中国科学: 数学 2019 年 第 49 卷 第 3 期: 621 ～ 642
SCIENTIA SINICA Mathematica
论 文

单生过程的研究进展

献给王梓坤教授 90 华诞

张余辉

北京师范大学数学科学学院, 北京 100875
E-mail: zhangyh@bnu.edu.cn

收稿日期: 2017-12-11; 接受日期: 2018-05-08; 网络出版日期: 2019-03-07
国家自然科学基金 (批准号: 11131003, 11571043, 11626245, 11771047 和 11871008) 资助项目

摘要 单生过程, 作为最简单的过程—生灭过程的自然推广, 本身具有可靠的研究背景. 一方面, 单生过程是对经典问题可预期有显式判别准则的最大类过程, 从而使得单生过程成为研究无穷维反应扩散过程的基本工具; 另一方面, 单生过程通常是非对称的, 因此被视为非对称过程的突出代表, 而关于非对称过程的研究, 至今所得结果并不完善, 但对于单生过程, 研究成果相对完整. 本文将介绍单生过程经典问题的判别准则, 包括唯一性、常返性、遍历性和强遍历性, 还包括回返 (灭绝) 概率和平稳分布的表示, 特别是近年来, 我们得到了关于单生过程 Poisson 方程解的表示, 以其为工具, 举例说明如何统一处理上述问题以及回返时的多项式阶矩、指数阶矩和生命时的分布等. 此外, 本文还给出单生过程指数遍历的一个显式充分条件. 最后回顾单生过程在粒子系统等模型研究中的一些具体应用.

关键词 单生过程 生灭过程 遍历性

MSC (2010) 主题分类 60J60

1 引言

令 $(X(t))_{t\geqslant 0}$ 为定义在可数状态空间 $E=\{0,1,2,\ldots\}$ 上的连续时间不可约 Markov 链, 具有转移概率矩阵 $P(t)=(p_{ij}(t))$ 和速率 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$. 如果其速率矩阵 $Q=(q_{ij})$ 满足: $q_{i,i+1}>0$, $q_{ij}=0$ $(j\geqslant i+2,\, i,j\in E)$, 则称 $(X(t))_{t\geqslant 0}$ 为单生过程, 该速率矩阵称为单生 Q 矩阵. 假定此过程代表某生物种群的个体数目, 由 q_{ij} 的概率意义可知, 在每个时刻群体个数增加 (生) 只能是一个. 如果其速率矩阵 $Q=(q_{ij})$ 满足:

$$q_{i,i+1}=:b_i>0 \quad (i\geqslant 0), \quad q_{i,i-1}=:a_i>0 \quad (i\geqslant 1),$$

且对一切 $|i-j|\geqslant 2$, 有 $q_{ij}=0$, 则称 $(X(t))_{t\geqslant 0}$ 为生灭过程, 该速率矩阵称为生灭 Q 矩阵, 简记为 (a_i,b_i). 生灭过程是单生过程的特例.

英文引用格式: Zhang Y H. Progress in single birth processes (in Chinese). Sci Sin Math, 2019, 49: 621–642, doi: 10.1360/N012017-00261

通常, Q 矩阵满足 $q_{ij} \geqslant 0$ $(j \neq i)$, $\sum_{j\neq i} q_{ij} \leqslant q_i := -q_{ii}$. 本文只考虑全稳定且保守的单生 Q 矩阵, 即对一切 $i \geqslant 0$ 有 $q_i = \sum_{j\neq i} q_{ij} < \infty$. 如果 Q 矩阵全稳定保守且确定唯一的 Q 过程, 则称此 Q 矩阵是正则的.

我们研究单生过程的理由主要是四个. 一是由于通常单生过程是非对称的, 而非对称过程的研究通常要困难得多, 因此, 这给我们的研究带来挑战. 注意生灭过程是最简单的对称过程, 而其研究也并不简单 (参见文献 [1–9]). 二是由于单生 Q 矩阵的流出边界至多一个极点, 从方程的观点来说, 我们处理的通常是单参数方程, 这又给研究带来希望. 三是单生过程本身有很强的应用背景, 在生物学、人口学、化学、经济学和电子通信等学科中都有重要的应用, 在种群理论中又称该过程为向上非跨跳过程 (skip-free upwardly process)、种群过程 (population process)、带大灾难的生灭过程 (birth and death process with catastrophes) 或分枝大灾难过程 (branching-catastrophe process), 参见文献 [10–15]; 也有人称之为广义生灭过程 (generalized birth and death process), 参见文献 [16–18]. 四是单生过程在理论上是一类极其重要的 Markov 过程, 在粒子系统的研究中有将多维过程用某个一维过程去控制的方法, 在实际应用中, 常常是将多维复杂过程与单生过程比较进行研究, 这使得单生过程往往成为研究一般 Markov 过程的切入点和有力工具, 参见文献 [5, 19–21].

这些年来, 关于单生过程的研究已获得很多结果, 研究的侧重点也不一样, 一是主要用母函数的方法研究灭绝概率等问题, 自然要对 Q 矩阵施加条件, 即研究一些特定的单生 Q 矩阵 (参见文献 [10–15]). 二是对一般的单生 Q 矩阵使用分析方法研究其唯一性和遍历理论等经典问题; 对其唯一性、常返性、遍历性和强遍历性, 已得到了显式判别准则; 对指数遍历性也得到显式充分条件, 获得了其平稳分布、首次回返时 (击中时) 和占位时矩的显式表达. 参见文献 [5, 6, 16] 和 [20–39]. 特别地, 文献 [40] 研究了单生过程 Poisson 方程解的表示, 以此作为工具, 统一处理前面提到的单生过程经典问题的判别准则, 还包括回返时的多项式阶矩、指数阶矩、灭绝时的分布和灭绝概率等.

本文余下内容安排如下: 第 2 节介绍单生过程唯一性的显式判别准则; 第 3 节介绍单生过程常返性的显式判别准则、回返 (灭绝) 概率和平均占位时; 第 4 节介绍单生过程 Poisson 方程解的显式表示, 举例说明如何以其为工具, 统一处理单生过程的相关问题; 第 5 节介绍单生过程的遍历性和强遍历性的显式判别准则, 以及回返时一阶矩的显式表达; 第 6 节介绍单生过程回返时和生命时高阶矩的显式表达、ℓ 遍历的判别准则以及平稳分布的显式计算公式; 第 7 节介绍回返时 (生命时) 的指数阶矩和 Laplace 变换, 并涉及我们最关心的部分—单生过程指数遍历性, 给出单生过程指数遍历的一个显式充分条件; 最后一节回顾单生过程在粒子系统等模型研究中的若干应用.

单生过程其他方面的研究, 如带吸收边界的单生过程, 可以参见文献 [20, 23, 27, 29], 而文献 [34] 则是研究带移民的单生过程; 文献 [41, 42] 分别研究了生灭过程和单生过程分离切断 (separation cutoff) 现象发生的显式判别准则, 这个方向的最新文章是文献 [43], 其工具是 Martin 边界理论、位势理论、波动理论和谱分析. 文献 [44] 用对偶方法通过分支过程研究一类单生过程. 文献 [45] 研究单生过程的中心极限定理. Ma[1)] 研究了单生 Q 矩阵的 Lipschitz 范数. 对于离散时间单生过程的研究, 参见文献 [46, 47]. 为节省篇幅, 不再一一详细介绍这些内容. 有兴趣的读者, 可以参考相应的文献.

本节最后, 为后面叙述方便, 引入一些单生过程的常用记号, 这些记号源于文献 [5].

对 $0 \leqslant k < n$, 定义 $q_n^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} q_{nj}$. 再定义

$$F_n^{(n)} = 1, \quad F_n^{(i)} = \frac{1}{q_{n,n+1}} \sum_{k=i}^{n-1} q_n^{(k)} F_k^{(i)}, \quad 0 \leqslant i < n. \tag{1.1}$$

1) Ma Y T. Lipschitz norm for Q-matrix of single birth processes. Preprint, 2007

2 唯一性

给定 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$. 如果具非负性、Chapman-Kolmogorov 条件、连续性条件 (跳条件) 以及 $P(t)\mathbf{1}\leqslant\mathbf{1}$ 的次转移概率矩阵 $P(t)$, 满足 $P'(t)|_{t=0}=Q$, 则称该过程 $P(t)$ 为 Q 过程. 从 Chapman-Kolmogorov 方程出发, 可以导出两个微分方程:

$$\text{Kolmogorov 向后方程}\quad P'(t)=QP(t),$$
$$\text{Kolmogorov 向前方程}\quad P'(t)=P(t)Q.$$

类似于微分方程, 在实践中, 我们知道的是 Q 而非 $P(t)$.

现在, 自然要问, 对于给定 Q 矩阵, Q 过程是否存在? 若存在又是否唯一? 回顾 Q 矩阵全稳定且保守的假设, 我们知道每一个 Q 过程都满足 Kolmogorov 向后方程. 由此出发, Q 过程的存在性和唯一性就转化为 Kolmogorov 向后方程的解的存在性和唯一性问题. 事实上, Q 过程总存在, 因为方程的最小解就是一个 Q 过程, 而且 Kolmogorov 向后、向前方程有相同的最小解.

将 $P(t)$ 做 Laplace 变换得 $P(\lambda)$:

$$p_{ij}(\lambda)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}p_{ij}(t)dt.$$

相应的 Kolmogorov 方程为

$$p_{ij}(\lambda)=\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}p_{kj}(\lambda)+\frac{\delta_{ij}}{\lambda+q_i},$$
$$p_{ij}(\lambda)=\sum_{k\neq j}p_{ik}(\lambda)\frac{q_{kj}}{\lambda+q_j}+\frac{\delta_{ij}}{\lambda+q_i}.$$

记最小过程为 $P^{\min}(\lambda)$. 考虑 $P(\lambda)-P^{\min}(\lambda)$, 由上述 Kolmogorov 向后方程知, 其为下面方程的解:

$$u_i=\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}u_k,\quad 0\leqslant u_i\leqslant 1,\quad i\geqslant 0. \tag{2.1}$$

关于 Q 矩阵决定的 Q 过程唯一性的判别, 实际上有下面的结论 (参见文献 [48,49]).

定理 2.1 给定全稳定保守 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$, 则其决定的 Q 过程是唯一的, 当且仅当方程 (2.1) 对某个 (等价地, 对所有) $\lambda>0$ 只有平凡解, 或者说最大解为零解. 等价地, 方程

$$u_i=\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}u_k,\quad u_i\geqslant 0,\quad i\geqslant 0 \tag{2.2}$$

对某个 (等价地, 对所有) $\lambda>0$ 的非平凡解无界.

