



Universidade Federal do Rio Grande do Norte  
Centro de Tecnologia  
Departamento de Engenharia Elétrica  
ELE0522 - Sistemas de Controle II - 2019.2

## Projeto de controladores

Bruno Matias de Sousa  
Jefferson Henrique Silva  
Jefferson Patrick de Castro Bezerra  
Kathleen Noemi Duarte Rego  
Levy Gabriel da Silva Galvão  
Pedro Henrique de Souza Fonsêca dos Santos

Natal - RN, Novembro de 2019



Universidade Federal do Rio Grande do Norte  
Centro de Tecnologia  
Departamento de Engenharia Elétrica  
ELE0522 - Sistemas de Controle II - 2019.2

## **Projeto de controladores**

Relatório técnico referente à execução do projeto de controladores analógicos por diversos métodos de projeto na disciplina de Sistemas de Controle II, como requisito parcial para avaliação da terceira unidade.

Orientador: Prof<sup>o</sup>. Dr<sup>o</sup>. Kurios Iuri Pinheiro de Melo Queiroz

Natal - RN, Novembro de 2019

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Projeto de controladores por <i>negative feedback</i></b>	<b>5</b>
2.1	Método do lugar das raízes . . . . .	5
2.1.1	Projeto do Controlador . . . . .	5
2.1.2	Simulações no Scilab . . . . .	8
2.2	Método polinomial . . . . .	9
2.2.1	Projeto do Controlador . . . . .	9
2.2.2	Simulações no Scilab . . . . .	11
2.3	Método frequencial . . . . .	12
2.3.1	Projeto do Controlador . . . . .	12
2.3.2	Simulações no Scilab . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Projeto de controlador por <i>state feedback</i></b>	<b>19</b>
3.1	Método utilizando fórmula de Ackermann . . . . .	19
3.2	Simulações no Scilab . . . . .	21
<b>4</b>	<b>Metodologia</b>	<b>22</b>
<b>5</b>	<b>Resultados para o controlador por <i>negative feedback</i></b>	<b>23</b>

5.1	Projeto dos circuitos . . . . .	23
5.1.1	Planta . . . . .	23
5.1.2	Controlador PD . . . . .	24
5.1.3	Subtrator . . . . .	26
5.2	Simulações no LTSpice . . . . .	26
5.3	Resultados práticos . . . . .	29
<b>6</b>	<b>Resultados para o controlador por <i>state feedback</i></b>	<b>31</b>
6.1	Projeto dos circuitos . . . . .	31
6.2	Simulações no LTSpice . . . . .	32
6.3	Resultados práticos . . . . .	32
<b>7</b>	<b>Conclusões</b>	<b>35</b>
<b>A</b>	<b>Esquemáticos dos circuitos</b>	<b>37</b>
A.1	Planta em malha aberta . . . . .	37
A.2	Planta em malha fechada . . . . .	38
A.3	Planta e controlador PD em malha fechada . . . . .	39
<b>B</b>	<b>Scilab <i>scripts</i></b>	<b>40</b>
B.1	Margens de estabilidade e diagramas de Bode e Nyquist . . . . .	40

# 1 Introdução

Os sistemas reais nem sempre possuem o comportamento de saída como o desejado, seja pelas não idealidades dos componentes ou pela própria dinâmica do sistema. Considerando a impossibilidade de alterar essas particularidades, seja por os componentes não serem acessíveis à modificação ou se o acesso seja invasivo ao sistema, surge a necessidade de projetar controladores.

O controladores procuram avaliar as saídas atuais do sistema e, com base em certos parâmetros, atuar na entrada do sistema para que a saída se comporte como desejada. Não necessitando que altere a dinâmica do sistema original.

Dessa forma, o presente trabalho tem o objetivo de projetar controladores por realimentação negativa e por realimentação de estados para a planta modelada pela função de transferência da equação 1. Os métodos de projeto de controladores PID por realimentação negativa (*negative feedback*) compreendem: método pelo lugar das raízes, método polinomial e método frequencial. Já para o controlador por realimentação de estados (*state feedback*) foi utilizado o método utilizando a fórmula de Ackermann

$$G_p(s) = \frac{2}{s(s + 0,5)} \quad (1)$$

Por meio do Scilab simula-se inicialmente o sistema em malha aberta e fechada sem o uso de controladores, de forma a avaliar se há a necessidade de projetar um controlador.

Para simular o sistema em malha aberta, montou-se o diagrama mostrado na figura 1(a) e se obteve a saída conforme ilustra a figura 1(b). Assim, percebe-se uma instabilidade no sistema, promovida pela presença do integrador na planta.

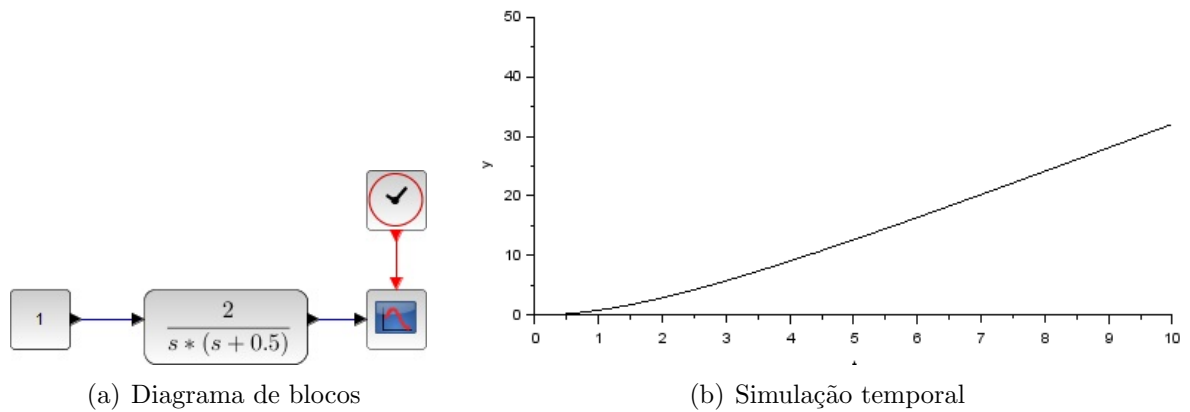


Figura 1: Simulação com a planta em malha aberta no XCOS.

