

Analisi II

Luca Vettore

Secondo semestre 2021-2022

1 Primitive e integrali

Dato un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ una funzione F è detta primitiva di f se

- F è derivabile in I
- $F'(x) = f(x) \forall x \in I$

In questo caso si indica $\int f(x) = F(x)$, dove \int è detto integrale indefinito.

Sia $f(x)$ una funzione Riemann-integrabile, in tal caso esiste l'integrale definito $\int_a^b f(x)$ che rappresenta l'area con segno compresa tra il grafico della funzione e l'asse delle ascisse.

Le due nozioni di integrale sono collegate tra loro attraverso al teorema fondamentale del calcolo integrale:

Sia $F(x) = \int f(x)$ e sia $f(x) \in R([a, b])$, allora:

$$\int_a^b f(x) = F(b) - F(a)$$

Il problema del calcolo di primitive e di integrali definiti sono quindi identici, una volta definiti gli intervalli di integrazione in modo appropriato.

1.1 Primitive fondamentali

Di seguito la tabella delle primitive delle funzioni elementari:

$f(x)$	$\int f(x)$	I
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$\alpha \neq -1 \quad x > 0$
$\frac{1}{x}$	$\log(x) + C$	$x > 0$
$\frac{1}{-x}$	$\log(-x) + C$	$x < 0$
e^x	$e^x + C$	$x \in \mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$	$x \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x) + C$	$x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + C$	$x \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + C$	$x \in (-1, 1)$
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x) + C$	$x \in (-1, 1)$

1.2 Trasformazioni lineari

Siano $f(x)$ e $F(x)$ tali che $\int f(x) = F(x)$ su un intervallo I , allora la funzione $f(ax+b)$ ammette primitiva, e vale:

$$\int f(ax+b) = \frac{F(ax+b)}{a}$$

1.3 Linearità e omogeneità

L'integrale è omogeneo rispetto al prodotto per un numero reale e lineare rispetto all'addizione:

$$a \times \int f(x) = \int (a \times f(x)) \quad e \quad \int (f(x) + g(x)) = \int f(x) + \int g(x)$$

1.4 Integrali per sostituzione

1.4.1 Sostituzioni immediate

Dalla regola di derivazione delle funzioni composte si può derivare:

$$\int f(y(x)) \times y'(x) dx = \int f(t) dt|_{t=y(x)}$$

1.4.2 Sostituzioni non elementari

La tecnica di sostituzione per gli integrali può essere applicata anche in casi in cui non sia presente la derivata, applicando opportune trasformazioni.

Sia $G(x)$ una primitiva di $g(x) = f(\varphi(x)) * \varphi'(x)$, allora:

$$\int f(t)dt = G(\varphi^{-1}) + c \quad \text{con: } dx = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(t))} dt$$

1.4.3 Classi di funzioni integrabili per sostituzione

La tecnica di sostituzione risulta utile per alcune classi di funzioni:

- $\int R(e^x)dx$: si pone $e^x = t \rightarrow x = \log t \rightarrow dx = \frac{1}{t} dt$
- $\int R(\sin(x), \cos(x))dx$: si pone $t = \tan \frac{x}{2}$, da cui $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ e $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$. Attenzione agli incollamenti!
- $\int R(\sin^2(x), \cos^2(x), \sin(x)\cos(x), \tan(x))dx$: si pone $t = \tan(x)$, quindi $\sin^2(x) = \frac{t^2}{1+t^2}$, $\cos^2(x) = \frac{1}{1+t^2}$, $\sin(x)\cos(x) = \frac{t}{t^2+1}$ e $dx = \frac{1}{1+t^2} dt$. Attenzione agli incollamenti!
- $\int R(x^{\frac{p_1}{q_1}}, \dots, x^{\frac{p_n}{q_n}})dx$: si pone $x = t^q$, dove $q = m.c.m(q_1, \dots, q_n)$, quindi $dx = qt^{q-1} dt$
- $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})$: si pone $x = a * \sin(t)$, da cui $dx = a * \cos(t) dt$ su $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

1.5 Integrazione per parti

Dalla regole di derivazione delle funzioni composte si può ricavare inoltre:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

1.5.1 Classi di funzioni integrabili per parti

Alcune classi di funzioni possono essere integrate per parti utilizzando un procedimento noto:

- $\int P(x)\sin(x)dx$ o $\int P(x)\cos(x)dx$: si deriva il polinomio ripetutamente fino a raggiungere grado 0
- $\int P(x)e^x dx$: si deriva il polinomio ripetutamente
- $\int P(x)\log^n(x)dx$: si deriva il logaritmo fino a ridurlo a $\frac{1}{x}$
- $\int \sin^n(x)dx$ o $\int \cos^n(x)dx$ o $\int \sin^n(x)\cos^m(x)dx$: Si applica la formula ricorsiva:
 $C_n = \int \sin^n(x)dx \rightarrow C_n = \frac{-1}{n}\sin^{n-1}(x)\cos(x) + \frac{n-1}{n}C_{n-2}$ oppure
 $C_n = \int \cos^n(x)dx \rightarrow C_n = \frac{1}{n}\cos^{n-1}(x)\sin(x) + \frac{n-1}{n}C_{n-2}$
Si otterrà quindi un'equazione da cui ricavare il valore dell'integrale
- $\int P(x)\operatorname{atan}(x)dx$ o $\int P(x)\operatorname{asin}(x)dx$: si deriva $\operatorname{atan}(x)$ o $\operatorname{asin}(x)$
- (aggiungere altra ricorsiva)

1.6 Incollamenti

Nel caso di funzioni continue definite a tratti, si integra separatamente sugli intervalli e successivamente si deve rendere continua la primitiva ottenuta scegliendo opportunamente le costanti additive.

1.7 Integrazione di funzioni razionali

La primitiva di una funzione del tipo $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, con $P(x), Q(x)$ polinomi, può essere trovata attraverso una serie di passaggi:

- Controllare che $\deg(Q(x)) \geq \deg(P(x))$, in caso contrario attraverso la divisione dei polinomi si può riscrivere la funzione come $f(x) = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$, dove $R(x)$ è il resto della divisione e $S(x)$ il risultato.
Per la divisione tra polinomi si rimanda al seguente esempio:

$$\begin{array}{l}
 P(x) = x^4 + 2x^3 + x - 1 \\
 Q(x) = x^3 + x + 1
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 x^4 + 0x^3 + 2x^2 + 3x - 1 \\
 - (x^3 + x^2 + x + 1) \\
 \hline
 = -x^3 + x^2 + x^3 \\
 = x^4 + 0x^3 + x^2 + 2x^2 + 3x - 1 \\
 = 0x^4 - x^3 + x^2 + x - 1 \\
 = -(x^3 - x^2 - x - 1) \\
 = -x^3 + x^2 + x \\
 \hline
 // \quad 2x^3 + 2x - 1 \\
 - (2x^3 + 2x + 2) \\
 \hline
 = -2x^2 - 2x - 2 \\
 \hline
 // \quad (-3) \quad R(x) \\
 \deg(-3) = 0 = \deg(x^3 + x + 1) = 3 \\
 \Rightarrow P(x) = S(x) \cdot Q(x) + R(x)
 \end{array}$$