此判别准则的优美之处是只用到 Q 矩阵, 但依赖方程解的性质, 然而方程的最大解存在迭代算法, 所以, 对单生过程, 一个更好的判别准则 (显式的、完全可计算的) 是可期盼的. 最终的确得到这样的唯一性判别准则. 注意它只依赖于单生 Q 矩阵, 因此是可计算的. 为陈述结论, 定义

$$m_0=\frac{1}{q_{01}},\quad m_n=\frac{1}{q_{n,n+1}}\left(1+\sum_{k=0}^{n-1}q_n^{(k)}m_k\right),\quad n\geqslant 1. \tag{2.3}$$

定理 2.2 给定全稳定保守单生 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$, 则单生过程唯一 (非爆炸) 当且仅当

$$R:=\sum_{n=0}^\infty m_n=\infty,$$

其中 m_n 由 (2.3) 定义.

这个结果先由文献 [16] 用概率方法给出, 而后, 文献 [20] 用分析方法证明. 对于吸收边界情形的非爆炸, 参见文献 [23,27]. 对于带移民情形, 参见文献 [34].

文献 [16] 证明了 $m_n = \mathrm{E}_n\tau_{n+1}$, $R = \mathrm{E}_0\tau_\infty$, 其中 τ_n 为状态 n 的首次击中时, $\tau_\infty := \lim_{n\to\infty}\tau_n$ (极限以概率 1 存在), 故 τ_∞ 可看作 ∞ 的首次击中时. 注意由单生的向上非跨跳性, τ_∞ 几乎处处等于过程的飞跃时 (生命时).

对生灭 Q 矩阵 (a_i, b_i), (2.3) 有简单的形式:

$$m_n = \frac{1}{\mu_n b_n}\mu[0,n], \quad n \geqslant 0,$$

其中

$$\mu_0 = 1, \quad \mu_i = \frac{b_0 b_1 \cdots b_{i-1}}{a_1 a_2 \cdots a_i}, \quad i \geqslant 1, \quad \mu[i,k] = \sum_{j=i}^{k}\mu_j.$$

3 常返性、回返 (灭绝) 概率和平均占位时

对于连续时间情形, 可以证明 $p_{ii}(t) > 0$ $(t \geqslant 0)$, $p_{ij}(t)$ 关于 t 在 $(0,\infty)$ 上恒为正或恒为零. 因而不存在周期问题. 另外, $(p_{ij}(t))$ 不可约等价于 $Q = (q_{ij})$ 不可约.

给定过程 $P(t) = (p_{ij}(t))$. 若对一切 $h > 0$, 离散链 $P(h)$ 常返, 等价地, $\int_0^\infty p_{ii}(t)dt = \infty$, 则称该过程 $P(t)$ 为常返的.

对于嵌入链 (Π_{ij}):

$$\Pi_{ij} = \mathbf{1}_{\{q_i \neq 0\}}(1 - \delta_{ij})\frac{q_{ij}}{q_i} + \mathbf{1}_{\{q_i = 0\}}\delta_{ij},$$

与最小过程有如下关系 (参见文献 [48]):

定理 3.1 给定全稳定保守 Q 矩阵 $Q = (q_{ij})$, 则

$$\int_0^\infty p_{ij}^{\min}(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Pi_{ij}^{(n)}}{q_j}.$$

特别地, 如果 Q 是不可约且正则的, 则相应的 Q 过程 $P(t)$ 常返当且仅当嵌入链常返.

关于一般 Q 过程常返性的判别有如下引理 (参见文献 [5, 引理 4.51]).

定理 3.2 给定正则不可约 Q 矩阵 $Q = (q_{ij})$, 则相应的 Q 过程常返当且仅当方程

$$x_i = \sum_{j \neq j_0, i}\frac{q_{ij}}{q_i}x_j, \quad 0 \leqslant x_i \leqslant 1, \quad i \geqslant 0$$

对某个 (等价地, 对所有) 固定的 j_0 只有平凡解, 或者说最大解为零解. 等价地, 方程

$$x_i = \sum_{j \neq j_0, i}\frac{q_{ij}}{q_i}x_j, \quad x_i \geqslant 0, \quad i \geqslant 0 \tag{3.1}$$

对某个 (等价地, 对所有) 固定的 j_0 的非平凡解无界.

对嵌入链 (Π_{ij}) 而言, 定义 σ_{j_0} 为其 (首次) 回返时, $f_{ij_0} := \mathrm{P}_i(\sigma_{j_0} < \infty)$, 则 $(f_{ij_0} : i \in E)$ 是下列方程的最小非负解:

$$x_i = \sum_{k \neq j_0}\Pi_{ik}x_k + \Pi_{ij_0}, \quad i \geqslant 0,$$

而嵌入链 (Π_{ij}) 常返当且仅当 $f_{ij_0} \equiv 1$. 由这些事实, 再结合定理 3.1, 不难得到定理 3.2 的结果.

这个判别准则也依赖于方程解的性质, 对于单生过程, 我们还是希望得到一个只依赖于单生 Q 矩阵的判别准则, 即是显式的、可计算的. 答案如下 (此结果最早由文献 [20] 得到).

定理 3.3　给定正则不可约单生 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$, 则其相应的单生过程常返当且仅当 $\sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(0)} = \infty$, 其中 $F_n^{(k)}$ 由 (1.1) 所定义.

由后面的定理 3.4 的结论, 我们将更好地理解此准则的概率意义.

对生灭 Q 矩阵 (a_i, b_i), (1.1) 有简单的形式:

$$F_n^{(0)} = \frac{b_0}{\mu_n b_n}, \quad n \geqslant 0.$$

对可数状态一般 Markov 过程的回返 (或灭绝) 概率, 文献 [50, 第 9 章] 有很多研究, 对单生过程的回返 (或灭绝) 概率, 文献 [10, 第 9 章] 和 [12] 则是较早研究的, 方法不同于文献 [40]. 定义 σ_0 为状态 0 的回返时, 即 $\sigma_0 = \inf\{t \geqslant 首次跳时刻: X_t = 0\}$. 单生过程的回返 (灭绝) 概率结果如下.

定理 3.4　给定正则不可约单生 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$, 则回返 (或灭绝) 概率为

$$\mathrm{P}_0(\sigma_0 < \infty) = 1 - \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} F_k^{(0)}}, \quad \mathrm{P}_n(\sigma_0 < \infty) = 1 - \frac{\sum_{k=0}^{n-1} F_k^{(0)}}{\sum_{k=0}^{\infty} F_k^{(0)}}, \quad n \geqslant 1.$$

进而, $\mathrm{P}_n(\sigma_0 < \infty) = 1$ $(n \geqslant 0)$ 当且仅当 $\mathrm{P}_0(\sigma_0 < \infty) = 1$, 等价地, 当且仅当 $\sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(0)} = \infty$.

本节最后, 我们来考虑单生过程状态 j 的所谓平均占位时:

$$\mathrm{E}_i T_j := \mathrm{E}_i \int_0^{\infty} \mathbf{1}_{\{X(t)=j\}} dt = \int_0^{\infty} p_{ij}(t) dt.$$

用单生过程嵌入链回返概率的表示和定理 3.1 的结果可以证明下面结论 (参见文献 [28]).

定理 3.5　给定不可约全稳定保守单生 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$, 则对任意 $i,j \in E$, 最小单生过程的平均占位时有如下表示:

$$\mathrm{E}_i T_j = \frac{1}{q_{j,j+1}} \sum_{n=i \vee j}^{\infty} F_n^{(j)},$$

其中 $a \vee b := \max\{a, b\}$.

4　Poisson 方程的解

本节介绍单生过程 Poisson 方程解的显式表示, 以此为工具, 简略证明前两节的定理 2.2、3.3 和 3.4, 用这些例子说明对单生过程相关问题统一处理的方法.

给定全稳定保守单生 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$. 再给定函数 c. 定义算子 Ω:

$$\Omega g = Qg + cg, \quad 其中\ (Qg)_i = \sum_j q_{ij}(g_j - g_i).$$

显然, 如果 $c \leqslant 0$, 则 Ω 是带杀死速率 $(-c_i)$ 的 (非保守) 单生过程生成元算子.

定义

$$\widetilde{F}_i^{(i)} = 1, \quad \widetilde{F}_n^{(i)} = \frac{1}{q_{n,n+1}} \sum_{k=i}^{n-1} \tilde{q}_n^{(k)} \widetilde{F}_k^{(i)}, \quad n > i \geqslant 0, \tag{4.1}$$

$$\tilde{q}_n^{(k)} = q_n^{(k)} - c_n := \sum_{j=0}^{k} q_{nj} - c_n, \quad 0 \leqslant k < n. \tag{4.2}$$

要注意, 如果 $c \leqslant 0$, 则 $\tilde{q}_n^{(k)} \geqslant 0$, $\widetilde{F}_n^{(k)} \geqslant 0$ $(n > k \geqslant 0)$. 一旦 $c_i \equiv 0$, 我们省略 $\widetilde{F}$ 和 $\tilde{q}$ 的上标 "~", 自然回到第 1 节原来的定义. 约定 $\sum_{\emptyset} = 0$. 我们的结论如下.

定理 4.1 给定全稳定保守单生 Q 矩阵 $Q = (q_{ij})$ 及两个函数 c 和 f, 则 Poisson 方程

$$\Omega g = f \tag{4.3}$$

的解 g 有如下表示:

$$g_n = g_0 + \sum_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \sum_{0 \leqslant j \leqslant k} \frac{\widetilde{F}_k^{(j)}(f_j - c_j g_0)}{q_{j,j+1}}, \quad n \geqslant 0. \tag{4.4}$$

特别地, 算子 Ω 的调和函数 g (即 $\Omega g = 0$) 可以表示为

$$g_n = g_0 \left(1 - \sum_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \sum_{0 \leqslant j \leqslant k} \frac{\widetilde{F}_k^{(j)} c_j}{q_{j,j+1}}\right), \quad n \geqslant 0.$$

反之, 对每个边界初值 $g_0 \in \mathbb{R}$, (4.4) 定义的函数 (g_n) 是 Poisson 方程 (4.3) 的一个解.

文献 [51] 引进了一种近乎调和的 H 变换, 显式构造了一大类积分算子和二阶微分算子的等谱算子. 这使得先前所研究的较小一类算子的谱性质 (或主特征值估计) 可立即扩充到很大一类算子. 我们知道, 带位势所对应的是 Schrödinger 算子, 与无位势情形相比, 其难度主要表现在: 无位势情形的特征函数是单峰的, 但带位势情形的特征函数却可以相当振荡. 现在通过 H 变换方法, 可将带位势情形化为无位势情形, 从而将后者已有的全部结果推广到前者中去. 特别地, 文献 [51] 在对带杀死速率的生灭过程主特征值进行估计时, 使用了 H 变换, 其中 H 函数的单调性质可以由定理 4.1 中解的表示来得到.

定理 4.1 的证明关键要用到下面的结论 (参见文献 [40, 推论 2.3]).