Colocando a planta em malha fechada, conforme mostra a figura 2(a), obteve-se o desempenho expresso na figura 2(b), apresentando um percentual de *overshoot* de cerca de 57% e tempo de estabilização de, aproximadamente, 14 segundos. Assim, demonstrando a necessidade de um controle

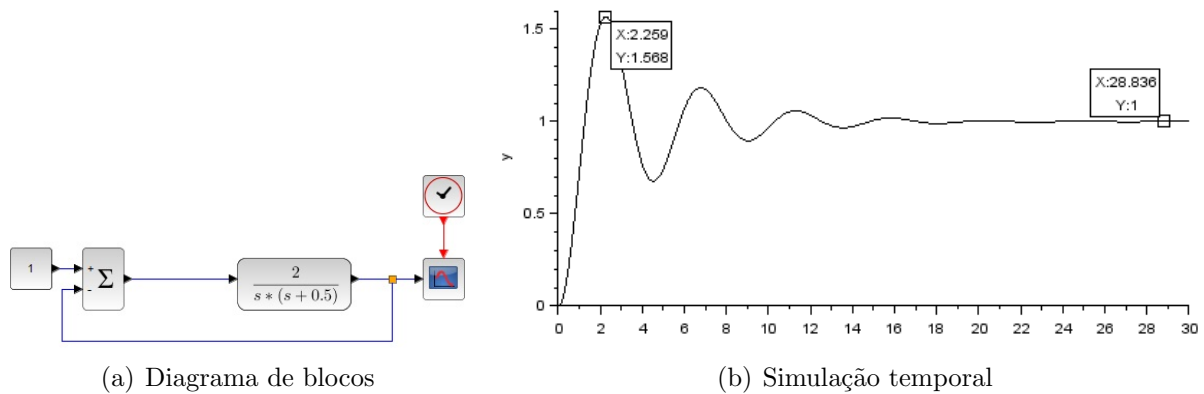


Figura 2: Simulação com a planta em malha fechada no XCOS.

## 2 Projeto de controladores por *negative feedback*

### 2.1 Método do lugar das raízes

#### 2.1.1 Projeto do Controlador

O desempenho escolhido para o sistema foi de  $e.r = 0$  para  $r(t) = 1$ ,  $T_{s2\%} \leq 2s$  e  $PO\% \leq 5\%$ .

Inicialmente foi analisada a planta e notou-se que ela já satisfazia o requisito de erro em regime, pois já existia um componente integrador no sistema, garantindo assim o erro em regime nulo. Posteriormente, foi checado o tempo de estabilização, que inicialmente era de 16 segundos. Para que o tempo seja menor ou igual a 2 segundos, temos que satisfazer a equação  $T_{s2\%} = \frac{4}{\xi w_n}$ , que nos dá que  $\xi w_n = 2$ . Dessa forma, teremos a parte real dos polos em  $-\xi w_n = -2$ . No potencial de *overshoot*, temos associado ao de 5%, um coeficiente de amortecimento  $\xi = 0,7$  e um ângulo  $\theta = 45^\circ$ , mostrando assim que teremos um par complexo conjugado nos polos.

Com essas considerações, chegamos a conclusão que usaremos um controlador proporcional derivativo, PD. Sua equação padrão é:

$$G_c(s) = K_c \tau_d \left( s + \frac{1}{\tau_d} \right) \quad (2)$$

Com isso, encontraremos  $K_c$  e  $\tau_d$  satisfazendo as duas condições do lugar das raízes, a condição angular e a condição de magnitude. A condição angular nos diz que o somatório dos ângulos dos polos e zeros, no conjunto controlador+planta, no lugar das raízes tem que ser igual a  $180^\circ$ . Assim, temos:

$$A(s_i) = 180^\circ, \forall s_i \in RL \quad (3)$$

Como temos dois polos na planta e teremos um zero adicionado pelo PD, a equação fica:

$$A(s_i) = \theta_Z - \theta_{P1} - \theta_{P2} = 180^\circ$$

É possível encontrar  $\theta_{P1}$  e  $\theta_{P2}$  por meio dos parâmetros dados. Sabemos que  $s_i$  vale  $-2$  no eixo real e tem ângulo  $45^\circ$  com a origem. Como  $\theta_{P1}$  se encontra na origem, temos:

$$\theta_{P1} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$$

Já  $\theta_{P2}$  se encontra em  $-0,5$  no eixo real. Podemos encontrar seu valor usando um arco tangente, pois como o ângulo de  $s_i$  é  $45^\circ$ , seu valor no eixo imaginário é igual ao seu valor no eixo real. Logo, temos:

$$\theta_{P2} = 180 - \arctg\left(\frac{2}{1,5}\right) = 126,87^\circ$$

Assim, podemos encontrar o valor de  $\theta_Z$ :

