

Prática computacional: BER e P_e teórica sob ruído AWGN

Item 1

O diagrama da constelação apresenta no eixo complexo os símbolos de um sinal modulado, com as componentes em fase no eixo das abscissas e as componentes em quadratura no eixo das ordenadas. O sinal NRZ bipolar apresentado no problema possui dois símbolos distintos, sendo eles $\{-1, 1\}$ no eixo real.

O sinal transmitido e que não possui influência do AWGN apresenta um diagrama de constelação perfeito, ou seja, para uma quantidade n de bits transmitidos, os possíveis símbolos só ocuparão a posição -1 e 1 do eixo em fase do diagrama de constelação. A figura 1 considera

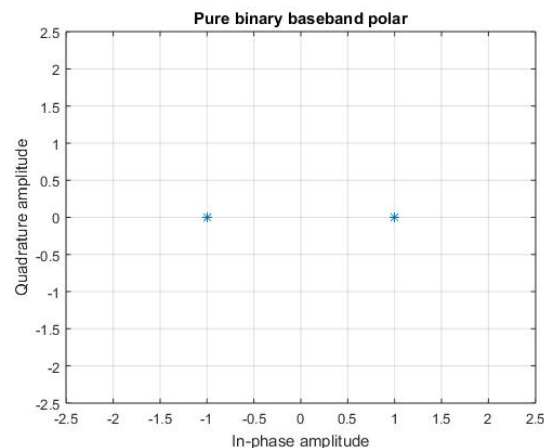


Figura 1: Constelação do sinal banda base polar livre de ruído.

Porém ao considerar o canal AWGN com característica probabilística e complexa, haverá uma significativa mudança na constelação do sinal recebido. Essa mudança fará com que os símbolos que antes estavam centrados em -1 e 1 no eixo em fase, agora flutuem em torno desses valores possuindo componentes em fase e em quadratura, assim gerando uma nuvem em torno dos símbolos pretendidos.

Uma figura de mérito deve ser levada em conta para destacar quantitativamente quanto a potência do sinal se destaca da potência do AWGN, pois se a potência do ruído for muito relevante em relação à potência do sinal, a nuvem em torno dos símbolos do diagrama de constelação pode aumentar e confundir a detecção a respeito de qual a posição original dos símbolos.

Um parâmetro conhecido em comunicações digitais e que funciona como uma boa figura de mérito para o sinal é a relação entre energia do bit pela densidade espectral de potência do ruído, o $E_b N_0 \left(\frac{E_b}{N_0} \right)$. Sua influência na constelação diz respeito diretamente ao quão dispersa será a nuvem de símbolos em torno dos símbolos originalmente transmitidos. Um alto $E_b N_0$ significa que a potência do sinal se destaca da potência do ruído e gera uma nuvem mais contida em torno dos símbolos originais, enquanto que o contrário gera uma nuvem dispersa que pode causar erro na detecção dos símbolos.

Um exemplo da influência do $E_b N_0$ na constelação pode ser observado graficamente na figura 2, que apresenta uma mesma quantidade de bits sendo transmitida em duas condições de $E_b N_0$.

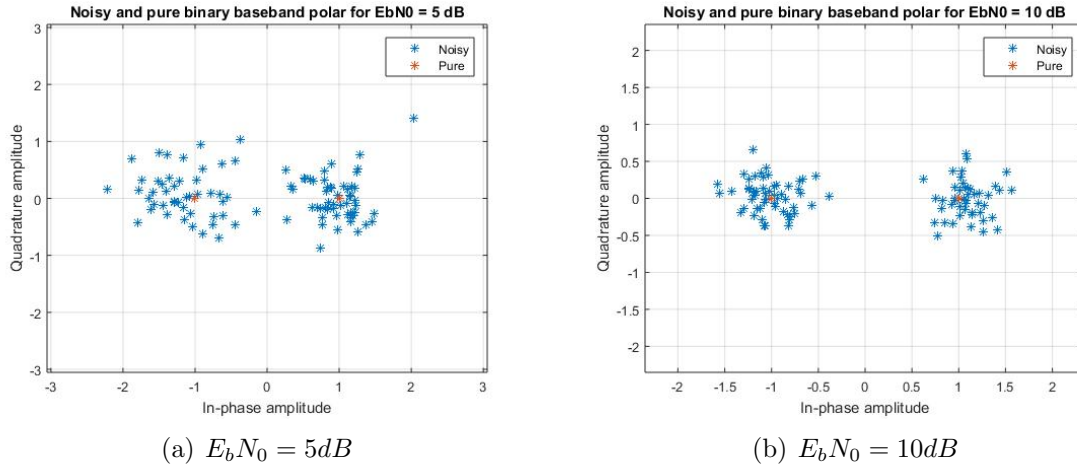


Figura 2: Comparação entre sinal transmitido e recebido na na entrada de um receptor sujeito AWGN em diferentes condições de $E_b N_0$.

Assim permite-se traçar graficamente comparações com a constelação do sinal transmitido (não influenciado pelo ruído), uma vez que esta está sobreposta à constelação do sinal recebido.

Item 2

Agora considerando a transmissão para vários valores de E_bN_0 diferentes, pode-se observar a progressão do diagrama de constelação. Sua tendência é tornar a nuvem mais concentrada em torno dos símbolos -1 e 1, de acordo com que E_bN_0 aumenta e elimina ambiguidades na detecção (diminuir o erro de detecção).

Com a transmissão e detecção para diferentes valores de E_bN_0 permite-se traçar um gráfico da taxa de erro de bits (BER) em função do E_bN_0 . Esse gráfico da $E_bN_0 \times \text{BER}$ é uma versão quantizada do gráfico da probabilidade de erro teórica (P_e) em função de E_bN_0 . A P_e é encontrada a partir da função Q ou da função complementar do erro (erfc).

