Geometria 1

Luca Vettore

March 2022

1 Relazioni

Siano A e B insiemi, è detta relazione tra A e B un insieme $R \subseteq A \times B$. Sia $(a, b) \in R$, si dice che a è in relazione con b e si denota aRb.
Se $R \subseteq A \times A$, si dice che R è relazione in A.
Una relazione in un insieme A si dice di equivalenza se:

- $\forall a \in A$ aRa (riflessività)
- $\forall a, b \in A$ aRb $\Leftrightarrow$ bRa (simmetria)
- $\forall a, b, c \in A$ aRb e bRc $\Rightarrow$ aRc (transitività)

Sia $R \subseteq A \times A$ una relazione di equivalenza, si dice classe di equivalenza l'insieme $[a]_R = \{\forall b \in A : bRa\}$ $(aRb \Leftrightarrow [a]_R = [b]_R)$.
L'insieme delle classi di equivalenza si dice insieme quoziente e si denota $A/R = \{[a]_R; a \in a\}$ ("insieme di A modulo R").

Sia $A = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$, sia $R \subseteq A \times A : (a, b)R(c, d) \Leftrightarrow ad = bc$, allora $\mathbb{Q} = A/R$.

1.1 Classi modulo

Siano $a, b \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$, si dice che a è congruo a b modulo n e si denota $a \sim b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : a - b = k \cdot n$.
$\sim$ è relazione di equivalenza. L'insieme $\mathbb{Z}/\sim = \mathbb{Z}_n$ è detto insieme delle classi modulo n.
L'insieme $\mathbb{Z}_2$ contiene due classi: $[0]_\sim = \{..., 0, 2, 4, ..\}$ e $[1]_\sim = \{..., 1, 3, 5, ..\}$.
L'insieme $\mathbb{Z}_3$ contiene 3 classi ...
L'insieme $\mathbb{Z}_n$ contiene n classi: $[0]_\sim, ..., [n-1]_\sim$.

2 Strutture algebriche

2.1 Operazioni

Sia A un insieme. Un'operazione è un'applicazione $* : A \times A \to A$.
In $\mathbb{Z}$ sono operazioni +,-,$\cdot$, non lo è : $(2 : 3 \notin \mathbb{Z})$.
In $\mathbb{Z}_n$ si possono definire:

- +: $[a]_n + [b]_n = [a + b]_n$
- $\cdot$: $[a]_n \cdot [b]_n = [a \cdot b]_n$

Queste operazioni sono indipendente dai rappresentanti della stessa classe scelti $(a \sim a', b \sim b' \Rightarrow a \cdot b \sim a' \cdot b')$.

Una struttura algebrica è un insieme dotato di operazioni che soddisfano determinate condizioni.

2.2 Gruppi

Un gruppo (G,*) è una struttura algebrica dotata di un operazione tale che:

1. $\forall x, y \in G$ $(x * y) * z = x * (y * z)$ (associatività)
2. $\exists e \in G : \forall x \in G$ $e * x = x * e = x$ (esistenza elemento neutro)
3. $\forall x \in G$ $\exists \bar{x} : x * \bar{x} = x * \bar{x} = e$ (esistenza inverso)

Un gruppo (G,*) è detto abeliano se: 4. $\forall x, y \in G$ $x * y = y * x$.
Una struttura che verifica 1 e 2 è detta monoide.

$(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{Z}_n, +)$ sono gruppi abeliani.
$(\mathbb{Z}, \cdot), (\mathbb{Q}, \cdot), (\mathbb{Z}_n, \cdot)$ non sono gruppi.

$(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ è un gruppo.

Sia (G,*) un gruppo, esso ha delle proprietà fondamentali:

- L'elemento neutro è unico
- $\forall x \in G\ \bar{x}$ è unico
- $x * y = x * z \Rightarrow y = z$ e $x * y = z * y \Rightarrow x = z$ (Leggi di cancellazione)
- $\overline{(x * y)} = \bar{x} * \bar{y}$
- $\overline{(\bar{x})} = x$

In un gruppo $(G, *)$ è possibile definire le potenze di $x \in G$ come operazioni ripetute di x con se stesso ($x^n = x * ... * x$ per n volte). Le potenze godono delle usuali proprietà.

2.3 Anelli

Un anello $(A, +, *)$ è una struttura algebrica dotata di 2 operazioni tali che:

- $(A, +)$ sia un gruppo abeliano
- * sia associativo $(c * (a * b) = a * (b * c))$
- + e * siano distributive $(a * (b + c) = a * b + a * c)$

$(\mathbb{Z}, +, *); (\mathbb{Q}, +, *); (\mathbb{Z}_n, +, *); (\mathbb{R}, +, *)$ sono anelli.

Un anello è detto commutativo se * è commutativo.

In $(A, +, *)$ $x \in A$ è detto divisore dello zero se $\exists b \in A : a * b = 0_A$.
In $(\mathbb{Z}_6, +, *)$ $[2], [3], [4]$ sono divisori dello zero.

2.4 Campi

Un anello $(K, +, *)$ è detto campo se $(K^*, *)$ è un gruppo abeliano.
$(\mathbb{Z}_n, +, *)$ è un campo per n primo.