$$\theta_Z - \theta_{P1} - \theta_{P2} = 180^\circ$$

$$\theta_Z = 180^\circ + \theta_{P1} + \theta_{P2}$$

$$\theta_Z = 180^\circ + 135^\circ + 126,87^\circ$$

$$\theta_Z = 441,87^\circ = 81,87^\circ$$

Com o valor de  $\theta_Z$ , podemos calcular o valor do zero do PD no lugar das raízes. Considerando "d" a distancia entre  $s_i$  e o zero, temos:

$$tg(81,87^\circ) = \frac{2}{d}$$

$$d = \frac{2}{tg(81,87^\circ)}$$

$$d = 0,286$$

Como d é apenas a distancia entre  $s_i$  e o zero, para encontrar o  $\tau_d$ , somaremos com  $-2$ :

$$-\frac{1}{\tau_d} = -2 - 0,286$$

$$\tau_d = \frac{-1}{-2,268}$$

$$\boxed{\tau_d = 0,437}$$



Agora nos resta checar a condição de magnitude. Ela nos diz que o módulo dos zeros e polos, do conjunto controlador+planta, tem que ser igual a 1. Assim, temos:

$$|A(s_i)| = 1, \forall s_i \in RL \quad (4)$$

Teremos então, na equação, a amplitude do zero e dos dois polos, além dos valores de ganho  $K_c$ , de  $\tau_d$  e o ganho que já estava na planta. Temos, então:

$$\begin{aligned} |A(s_i)| &= 1 \\ \frac{2K_c\tau_d A_Z}{A_{P1}A_{P2}} &= 1 \\ K_c &= \frac{A_{P1}A_{P2}}{2\tau_d A_Z} \end{aligned}$$

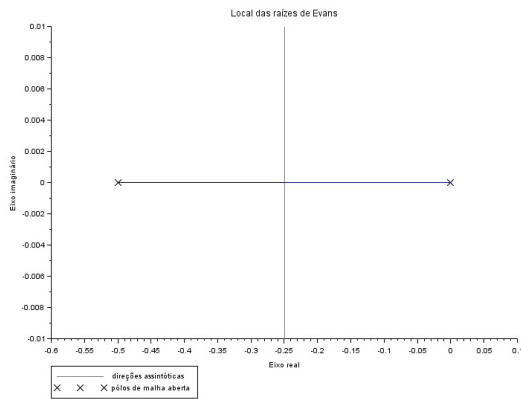
Para encontrar os valores de amplitude, basta apenas encontrar as distancias dos polos e zeros para o  $s_i$ . Logo:

$$\begin{aligned} K_c &= \frac{A_{P1}A_{P2}}{2\tau_d A_Z} \\ K_c &= \frac{\sqrt{2^2 + 2^2} * \sqrt{2^2 + 1,5^2}}{2 * 0,437 * \sqrt{2^2 + 0,286^2}} \\ \boxed{K_c = 4,00} \end{aligned}$$

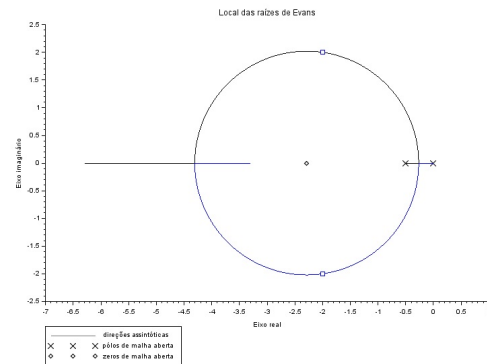
Assim, o PD fica da seguinte forma:

$$\begin{aligned} G_c(s) &= 4,00 * 0,437 \left( s + \frac{1}{0,437} \right) \\ \boxed{G_c(s) = 1,748(s + 2,286)} \end{aligned}$$

Com a inserção do controlador no sistema, temos um novo zero no lugar das raízes, de forma a modificá-lo. Nas figuras 3(a) e 3(b) é possível ver a diferença. Foi utilizado a função **evans()** do **Scilab** para obter esses gráficos. Os quadrados por cima da linha do lugar das raízes na figura 3(b) mostram exatamente os novos polos do sistema.



(a) Lugar das raízes da planta



(b) Lugar das raízes da planta+controlador

Figura 3: Simulação com o sistema planta+controlador em malha fechada no XCOS.

### 2.1.2 Simulações no Scilab

Com os parâmetros obtidos no projeto, é feita a análise comparativa dos mesmos a partir da simulação. Neste caso, foi usada a ferramenta de modelagem e simulação de sistemas **XCOS**, incluso no software **Scilab**, que conta com diagrama de blocos ajustáveis de mais variadas funções úteis à realização do sistema.

Ao anteriormente explanado sistema em malha fechada foi integrado o controlador PD gerado com o método do lugar das raízes, com a finalidade atender adequadamente aos requisitos de desempenho. As Figuras 4(a) e 4(b) abaixo mostram, respectivamente, a modelagem e simulação do sistema. O bloco PID da Figura 4(a) é, funcionalmente, um controlador PD e teve de ser mantido assim por limitações do software.