命题 4.2 给定函数 f, 递归定义数列 (h_n):

$$h_n = \frac{1}{q_{n,n+1}} \left(f_n + \sum_{i \leqslant k \leqslant n-1} \tilde{q}_n^{(k)} h_k\right), \quad n \geqslant i,$$

或者说, (h_n) 为以下方程的解:

$$h_n = \frac{1}{q_n} \sum_{i \leqslant k \leqslant n-1} \tilde{q}_n^{(k)} h_k + \frac{q_n^{(n-1)}}{q_n} h_n + \frac{f_n}{q_n}, \quad n \geqslant i,$$

则 (h_n) 有下面的统一表示:

$$h_n = \sum_{k=i}^{n} \frac{\widetilde{F}_n^{(k)}}{q_{k,k+1}} f_k, \quad n \geqslant i.$$

特别地, (4.1) 定义的数列 $(\widetilde{F}_n^{(k)})$ 有下面的表示:

$$\widetilde{F}_i^{(i)} = 1, \quad \widetilde{F}_n^{(i)} = \sum_{k=i+1}^{n} \frac{\widetilde{F}_n^{(k)} \tilde{q}_k^{(i)}}{q_{k,k+1}}, \quad n \geqslant i + 1. \tag{4.5}$$

下面举例说明如何用定理 4.1 来证明单生过程的一些相关结果.

定义

$$\widetilde{m}_0 = \frac{1}{q_{01}}, \quad \widetilde{m}_n = \frac{1}{q_{n,n+1}}\left(1 + \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{q}_n^{(k)} \widetilde{m}_k\right), \quad n \geqslant 1, \tag{4.6}$$

由命题 4.2 及 (4.1) 和 (4.6) 立刻得到

$$\begin{aligned} \widetilde{F}_n^{(i)} &= \sum_{k=i+1}^{n} \frac{\widetilde{F}_n^{(k)} \tilde{q}_k^{(i)}}{q_{k,k+1}}, \quad n > i \geqslant 0, \\ \widetilde{m}_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\widetilde{F}_n^{(k)}}{q_{k,k+1}}, \quad n \geqslant 0. \end{aligned} \tag{4.7}$$

定理 2.2 的证明 由文献 [5, 定理 2.47 和 2.40] 或定理 2.1, 单生过程唯一当且仅当对某个 (等价地, 对所有) $\lambda > 0$, 方程

$$(\lambda + q_i) u_i = \sum_{j \neq i} q_{ij} u_j, \quad i \geqslant 0, \quad u_0 = 1 \tag{4.8}$$

的解 (u_i) 无界. 改写 (4.8) 为

$$\Omega u = Qu - \lambda u = 0, \quad u_0 = 1.$$

应用定理 4.1, 此时 $c_i \equiv -\lambda$, $f_i \equiv 0$, 我们得到唯一解:

$$u_n = 1 + \lambda \sum_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \sum_{j=0}^{k} \frac{\widetilde{F}_k^{(j)}}{q_{j,j+1}} = 1 + \lambda \sum_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \widetilde{m}_k, \quad n \geqslant 0.$$

显然, u_n 关于 n 单调增加, 因此, 其无界当且仅当 $\sum_n \widetilde{m}_n = \infty$. 剩下的只需证明两个级数 $\sum_n \widetilde{m}_n$ 和 $\sum_n m_n = \infty$ 等价. 为节省篇幅, 我们在此略去, 有兴趣者可参见文献 [40]. □

定理 3.3 的证明 由文献 [5, 引理 4.51] 或定理 3.2, 单生过程常返当且仅当方程

$$x_i = \sum_{k \neq 0} \Pi_{ik} x_k, \quad 0 \leqslant x_i \leqslant 1, \quad i \geqslant 0 \tag{4.9}$$

只有零解. 容易看出, 后者等价于方程

$$x_i = \sum_{k \neq 0} \Pi_{ik} x_k, \quad i \geqslant 0, \quad x_0 = 1$$

的解无界. 改写上述方程为

$$(Qx)_0 = 0, \quad (Qx)_i = q_{i0}, \quad i \geqslant 1, \quad x_0 = 1.$$

应用定理 4.1, 此时 $c_i \equiv 0$, $f_i = q_{i0}(1 - \delta_{i0})$, 立刻得到唯一解:

$$x_0 = 1, \quad x_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{k} \frac{F_k^{(j)} q_{j0}}{q_{j,j+1}} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{k} \frac{F_k^{(j)} q_j^{(0)}}{q_{j,j+1}}, \quad n \geqslant 1.$$

由 (4.7) 推出

$$x_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} F_k^{(0)} = \sum_{k=0}^{n-1} F_k^{(0)}, \quad n \geqslant 1.$$

显然, (x_n) 无界当且仅当 $\sum_{k=0}^{\infty} F_k^{(0)} = \infty$. 换而言之, 方程 (4.9) 只有零解当且仅当 $\sum_{k=0}^{\infty} F_k^{(0)} = \infty$. □

定理 3.4 的证明 由文献 [5, 引理 4.46], 取 $H=\{0\}$, 可知 $(\mathrm{P}_i(\sigma_0<\infty): i\in E)$ 是下面方程的最小非负解:

$$x_i=\sum_{k\neq 0,i}\frac{q_{ik}}{q_i}x_k+\frac{q_{i0}}{q_i}(1-\delta_{i0}),\quad i\geqslant 0.$$

上述方程等价于

$$(Qx)_i=q_{i0}(1-\delta_{i0})(x_0-1),\quad i\geqslant 0.$$

应用定理 4.1, 此时 $c_i\equiv 0$, $f_i=q_{i0}(1-\delta_{i0})(x_0-1)$, 结合 (4.7), 得到

$$x_n=x_0\Bigg(1+\sum_{1\leqslant k\leqslant n-1}F_k^{(0)}\Bigg)-\sum_{1\leqslant k\leqslant n-1}F_k^{(0)},\quad n\geqslant 0.$$

因为 $x_n>0$, 所以可推出

$$x_0\geqslant\sup_{n\geqslant 1}\frac{\sum_{k=1}^{n-1}F_k^{(0)}}{\sum_{k=0}^{n-1}F_k^{(0)}}=1-\frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty}F_k^{(0)}}.$$

由此得到最小非负解:

$$x_0^*=1-\frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty}F_k^{(0)}},\quad x_n^*=1-\frac{\sum_{k=0}^{n-1}F_k^{(0)}}{\sum_{k=0}^{\infty}F_k^{(0)}},\quad n\geqslant 1.$$

证毕. □

对单生过程, 我们关心的几乎所有问题都与特定的 Poisson 方程有关. 下面列出各种问题相应 Poisson 方程的函数 c 和 f (见表 1).

注意, 在遍历性和强遍历性两种情形, 虽然 Poisson 方程及函数 c 和 f 相同, 但解分别是有限和有界的.

总之, 我们的统一处理方法分三步: 第 1 步, 建立所研究问题对应的 Poisson 方程; 第 2 步, 应用定理 4.1 得到 Poisson 方程的解; 第 3 步, 利用得到的 Poisson 方程解的性质推出所研究问题的答案.

表 1 单生过程几种问题对应的 Poisson 方程

问题	$c_i\in\mathbb{R}$	$f_i\in\mathbb{R}$
调和函数	$c_i\in\mathbb{R}$	$f_i\equiv 0$
唯一性	$c_i\equiv-\lambda<0$	$f_i\equiv 0$
常返性	$c_i\equiv 0$	$f_i=q_{i0}(1-\delta_{i0})$
回返 (灭绝) 概率	$c_i\equiv 0$	$f_i=q_{i0}(1-\delta_{i0})(g_0-1)$
遍历性	$c_i\equiv 0$	$f_i=q_{i0}(1-\delta_{i0})g_0-1$
强遍历性	$c_i\equiv 0$	$f_i=q_{i0}(1-\delta_{i0})g_0-1$
多项式阶矩	$c_i\equiv 0$	$f_i=q_{ii_0}(1-\delta_{ii_0})g_{i_0}-\ell\mathrm{E}_i\sigma_{i_0}^{\ell-1}$
指数阶矩/指数遍历性	$c_i\equiv\lambda>0$	$f_i=q_{i0}(1-\delta_{i0})(g_0-1)$
回返时的 Laplace 变换	$c_i\equiv-\lambda<0$	$f_i=q_{i0}(1-\delta_{i0})(g_0-1)$

5 遍历性、强遍历性和回返时的一阶矩

在 Markov 链的遍历理论研究中, 通常研究的三种遍历性即 (普通) 遍历性、指数遍历性和强遍历性. 关于这三种遍历性的相关论题, 参见文献 [5,6,10]. 本节将分别给出单生过程遍历性和强遍历性的显式判别准则, 以及回返时一阶矩的显式表达, 同时研究三者之间的关系.

给定过程 $P(t)=(p_{ij}(t))$ 和正概率测度 $\pi=(\pi_i)$. 若对一切 $h>0$, 离散链 $P(h)$ 遍历, 等价地,

$$\lim_{t\to\infty} p_{jj}(t)=\pi_j \quad (j\in E),$$

则称该过程 $P(t)$ 为遍历的, π 为过程的平稳分布.

对于不可约 Markov 链, 遍历性等价地有 $\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t)=\pi_j>0$ 与 i 无关, 进而, 等价地, 对所有 $i\in E$, 有

$$\lim_{t\to\infty}\|p_{i\cdot}(t)-\pi\|_{\mathrm{Var}}:=\lim_{t\to\infty}\sum_j |p_{ij}(t)-\pi_j|=0.$$

我们回顾利用检验函数的遍历性判别准则, 参见文献 [5, 定理 4.45] 或者 [52].

定理 5.1 设 $Q=(q_{ij})$ 是正则不可约 Q 矩阵, H 是 E 的一个非空有限子集, 则相应 Q 过程遍历当且仅当方程

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{j\in E} q_{ij}y_j\leqslant -1, \quad i\notin H,\\ \displaystyle\sum_{i\in H}\sum_{j\neq i} q_{ij}y_j<\infty\end{cases} \tag{5.1}$$

有非负有限解.

对于单生过程, 我们依然希望得到一个只依赖于 Q 矩阵、无需检验函数的判别准则. 为此, 引入下列记号:

$$d_0=0, \quad d_n=\frac{1}{q_{n,n+1}}\left(1+\sum_{k=0}^{n-1} q_n^{(k)} d_k\right), \quad n\geqslant 1. \tag{5.2}$$

由命题 4.2 和 (5.2), 可以证明

$$d_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{F_n^{(k)}}{q_{k,k+1}}, \quad n\geqslant 0. \tag{5.3}$$

结合 (4.7) 和 (5.3) 知, 三组记号 (1.1)、(2.3) 和 (5.2) 满足如下关系:

$$m_n=\frac{F_n^{(0)}}{q_{01}}+d_n, \quad n\geqslant 0. \tag{5.4}$$

单生过程遍历性 (正常返性) 显式判别准则如下 (参见文献 [20]).