2.5 Il campo complesso

Sia $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Rappresentiamo un elemento $z \in \mathbb{C}$ come $z = a + i \cdot b$, con $a, b \in \mathbb{R}$.
$a = Re(z)$ è detto parte reale e $b = Im(z)$ è detto parte immaginaria.

Definiamo due operazioni utilizzando le operazioni in $(\mathbb{R}, +_{\mathbb{R}}, *_{\mathbb{R}})$

- $+_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$: $(a + ib, c + id) \to (a +_{\mathbb{R}} c) + (b +_{\mathbb{R}} d)i$
- $*_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$: $(a + ib, c + id) \to (a *_{\mathbb{R}} c -_{\mathbb{R}} b *_{\mathbb{R}} d) + (a *_{\mathbb{R}} d +_{\mathbb{R}} b *_{\mathbb{R}} c)i$

$(\mathbb{C}, +_{\mathbb{C}}, *_{\mathbb{C}})$ è un campo ed è chiamato campo complesso.

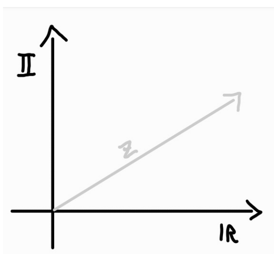
Esiste una corrispondenza tra gli elementi di $\mathbb{R}$ e di $\mathbb{C}$: $\forall r \in \mathbb{R}\ \exists z \in \mathbb{C}$: Re(z)=r e Im(z)=0.

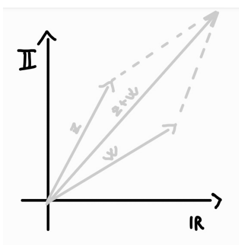
Posto $i = 0 + 1i$, $i^2 = i * i = -1 + 0i$. Data questa eguaglianza il prodotto in $\mathbb{C}$ segue le regole di un prodotto tra polinomi in i in $\mathbb{R}$.

Un elemento di z è detto immaginario puro se $Re(z) = 0$ o reale puro se $Im(z) = 0$.

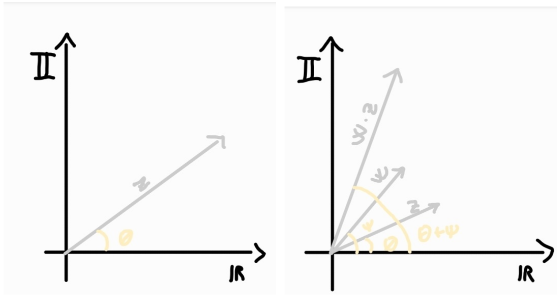
Sia $z = a + bi$ un numero complesso, il suo coniugato è definito come $\bar{z} = a - bi$.

Un numero complesso può essere rappresentato come un vettore su un piano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ noto come piano di Angart-Gauss. In questo modo l'operazione di somma tra numeri complessi assume il significato di somma di vettori.





Definiamo l'argomento θ come l'angolo compreso tra l'asse reale e il vettore z (in senso antiorario), z può quindi essere espresso come $z = a + bi = \rho(cos(\theta) + isin(\theta))$, dove $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ è il modulo di z ($tan(\theta) = \frac{b}{a}$ con $a \neq 0$, $a = \rho cos(\theta)$, $b = \rho sin(\theta)$). Questa forma è nota come forma trigonometrica
Il prodotto di numeri complessi si può quindi scrivere come $z = \rho(cos(\theta) + sin(\theta)i), w = \eta(cos(\psi) + sin(\psi)i)$ $z \cdot w = \rho \cdot \eta(cos(\theta + \psi) + sin(\theta + \psi)i)$

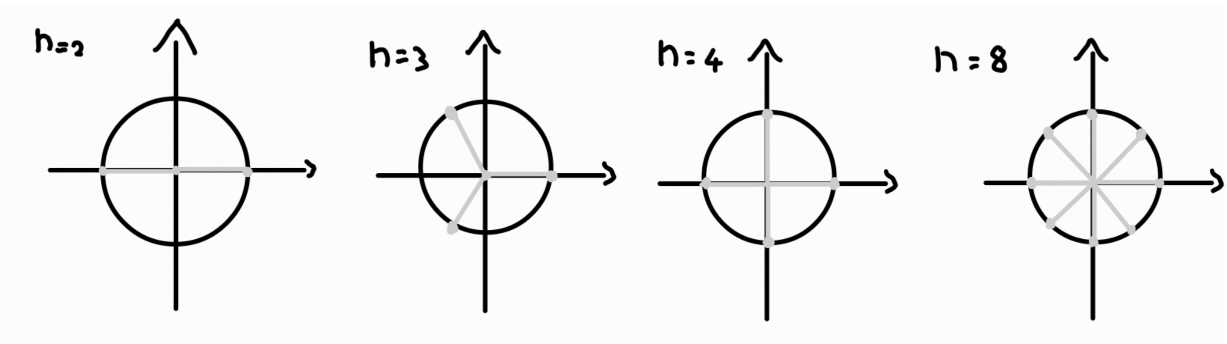


Ponendo $z^{-1} = \frac{1}{\rho}(cos(-\theta) + sin(-\theta)i)$ è possibile definire il rapporto in $\mathbb{C}$ come $z/w = z * w^{-1}$

Le potenze in $\mathbb{C}$ sono definite (per $n \geq 1$) come prodotti ripetuti: $z^n = z * ... * z$ n volte (formula di de Moivre).