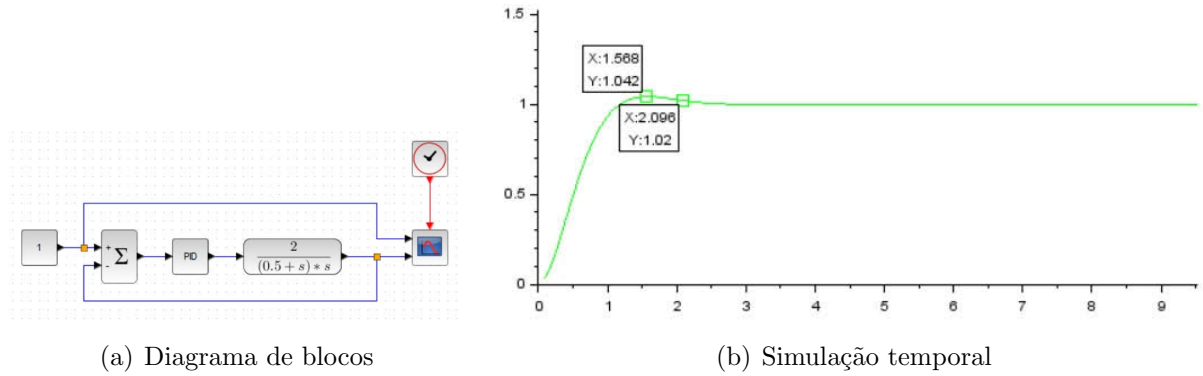


Figura 4: Simulação com o sistema planta+controlador em malha fechada no XCOS.

Observa-se um percentual de *overshoot* de 4,5% e um tempo de estabilização de 2% de 2,096 segundos. Tais parâmetros se aproximam dos resultados teóricos e, embora haja uma ultrapassagem pequena no tempo de estabilização, este valor está dentro de uma margem de aceitabilidade. É válido lembrar que o desempenho quanto ao erro em regime permanente já havia sido atendido antes mesmo do uso do controlador.

## 2.2 Método polinomial

### 2.2.1 Projeto do Controlador

Estabeleceu-se o desempenho desejado para o sistema para  $e.r = 0$  para  $r(t) = 1$ ,  $T_{S2\%} \leq 4s$  e  $PO\% \leq 5\%$ .

Então, primeiramente, antes de iniciar os devidos cálculos, observou-se os requisitos para se atender no limiar o desempenho desejado para o sistema. Para o erro em regime, como a planta já possui um componente integrador, já existe a garantia da anulação do erro em regime. Para o percentual de *overshoot*, por tabela, associa-se a um  $\xi = 0.7$  e, conseqüentemente,  $\theta = 45^\circ$ , sendo assim, já se percebe a necessidade de um par de polos complexos conjugados. Quanto ao tempo de estabilização, para se atender o tempo de 4 segundos, pela equação  $T_{S2\%} = \frac{4}{\xi w_n}$ , necessita-se de polos com parte real  $(-\xi w_n)$  igual a -1.

Diante disto, para atender o desempenho desejado para o sistema, será necessário que

a combinação controlador+planta em malha fechada tenha os pólos  $-1 \pm j1.020$ . Ou seja, o denominador da função de transferência em malha fechada, deve conter  $s^2 + 2s + 2.041$ . Sendo assim, partiu-se para a projeção, de fato do controlador, utilizando o método polinomial, baseado na equação diofantina.

A partir das inequações dos graus dos polinômios para aplicação do método, pode-se assumir as igualdades abaixo:

$$\begin{aligned} n_{a*} \geq n_a = 2 &\Rightarrow n_{a*} \geq 2 \Rightarrow \boxed{n_{a*} = 2} \\ n_l \leq \max(n_{a*} - n_a, n_b - 1) &= \max(0, -1) \Rightarrow n_l \leq 0 \Rightarrow \boxed{n_l = 0} \\ n_p < n_a &\Rightarrow n_p < 2 \Rightarrow \boxed{n_p = 1} \end{aligned}$$

A partir dos graus assumidos nas expressões acima, pode-se destacar o formato dos polinômios conforme abaixo:

$$\begin{aligned} a^*(s) &= s^2 + 2s + 2.041 \\ b(s) &= 2 \\ a(s) &= s^2 + 0.5s \\ \rho(s) &= \rho_1 s + \rho_0 \\ l(s) &= l_0 \end{aligned}$$

Neste ponto, aplicou-se a equação diofantina  $a^*(s) = a(s)l(s) + b(s)\rho(s)$ . Então, resolvendo-a, obteve-se:

$$\begin{aligned} \boxed{l_0 = 1} \\ 0.5l_0 + 2\rho_1 = 2 &\Rightarrow \boxed{\rho_1 = 0.75} \\ 2\rho_0 = 2.041 &\Rightarrow \boxed{\rho_0 = 1.021} \end{aligned}$$

Sendo assim, a função de transferência do controlador encontrada foi equivalente a um controlador do tipo PD, como segue abaixo:

$$G_c(s) = 0.75s + 1.021 \Leftrightarrow G_c(s) = 0.75(s + 1.361)$$

## 2.2.2 Simulações no Scilab

A partir dos cálculos realizados, partiu-se para as simulações com o fim de se visualizar o comportamento do sistema em três situações: planta em malha aberta, planta em malha fechada e sistema planta+controlador em malha fechada. Sendo que as duas primeiras simulações já foram inicialmente explicitadas. Para as simulações, utilizou-se a ferramenta disponível no software livre **Scilab** chamada **XCOS**, com a qual é possível construir o diagrama de blocos e parametrizá-los de forma bem simples. Assim, segue-se.

Adicionou-se o controlador obtido através do método polinomial com o sistema em malha fechada, como mostra o diagrama da Figura 5(a) e, assim, obteve-se a saída conforme a Figura 5(b), apresentando um percentual de *overshoot* de aproximadamente 4.5% e tempo de estabilização em torno de 4.18 segundos.

