DCO1013 - Lista de exercícios 2

Levy Gabriel da S. G.
Engenharia elétrica - UFRN

1. Tomando a seguinte equação como base:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} P(f - nR_b) = T_b \tag{1}$$

Considerando que $B > R_b/2$, o somatório 1 possuirá versões deslocadas de $P(f)$ que irão se sobrepor, havendo a possibilidade de manter a igualdade verdadeira.

Porém para $B < R_b/2$ não haverá sobreposições da banda quando suas cópias forem centradas em múltiplos de R_b. Assim a sobreposição do espectro de amplitude não será garantido, resultando na desigualdade do somatório 1.

A condição limite $B = R_b/2$ pode ser alcançada apenas por meio de uma filtragem passa-baixas ideal, mas irrealizável devido à necessidade de um filtro com resposta ao impulso não causal (sinc).

Isso pode ser demonstrado enxergando o somatório 1 com $f_s = R_b$. Para uma situação sem mascaramento $R_b > 2B$ as cópias de $P(f)$ estarão centradas além dos pontos nR_b. Com uma frequência de amostragem f_s que está além da frequência de Nyquist e uma banda limitada do sinal, garante-se que não haja sobreposição da banda periódica do sinal.

2. (a) Como para o primeiro critério o pulso $p(t)$ era especificado como:

$$p(nT_b) = \begin{cases} 1,\, n = 0 \\ 0,\, n \neq 0 \end{cases} \tag{2}$$

Isso indica que o sinal amostrado por um trem de impulsos será: $\bar{p}(t) = p(t)\delta_{T_b}(t) = \delta(t)$, cujo espectro de amplitude será unitário:

$$R_b|\sum_{n=-\infty}^{\infty} P(f - nR_b)| = 1$$

Enquanto que para o segundo critério o pulso especificado é:

$$p(nT_b) = \begin{cases} 1,\, n = 0\, e\, n = 1 \\ 0,\, n \neq 0\, e\, n \neq 1 \end{cases} \tag{3}$$

Em relação ao sinal amostrado: $\bar{p}(t) = p(t)\delta_{T_b}(t) = \delta(t) + \delta(t - T_b)$, cujo espectro de amplitude será:

$$R_b|\sum_{n=-\infty}^{\infty} P(f - nR_b)| = 2$$

O novo pulso agora retorna para zero apenas em $t = -T_b$ e $t = 2T_b$, enquanto que o anterior retornava a zero na metade do tempo. Isso resulta em uma escalonação do tempo de pulso e estreitamento da banda.

(b) Enquanto que um exemplo de pulso que atende o primeiro critério pode ser uma sinc ($sinc(\pi R_b t)$), um pulso que atende o segundo critério é uma sinc modificada $\left(\dfrac{sinc(\pi R_b t)}{1 - R_b t}\right)$. Isso mostra que enquanto que o pulso do primeiro critério apenas decai com $1/t$, o pulso do segundo critério decai com $1/t^2$.

(c) Como esse tipo de pulso permite uma flexibilização do efeitos nocivos da ISI, ele se torna muito vantajoso em casos em que o sinal é binário, ou seja, que pode assumir apenas dois níveis e de sinais opostos.

3. Esse problema foi resolvido com o auxílio do MATLAB/Octave e suas funções *built-in* *erfc()* e *invercf()*.

   Considerando que a probabilidade de erro é dada por:

$$P_e = \frac{1}{2} erfc\left[\sqrt{\frac{E_{b1}}{N_0}}\right]$$

   Para o primeiro caso em que $P_e = 10^{-6}$, tem-se que o argumento de erfc() é dado por:

$$\sqrt{\frac{E_{b1}}{N_0}} = erfcinv(2P_e) = 3.3612$$

   Considerando que a energia de bit é uma função de sua amplitude ao quadrado integrada ao longo do tempo de bit, tem-se que para situação inicial $E_{b1} = a^2 T_b$. Porém no segundo caso a taxa de sinalização é dobrada, logo o tempo de bit reduz-se pela metade, resultando na seguinte relação entre as energias: $E_{b2} = a^2 T_b/2 = E_{b1}/2$.