定理 5.2 给定正则不可约单生 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$, 则其决定的单生过程遍历 (正常返) 当且仅当

$$d:=\sup_{n\geqslant 0}\frac{\sum_{k=0}^{n} d_k}{\sum_{k=0}^{n} F_k^{(0)}}<\infty. \tag{5.5}$$

在过程常返的假定下, 文献 [40] 进一步证明了

$$d=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=0}^{n} d_k}{\sum_{k=0}^{n} F_k^{(0)}},$$

继而, 若极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{d_n}{F_n^{(0)}}$$

存在, 则由 Stolz 定理知, d 等于该极限.

注意, 在过程唯一的假定下, 若过程非常返, 由定理 2.2 和 3.3 及 (5.4), 可以推出 $\sum_{n=0}^{\infty} d_n=\infty$, 进而 $d=\infty$, 因此, 若 $d<\infty$, 则过程必定常返.

例 5.3 给定正则不可约单生 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$. 若 $\inf_{k\geqslant 1} q_{k0}>0$, 则此单生过程遍历.

因为由合分比性质及 (4.7) 和 (5.3), 可得

$$d\leqslant \sup_{i\geqslant 1}\frac{d_i}{F_i^{(0)}}\leqslant \sup_{k\geqslant 1}\frac{1}{q_k^{(0)}}=\frac{1}{\inf_{k\geqslant 1} q_{k0}}<\infty.$$

后面的命题 5.5 将告诉我们, 此单生过程实际上是强遍历的.

对生灭 Q 矩阵 (a_i,b_i), (5.2) 有简单的形式:

$$d_n=\frac{1}{\mu_n b_n}\mu[1,n],\quad n\geqslant 0.$$

此时,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{d_n}{F_n^{(0)}}=\sup_{n\geqslant 0}\frac{d_n}{F_n^{(0)}}=\frac{1}{b_0}\mu[1,\infty).$$

若过程还是常返的, 由 Stolz 定理知, d 等于该极限.

给定正则不可约 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$ 和概率测度 $(\pi_i>0)$. 相应的 Q 过程记为 $P(t)=(p_{ij}(t))$. 若 $\lim_{t\to\infty}\sup_i|p_{ij}(t)-\pi_j|=0$ $(j\in E)$, 则称该过程 $P(t)$ 为强遍历的或一致遍历的.

强遍历性可等价于

$$\sup_i\|p_{i\cdot}(t)-\pi\|_{\mathrm{Var}}=O(\mathrm{e}^{-\beta t}),\quad 当\ t\to\infty.$$

最佳 (即最大) 的 β 称为强遍历速度.

对于一般的 Q 过程, 文献 [5, 定理 4.45] 和 [52] 给出了一个利用检验函数的强遍历性判别准则如下.

定理 5.4 设 $Q=(q_{ij})$ 是正则不可约 Q 矩阵, H 是 E 的一个非空有限子集, 则相应 Q 过程强遍历当且仅当方程

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{j\in E} q_{ij}y_j\leqslant -1, & i\notin H,\\ \displaystyle\sum_{i\in H}\sum_{j\neq i} q_{ij}y_j<\infty\end{cases}\tag{5.6}$$

有非负有界解.

该判别准则一个好的应用见下面的命题. 由此命题可以立刻得证, 例 5.3 中的单生过程实际上是强遍历的.

命题 5.5 给定正则不可约的 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$. 若存在 $k\geqslant 0$ 满足 $\inf_{i\neq k} q_{ik}>0$, 则相应的 Q 过程是强遍历的.

对于单生过程, 我们还是能够得到如下只依赖于 Q 矩阵、无需检验函数的强遍历判别准则, 参见文献 [21].

定理 5.6 给定正则不可约单生 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$, 则其决定的单生过程强遍历当且仅当

$$S:=\sup_{n\geqslant 0}\sum_{k=0}^{n}(F_k^{(0)}d-d_k)<\infty.$$

我们来看一个例子. 此例细节参见文献 [40, 例 8.2].

例 5.7 考虑全稳定保守单生 Q 矩阵 (q_{ij}), 满足

$$\begin{aligned}&q_{i0}\equiv q_{10}>0, \quad i\geqslant 1,\\ &q_{i,i+1}>0, \quad i\geqslant 0,\\ &q_{ij}=0, \quad \text{其他的 } j\neq i.\end{aligned}$$

若

$$\kappa':=\lim_{n\to\infty}\frac{n(q_{n+1,n+2}-q_{n,n+1}-q_{10})}{q_{n,n+1}+q_{10}}>1,$$

则过程爆炸 (例如, 取 $\gamma>1$, $q_{n,n+1}=(n+1)^\gamma$). 若 $\kappa'<1$ (例如, 取 $\gamma\leqslant 1$, $q_{n,n+1}=(n+1)^\gamma$), 则过程唯一, 此时过程强遍历.

此节最后, 我们来研究回返时的一阶矩. 下面的命题参见文献 [50, 引理 9.4.1] 或者 [40, 引理 5.1].

命题 5.8 给定不可约全稳定保守单生 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$. 假定对应的单生过程常返, 则 $(\mathrm{E}_i\sigma_0: i\in E)$ 是下面方程的最小非负解 (可能为无穷):

$$x_i=\frac{1}{q_i}\sum_{k\neq 0,i}q_{ik}x_k+\frac{1}{q_i}, \quad i\in E,$$

其中约定 $1\cdot\infty=\infty$, $0\cdot\infty=0$.

由此可以推出下面的命题 (参见文献 [30]):

定理 5.9 给定不可约全稳定保守单生 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$. 假定对应的单生过程常返, 则

$$\mathrm{E}_0\sigma_0=\frac{1}{q_{01}}+d, \quad \mathrm{E}_n\sigma_0=\sum_{k=0}^{n-1}(F_k^{(0)}d-d_k), \quad n\geqslant 1.$$

注意, 上述定理告诉我们, $d=\mathrm{E}_1\sigma_0$. 另外, 文献 [5, 定理 4.44] 或者 [53] 告诉我们如下准则.

定理 5.10 给定正则不可约 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$, 则相应的过程遍历当且仅当 $\mathrm{E}_0\sigma_0<\infty$; 过程强遍历当且仅当 $\sup_{i\geqslant 0}\mathrm{E}_i\sigma_0<\infty$; 过程指数遍历当且仅当 $\mathrm{E}_0\mathrm{e}^{\lambda\sigma_0}<\infty$, 其中 $0<\lambda<q_i$ $(i\geqslant 0)$.

所以, 在唯一性的假定下, 由例 5.3 前的讨论, 结合定理 5.9 和 5.10, 我们同样可以证明定理 5.2 和 5.6.

6 ℓ 遍历性、回返时 (生命时) 的多项式阶矩和平稳分布

上一节研究了状态 0 的回返时的一阶矩, 本节考虑各状态的高阶矩. 而这些问题与所谓的 ℓ 遍历性联系在一起, 正如上一节看到的回返时一阶矩与遍历性相联系.

我们先就一般的过程给出 ℓ 遍历性的定义. 给定正整数 ℓ, 记 $m_{ij}^{(\ell)}:=\mathrm{E}_i\sigma_j^\ell$. 常返 Markov 链 $X(t)$ 若对某个 (等价地, 对所有) $j\in E$ 满足 $m_{jj}^{(\ell)}<\infty$, 则称为 ℓ 遍历的.

离散时间 Markov 链 ℓ 遍历的定义最早出现在文献 [54, 第 9 章], 近些年的研究结果参见文献 [55] 及其所引文献. 文献 [56,57] 把 ℓ 遍历的概念推广到连续时间 Markov 链, 在文献 [57] 中通过击中时的

矩研究了高价偏差矩阵的存在性, 同时给出了转移矩阵向平稳测度的多项式收敛速度估计. 由定义可知, 1 遍历对应于通常的正常返性. 所以, 为统一, 称通常的零常返为 0 遍历. 从前面可以看到, 对单生过程, 0 遍历和 1 遍历已经有显式判别准则, 我们自然也期望其 ℓ 遍历 ($\ell \geqslant 2$) 有一个显式的判别准则. 首先, 看一个命题 5.8 的推广结论 (参见文献 [50, 定理 9.3.3]、[5, 命题 4.56] 或者 [57, 定理 3.1]).

命题 6.1 给定不可约全稳定保守单生 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$. 假定对应的单生过程 $\ell-1$ 遍历, 则 $(\mathrm{E}_i\sigma_{i_0}^{\ell}: i\in E)$ 是下面方程的最小非负解 (可能为无穷):

$$y_i=\sum_{k\neq i,i_0}\frac{q_{ik}}{q_i}y_k+\frac{\ell}{q_i}\mathrm{E}_i\sigma_{i_0}^{\ell-1},\quad i\in E.$$

由此推出下面的定理 (参见文献 [40]):

定理 6.2 给定不可约全稳定保守单生 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$. 假定对应的单生过程 $\ell-1$ 遍历 ($\ell\geqslant 1$), 即 $\mathrm{E}_i\sigma_{i_0}^{\ell-1}<\infty$ ($i\geqslant 0$). 当 $\ell=1$ 时, 再假定过程唯一, 则

$$\mathrm{E}_n\sigma_{i_0}^{\ell}=\begin{cases}\ell\displaystyle\sum_{n\leqslant k\leqslant i_0-1}v_k^{(\ell)}+\Bigg[1-\sum_{n\leqslant k\leqslant i_0-1}u_k\Bigg]\mathrm{E}_{i_0}\sigma_{i_0}^{\ell}, & 0\leqslant n\leqslant i_0,\\ -\ell\displaystyle\sum_{i_0\leqslant k\leqslant n-1}v_k^{(\ell)}+\Bigg[1+\sum_{i_0\leqslant k\leqslant n-1}u_k\Bigg]\mathrm{E}_{i_0}\sigma_{i_0}^{\ell}, & n>i_0,\end{cases}$$

其中

$$u_k=\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=i_0-1}^{k}{q_{j,j+1}}^{-1}F_k^{(j)}q_{ji_0}(1-\delta_{ji_0}), & k\geqslant i_0,\\ 1, & k=i_0-1,\\ 0, & 0\leqslant k\leqslant i_0-2,\end{cases}$$

$$v_k^{(\ell)}=\sum_{j=0}^{k}\frac{F_k^{(j)}}{q_{j,j+1}}\mathrm{E}_j\sigma_{i_0}^{\ell-1},\quad k\geqslant 0,$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_{i_0}\sigma_{i_0}^{\ell}&=\ell\varlimsup_{n\to\infty}\Bigg(\sum_{i_0\leqslant k\leqslant n}v_k^{(\ell)}\Bigg)\Bigg[1+\sum_{i_0\leqslant k\leqslant n}u_k\Bigg]^{-1}\\&=\ell\lim_{n\to\infty}\frac{v_n^{(\ell)}}{u_n}\quad\text{(如果此极限存在)}.\end{aligned}$$