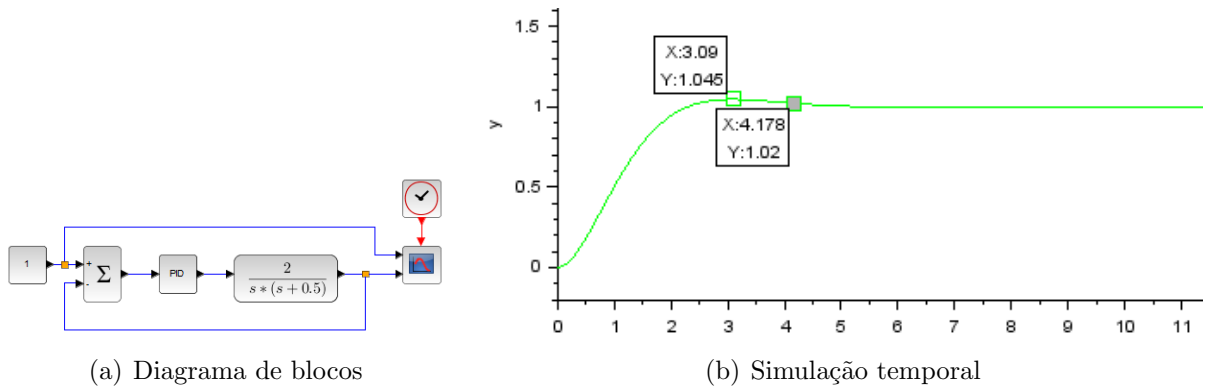


Figura 5: Simulação com o sistema planta+controlador em malha fechada no XCOS.

Sendo assim, a partir destas simulações, percebe-se que o controlador projetado atende ao desempenho desejado inicialmente para a planta, com certa imprecisão no tempo de estabilização, mas isto é normal em virtude dos arredondamentos e, além disso, admite-se que o desempenho requerido já possui uma certa "folga".

## 2.3 Método frequencial

### 2.3.1 Projeto do Controlador

Considerando a planta na forma mônica e  $s = jw$ , tem-se:

$$G_p(jw) = \frac{4}{jw(\frac{jw}{0,5} + 1)}$$

Devemos projetar um controlador PD para obter as especificações de desempenho iguais a  $MF \geq 70^\circ$ ,  $MG \geq 6$  dB,  $w_B \geq \pi$  rad/s e  $e.r = 0$  para  $r(t) = 1$ ,  $\forall t \geq 0$ .

De inicio devemos calcular a margem de fase (MF), margem ganho (MG),  $w_B$  e erro em regime da nossa planta e checar se algumas dessas especificações já são satisfeitas pela própria planta, caso não ocorra devemos ajustar/projetar nosso controlador para que satisfazer as condições de desempenho desejadas.

Calculando a MG da planta temos:

$$\begin{aligned}\angle G(jw) &= -180^\circ \\ -90^\circ - \text{atan}\left(\frac{w}{0,5}\right) &= -180^\circ \\ \text{atan}\left(\frac{w}{0,5}\right) &= 90^\circ \\ w = fcf &= \infty \\ \boxed{MG = \infty}\end{aligned}$$

Calculando, agora, a MF da planta teremos:

$$\begin{aligned}\frac{4}{|jw|\left|\frac{jw}{0,5} + 1\right|} &= 1 \\ \frac{4}{w\sqrt{4w^2 + 1}} &= 1 \\ w^2(4w^2 + 1) &= 16\end{aligned}$$

$$4w^4 + w^2 - 16 = 0$$

$$w = fcg \approx 1.3707 \text{ rad/s}$$

$$MF = 180^\circ + \angle G(j * fcg)$$

$$MF = 180^\circ - 90 - atan(2 * 1.3707)$$

$$\boxed{MF \approx 20,04^\circ}$$

Podemos calcula também o  $w_B$ :

$$|G(jw)| = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$$

$$\frac{4}{w\sqrt{4w^2 + 1}} = 0,707$$

$$w(\sqrt{4w^2 + 1}) = 5,6577$$

$$4w^4 + w^2 - 32,01 = 0$$

$$\boxed{w_B \approx 1.6452 \text{ rad/s}}$$

Por fim, como a planta já possui um integrador, o erro em regime para referência tipo degrau é nulo, ou seja,  $e.r = 0$ .

Como visto a planta atende apenas os requisitos de MG e erro em regime, logo necessitaremos de um controlador PD para ajustar a MF e o  $w_B$ .

A função de transferência para o controlador ( $G_c$ ) é dada ´por:

$$G_c(s) = k_c(1 + \tau_d s) \tag{5}$$

$$G_c(jw) = k_c(1 + \tau_d jw)$$

Desejamos encontrar os parâmetros do controlador  $k_c$  e  $\tau_d$  para obtemos seus valores. Primeiramente, impõe-se ao sistema um  $w_B = \pi \text{ rad/s}$  que é o requisitado, com isso teremos:

$$|G(jw_B)| = \frac{4}{w_B \sqrt{4w_B^2 + 1}} = 0,2 \text{ ou } -13,97 \text{ dB}$$

Ou seja deveremos ter um  $|G(jw_B)| = 5$  ou 13,97 dB, para garantir um  $w_B = fcg = \pi$  rad/s.