- Una volta ricondotto l'integrale alla forma $\int \frac{P(x)}{Q(x)}$ con $\deg(P(x)) < \deg(Q(x))$ si distinguono i casi:
 - $\deg(Q(x)) = 1$: l'integrale si riduce a $\int \frac{A}{x-x_0} dx$ con x_0 radice di $Q(x)$
 - $\deg(P(x)) = 2$: l'integrale si può scrivere come $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ e si possono distinguere alcuni casi in base al valore di $\Delta = b^2 - 4ac$:
 - * $\Delta > 0$: è sempre possibile la scomposizione $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} = \frac{C}{x-x_z} + \frac{D}{x-x_2}$ dove x_1, x_2 sono radici del polinomio
 - * $\Delta = 0$: è sempre possibile la scomposizione $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} = \frac{C}{x-x_1} + \frac{D}{(x-x_1)^2}$
 - * $\Delta < 0$: $Q(x)$ è irriducibile e attraverso il completamento del quadrato si ottiene $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} = C \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c} + \frac{D}{(x-x_1)^2+k^2}$, dove l'integrale del primo termine si riconduce a un logaritmo e il secondo a un arcotangente
 - $\deg(Q(x)) > 2$: è possibile scomporre il polinomio attraverso le sue radici (vedi Ruffini).
- Per $\deg(Q(x)) \leq 12$ vale:

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{\alpha_{11}}{x-x_1} + \frac{\alpha_{12}}{(x-x_1)^2} + \dots + \frac{\alpha_{1m_1}}{(x-x_1)^{m_1}} + \\ &+ \frac{\alpha_{21}}{x-x_2} + \frac{\alpha_{22}}{(x-x_2)^2} + \dots + \frac{\alpha_{2m_2}}{(x-x_2)^{m_2}} + \\ &+ \dots + \\ &+ \frac{\alpha_{k1}}{x-x_k} + \frac{\alpha_{k2}}{(x-x_k)^2} + \dots + \frac{\alpha_{km_k}}{(x-x_k)^{m_k}} + \\ &+ \frac{C_{11}x + D_{11}}{x^2 + r_1x + \delta_1} + \frac{C_{12}x + D_{12}}{(x^2 + r_1x + \delta_1)^2} + \dots + \frac{C_{1m_1}x + D_{1m_1}}{(x^2 + r_1x + \delta_1)^{m_1}} + \\ &+ \frac{C_{21}x + D_{21}}{x^2 + r_2x + \delta_2} + \frac{C_{22}x + D_{22}}{(x^2 + r_2x + \delta_2)^2} + \dots + \frac{C_{2m_2}x + D_{2m_2}}{(x^2 + r_2x + \delta_2)^{m_2}} + \\ &+ \dots + \\ &+ \frac{C_{j1}x + D_{j1}}{x^2 + r_jx + \delta_j} + \frac{C_{j2}x + D_{j2}}{(x^2 + r_jx + \delta_j)^2} + \dots + \frac{C_{jm_j}x + D_{jm_j}}{(x^2 + r_jx + \delta_j)^{m_j}} \end{aligned}$$

dove x_k è la radice k -esima del polinomio e n_k, m_k la sua molteplicità

1.8 Integrali definiti

Durante la risoluzione di integrali definiti, bisogna prestare attenzione ad alcune loro particolarità rispetto agli indefiniti.

1.8.1 Sostituzione per integrali definiti

Siano $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ due funzioni tali che $f \in C([a, b])$ e $\varphi \in C^1([c, d])$, con φ invertibile, vale:

$$\int f(x)dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

La differenza con gli integrali indefiniti è nella trasformazione degli estremi di integrazione. Nel caso degli integrali definiti, bisogna però prestare attenzione a operare una trasformazione invertibile sull'intervallo di integrazione, o in alternativa calcolare una primitiva ed estenderla con continuità. Nel caso in cui la primitiva non sia definita in un punto dell'intervallo e non sia possibile estenderla, si può comunque calcolare l'integrale definito dividendo l'intervallo in due e calcolando il limite della primitiva sul punto di discontinuità (integrale improprio).

1.8.2 Funzioni pari e dispari

Se f è una funzione pari, quindi $f(x) = f(-x)$, allora $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$

Se f è una funzione dispari, quindi $f(x) = -f(-x)$, allora $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

1.8.3 Teorema della media integrale

Sia $f \in R([a, b])$, allora:

$$\exists c \in [a, b] : \int_a^b f(x)dx = f(c) * (b - a)$$

Questo risultato può essere usato per dare una stima del valore di un integrale definito quando non si riesce a trovarne una primitiva.

1.9 Integrali impropri

Sia $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ e $f \in R([a, x]) \forall x < b$, allora se esiste finito, si definisce integrale improprio il limite:

$$\lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t)dt$$

Attraverso le proprietà degli integrali, questa definizione può essere estesa all'altro estremo.

La definizione è valida anche nel caso $b = \pm\infty$.

Lo studio della convergenza degli integrali impropri è simile a quello delle serie. Anche in questo caso si utilizzano una serie di criteri per ricondursi a forme note.

1.9.1 Forme notevoli

Di seguito alcuni integrali impropri notevoli (vedi serie notevoli).

- $\int_0^a \frac{1}{x^\alpha} dx; \quad a \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \begin{cases} \alpha < 1 \text{ conv} \\ \alpha \geq 1 \text{ non conv} \end{cases}$
- $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx; \quad a \in (0, +\infty) \begin{cases} \alpha > 1 \text{ conv} \\ \alpha \leq 1 \text{ non conv} \end{cases}$
- $\int_0^a \frac{1}{\log^\alpha x} dx; \quad a \in (0, 1) \begin{cases} \alpha < 1 \text{ conv} \\ \alpha \geq 1 \text{ non conv} \end{cases}$
- $\int_1^a \frac{1}{\log^\beta x} dx; \quad a \in (0, 1) \vee a \in (1, +\infty) \begin{cases} \beta < 1 \text{ conv} \\ \beta \geq 1 \text{ non conv} \end{cases}$
- $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \log^\beta x} dx; \quad a \in (1, +\infty) \begin{cases} \alpha > 1 \text{ conv} \\ \alpha = 1 \quad \beta > 1 \text{ conv} \\ \alpha = 1 \quad \beta \leq 1 \text{ non conv} \\ \alpha < 1 \text{ non conv} \end{cases}$
- $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \log^\beta x} dx; \quad a \in [0, 1) \begin{cases} \alpha < 1 \text{ conv} \\ \alpha = 1 \quad \beta > 1 \text{ conv} \\ \alpha = 1 \quad \beta \leq 1 \text{ non conv} \\ \alpha > 1 \text{ non conv} \end{cases}$