观察 $i_0=0$ 时定理 6.2 的相应情形. 为此, 定义

$$d_0^{(\ell)}=0,\quad d_i^{(\ell)}=\frac{1}{q_{i,i+1}}\Bigg(\mathrm{E}_i\sigma_0^{\ell-1}+\sum_{k=0}^{i-1}q_i^{(k)}d_k^{(\ell)}\Bigg),\quad i\geqslant 1.\tag{6.1}$$

由命题 4.2 可证

$$d_i^{(\ell)}=\sum_{k=1}^{i}\frac{F_i^{(k)}}{q_{k,k+1}}\mathrm{E}_k\sigma_0^{\ell-1},\quad i\geqslant 0.\tag{6.2}$$

再令

$$d^{(\ell)}=\sup_{i\geqslant 1}\frac{\sum_{j=0}^{i-1}d_j^{(\ell)}}{\sum_{j=0}^{i-1}F_j^{(0)}}=\sup_{i\geqslant 0}\frac{\sum_{j=0}^{i}d_j^{(\ell)}}{\sum_{j=0}^{i}F_j^{(0)}}.\tag{6.3}$$

注意, $d_j^{(1)}=d_j\ (j\geqslant 0)$. 进而, $d^{(1)}=d$. 此时, 结合 (4.7) 和 (6.2) 可知,

$$\begin{aligned} &u_0=0,\quad u_k=F_k^{(0)},\quad k\geqslant 1,\\ &v_k^{(\ell)}=\frac{\mathrm{E}_0\sigma_0^{\ell-1}}{q_{01}}F_k^{(0)}+d_k^{(\ell)},\quad k\geqslant 0. \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_0\sigma_0^\ell&=\frac{\ell}{q_{01}}\mathrm{E}_0\sigma_0^{\ell-1}+\ell\varlimsup_{n\to\infty}\bigg(\sum_{0\leqslant k\leqslant n}d_k^{(\ell)}\bigg)\bigg[\sum_{0\leqslant k\leqslant n}F_k^{(0)}\bigg]^{-1}\\ &=\frac{\ell}{q_{01}}\mathrm{E}_0\sigma_0^{\ell-1}+\ell\lim_{n\to\infty}\frac{d_n^{(\ell)}}{F_n^{(0)}}\quad (\text{如果此极限存在})\\ &=\frac{\ell}{q_{01}}\mathrm{E}_0\sigma_0^{\ell-1}+\ell d^{(\ell)}. \end{aligned}$$

进而,

$$\mathrm{E}_n\sigma_0^\ell=\ell\sum_{k=0}^{n-1}(F_k^{(0)}d^{(\ell)}-d_k^{(\ell)}),\quad n\geqslant 1.$$

以上表示参见文献 [31]. 由此, 可以得到 ℓ 遍历的判别准则 (参见文献 [35]).

定理 6.3 给定正则不可约单生 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$, 则单生过程 $\ell\ (\geqslant 1)$ 遍历当且仅当 $d^{(\ell)}<\infty$. 此时, 对所有 $i,j\geqslant 0$, 有 $p_{ij}(t)-\pi_j=o(t^{-(\ell-1)})\ (t\to\infty)$, 其中 (π_i) 为过程的平稳分布.

下面考虑在 $i_0\geqslant 1$ 时定理 6.2 结论的细化. 此时, 由 (4.7) 知,

$$u_{i_0}=F_{i_0}^{(i_0-1)},\quad u_k=\frac{q_{i_0}}{q_{i_0,i_0+1}}F_k^{(i_0)},\quad k>i_0\geqslant 1.$$

注意到

$$1+u_{i_0}=\frac{q_{i_0}}{q_{i_0,i_0+1}}=\frac{q_{i_0}}{q_{i_0,i_0+1}}F_{i_0}^{(i_0)}.$$

因此,

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}_n\sigma_{i_0}^\ell=\ell\sum_{k=n}^{i_0-1}v_k^{(\ell)},\quad n<i_0,\\ &\mathrm{E}_n\sigma_{i_0}^\ell=\ell\sum_{k=i_0}^{n-1}(F_k^{(i_0)}c_{i_0}^{(\ell)}-v_k^{(\ell)}),\quad n>i_0, \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_{i_0}\sigma_{i_0}^\ell&=\frac{\ell q_{i_0,i_0+1}}{q_{i_0}}\varlimsup_{n\to\infty}\bigg(\sum_{i_0\leqslant k\leqslant n}v_k^{(\ell)}\bigg)\bigg[\sum_{i_0\leqslant k\leqslant n}F_k^{(i_0)}\bigg]^{-1}\\ &=:\frac{\ell q_{i_0,i_0+1}}{q_{i_0}}c_{i_0}^{(\ell)}\\ &=\frac{\ell q_{i_0,i_0+1}}{q_{i_0}}\lim_{n\to\infty}\frac{v_n^{(\ell)}}{F_n^{(i_0)}}\quad (\text{如果此极限存在}). \end{aligned}$$

注意, 实际上, 此时会有

$$c_i^{(\ell)}=\sup_{n\geqslant i}\frac{\sum_{k=i}^n v_k^{(\ell)}}{\sum_{k=i}^n F_k^{(i)}}.$$

另外, 由命题 4.2, 依然有下式成立:

$$v_k^{(\ell)} = \frac{1}{q_{k,k+1}}\left(\mathrm{E}_k\sigma_{i_0}^{\ell-1} + \sum_{j=0}^{k-1} q_k^{(j)} v_j^{(\ell)}\right), \quad k \geqslant 0.$$

注意 $v_k^{(1)} = m_k$ $(k \geqslant 0)$. 省略 $(c_i^{(1)})$ 的上标记为 (c_i). 此时, 由上述结果在 $\ell = 1$ 的特殊情形, 立即得到单生过程平稳分布的表达 (参见文献 [31]).

定理 6.4 给定正则不可约单生 Q 矩阵 $Q = (q_{ij})$. 假定对应的单生过程遍历, 则其平稳分布为 $\pi_i = 1/(q_{i,i+1}c_i)$ $(i \in E)$.

下面看几个例子, 参见文献 [31,36].

例 6.5 考虑生灭过程: 生速 $b_i = q_{i,i+1} > 0$ $(i \geqslant 0)$, 死速 $a_i = q_{i,i-1} > 0$ $(i \geqslant 1)$. 令 $\mu = \sum_{i=0}^{\infty} \mu_i$, 则 $c_i = \mu/(\mu_i b_i)$, 平稳分布为 $\pi_i = \mu_i/\mu$ $(i \geqslant 0)$.

例 6.6 给定单生 Q 矩阵为 $q_{i,i+1} = 1$ $(i \geqslant 0)$ 且 $q_{i0} = 1$ $(i \geqslant 1)$, 其他的 $q_{ij} = 0$ $(i \neq j)$, 则 $c_k = 2^{k+1}$, 平稳分布为 $\pi_k = 2^{-k-1}$ $(k \geqslant 0)$. 此时过程是强遍历的.

例 6.7 给定单生 Q 矩阵为 $q_{i,i+1} = 1$ $(i \geqslant 0)$, $q_{10} = 1$ 且 $q_{i,i-2} = 1$ $(i \geqslant 2)$, 其他的 $q_{ij} = 0$ $(i \neq j)$, 则 $c_k = ((\sqrt{5}+1)/2)^{k+2}$. 平稳分布为 $\pi_k = ((\sqrt{5}-1)/2)^{k+2}$ $(k \geqslant 0)$. 此时过程是指数遍历而非强遍历的, 参见文献 [25].

例 6.8 考虑种群理论中的均匀大灾难模型: $q_{i,i+1} = \lambda_i := a + \lambda i$ $(i \geqslant 0)$, $q_{ij} = \beta$ $(0 \leqslant j < i)$, 其他的 $q_{ij} = 0$ $(i \neq j)$, 其中 a、λ 和 β 均为正常数, 则该 Q 矩阵正则当且仅当

$$\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{\lambda_{k-1} + k\beta}{\lambda_k} = \infty.$$

此时, 相应的过程是强遍历的且平稳分布为

$$\pi_0 = \frac{\beta}{a+\beta}, \quad \pi_k = \frac{(k+1)\beta}{a+\beta}\prod_{j=0}^{k-1}\frac{\lambda_j}{\lambda_{j+1} + (j+2)\beta}, \quad k \geqslant 1.$$

特别地, 当 $a = \lambda$ 时, $\pi_k = \beta a^k/(a+\beta)^{k+1}$ $(k \geqslant 0)$. 进一步, 当 $a = \lambda = \beta = 1$ 时, $\pi_k = 2^{-k-1}$ $(k \geqslant 0)$.

注意, 我们得到均匀大灾难模型平稳分布的方法是不同于文献 [10, 第 296 页] 的.

例 6.9 更一般地, 考虑满足相邻状态死亡速率具有一定比例关系的单生 Q 矩阵, 详细地,

$$q_{i+1,j} = p_i q_{ij}, \quad 0 \leqslant j \leqslant i-1,$$

其中 $0 \leqslant p_i \leqslant 1$ $(i \geqslant 1)$. 约定 $p_0 = p_{-1} = 0$. 这类单生 Q 矩阵涵盖前面 4 个例子, 参见文献 [36]. 对这类单生 Q 矩阵而言, 其决定唯一的单生过程当且仅当

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1-p_{i-1}}{q_{i,i+1}} + \sum_{k=0}^{i-1}\frac{1-p_{k-1}}{q_{k,k+1}}\prod_{\ell=k+1}^{i}\frac{q_{\ell,\ell-1} + p_{\ell-1}q_{\ell-1}}{q_{\ell,\ell+1}}\right) = \infty.$$

若假定此类单生 Q 矩阵正则且不可约, 则过程常返当且仅当

$$\sum_{i=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{i}\frac{q_{j,j-1} + p_{j-1}q_{j-1}}{q_{j,j+1}} = \infty;$$

过程遍历当且仅当

$$d:=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1-p_{i-1}}{q_{i,i+1}}\prod_{j=1}^{i}\frac{q_{j,j+1}}{q_{j,j-1}+p_{j-1}q_{j-1}}<\infty.$$

此时, 过程的平稳分布为

$$\pi_0=\frac{1}{1+q_{01}d},\quad \pi_i=\left(1-\frac{p_iq_{i,i+1}}{q_{i+1,i}+p_iq_i}\right)\frac{q_{01}\pi_0}{q_{i,i+1}}\prod_{j=1}^{i}\frac{q_{j,j+1}}{q_{j,j-1}+p_{j-1}q_{j-1}},\quad i\geqslant 1.$$

本节最后, 我们研究 $\tau_\infty:=\lim_{n\to\infty}\tau_n$. 因为 τ_∞ 几乎处处等于过程的生命时 $\eta:=\lim_{n\to\infty}\eta_n$, 这里 η_n 是过程的第 n 次跳时刻, 递归定义如下:

$$\eta_0\equiv 0,\quad \eta_n=\inf\{t\geqslant\eta_{n-1}:X(t)\neq X(\eta_{n-1})\},\quad n\geqslant 1.$$

因此, 如果单生过程非爆炸, 则几乎处处 $\tau_\infty=\infty$. 故我们对爆炸的单生 Q 矩阵研究生命时或 τ_∞ 的矩才有意义.