Calculando a margem de ganho para  $fcg$  encontrado anteriormente, teremos:

$$MF = 180^\circ + \angle G(jw_B) = 180^\circ - 90^\circ - \text{atan}(2 * fcg)$$

$$MF = 9,04^\circ$$

Calculando a margem de ganho que o controlador PD deve proporcionar, devemos calcular quanto falta para chegar na MF solicitada.

$$\Delta_{MF} = MF_f - MF_i = 70^\circ - 9,04^\circ = 60,96^\circ$$

Dessa forma, teremos como calcular  $\tau_d$  necessário.

$$\angle G_c(j * fcg) = 60,96^\circ$$

$$\text{atan}(\tau_d * \pi) = 60,96^\circ$$

$$\tau_d = \frac{\tan(60,96^\circ)}{\pi}$$

$$\boxed{\tau_d = 0,573302}$$

Podemos, agora, com  $\tau_d$  calcular  $k_c$  que será:

$$|G_c(j * fcg)| = 5$$

$$k_c = 1 + \sqrt{\tau_d^2 * \pi^2} = 5$$

$$k_c = \frac{5}{\sqrt{1 + \tau_d^2 * \pi^2}}$$

$$\boxed{k_c = 2,4271}$$

Com os parâmetros do controlador encontrados, podemos pela equação 5, encontrar finalmente a função de transferência do controlador.

$$\boxed{G_c(s) = 2,4271(1 + 0,573302s)} \quad (6)$$



### 2.3.2 Simulações no Scilab

**Script frequencial** O código fonte desse *script* pode ser encontrado no apêndice B.1 ao final desse trabalho.

Ao início do *script* é utilizada a função **syslin()** para modelar a função de transferência em malha aberta da planta e em malha aberta da planta com o PD.

Após isso são chamadas as funções **bode()** e **nyquist()**. Elas fornecem, respectivamente os diagramas de Bode de magnitude e fase e o diagrama de Nyquist para a função de transferência dada como argumento e modelada pela função descrita no parágrafo anterior.

Pode-se observar na figura 6 os diagramas de Nyquist para a planta sem o PD (figura 6(a)) e da planta com o PD (figura 6(b)) resultante do uso da função **nyquist()**. Em uma visão aprofundada dos diagramas e uma vez que nem a função de transferência da planta sem controlador ou da planta com o PD possuem polos no semiplano direito aberto, observa-se que o diagrama de Nyquist para a planta sem controlador e com controlador não englobam o ponto  $(-1,0)$ , assim implicando que ambas as funções de transferência em malha fechada são estáveis, pois obedecem o critério de estabilidade de Nyquist.

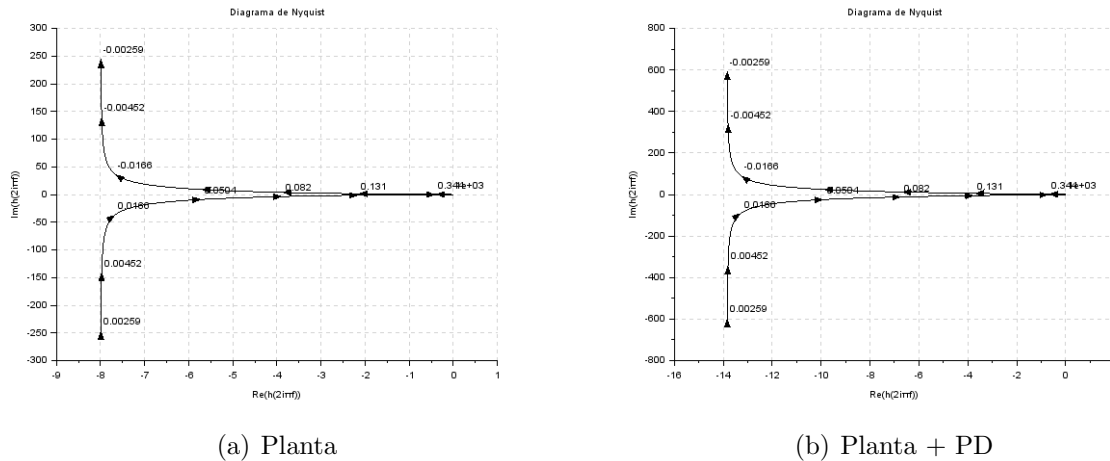


Figura 6: Diagramas de Nyquist obtidos no scilab com a função **nyquist()**.

De forma complementar aos diagramas de Bode obtidos com a função **bode()** e dispostos na figura 7, tanto para a planta sem controlador (figura 7(a)), quanto para a planta com o PD (figura 7(b)), também foram utilizadas as funções **p\_margin()** e

**g\_margin()** para avaliar as margens de estabilidade dos sistemas.

A função **p\_margin()** recebe como argumento a função de transferência e retorna a margem de fase (MF) e a frequência de cruzamento de ganho (fcg), sendo esta última comumente aproximada ao valor da frequência de corte do sistema. Já a função **g\_margin()** recebe como argumento a função de transferência e retorna a margem de ganho (MG) e a frequência de cruzamento de fase (fcf), sendo esta última comumente aproximada ao valor da frequência de corte do sistema.