Siano $z, w \in \mathbb{C}$, $z = \rho(cos(\theta) + sin(\theta)i), w = \eta(cos(\psi) + sin(\psi)i)$, si dice che z è radice n-esima di w se $z^n = w$, cioè $\rho^n = \eta$ e $\theta = \frac{\psi}{n} + \frac{2k\pi}{n}$ con $k \in \mathbb{N}$.
Sia $k' \sim k$ (mod n), allora $k' = k + rn$ con $r \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{\psi}{n} + \frac{2k'\pi}{n} = \frac{\psi}{n} + \frac{2k\pi}{n} + \frac{2\pi rn}{n} \sim \frac{\psi}{n} + \frac{2k\pi}{n}$ (mod n), quindi le radici distinte vanno ricercate nei valori $0 \leq k < n$.
In $\mathbb{C}$ un numero ha n radici n-esime.

Le radici n-esime di $z = \rho(cos(\theta) + sin(\theta)i)$ su un piano di Angart-Gauss sono disposte su una circonferenza con centro nell'origine e raggio $\sqrt[n]{\rho}$.
Nel caso di $w = 1 + 0i$:



2.5.1 Teorema fondamentale dell'algebra

Il campo $\mathbb{C}$ è algebricamente chiuso, cioè ogni polinomio $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ di grado ≥ 1 si può scomporre come $p(z) = a(z - \alpha_1)...(z - \alpha_d)$, dove α_n è radice di $p(x)$.

Sia $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ con tutti i coefficienti reali, allora se $\alpha \in \mathbb{C}$ è radice, anche $\bar{\alpha}$ è radice del polinomio e $p(\bar{z}) = \bar{p(z)}$.

3 Matrici

Una matrice di dimensione m×n o a m righe e n colonne è una tabella del tipo $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{22} & ... & a_{1n} \\ .. & .. & .. & ... \\ a_{1m} & ... & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$
L'insieme delle matrici di dimensioni m*n si denota con $Mat_{mn}(K)$, dove k è il campo a cui apartengono i termini della matrice.
Tra matrici delle stesse dimensioni si definisce la somma, come somma elemento per elemento, e il prodotto per scalare, come prodotto di ogni elemento per lo scalare.
Una matrice formata da una sola colonna è detta vettore.

3.1 Prodotto righe per colonne

Siano $A \in Mat_{m,n}$ e $B \in Mat_{s,p}$, A e B sono dette conformabili se $n = s$. In tal caso si può definire il prodotto tra matrici, come la matrice che ha come elementi $c_{ij} := a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{in}b_{nj}$. Questa operazione è anche nota come prodotto righe per colonne.

Il prodotto tra matrici ha alcune proprietà:

- $A * (B + C) = A * B + A * C$
- $(A + B) * C = A * C + B * C$
- $(A * B) * C = A * (B * C)$
- $\lambda(A * B) = (\lambda A) * B = A * (\lambda B)$

Data una matrice A, la sua trasposta A^T è la matrice che ha per colonne le righe di A.
L'elemento neutro rispetto al prodotto tra matrici è la matrice identità, composta di 1 sulla diagonale.

3.2 Matrici e sistemi lineari

Un sistema di equazioni lineari può essere rappresentato come $A * x = b$, dove A una matrice contenente i coefficienti, x un vettore contenente le incognite e b un vettore formato dai termini noti.
Una soluzione del sistema è un vettore $\tilde{x}$ tale che $A * \tilde{x} = b$.
Un sistema si dice:

- impossibile: se non ammette soluzioni
- determinato: se ammette una e una sola soluzione
- indeterminato: se ha più di una soluzione

Due sistemi lineari sono equivalenti se hanno le stesse soluzioni.

Il metodo di Gauss è un metodo che permette di trovare la soluzione di un sistema lineare. Il metodo consiste nel ridurre il sistema lineare in un sistema a scalini applicando delle operazioni che lo trasformino in uno equivalente.
Un sistema a scalini è strutturato così: $\begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & \\ 0 & 0 & * & * & * \\ \dots \end{pmatrix}$, ogni riga ha almeno uno zero più della precedente prima di un valore non nullo.

Le operazioni che mantengono le soluzioni di un sistema sono:

- Scambio di righe fra loro
- Moltiplicazione di una riga per costante non nulla
- Somma di una riga al multiplo di un altra

3.3 Rango

Il procedimento di Gauss può essere applicato a una qualsiasi matrice. Il numero di righe non nulle di una matrice ridotta a scalini è detto rango o caratteristica della matrice.

Teorema di Rouché-Capelli
Il sistema lineare $Ax = b$ se ha soluzioni, ne ha ∞^{n-r}, dove n è il numero di righe e r il rango di A.

4 Spazi vettoriali

Sia K un campo, un insieme V si dice spazio vettoriale sul campo K se è dotato di due operazioni $+ : V \times V \to V$ e $\cdot : K \times V \to V$ con le seguenti proprietà:

- $(V, +)$ è un gruppo abeliano
- $\forall \lambda, \mu \in K$, $\forall u, v \in V$ si ha:
  - $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$
  - $(\lambda * \mu)u = \lambda * (\mu * u)$
  - $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$
  - $1_K * u = u$

Dati $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$ e $v_1, ..., v_n \in V$, $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n$ è detta combinazione lineare di $v_1, ..., v_n$ con coefficienti $\lambda_1, ..., \lambda_n$.