由文献 [5, 命题 4.56] 或者 [58] 可得下面的命题:

命题 6.10 给定全稳定保守不可约且爆炸的单生 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$ (即 $\sum_n m_n<\infty$, 见定理 2.2). 假定对某个整数 $\ell\geqslant 1$, 最小过程的 τ_∞ 具有有限的 $\ell-1$ 阶矩 (即对于所有 $i\in E$, $\mathrm{E}_i\tau_\infty^{\ell-1}<\infty$), 则 $(\mathrm{E}_i\tau_\infty^{\ell}:i\in E)$ 是下面方程的最小非负解:

$$y_i=\sum_{k\neq i}\frac{1}{q_i}q_{ik}y_k+\frac{\ell}{q_i}\mathrm{E}_i\tau_\infty^{\ell-1},\quad i\in E.$$

由此可以证明下面的定理 (参见文献 [38]):

定理 6.11 给定全稳定保守不可约且爆炸的单生 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$. 假定对某个整数 $\ell\geqslant 1$, 最小过程的 τ_∞ 具有有限的 $\ell-1$ 阶矩, 则

$$\mathrm{E}_n\tau_\infty^{\ell}=\ell\sum_{k\geqslant n}\overline{m}_k^{(\ell)},\quad n\geqslant 0,$$

其中

$$\overline{m}_n^{(\ell)}=\frac{1}{q_{n,n+1}}\left[\mathrm{E}_n\tau_\infty^{\ell-1}+\sum_{0\leqslant k\leqslant n-1}q_n^{(k)}\overline{m}_k^{(\ell)}\right]=\sum_{j=0}^{n}\frac{F_n^{(j)}\mathrm{E}_j\tau_\infty^{\ell-1}}{q_{j,j+1}},\quad n\geqslant 0.$$

7 指数遍历性、回返时 (生命时) 的指数阶矩和 Laplace 变换

本节研究单生过程的指数遍历性. 先给出一般过程指数遍历的定义.

给定正则不可约 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$ 和正概率测度 (π_i). 相应的 Q 过程记为 $P(t)=(p_{ij}(t))$. 若存在常数 $\alpha>0$ 和 $c_{ij}<\infty$, 使得 $|p_{ij}(t)-\pi_j|\leqslant c_{ij}\mathrm{e}^{-\alpha t}$ 对于一切 $i,j\in E$ 和 $t\geqslant 0$ 都成立, 则称该过程 $P(t)$ 为指数遍历的. 最佳 (即最大) 的 α 称为指数遍历速度. 指数遍历的等价定义为, 对所有 $i\in E$, $\|p_{i\cdot}(t)-\pi\|_{\mathrm{Var}}=O(\mathrm{e}^{-\alpha t})$ $(t\to\infty)$; 等价地, $\sum_i\pi_i\|p_{i\cdot}(t)-\pi\|_{\mathrm{Var}}=O(\mathrm{e}^{-\alpha t})$ $(t\to\infty)$.

为研究指数遍历性, 我们考虑回返时的指数阶矩. 下面给出一个一般过程的结论 (参见文献 [40, 引理 7.1]).

命题 7.1 给定全稳定保守不可约 Q 矩阵 (q_{ij}). 假定对应的 Q 过程常返. 取定 $\lambda \in \mathbb{R}$ 使其满足对于任意 $i \in E$, 有 $\lambda < q_i$, 则对于 E 的非平凡子集 H, $(\mathrm{E}_i \exp(\lambda\sigma_H) : i \in E)$ 是下面方程的最小非负解:

$$x_i = \frac{1}{q_i - \lambda} \sum_{k \notin H \cup \{i\}} q_{ik} x_k + \frac{1}{q_i - \lambda} \sum_{k \in H \setminus \{i\}} q_{ik}, \quad i \in E. \tag{7.1}$$

由此可以得到单生过程回返时指数阶矩的结果, 参见文献 [30]. 为陈述方便, 定义

$$\tilde{d}_0 = 0, \quad \tilde{d}_n = \frac{1}{q_{n,n+1}} \sum_{k=i}^{n-1} \tilde{q}_n^{(k)} \tilde{d}_k, \quad n > i \geqslant 0. \tag{7.2}$$

定理 7.2 给定正则不可约单生 Q 矩阵 $Q = (q_{ij})$. 假定单生过程遍历. 在 (4.1)、(4.2) 和 (7.2) 中取定 $c_i \equiv \lambda > 0$ 来定义 $(\widetilde{F}_k^{(i)})$ 和 $(\tilde{d}_k)$, 则对小的 λ, 有

$$\mathrm{E}_0 \mathrm{e}^{\lambda\sigma_0} = \frac{q_{01}(1 + \lambda\tilde{d})}{q_{01} - \lambda} < \infty, \quad \mathrm{E}_n \mathrm{e}^{\lambda\sigma_0} = 1 + \lambda \sum_{k=0}^{n-1} (\widetilde{F}_k^{(0)} \tilde{d} - \tilde{d}_k) < \infty, \quad n \geqslant 1$$

当且仅当

$$\tilde{d} := \varlimsup_{n \to \infty} \mathbf{1}_{\{\sum_{k=0}^n \widetilde{F}_k^{(0)} > 0\}} \frac{\sum_{k=0}^n \tilde{d}_k}{\sum_{k=0}^n \widetilde{F}_k^{(0)}} < \infty$$

和

$$\tilde{d} \sum_{k=0}^{n-1} \widetilde{F}_k^{(0)} > \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{d}_k, \quad 当 \sum_{k=0}^{n-1} \widetilde{F}_k^{(0)} \leqslant 0 \quad (n \geqslant 2) \tag{7.3}$$

成立. 进而, 一旦对足够大的 n 有 $\widetilde{F}_n^{(0)} > 0$ 和 $\sum_n \widetilde{F}_n^{(0)} = \infty$ 成立, 则

$$\tilde{d} = \lim_{n \to \infty} \frac{\tilde{d}_n}{\widetilde{F}_n^{(0)}} \quad (如果此极限存在).$$

最后, 过程指数遍历当且仅当 $\tilde{d} < \infty$ 和 (7.3) 都成立.

由命题 7.1 可以得到关于 σ_0 的 Laplace 变换的结果, 参见文献 [10,12].

定理 7.3 给定正则不可约单生 Q 矩阵 $Q = (q_{ij})$. 假定单生过程常返. 在 (4.1)、(4.2) 和 (7.2) 中取定 $c_i \equiv -\lambda < 0$ 来定义 $(\widetilde{F}_k^{(i)})$ 和 $(\tilde{d}_k)$, 则 σ_0 的 Laplace 变换为

$$\mathrm{E}_0 \mathrm{e}^{-\lambda\sigma_0} = \frac{q_{01}(1 - \lambda\tilde{d})}{q_{01} + \lambda}, \quad \mathrm{E}_n \mathrm{e}^{-\lambda\sigma_0} = 1 - \lambda \sum_{k=0}^{n-1} (\widetilde{F}_k^{(0)} \tilde{d} - \tilde{d}_k), \quad n \geqslant 1,$$

其中

$$\tilde{d} = \lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \tilde{d}_k}{\sum_{k=0}^{n-1} \widetilde{F}_k^{(0)}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\tilde{d}_n}{\widetilde{F}_n^{(0)}} \quad (如果此极限存在).$$

下面的均匀大灾难例子取自文献 [13]. 细节可参见文献 [40, 例 8.1].

例 7.4 令

$$q_{i,i+1} = b\,i, \quad i \geqslant 0,$$

$$
\begin{aligned}
q_{ij} &= a, \quad j = 0, 1, \ldots, i-1, \\
q_{ij} &= 0, \quad \text{其他的 } j > i+1,
\end{aligned}
$$

其中 a 和 b 是正常数, 则过程的灭绝时服从参数为 a 的指数分布

$$
\mathrm{E}_n \mathrm{e}^{-\lambda\tau_0} = \frac{a}{a+\lambda}, \quad \lambda > 0, \quad n \geqslant 1.
$$

此分布不依赖常数 b 和出发点 n. 若再定义 $q_{01} = c > 0$, 则此过程强遍历.

回到 τ_∞. 考虑其指数阶矩和 Laplace 变换.

定理 7.5　给定全稳定保守不可约且爆炸的单生 Q 矩阵 $Q = (q_{ij})$. 在 (4.2) 和 (4.6) 中取定 $c_i \equiv \lambda$ 来定义 $(\widetilde{m}_k)$. 对最小过程, 我们有下面的结论:

(1) 如果存在某个 $\lambda > 0$ 使得 $\lambda \sum_{k=0}^{n-1} \widetilde{m}_k < 1$ 对一切 $n > 1$ 成立, 则

$$
\mathrm{E}_n \mathrm{e}^{\lambda\tau_\infty} = 1 + \lambda \left[\bar{c} \left(1 - \lambda \sum_{k=0}^{n-1} \widetilde{m}_k \right) - \sum_{k=0}^{n-1} \widetilde{m}_k \right], \quad n \geqslant 0,
$$

其中

$$
\bar{c} = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} \widetilde{m}_k}{1 - \lambda \sum_{k=0}^{n} \widetilde{m}_k}.
$$

进而, 若 $\bar{c} < \infty$, 则过程指数衰减.

(2) 对 $\lambda > 0$, τ_∞ 的 Laplace 变换为

$$
\mathrm{E}_n \mathrm{e}^{-\lambda\tau_\infty} = \frac{1 + \lambda \sum_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \widetilde{m}_k}{1 + \lambda \sum_{k \geqslant 0} \widetilde{m}_k}, \quad n \geqslant 0.
$$

再次回到指数遍历性. 下面是一个使用检验函数的指数遍历性判别准则, 参见文献 [5, 定理 4.45] 和 [52].

定理 7.6　设 $Q = \{q_{ij} : i, j \in E\}$ 是正则不可约 Q 矩阵, H 是 E 的一个非空有限子集, 则相应 Q 过程指数遍历当且仅当对某 λ 满足 $0 < \lambda < q_i$ $(i \in E)$, 方程

$$
\begin{cases}
\displaystyle\sum_{j\in E} q_{ij} y_j \leqslant -\lambda y_i - 1, \quad i \notin H, \\
\displaystyle\sum_{i\in H} \sum_{j\neq i} q_{ij} y_j < \infty
\end{cases}
\tag{7.4}
$$

有非负有限解.