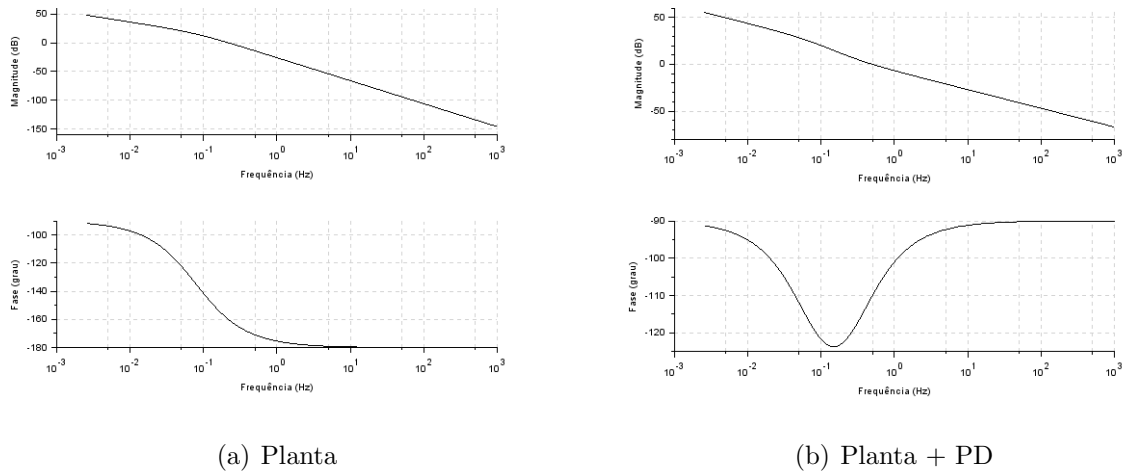


Figura 7: Diagramas de Bode obtidos no scilab com a função **bode()**.

Para o sistema da planta sem controlador obteve-se uma margem de fase de  $20^\circ$  e frequência de cruzamento de ganho de  $1.37 \text{ rad/s}$ , margem de ganho infinita e frequência de cruzamento de fase indefinida.

Já os resultados para a planta com o controlador PD obteve-se uma margem de fase de  $70^\circ$  e frequência de cruzamento de ganho de  $3.14 \text{ rad/s}$ , margem de ganho ainda infinita e frequência de cruzamento de fase indefinida. Dessa forma obtendo-se os valores assim como esperado no projeto.

**XCOS** No XCOS as análises foram feitas em um intervalo de tempo de 10 segundos, com tempo de inicialização em zero e período de 0.01 segundos.

Os parâmetros do PID utilizado na simulação são tais que obedecem a figura 9

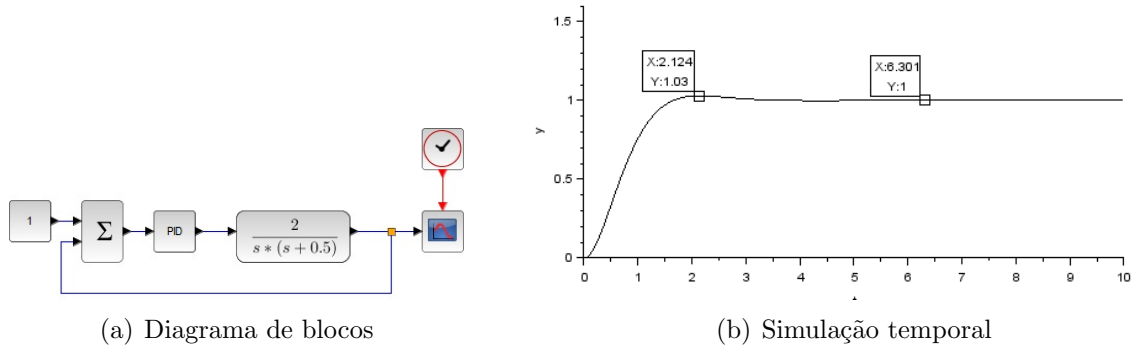


Figura 8: Simulação no XCOS para a planta em malha fechada e com PD.

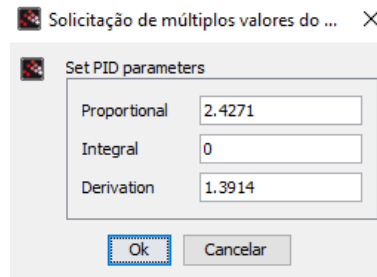


Figura 9: Parâmetros do controlador PID utilizado na simulação do XCOS.

Uma vez que o objetivo desse projeto é obter parâmetros no domínio da frequência, se faz necessário obter uma relação entre as medidas no domínio do tempo com os da frequência. Por sua vez, a margem de fase (MF) e o coeficiente de amortecimento ( $\xi$ ) estão diretamente relacionados, de forma que:  $MF = 100\xi$  (OGATA, 2009).

Dessa forma, como já é conhecida pela literatura uma relação entre o coeficiente de amortecimento e o percentual de overshoot (OS), pode-se utilizar a equação 7 para relacionar diretamente a margem de fase com o percentual de overshoot, já que o overshoot pode ser facilmente encontrado pela parcela do sobre sinal:  $OS = \frac{c_{max} - c_{final}}{c_{max}}$

$$MF = 100 \frac{-\ln(OS)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(OS)}} \quad (7)$$

Dessa forma, da figura 1 conclui-se que a planta em malha aberta é instável. Já em

malha fechada é estável na figura 2, porém com oscilações e um percentual de overshoot de 36.26%, implicando em uma margem de fase de  $30.72^\circ$ . Para o sistema em malha fechada e com PD, obtém-se um percentual de overshoot de 3%, implicando em uma margem de fase de  $74.75^\circ$ , assim como o esperado pelo projeto.

Dessa forma garante-se a veracidade do controlador para garantir os parâmetros de desempenho desejado, permitindo avançar para a aplicação prática do circuito.