Uno spazio vettoriale generico ha le seguenti proprietà:

- le proprietà di $(V, +)$ abeliano
- $\forall v \; 0 * v = 0$
- $\forall \lambda \in K \; \lambda * 0 = 0$
- $\forall v, \forall \lambda \in K \; -(\lambda * v) = (-\lambda)) * v$
- $\lambda * v = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \vee v = 0$

4.1 Sottospazi

Dato uno spazio vettoriale V, si dice sottospazio di V un insieme $U \subseteq V$ tale che:

- $\forall u, v \in U \ (u+v) \in U$
- $\forall \lambda \in K \ \forall u \in U \ (\lambda u) \in U$
- $0 \in U$

Le prime due proprietà dicono che un sottospazio è chiuso rispetto alle combinazioni lineari.

Sia V uno spazio vettoriale sul campo K e siano U e W sottospazi di V, allora l'insieme $U \cap W$ è sottospazio di V, mentre l'insieme $W \cup U$ può non esserlo.
Si definisce quindi il sottospazio somma di W e U come $U + W = \{v \in V | \exists u \in U, \exists w \in W : v = w + u\}$. Nel caso in cui $U \cap W = \emptyset$ la somma è detta diretta.

Teorema
La somma di U e W è diretta se e solo se ogni $v \in (U+W)$ si scrive in uno e un solo modo come somma di $u \in U$ e $w \in W$.

5 Generatori e basi

Sia V spazio vettoriale sul campo K. Sia $S = s_{\alpha \alpha \in A} \subseteq V$ e $S \neq \emptyset$, si dice sottospazio generato da S o span di s, l'insieme $< S >=< s_\alpha >_{\alpha \in A}= \{v \in V | \exists \lambda_1, ...\lambda_n, \exists s_{\alpha_1}, ..., s_{\alpha_n} : v = \lambda_1 s_{\alpha_1} + ... + \lambda_n s_{\alpha_n}\}$.
Gli elementi di S sono detti generatori di $< S >$.

$< S >$ è un sottospazio di V.
Sia $U \subseteq V$ e $\exists S_{\{} s_1, ..., s_k\} : U =< S >$, allora U si dice finitamente generato.

5.1 Dipendenza lineare

Sia V spazio vettoriale su K. Sia $S = \{s_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq V$, $S \neq \emptyset$.
Si dice che gli elementi di S sono linearmente dipendenti se $\exists \lambda_1, ..., \lambda_n \in K$ e $s_{\alpha_1}, ..., s_{\alpha_n} \in S$ tali che $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \neq (0, ..., 0)$ e $\lambda_1 s_{\alpha_1} + ... + \lambda_n s_{\alpha_n} = 0$.
Se gli elementi si S non sono linearmente dipendenti, allora sono linearmente indipendenti.

La dipendenza lineare ha le seguenti proprietà:

- $S \neq \emptyset$, $S \subseteq T \subseteq V$, S l.d $\Rightarrow$ T l.d
- $S = \{v\}$, S l.d $\Leftrightarrow v = 0$
- $0 \in S \Rightarrow$ S l.d
- $S = \{v_1, v_2\}$, S l.d $\Leftrightarrow$ uno è multiplo dell'altro
- $S = \{v_1, ..., v_n\}$, S l.d $\Leftrightarrow$ uno è combinazione lineare degli altri
- $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n = 0$, $\lambda_1 \neq 0 \Rightarrow v_1 \in < v_2, ..., v_n >$

5.2 Basi

Un sottoinsieme $B \subset V$ si dice base di V se:

- $< B >= V$
- B è linearmente indipendente

Teorema
$B \subset V$ è base di V se e solo se ogni elemento di v può essere scritto in uno e un solo modo come combinazione lineare degli elementi di B.

Teorema
Sia $V \neq \emptyset$ uno spazio vettoriale su K e sia $V =< v_1, ..., v_n >$, allora $\{v_1, ..., v_n\}$ contiene una base di V.

Un insieme $\{v_1, ..., v_k\} \subseteq V$ si dice insieme massimale di linearmente indipendenti se:

- $\{v_1, ..., v_k\}$ è l.i.
- $\forall v \in V \ \{v_1, ..., v_k, v\}$ è l.d.

Teorema
Sia $\{v_1, ..., v_k\}$ un insieme massimale di linearmente indipendenti, allora $\{v_1, ..., v_k\}$ è una base.

Un insieme $\{v_1, ..., v_k\} \subseteq V$ si dice insieme minimale di generatori se:

- $< v_1, ..., v_k >= V$
- $\forall i = 1, ..., k \ \{v_1, ..., v_k\} \setminus \{v_i\}$ non genera V

Teorema
Sia $\{v_1, ..., v_k\} \subseteq V$ un insieme minimale di generatori, allora $\{v_1, ..., v_k\} \subseteq V$ è una base.

Teorema: Equicardinalità delle basi
Sia V uno spazio vettoriale che ha una base con n vettori, allora qualsiasi insieme di $m > n$ vettori è linearmente dipendente

Corollario
Sia V uno spazio vettoriale e siano A e B due sue basi, allora A e B hanno lo stesso numero di elementi.