在 (7.4) 中以 $(\tilde{y}_i = \lambda y_i + 1)$ 代替 (y_i), 则可改写 (7.4) 为

$$
\begin{cases}
y_i \geqslant 1, & i \in E, \\
\displaystyle\sum_{j\in E} q_{ij} y_j \leqslant -\lambda y_i, & i \notin H, \\
\displaystyle\sum_{i\in H} \sum_{j\neq i} q_{ij} y_j < \infty.
\end{cases}
\tag{7.5}
$$

由上述结果, 文献 [25] 得到单生过程指数遍历的一个显式充分条件如下.

定理 7.7 给定正则不可约单生 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$. 若

$$q:=\inf_{i\geqslant 0} q_i>0 \quad \text{且} \quad M:=\sup_{i>0}\sum_{j=0}^{i-1}F_j^{(0)}\sum_{j=i}^{\infty}\frac{1}{q_{j,j+1}F_j^{(0)}}<\infty, \tag{7.6}$$

则其决定的单生过程指数遍历.

此条件对例 6.6 和 6.7 是适用的, 但对例 6.8 不适用, 对下面例子也不适用, 参见文献 [35].

例 7.8 给定单生 Q 矩阵为 $q_{01}>0$, $q_{i,i+1}=i^{\gamma}$, $q_{i0}=i^{\gamma-1}$ $(i\geqslant 1)$, 其中常数 $\gamma\in(1,2)$, 其他的 $q_{ij}=0$ $(j\neq i)$, 则过程是强遍历的但 $M=\infty$.

8 单生过程的应用

本节回顾单生过程在粒子系统等多维过程研究中的一些应用. 文献 [20] 或 [5, 定理 3.19 和 4.59] 提出了一种将多维问题化为一维的方法, 文献 [19,21,25] 将其进一步发展, 我们总结为以下两个定理.

定理 8.1 令 E 为可数集合, $Q=(q(x,y):x,y\in E)$ 为全稳定保守的 Q 矩阵. 假定存在 E 的一个划分 $\{E_k\}$ 使得 $\sum_{k=0}^{\infty}E_k=E$ 且

(1) 对所有的 $k\geqslant 0$ 和所有的 $x\in E_k$, 若 $q(x,y)>0$, 则 $y\in\sum_{j=0}^{k+1}E_j$;

(2) 对所有的 $k\geqslant 0$ 和所有的 $x\in E_k$ 有 $\sum_{y\in E_{k+1}}q(x,y)>0$ 成立;

(3) 对所有的 $k\geqslant 0$, 有 $C_k:=\sup\{q(x):x\in E_k\}<\infty$.

定义全稳定保守的单生 Q 矩阵 $Q=(q_{ij}:i,j\in\mathbb{Z}_+)$ 如下:

$$q_{ij}=\begin{cases}\sup\left\{\displaystyle\sum_{y\in E_j}q(x,y):x\in E_i\right\}, & \text{若 } j=i+1,\\ \inf\left\{\displaystyle\sum_{y\in E_j}q(x,y):x\in E_i\right\}, & \text{若 } j<i,\\ 0, & \text{其他的 } j\neq i.\end{cases}$$

如果 (q_{ij}) 过程唯一, 则 $(q(x,y))$ 过程唯一.

假定 $E_0=\{\theta\}$, 这里 $\theta\in E$ 是一个参考点, $(q(x,y))$ 和 (q_{ij}) 都是不可约的且 (q_{ij}) 是正则的. 如果 E_k $(k\geqslant 1)$ 有限且 $\sum_{k=0}^{\infty}F_k^{(0)}=\infty$, 则 $(q(x,y))$ 过程常返. 进一步, 若 $\hat{d}:=\sup_{k\geqslant 1}d_k/F_k^{(0)}<\infty$, 则 $(q(x,y))$ 过程遍历; 若 (7.6) 成立, 则 $(q(x,y))$ 指数过程遍历; 若 $\sup_{k\geqslant 0}\sum_{j=0}^{k}(F_j^{(0)}\hat{d}-d_j)<\infty$, 则 $(q(x,y))$ 过程强遍历.

定理 8.2 令 E 为可数集合, $Q=(q(x,y):x,y\in E)$ 为全稳定保守的 Q 矩阵. 假定存在 E 的一个划分 $\{E_k\}$ 使得 $\sum_{k=0}^{\infty}E_k=E$ 且

(1) 对所有的 $k\geqslant 0$ 和所有的 $x\in E_k$, 若 $q(x,y)>0$, 则 $y\in\sum_{j=0}^{k+1}E_j$;

(2) 对所有的 $k\geqslant 0$ 有 $\inf\{\sum_{y\in E_{k+1}}q(x,y):x\in E_k\}>0$ 成立;

(3) 对所有的 $k\geqslant 0$, 有 $C_k:=\sup\{q(x):x\in E_k\}<\infty$.

定义全稳定保守的单生 Q 矩阵 $Q=(q_{ij}: i,j\in\mathbb{Z}_+)$ 如下:

$$q_{ij}=\begin{cases}\inf\Big\{\displaystyle\sum_{y\in E_j}q(x,y): x\in E_i\Big\}, & \text{若 } j=i+1,\\ \sup\Big\{\displaystyle\sum_{y\in E_j}q(x,y): x\in E_i\Big\}, & \text{若 } j<i,\\ 0, & \text{其他的 } j\neq i.\end{cases}$$

如果 $(q(x,y))$ 过程唯一, 则 (q_{ij}) 过程唯一.

假定 $E_0=\{\theta\}$, 这里 $\theta\in E$ 是一个参考点, $(q(x,y))$ 和 (q_{ij}) 都是不可约的且 $(q(x,y))$ 是正则的. 若 $(q(x,y))$ 过程常返, 则 (q_{ij}) 过程常返. 再假定 E_k $(k\geqslant 1)$ 有限. 定义 $\tau=\inf\{t\geqslant 0: X(t)=\theta\}$, 其中 $X(t)$ 是指 $(q(x,y))$ 过程. 取定 $x_i\in E_i$ 使得 $f_i:=\mathrm{E}_{x_i}\tau=\min_{x\in E_i}\mathrm{E}_x\tau$. 取定 $\lambda\in(0,\inf_{x\in E}q(x))$ 和 $x_i\in E_i$ 使得 $g_i:=\mathrm{E}_{x_i}\mathrm{e}^{\lambda\tau}=\min_{x\in E_i}\mathrm{E}_x\mathrm{e}^{\lambda\tau}$. 若 f_i 是 i 的单调增函数且 $(q(x,y))$ 过程是遍历的 (或者强遍历的), 则 (q_{ij}) 过程亦然. 若 g_i 是 i 的单调增函数且 $(q(x,y))$ 过程指数遍历, 则 (q_{ij}) 过程亦然.

以上两个结果都相当实用. 例如, 可以应用到有限维 Schlögl 模型、Brussel 模型和流行病过程等.

例 8.3 (有限维 Schlögl 模型)　令 S 是有限集合, $E=\mathbb{Z}_+^S$. 该模型的 Q 矩阵 $Q=(q(x,y): x,y\in E)$ 为

$$q(x,y)=\begin{cases}\lambda_1\dbinom{x(u)}{2}+\lambda_4, & \text{若 } y=x+e_u,\\ \lambda_2\dbinom{x(u)}{3}+\lambda_3x(u), & \text{若 } y=x-e_u,\\ x(u)p(u,v), & \text{若 } y=x-e_u+e_v,\\ 0, & \text{其他的 } y\neq x,\end{cases}$$

$q(x)=-q(x,x)=\sum_{y\neq x}q(x,y)$, 其中 $x=(x(u): u\in S)$, $\binom{n}{k}$ 是通常的组合数, $\lambda_1,\ldots,\lambda_4$ 是正常数, $(p(u,v): u,v\in S)$ 是 S 上的转移概率矩阵, e_u 是 E 中的基本元素, 满足在 u 处等于 1, 在其他处等于 0. 此模型作为非平衡系统的典型模型最早由文献 [59] 引入, 细节参见文献 [5, 60]. 作为文献 [5, 推论 4.49] 的应用, 文献 [5] 证明了该模型是指数遍历的, 实际上, 应用定理 8.1, 我们可以证明有限维 Schlögl 模型对应的 Q 过程是强遍历的, 参见文献 [21].

例 8.4 (Brussel 模型)　该模型是多物种反应扩散过程的典型模型. 令 S 是有限集合, $E=(\mathbb{Z}_+^2)^S$. 该模型的 Q 矩阵 $Q=(q(x,y): x,y\in E)$ 为

$$q(x,y)=\begin{cases}\lambda_1a(u), & \text{若 } y=x+e_{u1},\\ \lambda_2b(u)x_1(u), & \text{若 } y=x-e_{u1}+e_{u2},\\ \lambda_3\dbinom{x_1(u)}{2}x_2(u), & \text{若 } y=x+e_{u1}-e_{u2},\\ \lambda_4x_1(u), & \text{若 } y=x-e_{u1},\\ x_k(u)p_k(u,v), & \text{若 } y=x-e_{uk}+e_{vk},\quad k=1,2,\quad v\neq u,\\ 0, & \text{其他的 } y\neq x,\end{cases}$$

$q(x)=-q(x,x)=\sum_{y\neq x}q(x,y)$, 其中 a 和 b 是正函数, $\lambda_1,\ldots,\lambda_4$ 是正常数, $(p_k(u,v): u,v\in S)$ 是 S

上转移概率矩阵 $(k=1,2)$,

$$e_{ui}(v,j)=\begin{cases}1, & 若\ v=u, \quad j=i,\\ 0, & 其他的\ u,v\in S, \quad i,j=1,2.\end{cases}$$

当 S 是单点集时, 文献 [61] 证明了模型的遍历性; 文献 [62,63] 证明了模型非强遍历且超 Poincaré 不等式不成立. 对于一般有限的集合 S, 文献 [64] 证明了该模型的指数遍历性. 应用定理 8.2, 可以证明: Brussel 模型对应的 Q 过程是非强遍历的, 参见文献 [19].

例 8.5 (流行病过程) 令 $E=\mathbb{Z}_+^2$. 该过程的 Q 矩阵 $Q=(q((m,n),(m',n')):(m,n),(m',n')\in E)$ 为

$$q((m,n),(m',n'))=\begin{cases}\alpha, & 若\ (m',n')=(m+1,n),\\ \gamma m, & 若\ (m',n')=(m-1,n),\\ \beta, & 若\ (m',n')=(m,n+1),\\ \delta n, & 若\ (m',n')=(m,n-1),\\ \varepsilon mn, & 若\ (m',n')=(m-1,n+1),\\ 0, & 其他的\ (m',n')\neq(m,n),\end{cases}$$

$q((m,n))=-q((m,n),(m,n))=\sum_{(m',n')\neq(m,n)}q((m,n),(m'n'))$, 其中 α、γ、β、δ 和 ε 是非负常数.