1.9.2 Criteri di convergenza

I criteri che si possono usare per studiare la convergenza di un integrale improprio sono i seguenti (vedi criteri convergenza serie):

- **Criterio del confronto:** siano $g(x), f(x)$ localmente integrabili in $[a, b]$ e sia $0 \leq f(x) \leq g(x)$, allora:
 - Se l'integrale di $g(x)$ converge, anche l'integrale di $f(x)$ converge
 - Se l'integrale di $f(x)$ diverge, anche l'integrale di $g(x)$ diverge

- **Criterio del confronto asintotico:** siano $f(x), g(x)$ localmente integrabili su $(a, b]$, siano di segno costante in un intorno $U(a)$ e sia $f(x) \sim g(x)$ per $x \rightarrow a$, allora:

$$\int_a^b f(x)dx \text{ converge} \Leftrightarrow \int_a^b g(x)dx \text{ converge}$$

- **Convergenza assoluta:** sia $f(x)$ localmente integrabile su $[a, b)$, allora:

$$\int_a^b |f(x)|dx \text{ converge} \rightarrow \int_a^b f(x)dx \text{ converge}$$

Non è vero il contrario.

1.9.3 Note

Sia $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Consideriamo l'integrale improprio $\int_a^{+\infty} f(x)dx$:

- **Non** è vero che se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, allora l'integrale converge
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ **non** è condizione necessaria alla convergenza dell'integrale
- L'esistenza di $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ **non** è condizione necessaria alla convergenza dell'integrale
- Se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ esiste e l'integrale converge, allora $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

1.10 Funzioni integrali

Sia $f \in R([a, b])$, si definisce funzione integrale la funzione:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt = \int_0^x f(t)dt - \int_0^a f(t)dt$$

Una funzione integrale qualsiasi ha le seguenti proprietà:

- $F(a) = 0$
- Il suo dominio è sempre un intervallo
- E' continua sul suo dominio
- Ha come derivata la funzione integranda
- I punti di discontinuità dell'integranda sono punti di non derivabilità della funzione integrale

1.10.1 Dominio

Per ricavare il dominio di una funzione integrale si parte dall'estremo fisso e si studiano progressivamente i punti di discontinuità dell'integranda nelle due direzioni. Il processo continua finché non si trova un punto dove l'integrale improprio non converge o si raggiunge $\pm\infty$.

1.10.2 Monotonia

La monotonia della funzione si studia attraverso al segno della funzione integranda. La monotonia fornisce informazioni utili anche su altre caratteristiche della funzione integrale, come il comportamento asintotico.

Lo studio della derivata dell'integranda fornisce informazioni sulla convessità della funzione.

1.10.3 Comportamento asintotico

I limiti agli estremi del dominio sono dati dalla convergenza dell'integrale improprio. Nel caso non esista l'integrale improprio, si può capire l'andamento asintotico della funzione studiandone la monotonia.

Gli eventuali asintoti obliqui si ricavano da:

- $\lim f(t) = m \neq 0$ (f continua)
- $\lim f(t) - m = q$

1.10.4 Tangenti

L'equazione della retta tangente in un punto si ottiene dalla formula $t(x) = f(x)(x - x_0) + F(x)$

1.10.5 Funzioni integrali composte

Una funzione integrale può avere come estremi di integrazione un'altra funzione e presentarsi nella forma:

$$F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt$$

In tal caso la si può vedere come la composizione di una funzione integrale semplice con un'altra funzione.

Lo studio del suo dominio può essere svolto partendo dal metodo utilizzato per le funzioni semplici, per poi assicurarsi attraverso a uno studio grafico che i punti di non integrabilità non incrocino l'area compresa tra le funzioni agli estremi.

2 Funzioni in più variabili reali

I concetti di limite, continuità, derivabilità e differenziabilità definiti per le funzioni a una variabile, possono essere estesi alle funzioni $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

2.1 Limiti

Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e sia p un punto di accumulazione, allora se $\forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) > 0 : x \neq p, \|x - p\| < \delta \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \epsilon$ si dice che $f(x)$ tende ad α e si indica:

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \alpha$$

Questa definizione, valida in uno spazio metrico generico è anche valida se $x \in \mathbb{R}^n$.

Nel caso di una funzione $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è sufficiente rappresentare $f(x)$ come un vettore e applicare la definizione precedente alle singole componenti.

Il calcolo di limiti in \mathbb{R}^n è più complicato di quello in \mathbb{R} , poiché è necessario studiare il comportamento della funzione su tutti i possibili percorsi passanti per il punto.

2.1.1 Percorsi e divergenza

Come conseguenza del teorema di unicità, è possibile dimostrare la non esistenza di un limite trovando due curve, passanti per il punto in cui si sta calcolando il limite, lungo le quali la funzione ha limiti diversi.

Queste curve (o percorsi) sono della forma $x_i = f(x_j)$ e riducono quindi il problema a una sola variabile.

Calcolare il limite lungo una curva o classe di curve non è sufficiente a dimostrare l'esistenza o il valore del limite stesso.

Oltre alle rette ($x_i = mx_j$) e agli assi ($x_i = x_j$) le altre curve da controllare dipendono dalla specifica funzione.

2.1.2 Stime e convergenza

Grazie al teorema del confronto per i limiti (teorema dei carabinieri), possibile ridurre il calcolo del limite in più variabili a una sola attraverso a delle stime.

Data una funzione $f(x, y, \dots)$, per calcolare il suo limite è sufficiente trovare due funzioni in un intorno del punto che si sta considerando tali che $g(t) < f(x, y, \dots) < h(t)$. Se h, g hanno lo stesso limite, allora anche f convergerà a quel valore. Nel caso il limite sia 0 è sufficiente una funzione tale che $|f(x, y, \dots)| < |g(t)|$.

Nell'eseguire stime per funzioni della forma $f(x) = \frac{n(x)}{d(x)}$ è necessario prestare attenzione ad alcune particolarità:

- per eseguire una stima per eccesso (o da sopra) di f , bisogna eseguire una stima per eccesso di n , ma una per difetto di d
- la stima non deve introdurre singolarità nella funzione nell'intorno considerato

2.1.3 Stime notevoli

Le equivalenze asintotiche risultano scomode da usare in \mathbb{R}^n , ma si possono usare per ottenere delle stime. Dalla definizione di asintotico se $f(t) \sim g(t)$, allora $\lim \frac{f(t)}{g(t)} = 1$, da cui per la persistenza del segno:

$$\frac{|g(t)|}{2} \geq |f(t)| \leq 2|g(t)|$$

Alcune stime utili ricavate in questo modo sono:

- $|\tan(t)| \leq |t| \quad \forall t$
- $\frac{|t|}{2} \leq |\sin(t)| \leq 2|t| \quad t \in U(0)$
- $\frac{|t|}{2} \leq |\log(1+t)| \leq 2|t| \quad t \in U(0)$
- $k_{p1} \|(x, y)\|^p \leq |x|^p + |y|^p \leq k_{p2} \|(x, y)\|^p \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$
- $|x| \leq \|(x, y)\| \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$
- $|x|^a |y|^b \leq \|(x, y)\|^{a+b} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$
- $\|(x, y)\| \leq |x| + |y| \leq 2\|(x, y)\| \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$
- $2|x||y| \leq x^2 + y^2 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$
- $ax^2 + bxy + cy^2 \geq \frac{\epsilon}{2}(x^2 + y^2) \quad \Delta < 0$

2.1.4 Coordinate polari

In alcuni casi può risultare più semplice ottenere delle stime passando ad un sistema di coordinate polari:

$$(x, y) = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta))$$

2.1.5 Limiti all'infinito

Il problema del calcolo di limiti per $(x, y, \dots) \rightarrow \pm\infty$ è analogo a quello dei limiti finiti, con la differenza che al posto di avere la singola variabile che tende a un valore, si ha $\|(x, y, \dots)\| \rightarrow \pm\infty$. La singola variabile può comunque non divergere.