   Finalmente o novo valor para a probabilidade média do erro será:

$$P_e^{'} = \frac{1}{2} erfc\left[\sqrt{\frac{E_{b2}}{N_0}}\right] = \frac{1}{2} erfc\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{E_{b1}}{N_0}}\right] = 0.38 \times 10^{-3}$$

4. Considerando uma composição da banda teórica mínima adicionada do excedente proporcionado pelo *raised cosine*, a banda total será:

$$B_T = \frac{R_b}{2} + \frac{rR_b}{2} = \frac{(1+r)R_b}{2}$$

Sendo R_b a taxa de transmissão de bits e r o fator de *roll-off*. Assim, para uma taxa de bits de $R_b = 56$ kbps e fatores de $r = [0.25; 0.5; 0.75; 1]$, a banda total será:

$$B_T = [35; 42; 49; 56] \text{ kHz}$$

5. (a) De acordo com o gráfico da figura 1 e considerando a função degrau unitário como $u(t)$, pode-se determinar a representação matemática do sinal $s(t)$ como:

$$s(t) = \frac{A}{2}[u(t) - 2u(t - T/2) - u(t - T)]$$

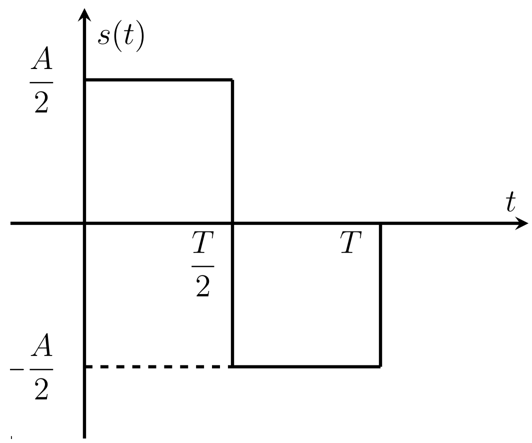

Figura 1: Forma de onda do sinal $s(t)$.

Como a resposta ao impulso para o filtro casado é dado por: $h(t) = s(T - t)$, tem-se que a representação gráfica é dada pela figura 2 e a sua representação matemática será:

$$h(t) = \frac{A}{2}[u(T - t) - 2u(T/2 - t)] - u(-t)]$$

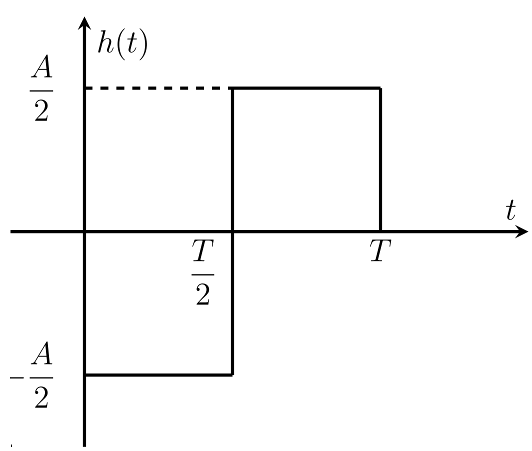

Figura 2: Forma de onda para a resposta ao impulso do filtro casado $h(t)$ com o sinal $s(t)$.

(b) Enquanto isso a saída do filtro casado é dada pela convolução entre o sinal de entrada e o filtro, de forma que: $r(t) = s(t) * h(t)$. Apesar da tarefa ser exaustiva, a convolução será calculada por partes levando em consideração a representação gráfica. Sendo assim:

$$0 \leq t \leq T/2\text{: } r(t) = -\frac{A^2}{4}t$$
$$T/2 < t \leq T\text{: } r(t) = -\frac{A^2T}{8} + \frac{3A^2}{4}(t - T/2)$$
$$T < t \leq 3T/2\text{: } r(t) = \frac{A^2T}{4} - \frac{3A^2}{4}(t - T)$$
$$3T/2 < t \leq 2T\text{: } r(t) = -\frac{A^2T}{8} + \frac{A^2}{4}(t - 3T/2)$$

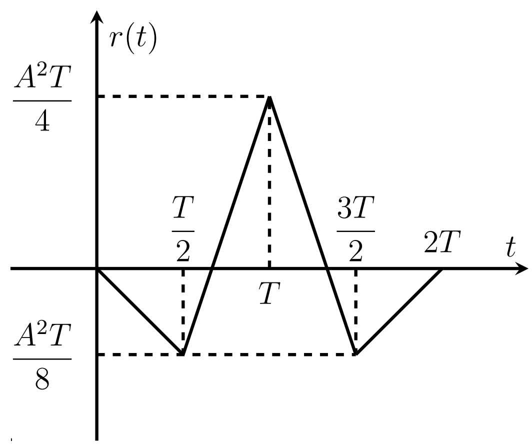

Figura 3: Forma de onda para a saída do filtro casado.

(c) O valor máximo pode ser facilmente encontrado pelo gráfico 3 ou pela expressão matemática como $\frac{A^2T}{4}$ em $t = T$, ou seja, com pico em um instante de amostragem igual ao tempo de símbolo.