5.3 Dimensioni di uno spazio vettoriale

Sia V uno spazio vettoriale su K.

- Se $V = \{0\}$ si dice che V ha dimensione nulla ($dimV = 0$).
- Se V non è finitamente generato si dice che V ha dimensione infinita ($dimV = \infty$).
- Se $V \neq \{0\}$ ed è generato da una base $B = \{b_1, ..., b_n\}$, allora V ha dimensione k ($dimV = n$).

Teorema
Sia V spazio vettoriale e $dimV = n$, allora $\{v_1, ..., v_n\}$ l.i. $\Rightarrow \{v_1, ..., v_n\}$ base

Teorema
V sp. vett., dimV=n, allora $< v_1, ..., v_n >= V \Rightarrow \{v_1, ..., v_n\}$ base.

Teorema
V sp. vett., dimV=n e $U \subseteq V$ sottospazio, allora U è finitamente generato e $dimU \leq dimV$.
Inoltre, $dimU = dimV \Leftrightarrow U = V$

Teorema
Sia V sp. vett. con $dimV = n > 0$, allora presi r vettori l.i. $w_1, ..., w_r \in V \ \exists w_{r+1}, ..., w_n$ tali che $\{w_1, ..., w_r, w_{r+1}, ..., w_n\}$ sia base.

Teorema: formula di Grassman
Sia V uno spazio vettoriale su K e siano X e Y sottospazi, allora $X \cap Y$ e $X + Y$ sono finitamente generati e $dimX + dimY = dimX \cap Y + dim(X + Y)$

6 Applicazioni lineari

Siano W e V due spazi vettoriali sullo stesso campo e sia $F : V \to W$ una funzione. Si dice che f è lineare su K se:

- $\forall u, v \in V \ f(u + v) = f(u) + f(v)$ (additività)
- $\forall \lambda \in K, \forall u \in V \ f(\lambda u) = \lambda f(u)$ (omogeneità)

Se f è lineare, allora mantiene le combinazioni lineari.
Se f è lineare, allora $f(0_V) = 0_W$.
Una funzione lineare e biunivoca è detta isomorfismo

Teorema
Se $f : V \to W$ e $g : W \to Z$ sono lineari, allora $(g \circ f) : V \to Z$ è lineare.
Se $f : V \to W$ è lineare e biunivoca, allora $f^{-1} : W \to V$ è lineare.

Teorema: esistenza e unicità
Siano V e W spazi vettoriali, con V finitamente generato. Sia $B = \{b_1, ..., b_n\}$ una base di V e siano $w_1, ..., w_n \in W$ qualsiasi, allora $\exists! \ f : V \to W$ lineare tale che $f(b_1) = w_1, ..., f(b_n) = w_n$

Lo spazio $L(V, W)$ delle applicazioni lineari da V a W è vettoriale rispetto a:

- $+ : L(V, W) \times L(V, W) \to L(V, W)$
  $(f(x), g(x)) \to (f + g)(x) = f(x) + g(x)$

- $* : K \times L(V, W) \to L(V, W)$
  $(\lambda, f(x)) \to (\lambda f)(x) = \lambda * f(x)$

6.1 Nucleo e immagine

Sia $f : V \to W$ lineare.
Si chiama nucleo o kernel di f l'insieme $ker(f) = \{v \in V | f(v) = 0_v)\}$.
Si chiama immagine di f l'insieme $Im(f) = \{w \in W | \exists v \in V : f(v) = w\}$
Nucleo e immagine sono sottospazi di V.

Teorema: nullità + rango
Siano V e W spazi vettoriali su K finitamente generati e sia $f : V \to W$ lineare, allora $ker(f)$ e $Im(f)$ sono finitamente generati e vale:

$$dimV = dim(ker(f)) + dim(Im(f))$$

6.2 Iniettività e suriettività

Siano W e V spazi vettoriali su K finitamente generati.

Teorema: iniettività
Sia $f : V \to W$ lineare, allora sono equivalenti

- f è iniettiva
- $ker(f) = \{0\}$
- se $v_1, ..., v_k$ sono l.i. $\Rightarrow$ $f(v_1), ..., f(v_k)$ l.i.

Teorema: suriettività
Sia $f : V \to W$ lineare, allora sono equivalenti

- f è suriettiva
- $dim(Im(f)) = dim(W)$
- se $< v_1, ..., v_k >= V \Rightarrow < f(v_1), ..., f(v_k) >= W$

In ogni caso vale $< v_1, ..., v_k >= V \Rightarrow < f(v_1), ..., f(v_k) >= Im(f)$

Corollario
Sia $f : V \to W$, allora f è isomorfismo $\Leftrightarrow$ f manda una base di V in una base di W

6.3 Definizioni

Sia $f : V \to W$ lineare:

- se f è biunivoca è detta isomorfismo
- se $V = W$ è detta endomorfismo o operatore
- se $V = W$ e f è biunivoca è detta automorfismo

Due spazi V e W sono detti isomorfi se $\exists f : V \to W$ isomorfismo e si indica $V \simeq W$.