Se $f \rightarrow \pm\infty$ è sufficiente eseguire una stima, dal basso o dall'alto.

2.2 Continuità

Per dimostrare la continuità di una funzione in più variabili si usa la definizione con i limiti:

$$f \text{ continua} \Leftrightarrow \lim_{(x_1, x_2, \dots) \rightarrow p} f(x_1, x_2, \dots) = f(p)$$

Inoltre è possibile utilizzare la definizione di continuità globale:

$$f \text{ continua} \Leftrightarrow \forall A \text{ aperto in } \text{dom}(f) \text{ si ha } f^{-1}(A) \text{ aperto}$$

2.3 Derivabilità e differenziabilità

In \mathbb{R}^n derivabilità e differenziabilità non coincidono. Entrambe le nozioni, inoltre, si complicano.

2.3.1 Derivate direzionali e parziali

Data una funzione f e un vettore v , si definisce derivata di f lungo la direzione v (se esiste) il valore:

$$D_v f(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tv_x, y + tv_y) - f(x, y)}{t} \quad v = v_x + v_y$$

Si definisce derivata parziale nella variabile x_i (se esiste) il valore:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + t, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{t}$$

Se esistono tutte le derivate parziali definisce gradiente di f il vettore:

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

e vale:

$$D_v f(x, y) = \langle \nabla f(x, y), v \rangle$$

Per calcolare le derivate parziali normalmente si possono usare le usuali regole di derivazione considerando le altre variabili come costanti. Nei punti dove questo non sia possibile si deve ricorrere alla definizione.

Le derivate direzionali si calcolano attraverso alla loro definizione o utilizzando il gradiente.

2.3.2 Differenziabilità

Una funzione $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ si dice differenziabile nel punto \underline{a} se:

$$\lim_{\underline{h} \rightarrow 0} \frac{f(\underline{a} + \underline{h}) - f(\underline{a})}{\|\underline{h}\|} = 0$$

quindi:

$$f(\underline{a} + \underline{h}) - f(\underline{a}) = \underline{L} * \underline{h} + o(\|\underline{h}\|)$$

Dove $\underline{L} = \nabla f(x, y)$ è un'applicazione lineare.

Nel caso di una funzione $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, la definizione di differenziabilità rimane la stessa, ma $L = J_f$ è una matrice detta Jacobiana:

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Per il **teorema del differenziale totale** se f ha tutte le derivate parziali e queste sono continue (oppure esistono e sono continue tutte tranne una) allora è differenziabile (condizione sufficiente, ma non necessaria).

Siano f, g differenziabili, allora la loro composizione $\Phi = f \circ g$ è differenziabile e vale:

$$J_\Phi = J_f * J_g$$

Per calcolare la Jacobiana di una funzione composta, è importante partire schematizzando la composizione, capendo tra che spazi operano le funzioni e in che punto si deve calcolare la matrice da moltiplicare.

In alternativa al prodotto di matrici esiste una formula equivalente chiamata **regola della catena**. Questa regola corrisponde alla regola di derivazione delle funzioni composte già studiata per le funzioni in una variabile.

Se una funzione è differenziabile, allora:

- è continua
- ha tutte le derivate direzionali

2.3.3 Derivate di ordine superiore

Sia f una funzione, siano $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ $i \in \{1, \dots, n\}$ le sue derivate parziali e siano queste derivabili, allora esistono le derivate parziali seconde $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$ e le derivate seconde miste $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)$.

Per il **teorema di Schwartz**, sia $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ e $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$ $n \leq m$ esitano $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ continue, allora:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Se esistono tutte le derivate seconde, allora si definisce Hessiana la matrice:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

Se valgono le ipotesi di Schwartz $\forall i, j$, allora la matrice Hessiana è simmetrica.

Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione con tutte le derivate parziali fino all'ordine k continue, allora si dice che f è di classe C^k .

2.3.4 Sviluppo di Taylor

Sia f una funzione differenziabile di classe C^k , si definisce sviluppo di Taylor con resto di Peano il polinomio:

$$f(\underline{x}) - f(\underline{a}) = \sum_j (x_j - a_j) \frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{a}) + \dots + \frac{1}{k!} \sum_{j_1} \dots \sum_{j_k} \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_k}}(\underline{a}) * (x_{j_1} - a_{j_1}) \dots (x_{j_k} - a_{j_k}) + o(\|x - a\|^k)$$

Mentre in \mathbb{R} la condizione $f(x) = f(x_0)$ è possibile solo se il polinomio di Taylor è nullo $\forall x$, in \mathbb{R}^n esistono alcuni percorsi che annullano il polinomio senza che esso sia sempre uguale a 0.

Per calcolare lo sviluppo di Taylor di una funzione in più variabili senza passare dalla definizione, si possono usare gli sviluppi in \mathbb{R} , prestando attenzione a utilizzare correttamente gli o-piccolo.

Esistono alcune regole che permettono di passare dagli o-piccolo delle componenti (usati negli sviluppi in una variabile) a quelli della norma. Per una funzione $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \rightarrow (0, 0)$

- $|x|^a |y|^b = o(\|(x, y)\|^c) \quad \forall c > 0 : (a + b) > c; a, b > 0$
- $o(|x|^a |y|^b) = o(\|(x, y)\|^{a+b})$
- $o(a_1 x^{n_1} y^{m_1} + a_2 x^{n_2} y^{m_2}) = o(\|(x, y)\|^N) \quad N = \min(n_1 + m_1, n_2 + m_2)$

Nel caso sia richiesto lo sviluppo in un punto diverso da $(0, 0)$ è sufficiente operare una traslazione per poter utilizzare le stesse regole, senza preoccuparsi di quale sia la norma da utilizzare.

