ che equivale a porre $x = x_0 + h$.
La condizione di derivabilità può essere riscritta come: $\exists f'(x_0) \in \mathbb{R} : f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$ per $x \to x_0$

Teorema: derivabilità $\to$ continuità
Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in $x_0 \in (a, b)$, f è continua in x_0

Dimostrazione
Dalla derivabilità di f in x_0: $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$ per $x \to x_0$, quindi $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

9.2 Punti di non derivabilità

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione continua in (a, b), essa non è necessariamente derivabile sull'intervallo. I punti in cui non è derivabile sono detti punti di non derivabilità.

Alcuni punti di non derivabilità notevoli sono:

- **Punto angoloso:** una funzione ha un punto angoloso in x_0 se esistono finiti i limiti del rapporto incrementale da destra e da sinistra per $x \to x_0$, ma sono diversi. (es: $f(x) = |x|$)
- **Cuspide:** una funzione presenta una cuspide in x_0 se i limiti del rapporto incrementale esistono infiniti e discordi. (es:$f(x) = \sqrt{|x|}$)
- **Flesso a tangente verticale:** la tangente alla funzione in un punto è verticale se i limiti del rapporto incrementale esistono infiniti e uguali. (es:$f(x) = \sqrt[3]{x}$)

9.3 Teoremi fondamentali del calcolo differenziale

La derivata di una funzione può fornire informazioni importanti sul suo andamento attraverso ad acluni teoremi.

Sia $f : I \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in I intervallo, un punto $x_0 \in I$ è detto massimo relativo (o locale) se $\exists\delta > 0 : f(x) \leq f(x_0)\ \forall x \in I \cap B_\delta(x_0)$. Una definizione analoga vale per il minimo relativo.

Teorema: Fermat
Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabile in (a, b) e sia $x_0 \in (a, b)$ un punto di massimo o minimo relativo per f, allora $f'(x_0) = 0$

Dimostrazione
Considero il caso di un punto di massimo, l'altro è analogo.
x_0 massimo $\to \exists\delta > 0 : f(x) \leq f(x_0)\ \forall x \in I \cap B_\delta(x_0)$, quindi $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ risulta $\leq 0 \forall x \in [x_0, x_0 + \delta)$ e $\geq 0 \forall x \in (x_0 - \delta, x_0]$, ma f è derivabile in x_0, quindi $f'(x_0) = 0$

La conseguenza di questo teorema è che dato un intervallo i punti di massimo e minimo vanno cercati agli estremi, nei punti di non derivabilità e nei punti con derivata nulla.

Teorema: Rolle
Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a, b]$, derivabile in (a, b) e tale che $f(a) = f(b)$, allora $\exists x_0 \in (a, b) : f'(x_0) = 0$

Dimostrazione
Se la funzione è costante $f'(x) = 0 \forall x \in [a, b]$, altrimenti per il teorema di Weierestrass $f(x)$ ha massimo e minimo e per il teorema di Fermat la derivata in questi punti è nulla.

Teorema: valor medio o di Lagrange
Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b), allora $\exists x_0 \in (a, b) : \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x_0)$

Dimostrazione
Sia $g(x) = f(x) - [f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)]\ \forall x \in [a, b]$. $g(x)$ verifica le ipotesi del teorema di Rolle, quindi $\exists x_0 \in (a, b) :$ $g'(x) = 0$, ma $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow f'(x_0) = \frac{f(a)-f(b)}{b-a}$

Teorema: monotonia e derivata
Sia $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in I intervallo, allora:

- f crescente $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0\ \forall x \in I$
- f decrescente $\Leftrightarrow f'(x) \leq 0\ \forall x \in I$

Dimostrazione
Dimostriamo il primo caso, l'altro è analogo.

- Supponiamo per assurdo f crescente, ma $\exists x_o \in I : f'(x_0) < 0$.
  $f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$ per $x \to x_0 \Rightarrow f(x)-f(x_0) = (x-x_0)[f'(x_9+o(1)]$. Per $x > x_0$ $f(x)-f(x_0) > 0$, $(x - x_0) > 0$, ma $f'(x_0) + o(1) < 0$ che è assurdo.

- $\forall x_1, x_2 \in I$ con $x_2 > x_1$ $f : (x_1, x_2) \to \mathbb{R}$ verifica le ipotesi del teorema di Lagrange, quindi $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_0} = f'(x_0)$. Se $f'(x_0) > 0$, allora $f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0) \cdot (x_2 - x_1) \geq 0$, quindi $f(x_2) > f(x_1)$

ToDo:

1. No $\bar{9}$ in $\mathbb{Q}$ (algoritmo e dim con serie?)
2. Completezza
3. Tabella limiti notevoli
4. Tabella sviluppi in serie
5. Dim criterio rapporto per serie
6. Dim Leibniz
7. Dim lim successioni $\rightarrow$ funzioni
8. Dim teorema degli 0 e intervalli inscatolati
9. Definizione massimi e minimi globali?
10. Dim Weierstrass
11. Tabella derivate e regole derivazione

Indice