6. Considerando que a forma do sinal PCM com tempo de bit T_b é:

$$x(t) = \begin{cases} +A + w(t),\ bit = 1 \\ w(t),\ bit = 0 \end{cases} \tag{4}$$

A saída $y(t)$ do filtro casado assume duas hipóteses de acordo com o bit que foi enviado:

$$y(t) \;=\; \frac{1}{T_b}\int_0^{T_b} x(t)dt \begin{cases} A + \dfrac{1}{T_b}\displaystyle\int_0^{T_b} w(t)dt,\ bit = 1 \\ \dfrac{1}{T_b}\displaystyle\int_0^{T_b} w(t)dt,\ bit = 0 \end{cases} \tag{5}$$

Uma vez que $w(t)$ é um processo aleatório, não se pode dizer com certeza qual nível será assumido no instante de amostragem. Sendo $w(t)$ um processo aleatório possui distribuição Gaussiana com média zero, a probabilidade pode ser avaliada com a seguinte lei para função densidade de probabilidade:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \tag{6}$$

Como a variável aleatória W que representa o ruído possui média zero, a média de cada hipótese será (o subscrito representa qual bit foi originalmente enviado):

$$\mu_0 = E[Y \,|\, bit = 0] = 0$$
$$\mu_1 = E[Y \,|\, bit = 1] = A$$

Assim, permite-se escrever a função densidade de probabilidade para cada hipótese de bit, sendo a equação 7 representando a fdp para o bit 0 enviado e a equação 8 para o bit 1 enviado.

$$p_0(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/(2\sigma^2)} \tag{7}$$

$$p_1(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(y-A)^2/(2\sigma^2)} \tag{8}$$

Já as probabilidades do erro serão:

$$P_{e0}(y > \lambda \,|\, bit = 0) = \int_\lambda^\infty p_0(y)dy \tag{9}$$

$$P_{e1}(y < \lambda \,|\, bit = 1) = \int_{-\infty}^{\lambda} p_1(y)dy \tag{10}$$

A probabilidade total do erro será dada pelo teorema da probabilidade total e considerando a equiprobabilidade ($p_0 = p_1$):

$$P_e = p_0 P_{e0} + p_1 P_{e1} = \frac{1}{2}(P_{e0} + P_{e1})$$

A energia de bit $E_b = A^2 T_b$ corresponde o tempo em que o bit 1 é enviado. O sinal não possui energia para o bit 0. Um limiar de detecção ou decisão pode ser definido como a amplitude $A/2$ correspondente à metade dessa energia:

$$\lambda = \frac{A}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{E_b}{T_b}}$$

Para esse limiar a soma das duas probabilidades será a mínima de forma que a probabilidade de erros para cada tipo seja igual. Finalmente a probabilidade do erro será:

$$P_e = \int_{A/2}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/(2\sigma^2)} dy \tag{11}$$

Fazendo a substituição de variáveis $z = y/\sigma$, tem-se: $dz = dy/\sigma$ e:

$$P_e = Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{A/(2\sigma)}^{\infty} e^{-z^2/2} dz \tag{12}$$

O termo $A/(2\sigma)$ pode ser transformado em função da energia de bit, densidade de energia do ruído e tempo de bit. Sendo $E_b = A^2 T_b/2$ e $\sigma^2 = N_0/(2T_b)$, tem-se:

$$\frac{A}{2\sigma} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2E_b}{T_b}\frac{2T_b}{N_0}} = \sqrt{\frac{E_b}{N_0}}$$

Finalmente:

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) \tag{13}$$

Ainda pode ser rescrito em função da função complementar do erro. Sendo $Q(u) = 1/2 \times erfc(u/\sqrt{2})$, com $u = \sqrt{E_b/N_0}$, tem-se:

$$P_e = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_0}}\right) = \frac{1}{2} erfc\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{A^2 T_b}{N_0}}\right) \tag{14}$$

7. Para um sinal NRZ a probabilidade média do erro é conhecida como:

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

Como a energia de bit é: $E_b = A^2T_b$; e a variância do ruído: $\sigma^2 = \frac{N_0}{2T_b} = 10^{-2}V^2$, tem-se:

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{A^2T_b}{\sigma^2T_b}}\right) = Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)$$

Como é desejado que haja 1 bit errado para cada 10^8 bits transmitidos, faz-se a probabilidade do erro igual a $P_e = 10^{-8}$. O desvio padrão é a raiz quadrada da variância, logo $\sigma = 10^{-1}V$. Fazendo $u = A/\sigma$, e considerando a função *qfuncinv()* do MATLAB/Octave:

$$\frac{A}{\sigma} = qfuncinv(P_e) = 5.6120 \quad (15)$$

Resolvendo $A/\sigma = 5.6120$, implica em $A = 0.5612$.