2.3.5 Piani tangenti

Se una funzione $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ è differenziabile in $a = (x_0, y_0)$, allora esiste il piano tangente al suo grafico in a e ha equazione:

$$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} * (x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} * (y - y_0)$$

2.3.6 Funzioni a valori vettoriali

Nel caso di una funzione $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è possibile utilizzare tutti i principi elencati precedentemente, rappresentando la funzione come un vettore e studiando le singole componenti:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

2.3.7 Estremi locali

Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione a variabili reali, un punto (x_0, y_0) è detto **massimo locale** se:

$$\exists U((x_0, y_0)) : \forall x, y \in (U \cap \Omega) \quad f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$$

allo stesso modo, è **minimo locale** se:

$$\exists U((x_0, y_0)) : \forall x, y \in (U \cap \Omega) \quad f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$$

Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile in \underline{a} punto estremante, allora $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{a}) = 0 \quad \forall i$

Questo teorema fornisce una condizione sufficiente, ma non necessaria. Non tutti i punti che annullano le derivate parziali sono estremanti. Per controllare che un valore sia un estremante si può passare dalla definizione oppure utilizzare il **test della Hessiana**.

Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2(\Omega)$. Sia $\underline{a} \in \Omega$ un punto stazionario (tutte le derivate parziali si annullano), siano m e M il minimo e massimo autovalore di $H(\underline{a})$, Hessiana di f valutata nel punto \underline{a} , allora:

- $m > 0 \Rightarrow \underline{a}$ è minimo relativo forte
- $M < 0 \Rightarrow \underline{a}$ è massimo relativo forte
- \underline{a} minimo relativo $\Rightarrow m \geq 0$
- \underline{a} massimo relativo $\Rightarrow M \leq 0$
- $mM < 0 \Rightarrow \underline{a}$ non è estremante

Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2(\Omega)$, $\underline{a} \in \Omega$ punto stazionario, allora

- $\det(H(\underline{a})) > 0 \Rightarrow \underline{a}$ è estremante forte, in particolare:
 - $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\underline{a}) > 0 \Rightarrow \underline{a}$ è minimo
 - $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\underline{a}) < 0 \Rightarrow \underline{a}$ è massimo
- $\det(H(\underline{a})) < 0 \Rightarrow \underline{a}$ non è estremante

Un primo passo utile nella ricerca di estremanti è spesso quello di studiare il segno della funzione e applicare il **teorema di Weierstrass**. Se la funzione si annulla in un punto circondato di valori negativi, allora quel punto sarà un massimo locale e viceversa. Il grafico del segno della funzione può anche risultare utile per i passi successivi della ricerca.

Dove la funzione è differenziabile, gli estremi vanno cercati nei punti che annullano il gradiente. Questi punti devono poi essere controllati con il test della Hessiana, con lo studio del segno o con la definizione, per verificare che si tratti di estremi e verificarne la tipologia.

Dove la funzione non è differenziabile, la condizione sufficiente imposta dal gradiente non si applica e non vale neanche il test dell'Hessiana. Questi punti dovranno essere controllati a mano o con il teorema di Weierstrass.

3 Successioni e serie di funzioni

Le nozioni di successione e di serie a valori reali possono essere estese ponendo come valori delle funzioni.

3.1 Successioni

Come per le successioni a valori reali, una successione di funzioni può convergere ad un valore. In questo caso esistono però diverse formulazioni di convergenza, con proprietà differenti.

3.1.1 Convergenza puntuale

Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni $(D \subseteq \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, si dice che essa converge puntualmente a f su $E \subseteq D$

$$\Leftrightarrow \forall x \in E \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in E \forall \epsilon > 0 \exists n_0(x, \epsilon) : \forall n \geq n_0 |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$$

La convergenza puntuale:

- **non** conserva la limitatezza
- **non** conserva la continuità
- **non** conserva l'integrabilità
- **non** conserva la derivabilità

Lo studio della convergenza puntuale di $f_n(x)$ si riduce al calcolo del limite di una successione a valori reali $(f(x))$ dipendente da un parametro reale (x) .

3.1.2 Convergenza uniforme

Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni $(D \subseteq \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, si dice che essa converge uniformemente a f su $E \subseteq D$

$$\Leftrightarrow \sup_{x \in E} (d(f_n(x), f(x))) \rightarrow 0$$

$$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists n_0(\epsilon) : \forall n \geq n_0 \forall x \in E d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$$

Come per le successioni a valori reali, esiste una condizione equivalente nota come **Cauchy-uniformità**:

$$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists n_0(\epsilon) : \forall n, m \geq n_0 \forall x \in E d(f_n(x), f_m(x)) < \epsilon$$

Se $f_n \rightarrow f$, allora:

- f_n limitata $\forall n \Rightarrow f$ limitata
- f_n continua $\forall n \Rightarrow f$ continua
- $f_n \in R([a, b]) \forall n \Rightarrow f \in R([a, b])$ e $\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx$ ((a,b) deve essere limitato)
- **non** conserva la derivabilità

Per la derivabilità vale però il seguente risultato:

Sia $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ limitato, se

- $f_n : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile su $(a, b) \forall n$
- $\{f_n(c)\} \rightarrow l \in \mathbb{R}$, con $c \in (a, b)$
- f'_n converge uniformemente a $g(x)$ su (a, b)

allora f_n converge uniformemente a f e $f'(x) = g(x)$.

Per il **teorema del doppio limite**, data la successione $f_n : S \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\forall n \exists \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = l_n \in \mathbb{R}$ e $f_n \rightarrow f$ uniformemente, allora $\exists l \in \mathbb{R} : l = \lim_{n \rightarrow +\infty} l_n = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Questo teorema può essere utilizzato per dimostrare la non convergenza uniforme di una successione.

3.1.3 Studio della convergenza

Il primo passaggio nello studio della convergenza uniforme di una successione di funzioni $f_n(x)$ è lo studio della sua convergenza puntuale. Una volta trovata una funzione $f(x)$: $f_n \rightarrow f$ puntualmente, si può proseguire a valutare l'eventuale convergenza uniforme, calcolando $\sup_x (|f_n(x) - f(x)|)$. Spesso questo valore può essere calcolato esplicitamente, se necessario passando dallo studio della monotonia e di massimi e minimi, ma nella maggior parte dei casi è sufficiente dimostrarne o escluderne la convergenza a 0 attraverso a delle stime e al teorema del confronto.

Alcune particolarità a cui prestare attenzione sono:

- **gli intervalli di convergenza:**

Se la funzione non converge su un intervallo, può essere utile cercare il punto "responsabile" e riprovare su un intervallo che ne escluda un intorno.

Se la successione non converge "a causa" di un punto, non convergerà neanche sull'insieme a cui viene sottratto il punto stesso o un numero finito di punti. E' quindi necessario escluderne sempre un intorno.

La convergenza deve sempre essere studiata rispetto a un insieme.

- **le stime:**

In moltissimi casi non è necessario calcolare esplicitamente il valore di $\sup(|f_n(x) - f(x)|)$, ma è sufficiente stimarlo per eccesso o per difetto, per poi utilizzare il teorema del confronto per calcolarne il limite.