Teorema: spazi isomorfi
$V \simeq W \Leftrightarrow dimV = dimW$ **Corollario**
V e W finitamente generati, allora:

- $dimV > dimW \to \nexists f : V \to W$ iniettiva
- $dimV < dimW \to \nexists f : V \to W$ suriettiva

6.4 Matrici rappresentative

6.5 Determinante

[spostare sotto matrici?]
Una permutazione di n elementi è una funzione biunivoca $\sigma : [1,n] \cap \mathbb{N} \to [1,n] \cap \mathbb{N}$. Una permutazione si dice pari se è composta da un numero pari di scambi, altrimenti dispari.
Definito $\epsilon(\sigma) = \begin{cases} +1 \; se \; \epsilon \; pari \\ -1 \; se \; \epsilon \; dispari \end{cases}$
Sia $A \in Mat_n(K)$, si definisce determinante lo scalare:

$$detA = \Sigma_\sigma \epsilon(\sigma)\alpha_{1,\sigma(1)} * ... * \alpha_{n,\sigma(n)}$$

Il determinante ha le seguenti proprietà:

- $det(A) = det(A^t)$
- Scambiando righe o colonne tra loro cambia solo il segno del determinante
- Il determinante è lineare in ogni riga e colonna fissate le altre
- Il determinante dell'identità vale 1
- $det(A * B) = det(A) * det(B)$
- Le righe o colonne di A sono l.d $\Leftrightarrow det(A) = 0$
- $det(\lambda A) = \lambda^n det(A)$
- A è invertibile $\Leftrightarrow det(A) \neq 0$
- Se A è invertibile, allora $det(A^-1) = \frac{1}{det(A)}$

6.5.1 Teoremi di Laplace

Sia $M \in Mat_n(K)$, si dice sottomatrice di M la matrice ottenuta eliminando un certo numero di righe e colonne da M. Se N è sottomatrice quadrata di M, allora $det(N)$ è detto minore di M.
Il determinante della matrice A_{ij} ottenuta eliminando la riga i e la colonna j si dice minore complementare di α_{ij}.

Si dice cofattore o complemento algebrico il numero:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} det(M_{ij})$$

La matrice $cof(A)$ composta dai cofattori degli elementi di A, viene detta matrice dei cofattori di A.

Teorema: primo teorema di Laplace
Per l i-esima riga:

$$detA = \alpha_{i1}A_{i1} + \alpha_{i2}A_{i2} + ... + \alpha_{in}A_{in}$$

Per l j-esima colonna:

$$detA = \alpha_{1j}A_{1j} + \alpha_{2j}A_{2j} + ... + \alpha_{nj}A_{nj}$$

Teorema: secondo teorema di Laplace
Per righe: se $i \neq j$

$$detA = \alpha_{i1}A_{j1} + \alpha_{i2}A_{j2} + ... + \alpha_{in}A_{jn}$$

Per colonne: se $i \neq j$

$$detA = \alpha_{1i}A_{1j} + \alpha_{2i}A_{2j} + ... + \alpha_{ni}A_{nj}$$

Lemma
$A * cof(A)^T = det(A) * I$

Teorema
Sia $A \in Mat_n(K)$ con $det(A) \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$ e $A^{-1} = \frac{1}{det(A)}(cof(A))^T$

6.5.2 Formula di Cramer

Sia $A \in Mat_n$ con $det(A) \neq 0$ e sia $b \in K^n$.
Il sistema $Ax = b$ è detto sistema Crameriano e ha una e una sola soluzione che vale: $x = \begin{pmatrix} x_i \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ con

$$x_i = \frac{det(A^{(1)}, ..., A^{(i-1)}, b, A^{(i+1)}, ..., A^{(n)})}{det(A)}$$

6.6 Rango

La nozione di rango può essere espressa in 4 modi equivalenti:

- Caratteristica della matrice: il numero di righe non nulle della matrice ridotta con il metodo di Gauss
- Rango per colonne: la dimensione dello spazio generato dalle colonne della matrice
- Rango per righe: la dimensione dello spazio generato dalle righe
- Rango per minori: il massimo ordine di minore non nullo estratto dalla matrice

7 Endomorfismi

7.1 Autovettori, autovalori e matrici diagonali

Sia V uno spazio vettoriale su K finitamente generato.
Un vettore $v \in V$ tale che $f(v)\lambda v$ con $\lambda \in K$ è detto autovettore, mentre λ è detto autovalore relativo a v.
Lo spazio $V\lambda(f) = \{v \in V | f(v) = \lambda v\}$ è detto autospazio di f relativo a λ ed è un sottospazio di V.

Un endomorfismo f è detto diagonale se è presentata nella forma $M_B^B(f) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \lambda & \end{pmatrix}$.
Se esiste una base di V tale per cui un endomorfismo risulti diagonale, allora è detto diagonalizzabile e la base è detta diagonalizzante.

La nozione di endomorfismo diagonale, diagonalizzabile, di autovettore e autovalore può essere estesa a matrici qualsiasi.

Teorema
Un endomorfismo è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ $\exists$ una base composta dei suoi autovettori.

Teorema Siano $\lambda_1, ..., \lambda_n$ autovalori distinti di f endomorfismo, allora gli autovettori $v_1, ..., v_n$ a loro associati sono linearmente indipendenti.

Corollario
Se f ha $n = dim(V)$ autovalori distinti, allora f è diagonalizzabile.