Um gargalo para encontrar uma BER que corresponda ao valor da P_e é a quantidade de bits transmitida. Como a P_e depende unicamente da E_bN_0 , seu valor será preciso para cada valor de E_bN_0 fornecido. Porém a BER depende do número de bits transmitido e ela será precisa para valores menores de probabilidade de erro apenas para um alto número de bits transmitidos.

Por exemplo, considerando o caso da transmissão de 1000 bits, a quantidade máxima de bits detectados incorretamente serão 500 bits. Isso, pois um valor maior que 50% para a taxa de erros significaria que uma inversão no dispositivo de decisão seria o bastante para manter a taxa novamente abaixo do limite 50%. Como a quantidade de bits é um valor inteiro, a resolução da BER para esse caso será valores de 1/1000 (0.1%) de espaçamento. Se for considerar a curva da BER para valores baixos como 10^{-6} ou 10^{-7} , para o caso de 1000 bits não haverá precisão o suficiente para diferenciar entre esses dois valores. Assim, a solução possível para esse problema é aumentar a quantidade de bits transmitidos.

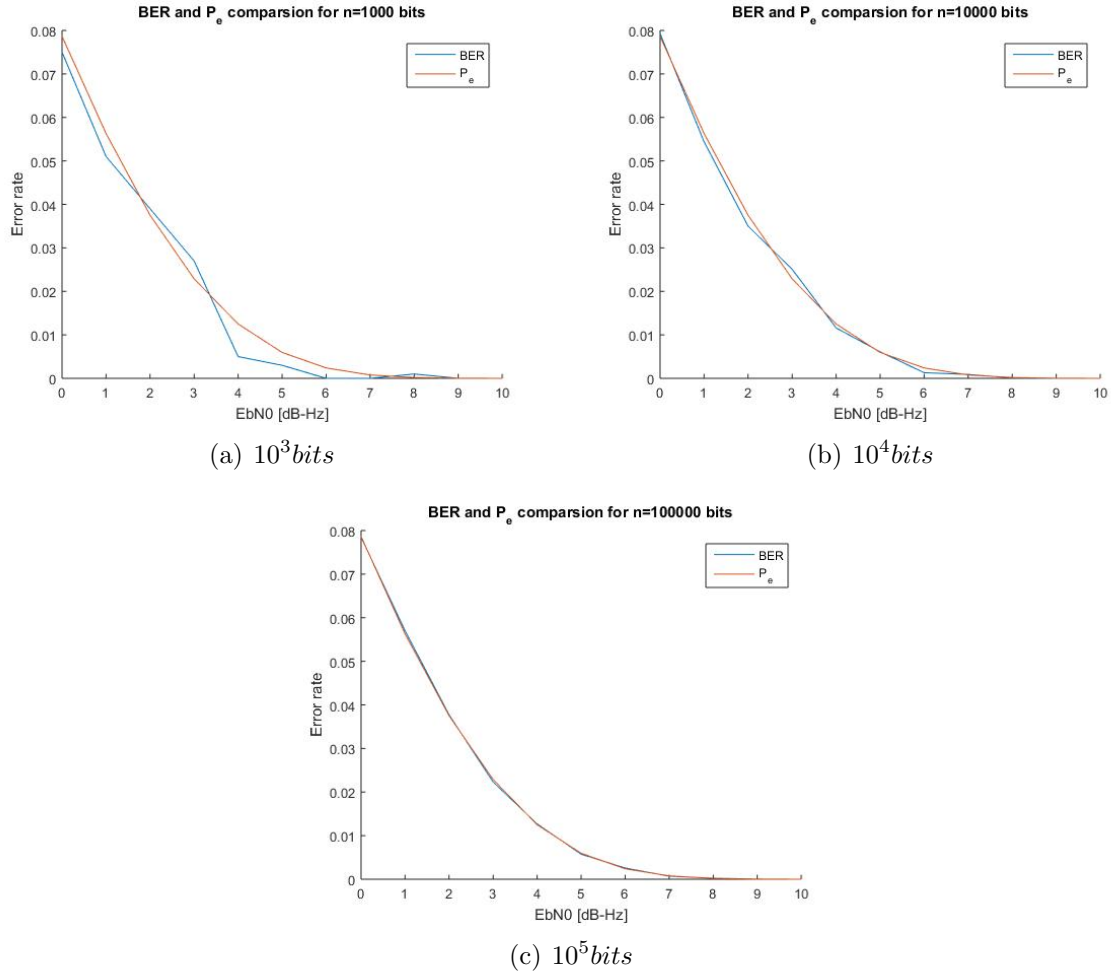


Figura 3: Curva de probabilidade de erro teórica em comparação com a taxa de erro de bits estimada pela transmissão de $\{10^3; 10^4; 10^5\}$ bits com E_bN_0 variando de 0 – 10dB

No item 2 foi apresentado gráficos para uma E_bN_0 variável para três condições de bits enviados (10^3 , 10^4 e 10^5 bits) de acordo com a figura 3. Observa-se que para o caso de menores bits, a curva de $E_bN_0 \times BER$ comparada com a curva $E_bN_0 \times P_e$ possui uma baixa correlação. Alguns valores de BER podem até apresentar valores de probabilidade de erro menor que o do teórico, mas isso se deve apenas à variabilidade do canal e baixa resolução de bits. O que é observado após aumento da quantidade de bits enviados, onde as curvas já se relacionam melhor devido a maior resolução.