Il valore che stiamo cercando sarà sempre positivo (c'è un valore assoluto!), quindi sarà quasi sempre sufficiente una sola stima (l'altra è 0 o $+\infty$).

- **la monotonia:**

Lo studio della derivata prima permette di calcolare la posizione di massimi e minimi di una funzione. Una funzione limitata ammette sempre massimo assoluto su un compatto (teorema di Weierstrass), quindi sarà sufficiente dimostrare che $|f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$ nel valore di x che la massimizza (massimizza la distanza, non $f(x)$ o $f_n(x)$) per dimostrare la convergenza di tutta la funzione.

- **le proprietà della convergenza uniforme:**

La convergenza uniforme mantiene alcune caratteristiche della successione di funzioni, se queste non sono presenti nella funzione limite su un determinato intervallo, allora la convergenza non può essere uniforme.

3.2 Serie

La serie $\sum f_k$ corrisponde alla successione $\{\sum_{k=0}^n f_k\}_{n \in \mathbb{N}}$, quindi le definizioni di convergenza puntuale, uniforme e di Cauchy-uniforme sono quelle presentate precedentemente.

3.2.1 Convergenza totale

Nel caso delle serie è possibile definire una condizione di convergenza più forte: la convergenza totale:

$$\sum f_k \text{ conv. totalmente} \Leftrightarrow \sum \sup_{x \in E} |f_k(x)| < +\infty$$

La convergenza totale implica la convergenza uniforme e assoluta.

Per il **criterio di Weierstrass**, se $\exists \{a_k\} : \forall x |f_k(x)| \leq a_k$ e $\sum a_k < +\infty \Rightarrow \sum f_k$ conv. totalmente.

3.2.2 Convergenza uniforme

Se $\sum f_k$ converge uniformemente, allora f_k converge uniformemente a 0 (condizione necessaria, non sufficiente).

Sia $f_k : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, se:

- $\sum f_k$ converge puntualmente
- $\sum f_k(b)$ non converge

allora $\sum f_k$ non converge uniformemente.

3.2.3 Derivazione

Sia f_k derivabile su $(a, b) \forall k$, se:

- $\exists x_0 \in (a, b)$ tale che $\sum f_k(x_0)$ converge
- $\sum f'_k$ converge uniformemente su (a, b)

allora:

- $\sum f_k$ converge puntualmente su (a, b)
- $\sum f_k$ converge uniformemente su ogni $S \in (a, b)$ limitato
- $(\sum f_k)' = \sum f'_k$

3.2.4 Studio della convergenza

Lo studio della **convergenza puntuale** di una serie di funzioni si svolge considerando la variabile come un parametro reale e studiando la convergenza della serie numerica.

Lo studio della **convergenza uniforme** di una serie di funzioni, nella maggior parte dei casi, si svolge trovando una stima del termine generale indipendente dalla variabile e applicando il criterio di Weierstrass. La non convergenza può essere dimostrata attraverso una stima divergente o la negazione di una delle condizioni necessarie (teorema del doppio limite, convergenza a 0 del termine generale...).

Come nel caso delle successioni, può risultare utile trovare i valori "che causano" la non convergenza.

Il **criterio di convergenza di Leibniz**, in particolare il risultato sulla velocità di convergenza, fornisce uno strumento utile per dimostrare la convergenza uniforme di serie di funzioni a segno alterno.

In alcuni casi particolari si può studiare la convergenza su una successione di punti per dedurne il comportamento in \mathbb{R} .

3.2.5 Serie di potenze in \mathbb{R}

Si dice serie di potenze in x , centrata in x_0 :

$$\sum a_k(x - x_0)^k$$

Il dominio di una serie di potenze è sempre non nullo (per convenzione $0^0 = 1 \Rightarrow$ la serie converge in $x = x_0$).

Data una qualsiasi serie di potenze f e il suo dominio D_f , $\exists r > 0$ tale che:

$$D_f \subseteq \text{int}D_f = B_r(x_0) \quad \bar{D}_f = \bar{B}_r(x_0)$$

La serie converge totalmente su ogni compatto in $\text{int}D_f$.

Il raggio di convergenza può essere calcolato come $r = \frac{1}{\gamma}$, dove:

- $\gamma = \limsup_{k \rightarrow +\infty} |a_k|^{\frac{1}{k}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} (\sup_{n \geq k} |a_n|^{\frac{1}{n}})$ (criterio della radice)
- $\gamma = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$

Sia $f = \sum a_k(x - x_0)^k$, allora:

- $f(x)$ è continua
- $f(x) \in R((-r, r))$ e $\int_0^x f(t)dt = \sum a_k \int_0^x t^k dt = \sum \frac{a_k x^{k+1}}{k+1}$
- $f(x)$ è derivabile e ha come serie derivata $\sum k a_k x^{k-1}$

Inoltre, il raggio di convergenza della serie e della serie derivata coincidono

Per il **teorema di Abel**, se una serie di potenza ha raggio di convergenza $r \in (0, +\infty)$ e converge in $x = r$, allora converge uniformemente su $[-M, r]$ $\forall M : 0 < M < r$.

Vale lo stesso risultato anche con il segno invertito, quindi se la serie converge in $x = \pm r$, allora converge uniformemente su $[-r, r]$.

I polinomi di Taylor sono serie di potenze.

Nel calcolare il valore di una serie di potenze è spesso utile utilizzare i risultati sulla derivazione e integrazione. Infatti il raggio di convergenza di una serie di potenze è uguale a quello della serie derivata e integrata, quindi è possibile calcolare il valore della serie derivata per poi integrarla e viceversa (le serie di potenze sono di classe C^∞).

Una serie di potenze deve sempre essere nella forma $\sum a_n[f(x)]^n$, se all'esponente si trova una potenza diversa dall'indice n , sarà necessario applicare cambi di variabili e trasformazioni algebriche per ricondursi alla forma canonica.

Nel caso di cambi di variabile, è necessario ricondurre le condizioni di convergenza dalla variabile cambiata a quella originaria.

Per calcolare la somma di una serie di potenze è necessario ricondursi a una serie notevole o a una serie di Taylor.

3.3 Spazi funzionali

4 Equazioni differenziali ordinarie

Un'equazione differenziale è un'equazione che ha come incognita una funzione e in cui compaiono le sue derivate. Un'equazione differenziale ordinaria è un'equazione in cui la soluzione dipende da una singola variabile. L'ordine di derivazione massimo che compare nell'equazione è detto ordine dell'equazione.

Un'equazione è detta in forma normale se si presenta nella forma:

$$y^{(k)} = f(x, y, y', \dots, y^{k-1})$$

E' sempre possibile ricondurre un'equazione differenziale in forma normale passando per una rappresentazione vettoriale.

Un'equazione differenziale accoppiata alle "condizioni iniziali" è detta Problema di Cauchy.