Teorema: ricerca di autovalori
λ è autovalore di f $\Leftrightarrow$ $det(A - \lambda Id) = 0$, e in tal caso gli autovettori associati a λ sono le soluzioni del sistema lineare $(A - \lambda Id)x = 0$

7.2 Polinomio caratteristico

Sia $A \in Mat_n$, si dice polinomio caratteristico il polinomio $P_A(t) = det(A - t * Id)$.

Due matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico e quindi stesso determinante (t=0). Le matrici che rappresentano lo stesso endomorfismo sono simili, per questo si può parlare di polinomio caratteristico o di determinante di un endomorfismo senza specificare in che base.

Il polinomio caratteristico di $A \in Mat_n$ ha le seguenti proprietà:

- ha grado n
- ha coefficiente direttore (il coefficiente del termine di grado massimo) $(-1)^n$
- ha termine noto $P_A(0) = det(A)$
- ha come coefficiente di t^{n-1} $(-1)^{n-1}(a_11 + a_22 + ... + a_nn) = (-1)^{n-1}Tr(A)$
- ha come radici in K gli autovalori di A

7.2.1 Molteplicità algebrica e geometrica

Sia f un endomorfismo nello spazio vettoriale V su K e sia $\lambda \in K$ autovalore di f.
La molteplicità algebrica $m_a(\lambda)$ di λ è la sua molteplicità come radice di $P_f(t)$.
La molteplicità geometrica $m_g(\lambda)$ di λ è la dimensione dell'autospazio $V_\lambda(f)$.

Teorema
Sia $\lambda \in K$ autovalore di f, si ha che $1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$

Teorema: condizione sufficiente e necessaria di diagonalizzabilità
Sia V spazio vettoriale su K ($dimV = n$) e sia f un endomorfismo su V, allora f è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$

- Tutte le radici di $P_f(t)$ sono in K
- $\forall\lambda$ autovalore di f si ha $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$

8 Forme bilineari

V spazio vettoriale su K, $dimV = n$.
Si dice forma bilineare un'applicazione lineare $\varphi : V \times V \rightarrow K$, tale che $\forall u, v, w \in V$, $\forall \alpha, \beta \in K$:

- linearità a sinistra: $\varphi(\alpha v + \beta u, w) = \alpha\varphi(v, w) + \beta\varphi(u, w)$
- linearità a destra: $\varphi(u, \alpha v + \beta w) = \alpha\varphi(u, v) + \beta\varphi(u, w)$

Ogni forma bilineare può essere rappresentata da una matrice. Sia $A = \{a_1, ..., a_n\}$ una base di V, è possibile ricavare la matrice rappresentativa di φ su A come $A_\varphi = (\alpha_{ij}) = \varphi(a_i, a_j)$

Due matrici A e A' sono congruenti $\Leftrightarrow$ rappresentano la stessa forma bilineare in basi diverse.

8.1 Tensori

Si dice forma bilineare o tensore un'applicazione lineare $\varphi : V \times .... \times V \rightarrow K$ lineare in ciascuno dei suoi argomenti.
Una forma multilineare a n argomenti può essere rappresentata dall'analogo n dimensionale di una matrice.

8.2 Forme bilineari simmeriche

Una forma bilineare $\varphi : V \times V \rightarrow K$ si dice simmetrica se $\forall u, v \in V$

$$\varphi(u, v) = \varphi(v, u)$$

Una forma bilineare è simmetrica se e solo se la sua matrice associata A verifica la proprietà $A = A^T$
Una forma bilineare si dice degenere se $\exists v \in V, v \neq 0$ tale che $\forall w \in V\ \varphi(v, w) = 0$, in tal caso, la sua matrice associata è tale che $\exists x \neq 0 : A \cdot x = 0$

Sia $\varphi V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ bilineare e simmetrica, φ è detta definita positiva se:

- $\forall v \in V\ \ \varphi(v, v) \geq 0$
- $\varphi(v, v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$

Una forma bilineare simmetrica definita positiva è detta prodotto scalare o prodotto interno e si indica

$$\varphi(u, v) = < u, v >$$

Un prodotto scalare non è degenere.

9 Spazi vettoriali euclidei

Sia V uno spazio vettoriale si $\mathbb{R}$, $dimV = n$.
Sia φ un prodotto scalare.
Si definisce spazio vettoriale euclideo $(V, <>)$, lo spazio euclideo V dotato del prodotto scalare φ.
I uno spazio euclideo si possono definire i concetti di norma e distanza come:

$$||v|| = \sqrt{< v, v >} \qquad dist(u, v) = ||u - v||$$

Prodotto scalare e norma godono delle seguenti proprietà:

- Disuguaglianza di Cauchy Schwartz: $\forall u, v \in V\ < u, v >^2 \leq < u, u > * < v, v >$
  $< u, v >^2 = < u, u > * < v, v > \Rightarrow$ u e v l.d.
- $\forall u, v \in V\ \ | < u, v > | \leq ||u|| * ||v||$
- $\forall u, v \in V\ \ ||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$

Si dice versore un vettore u tale che $||u|| = 1$.

Grazie alle proprietà del prodotto scalare è possibile definire il concetto di angolo tra vettori:

$$\cos(\theta) = \frac{< u, v >}{||u|| * ||v||}$$

Due vettori v e u sono detti ortogonali se $< v, u >= 0$

Teorema
Siano $v_1, ..., v_k$ vettori non nulli tali che $\forall i, j; i \neq j\ v_i \perp v_j$, allora $v_1, ..., v_k$ sono l.i.