假定 γ 和 δ 是严格正的. 当 $\alpha+\beta>0$ 时, 该 Q 矩阵正则且过程是遍历的, 参见文献 [10,65]. 应用定理 8.1 和 8.2, 我们得到当 $\alpha+\beta$、γ 和 δ 均严格正时, 流行病过程是指数遍历但非强遍历的, 参见文献 [19].

致谢 感谢审稿人的宝贵意见和建议. 本文为作者的第一篇综述文章, 特为王梓坤教授 90 华诞贺寿而著. 文章内容主要取材于两部分, 一是在 2007 年 8 月武汉大学承办的全国数学第十二届研究生暑期学校作概率方面的前沿报告的讲稿; 二是 2014 年 4 至 5 月期间访问台湾中央大学、中央研究院数学研究所、交通大学和高雄大学作系列报告的演讲稿. 借此机会向吴黎明、高付清、许顺吉、周云雄、黄启瑞、姜祖恕、李育嘉和许元春诸位教授以及陈冠宇副教授一并表示感谢.

参考文献

1 王梓坤. 随机过程论. 北京: 科学出版社, 1965
2 王梓坤. 生灭过程与马尔可夫链. 北京: 科学出版社, 1980
3 王梓坤. 随机过程通论. 北京: 北京师范大学出版社, 1996
4 王梓坤, 杨向群. 生灭过程与马尔可夫链 (第二版). 北京: 科学出版社, 2005
5 Chen M F. From Markov Chains to Non-Equilibrium Particle Systems, 2nd ed. Singapore: World Scientific, 2004
6 Chen M F. Eigenvalues, Inequalities, and Ergodic Theory. Berlin: Springer-Verlag, 2004
7 Chen M F. Explicit bounds of the first eigenvalue. Sci China Ser A, 2000, 43: 1051–1059
8 Chen M F. Speed of stability for birth-death processes. Front Math China, 2010, 5: 379–515
9 Wang Z K, Yang X Q. Birth and Death Processes and Markov Chains. Berlin: Springer-Verlag, 1992
10 Anderson W J. Continuous-Time Markov Chains: An Applications-Oriented Approach. New York: Springer-Verlag, 1991
11 Brockwell P J. The extinction time of a birth, death and catastrophe process and of a related diffusion model. Adv in Appl Probab, 1985, 17: 42–52
12 Brockwell P J. The extinction time of a general birth and death process with catastrophes. J Appl Probab, 1986, 23: 851–858
13 Brockwell P J, Gani J, Resnick S I. Birth, immigration and catastrophe processes. Adv in Appl Probab, 1982, 14: 709–731

14 Cairns B, Pollett P K. Extinction times for a general birth, death and catastrophe process. J Appl Probab, 2004, 41: 1211–1218
15 Pakes A G. The Markov branching-castastrophe process. Stochastic Process Appl, 1986, 23: 1–33
16 Zhang J K. On the generalized birth and death processes (I): The numeral introduction, the functional of integral type and the distributions of runs and passage times. Acta Math Sci, 1984, 4: 191–209
17 吴群英, 张汉君. 广义生灭过程. 系统科学与数学, 2003, 23: 517–528
18 吴群英. 广义生灭过程. 北京: 科学出版社, 2004
19 Wu B, Zhang Y H. A class of multidimensional Q-processes. J Appl Probab, 2007, 44: 226–237
20 Yan S J, Chen M F. Multi-dimensional Q-processes. Chin Ann Math Ser B, 1986, 7: 90–110
21 Zhang Y H. Strong ergodicity for single-birth processes. J Appl Probab, 2001, 38: 270–277
22 Chen A Y, Pollett P, Zhang H, et al. Uniqueness criteria for continuous-time Markov chains with general transition structures. Adv in Appl Probab, 2005, 37: 1056–1074
23 Chen M F. Single birth processes. Chin Ann Math Ser B, 1999, 20: 77–82
24 Chen M F. Explicit criteria for several types of ergodicity. Chinese J Appl Probab Statist, 2001, 17: 1–8
25 Mao Y H, Zhang Y H. Exponential ergodicity for single-birth processes. J Appl Probab, 2004, 41: 1022–1032
26 陈木法, 毛永华. 随机过程导论. 北京: 高等教育出版社, 2007
27 李俊平. 关于《Multi-Dimensional Q-processes》一文的注记. 数学年刊 A 辑, 1990, 11: 505–506
28 李培森, 张余辉. 最小单生过程平均占位时的显式表示. 北京师范大学学报, 2017, 53: 258–262
29 王玲娣, 张余辉. 单生 (死) Q 矩阵零流出 (入) 的判别准则. 数学学报, 2014, 57: 681–692
30 张余辉. 单生过程首中时的各阶矩. 北京师范大学学报, 2003, 39: 430–434
31 张余辉. 单生过程击中时与平稳分布. 北京师范大学学报, 2004, 40: 157–161
32 张余辉, 赵倩倩. 几类单生 Q 矩阵. 北京师范大学学报, 2006, 42: 111–113
33 张余辉, 赵倩倩. 几类单生 Q 矩阵 (续). 北京师范大学学报, 2008, 44: 4–8
34 张余辉, 赵倩倩. 带移民的单生过程. 数学学报, 2010, 53: 833–846
35 张余辉. 关于单生过程指数遍历和 ℓ 遍历的注记. 北京师范大学学报, 2010, 46: 1–5
36 张余辉. 相邻状态死亡速率成比例的单生 Q 矩阵. 北京师范大学学报, 2010, 46: 651–656
37 张余辉. 生灭大灾难型单生 Q 矩阵. 北京师范大学学报, 2011, 47: 347–350
38 张余辉. 无限和有限状态空间上单生过程击中时矩的表示. 北京师范大学学报, 2013, 49: 445–452
39 Liao Z W, Wang L D, Zhang Y H. Probabilistic meanings of numerical characteristics for single birth processes. Chinese J Appl Probab Statist, 2016, 32: 452–462
40 Chen M F, Zhang Y H. Unified representation of formulas for single birth processes. Front Math China, 2014, 9: 761–796
41 Mao Y H, Zhang Y H. Explicit criteria on separation cutoff for birth and death chains. Front Math China, 2014, 9: 881–898
42 Mao Y H, Zhang C, Zhang Y H. Separation cutoff for upward skip-free chains. J Appl Probab, 2016, 53: 299–306
43 Choi M C H, Patie P. Skip-free Markov chains. Trans Amer Math Soc, 2019, doi: 10.1090/tran/7773
44 Li Y, Pakes A G, Li J, et al. The limit behavior of dual Markov branching processes. J Appl Probab, 2008, 45: 176–189
45 Liu Y, Zhang Y. Central limit theorems for ergodic continuous-time Markov chains with applications to single birth processes. Front Math China, 2015, 10: 933–947
46 Jiang S X, Liu Y Y, Yao S. Poisson's equation for discrete-time single-birth processes. Statist Probab Lett, 2014, 85: 78–83
47 白晶晶, 李培森, 张余辉, 等. 离散时间单生过程的判别准则. 北京师范大学学报, 2015, 51: 227–235
48 Feller W. On boundaries and lateral conditions for the Kolmogorof differential equations. Ann of Math (2), 1957, 65: 527–570
49 Reuter G E H. Denumerable Markov processes and the associated contraction semigroups on l. Acta Math, 1957, 97: 1–46
50 侯振挺, 郭青峰. 齐次可列马尔可夫过程. 北京: 科学出版社, 1978
51 Chen M F, Zhang X. Isospectral operators. Commun Math Stat, 2014, 2: 17–32
52 Tweedie R L. Criteria for ergodicity, exponential ergodicity and strong ergodicity of Markov processes. J Appl Probab, 1981, 18: 122–130
53 Isaacson D, Arnold B. Strong ergodicity for continuous-time Markov chains. J Appl Probab, 1978, 15: 699–706
54 Kemeny J G, Snell J L, Knapp A W. Denumerable Markov chains. New York: Springer-Verlag, 1976
55 Mao Y H. Algebraic convergence for discrete-time ergodic Markov chains. Sci China Ser A, 2003, 46: 621–630
56 Coolen-Schrijner P, van Doorn E A. The deviation matrix of a continuous-time Markov chain. Probab Engrg Inform

Sci, 2002, 16: 351–366
57 Mao Y H. Ergodic degrees for continuous-time Markov chains. Sci China Ser A, 2004, 41: 161–174
58 Mao Y H. Eigentime identity for transient Markov chains. J Math Anal Appl, 2006, 315: 415–424
59 Schlögl F. Chemical reaction models for non-equilibrium phase transitions. Z Phys, 1972, 253: 147–161
60 Haken H. Synergetics: An Introduction, 3rd ed. Berlin: Springer-Verlag, 1983
61 韩东. 一维 Brusselator 模型的遍历性. 新疆大学学报, 1991, 8: 37–40
62 吴波, 张余辉. 一维 Brusselator 模型. 应用概率统计, 2005, 21: 225–234
63 吴波, 张余辉. 一维 Brusselator 模型的一个性质. 北京师范大学学报, 2005, 41: 575–577
64 陈金文. 有限维 Brusselator 模型的正常返性. 数学物理学报, 1995, 15: 121–125
65 Reuter G E H. Competition processes. In: Proceedings of the 4th Berkeley Symposium on Mathematics, Statistics and Probability, vol. 2. Berkeley: University of California Press, 1961, 421–430

Progress in single birth processes

Yuhui Zhang

Abstract The single birth process, as a natural extension of birth and death process which is the simplest Q-process, has its own origins in research background. On one hand, the single birth process is nearly the largest class for which the explicit criteria on classical problems can be expected. Thus it becomes a fundamental comparison tool in studying complicated processes, such as infinite-dimensional reaction-diffusion processes. On the other hand, the single birth process is usually non-symmetric and hence is regarded as a representative of the non-symmetric processes. For non-symmetric processes, in contrast to symmetric ones, our knowledge is very limited, except for single birth processes to which many results are relatively completed. In this survey paper, we present some criteria on classical problems of single birth processes, including uniqueness, recurrence, ergodicity and strong ergodicity, as well as representation of return (or extinction) probability and stationary distribution. Recently explicit representation of solution of Poisson's equation has been obtained. Based on this tool, a unified treatment of various problems for general single birth processes is presented. To illustrate this approach we deal with uniqueness, recurrence and return probability as examples. Polynomial moments and exponential ones of return time as well as the distribution of explosion time are obtained similarly. Moreover, we present an explicit and sufficient condition for exponential ergodicity of single birth processes. At last, we review some concrete applications of single birth processes in the study of particle systems and other models.

Keywords **single birth processes, birth-death processes, ergodicity**

MSC(2010) **60J60**

doi: 10.1360/ N012017-00261