Si dice soluzione (locale o in piccolo) del Pdc su un intervallo (a, b) una funzione y che:

- sia derivabile in (a, b)
- $\text{graf}(y) \subset \Omega$
- $x_0 \in (a, b)$
- soddisfi le condizioni del problema su (a, b)

Per il **teorema di regolarità**, la soluzione di un'equazione differenziale della forma $y' = f(x, y)$, dove f è di classe C^k , è di classe C^{k+1} sull'intervallo.

4.1 Esistenza e unicità

4.1.1 Locale

Una prima condizione per l'esistenza e unicità della soluzione locale è data dal **criterio di Volterra**: una funzione $y(x)$ è soluzione del pdc associato a $f \in C^0$ se e solo se y è continua e:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

Una funzione $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è detta lipschitziana localmente in y uniformemente rispetto a x in $U(x_0, y_0)$ se:

- la funzione è limitata
- $\forall x, \forall y, y_2 \exists L > 0 : \|f(x, y_1) - f(x, y_2)\|_2 \leq L \|y_1 - y_2\|_2$

Se $f \in C^1$, allora f è lipschitziana.

Se $f \in C^0$ e $\exists \frac{\partial f}{\partial y}$ continua in un intorno di (x_0, y_0) .

Per il **teorema di Picard-Lindelof**, il pdc associato a $f(\dots)$ continua e lipschitziana in un intorno ha un'unica soluzione in quell'intorno.

Siano $(y_1, I), (y_2, J)$ due soluzioni locali, si dice che y_2 è prolungamento di y_1 se $I \subset J$ e $y_2|_I = y_1$.

Una soluzione locale è detta massimale se non ammette prolungamenti.

La funzione a tratti definita da soluzioni locali su intervalli diversi è soluzione del pdc.

4.1.2 Globale

Sia $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continua e lipschitziana sull'intervallo, allora il pdc associato a f ha un'unica soluzione su $[a, b]$

4.2 Equazioni a variabili separabili

Un'equazione a variabili separabili è un'equazione del tipo:

$$y' = h(x)k(y)$$

Le soluzioni del pdc associato possono essere trovate:

- se $k(y_0) = 0$, allora $y(x) = y_0$ è l'unica soluzione locale
- se $k(y_0) \neq 0$, allora esiste un intorno in cui la funzione non si annulla, quindi:

$$\int_{x_0}^x \frac{y'(s)}{k(y(s))} ds = \int_{x_0}^x h(s) ds \Rightarrow \int_{y_0}^y \frac{dt}{k(t)} = \int_{x_0}^x h(s) ds$$

Sia y_1 un valore che annulla $k(y)$, allora una soluzione non stazionaria non potrà mai incrociare la retta $y = y_1$.

4.3 Equazioni di Bernoulli

Un'equazione differenziale di Bernoulli è un'equazione della forma:

$$y' = a(x)y + b(x)y^\alpha \quad \alpha \in (\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}) \quad a, b \text{ continue}$$

Possono essere ricondotte a lineari di primo ordine attraverso alla sostituzione:

$$z = y^{1-\alpha} \Rightarrow \frac{z'}{1-\alpha} + a(x)z + b(x) = 0$$

Nel caso di un pdc, è necessario applicare la sostituzione anche alle condizioni iniziali.

E' importante prestare attenzione alle ipotesi sotto le quali è valida la sostituzione. Dove vale la sostituzione, le due equazioni sono equivalenti, dove non vale non lo sono.

Il dominio dell'equazione prima e dopo la sostituzione non è necessariamente lo stesso.

In base al valore di α le equazioni di Bernoulli hanno caratteristiche particolari:

- $\alpha < 0$: il segno dell'equazione è costante e $y \neq 0$
- $0 < \alpha < 1$: la funzione non è Lipschitziana in un intorno di $y = 0$
- $\alpha > 0$: la funzione ha segno costante e $y = 0 \Rightarrow y' = 0$

4.4 Equazioni omogenee di primo ordine

Una funzione omogenea del primo ordine, nella forma:

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$$

può essere riportata a una a variabili separabili con la sostituzione $z = \frac{y}{x} \Rightarrow z' = \frac{g(z)-z}{x}$

4.5 Equazioni lineari

Un'equazione differenziale lineare è un'equazione della forma:

$$\sum_i^n a_i(x)y^{(i)} = b(x)$$

Se il termine noto $b(x)$ è nullo, l'equazione è detta omogenea.

Un'equazione differenziale lineare è detta in forma normale se è nella forma:

$$y^{(n)} + \sum_i^{n-1} \frac{a_i(x)}{a_n(x)} y^{(i)} = \frac{b(x)}{a_n(x)}$$

Verranno trattati solo casi in forma normale e con coefficienti continui.

4.5.1 Di primo ordine

Un'equazione lineare del primo ordine, nella forma:

$$y' = p(x)y + q(x) \quad p, q \text{ continue}$$

ammette soluzione globale unica:

$$y(x) = e^{\int_{x_0}^x p(t)dt} \left\{ y_0 + \int_{x_0}^x q(t)e^{-\int_{x_0}^t p(s)ds} dt \right\}$$

4.5.2 Equazioni di Eulero

Le equazioni di Eulero sono equazioni lineari di ordine k della forma:

$$\sum_i^k x^i y^{(i)} = b(x)$$

si risolvono ponendo $x = e^t$ e $y_t = y(e^t)$

4.5.3 Di ordine superiore

Un'equazione lineare omogenea può essere rappresentata attraverso all'operatore lineare $\Lambda : C^n(I) \rightarrow C^0(I)$

$$\Lambda(y) = y^{(n)} + \sum_I^{n-1} a_i(x)y^{(i)}$$

Il nucleo di Λ è lo spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea associata.

Una soluzione particolare di un'equazione differenziale lineare, sommato al nucleo dell'omogenea associata genera lo spazio delle soluzioni.

Per il **teorema fondamentale**, $\ker(\Lambda)$ ha dimensione n (l'ordine massimo di derivazione).

4.5.4 Dipendenza lineare

Due funzioni sono dette linearmente indipendenti se:

$$\sum c_i f_i(x) = 0 \quad \forall x \Rightarrow c_i = 0 \quad \forall i$$

Date k funzioni $k-1$ volte derivabili in un punto, possiamo definire la matrice Wronskiana:

$$W_{f_1, \dots, f_k} = \begin{pmatrix} f_1(x), \dots, f_k(x) \\ f_1'(x), \dots, f_k'(x) \\ \vdots \\ f_1^{k-1}(x), \dots, f_k^{k-1}(x) \end{pmatrix}$$

Se f_1, \dots, f_k sono linearmente dipendenti, allora $\det(W_{f_1, \dots, f_k}) = 0$.

Presi y_1, \dots, y_n integrali di $\Lambda(y) = 0$ e la loro matrice Wronskiana $W(x)$, questi sono linearmente dipendenti se e solo se $\det(W(x)) = 0$ per qualche x_0 nell'intervallo.

4.5.5 Riduzione di grado, noto un integrale

4.5.6 Equazioni a coefficienti costanti

Il caso più semplice di equazione lineare è quello in cui tutti i coefficienti sono costanti.