9.1 Basi ortonormali

Sia $A = \{a_1, ..., a_n\}$ una base di V spazio euclideo, si dice:

- Ortogonale: se $\forall i \neq j < a_i, a_j >= 0$
- Ortonormale: se $< a_i, a_j >= \begin{cases} 0 \; i \neq j \\ 1 \; i = j \end{cases}$

Sia A una base ortonormale, la matrice associata al prodotto scalare rispetto ad A è l'identità.

Lemma
In (V,¡¿), siano $a_1, ..., a_k$ versori a due a due ortogonali e sia $w \in (V \setminus < a_1, ..., a_k >)$, allora $a = w- < a_1, w > *a_1 - ...- < a_k, w > *a_k$ è un vettore ortogonale a tutti gli a_j.

Teorema
Ogni spazio vettoriale euclideo finitamente generato ammette una base ortonormale.

9.2 Complemento ortogonale

Sia (V,¡¿) euclideo, dimV=n e sia $U \subset V$ un sottospazio, si definisce sottospazio ortogonale o complemento ortogonale il sottospazio:

$$U^{\perp} = \{v \in V | v \perp u, \forall u \in U\}$$

Teorema
Sia (V,¡¿) euclideo fin. gen. e sia $U \subset V$ un sottospazio, allora:

$$V = U + U^{\perp}$$

Data una base ortonormale $\{b_1, ..., b_k\}$ di U, si definisce proiezione ortogonale di $v \in V$:

$$p(v) =< v, b_1 > *b_1 + ...+ < v, b_k > *b_k$$

9.3 Endomorfismi simmetrici

Sia (V,¡¿) uno spazio vettoriale euclideo, dimV=n.
Un endomorfismo su V è detto simmetrico o autoaggiunto se $\forall u, v \in V$:

$$< f(u), v >=< u, f(v) >$$

Nel caso $(\mathbb{R}^n, <>)$ con $<>$ prodotto scalare canonico, la condizione si riduce a: L_a simmetrico $\Leftrightarrow A = A^T$ ($<>$ è rappresentato dalla matrice identità).

Teorema
Sia $B = \{b_1, ..., b_n\}$ una base di V, allora f è simmetrico $\Leftrightarrow \forall i, j < f(b_i), b_j >=< b_i, f(b_j) >$

Teorema
Sia A una base ortonormale di V, allora f è simmetrico $\Leftrightarrow M^A_A(f)$ è simmetrica.

Teorema
Sia f un endomorfismo simmetrico, siano λ, μ autovalori distinti e siano v, u autovettori relativi rispettivamente a λ e μ, allora $u \perp v$

Teorema
Se f è simmetrico, il polinomio caratteristico $P_f(t)$ ha solo radici reali.

Teorema spettrale
Sia $(V, <>)$ spazio vettoriale euclideo, $dimV = n > 0$ e sia $f \in End(V)$, allora:

f simmetrico $\Leftrightarrow$ V ha una base ortonormale di autovettori di f

Corollario
Sia A una matrice quadrata simmetrica, allora è diagonalizzabile e vale $A = X * \Delta * X^-1$, dove Δ è una matrice diagonale e X è una matrice le cui colonne costituiscono una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

9.4 Isometrie

Sia $(V, <>)$ euclideo.
Sia $f \in End(V)$, si dice che f è un endomorfismo unitario o isometria se conserva il prodotto scalare:

$$\forall v, u \in V \quad < f(u), f(v) >=< u, v >$$

Se f è un isometria, allora f è un automorfismo.
f è un isometria $\Leftrightarrow$ f trasforma basi ortonormali in basi ortonormali.

Teorema
f è un isometria $\Leftrightarrow$ la sua matrice rappresentativa A rispetto a una base ortonormale verifica $A^T * A = I$ ($\leftarrow$ rispetto a una base ortonormale $M(<>) = Id$).

9.5 Matrici ortogonali

Si definisce gruppo generale lineare di ordine n, l'insieme delle matrici $n \times n$ a coefficienti reali invertibili:

$$GL(n) = \{A \in Mat_n(\mathbb{R}) \mid det(A) \neq 0\}$$

Si definisce gruppo ortogonale, il sottogruppo di GL formato dalle matrici rappresentative di isometrie rispetto a una base ortonormale:

$$O(n) = \{A \in Mat_n(\mathbb{R}) \mid A^T * A = Id\}$$

Le matrici ortogonali hanno le seguenti proprietà:

- $A \in O(n) \Leftrightarrow$ i vettori riga (o colonna) di A sono a due a due ortogonali (su $(\mathbb{R}^n, <>)$).
- $A \in O(n) \Rightarrow detA = \pm 1$
- λ autovalore di $A \in O(n) \Rightarrow \lambda = \pm 1$

Si dice gruppo ortogonale speciale $SO(n)$ il sottoinsieme delle matrici i $O(n)$ con determinante positivo:

$$SO(n) = \{A \in O(n) \mid detA = 1\}$$

Le matrici appartenenti al gruppo ortogonale speciale sono le matrici di rotazione di uno spaio n-dimensionale.

Indice