Per ottenere tutte le possibili soluzioni di un'equazione lineare omogenea a coefficienti costanti di ordine n è sufficiente trovare n funzioni appartenenti a $\ker(\Lambda(y))$. Considerando funzioni della forma $y(x) = e^{\lambda x}$, possiamo dire che esse saranno soluzioni $\Leftrightarrow \lambda$ è radice di:

$$P(\lambda) = \lambda^n + \sum_k^{n-1} a_k \lambda^k$$

$P(\lambda)$ è detto polinomio caratteristico.

Per il **teorema fondamentale dell'algebra** si possono presentare alcuni casi:

- **P ha n radici distinte reali:** le n funzioni $y_i(x) = e^{\lambda_i x}$ sono linearmente indipendenti e generano $\ker(\Lambda(x))$
- **P ha n radici distinte, alcune complesse:** P a coefficienti reali, quindi se $z = a + bi$ è una sua radice, anche il suo coniugato sarà radice. Attraverso ad alcune combinazioni lineari, possiamo comporre funzioni reali che saranno soluzioni dell'equazione:

$$\cos(bx) = \frac{e^{ibx} + e^{-ibx}}{2} \quad \sin(bx) = \frac{e^{ibx} - e^{-ibx}}{2i}$$

$$e^{ax} \cos(bx) = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad e^{ax} \sin(bx) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

- **P ha n radici reali, alcune coincidenti:** sia $y_{1,0}(x) = e^{\alpha_1 x}$ una soluzione, allora anche $y_{1,1}(x) = x e^{\alpha_1 x}$ e $y_{1,m-1}(x) = x^{m-1} e^{\alpha_1 x}$ (dove m è la molteplicità di α_1 come radice del polinomio caratteristico) saranno soluzioni. In questo modo posso ottenere n funzioni linearmente indipendenti che fanno parte del nucleo.
- **P ha radici complesse e coincidenti:** unendo le due tecniche precedenti, si ottengono equazioni reali linearmente indipendenti della forma: $y_{1,i}(x) = x^i e^{a_1 x} \cos(bx)$ o $y_{1,i}(x) = x^i e^{a_1 x} \sin(bx)$ ($i < m$, con m molteplicità)

Per quanto riguarda equazioni non omogenee ($\Lambda(x) = b(x)$), è comunque necessario trovare un loro integrale particolare, oltre agli n della omogenea associata. Per fare questo si ricorre a dei casi standard:

- se b è un polinomio di grado $H \geq 0$ e $\lambda = 0$ non è radice del polinomio caratteristico, allora tra le soluzioni c'è un polinomio di grado h .
- se b è come sopra, ma $\lambda = 0$ è radice di molteplicità $r \geq 1$, allora tra le soluzioni c'è un polinomio di grado $r + h$ della forma:

$$y(x) = x^r Q(x) \quad \deg Q = h$$

- se $b(x) = e^{\mu x}$ e μ non è radice del polinomio caratteristico, allora tra le soluzioni c'è una funzione della forma:

$$y(x) = ce^{\mu x}$$

- come sopra, ma μ è radice con molteplicità r , allora tra le soluzioni c'è una funzione del tipo:

$$y(x) = Cx^r e^{\mu x}$$

- $b(x) = p(x)e^{\mu x}$, $p(x)$ polinomio di grado h , r molteplicità di μ come radice del p. caratteristico, allora è soluzione:

$$y(x) = x^r Q(x) e^{\mu x} \quad \deg Q = h$$

- $b(x) = e^{\alpha x} [a * \sin(\beta x) + b * \cos(\beta x)]$, $\alpha \pm i\beta$ non è radice del p. caratteristico, allora è soluzione:

$$y(x) = e^{\alpha x} [c * \sin(\beta x) + d * \cos(\beta x)]$$

- come sopra, ma $\alpha \pm i\beta$ radici di molteplicità $r \geq 1$, allora sarà soluzione:

$$y(x) x^r e^{\alpha x} [c * \sin(\beta x) + d * \cos(\beta x)]$$

Indice

1	Primitive e integrali	1
1.1	Primitive fondamentali	1
1.2	Trasformazioni lineari	1
1.3	Linearità e omogeneità	1
1.4	Integrali per sostituzione	1
1.4.1	Sostituzioni immediate	1
1.4.2	Sostituzioni non elementari	2
1.4.3	Classi di funzioni integrabili per sostituzione	2
1.5	Integrazione per parti	2
1.5.1	Classi di funzioni integrabili per parti	2
1.6	Incollamenti	2
1.7	Integrazione di funzioni razionali	2
1.8	Integrali definiti	3
1.8.1	Sostituzione per integrali definiti	3
1.8.2	Funzioni pari e dispari	4
1.8.3	Teorema della media integrale	4
1.9	Integrali impropri	4
1.9.1	Forme notevoli	4
1.9.2	Criteri di convergenza	4
1.9.3	Note	5
1.10	Funzioni integrali	5
1.10.1	Dominio	5
1.10.2	Monotonia	5
1.10.3	Comportamento asintotico	5
1.10.4	Tangenti	5
1.10.5	Funzioni integrali composte	6
2	Funzioni in più variabili reali	7
2.1	Limiti	7
2.1.1	Percorsi e divergenza	7
2.1.2	Stime e convergenza	7
2.1.3	Stime notevoli	7
2.1.4	Coordinate polari	8
2.1.5	Limiti all'infinito	8
2.2	Continuità	8
2.3	Derivabilità e differenziabilità	8
2.3.1	Derivate direzionali e parziali	8
2.3.2	Differenziabilità	8
2.3.3	Derivate di ordine superiore	9
2.3.4	Sviluppo di Taylor	9
2.3.5	Piani tangenti	9
2.3.6	Funzioni a valori vettoriali	10
2.3.7	Estremi locali	10
3	Successioni e serie di funzioni	11
3.1	Successioni	11
3.1.1	Convergenza puntuale	11
3.1.2	Convergenza uniforme	11
3.1.3	Studio della convergenza	12
3.2	Serie	12
3.2.1	Convergenza totale	12
3.2.2	Convergenza uniforme	12
3.2.3	Derivazione	12
3.2.4	Studio della convergenza	13
3.2.5	Serie di potenze in \mathbb{R}	13
3.3	Spazi funzionali	13
4	Equazioni differenziali ordinarie	14
4.1	Esistenza e unicità	14
4.1.1	Locale	14
4.1.2	Globale	14
4.2	Equazioni a variabili separabili	14
4.3	Equazioni di Bernoulli	15
4.4	Equazioni omogenee di primo ordine	15
4.5	Equazioni lineari	15

4.5.1	Di primo ordine	15
4.5.2	Equazioni di Eulero	15
4.5.3	Di ordine superiore	16
4.5.4	Dipendenza lineare	16
4.5.5	Riduzione di grado, noto un integrale	16
4.5.6	Equazioni a coefficienti costanti	16