### 3 Projeto de controlador por *state feedback*

#### 3.1 Método utilizando fórmula de Ackermann

O desempenho escolhido para o sistema foi de  $e.r = 0$  para  $r(t) = 1$ ,  $T_{s2}\% \leq 4s$  e  $PO\% \leq 5\%$ . Inicialmente, se obteve a equação no tempo para que se possa conseguir as matrizes de estado da planta, e assim se fazer os devidos cálculos de realimentação de estados. Dessa forma, temos:

$$G_p(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2}{s(s + 0,5)}$$
$$s^2Y(s) + 0,5sY(s) = 2U(s)$$
$$\ddot{y}(t) + 0,5\dot{y} = 2u$$

Com isso, fazemos:

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \dot{y} \end{cases}$$

E teremos:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ x_2 = 2u - 0,5x_1 \end{cases}$$

Nos dando, por fim, as matrizes de estado da planta:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u(t) \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Agora, com as matrizes do espaço de estado tidas, vamos encontrar o polinômio característico do sistema com o desempenho desejado. Para o potencial de *overshoot* de 5%,

por tabela temos um  $\xi = 0,7$ , além de um ângulo  $\theta = 45^\circ$ . Para um tempo de estabilização de 4 segundos, pela equação, teremos  $-\xi\omega_n = -1$ . Com isso,  $\omega_n = 1,43$ . Temos então a equação:

$$a^* = s^2 + 2s + 2,041$$

Antes de encontrarmos o vetor K para a realimentação de estado, precisamos saber qual sua matriz de controlabilidade e, por meio dela, se o sistema é controlável. Com isso, temos:

$$W_c = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} \quad W_c = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Com a matriz, basta retirar o determinante. Se o mesmo for diferente de 0, o sistema é controlável.

$$\det(W_c) = -(2 * 2) = -4 \neq 0$$

Com o polinômio característico e a matriz de controlabilidade, podemos utilizar a fórmula de Ackermann. A fórmula nos dá uma forma de encontrar o vetor de ganhos K utilizando esses dois parâmetros encontrados:

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} W_c^{-1} \Phi$$

Onde  $\Phi$  é o polinômio característico com a substituição de s pela matriz A:

$$\Phi = A^2 + 2A + 2,041I$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1,541 & 2 \\ -1 & 1,541 \end{bmatrix}$$

Logo, temos que K será:

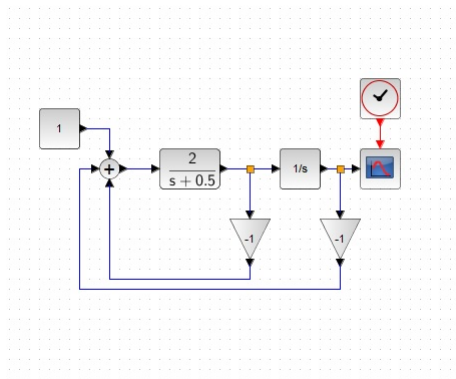
$$K = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1,541 & 2 \\ -1 & 1,541 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 0,7705 & 1 \end{bmatrix}$$

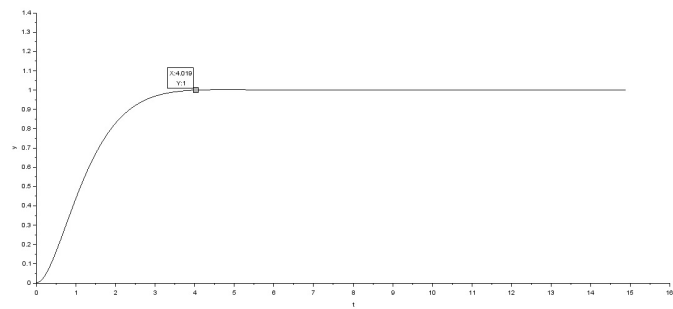
$$\boxed{K_1 = 0,7705} \text{ e } \boxed{K_2 = 1}$$

### 3.2 Simulações no Scilab

Com os cálculos feitos, foi utilizada a ferramenta **XCOS** do software **Scilab** para construir o diagrama de blocos e parametrizá-los. Para facilitar a formulação do circuito, se considerou o  $K_1 = 1$  e não igual a 0,7705, como visto anteriormente. Com isso, houve uma mudança pouco perceptível, e o sistema continuou garantindo os requisitos. Nas figuras 10(a) e 10(b), é possível ver que a mudança pouco modificou o resultado final que se deseja obter.



(a) Diagrama de blocos



(b) Simulação temporal

Figura 10: Simulação com o sistema planta+controlador realimentação de estado no XCOS.

Desta forma, por meio das simulações, é possível perceber que a estabilidade e o desempenho desejados foram satisfeitos, mesmo que com alguns arredondamentos considerados bruscos. Obtemos um tempo de estabilização em torno dos 4 segundos, além de termos um *overshoot* em torno de 3% no sistema.

## 4 Metodologia

Para aplicar os controladores na prática e avaliar os resultados foram seguidos os seguintes passos:

- Consulta da literatura vigente em projeto de circuitos eletrônicos e sistemas de controle para projetar os circuitos;
- Simular os circuitos que representam a planta em malha aberta e fechada e a planta com controlador em malha fechada em um *software* de simulação para verificar a veracidade do projeto;
- Implementar o circuito na prática e fazer testes em laboratório e coletar os dados.

Os circuitos analógicos foram projetados baseados em amplificadores operacionais (AMPOPS) para modelar a planta, controlador PD, controlador por realimentação de estados e o subtrator da realimentação negativa. As topologias de circuitos utilizadas são aquelas propostas por OGATA(2009), KUO(1995) e SEDRA(2016).

Após o projeto dos circuitos, estes foram inicialmente simulados e otimizados no LTSpice para depois serem montado na prática.

Durante a realização das práticas, todos os protocolos de segurança dos discentes e proteção dos equipamentos foram devidamente seguidos. No que tange a montagem dos circuitos, as fontes de ruído foram evitadas, tais como ponteiros de medição enferrujadas, *protoboards* danificados, etc. Os componentes dos circuitos foram devidamente testados antes da montagem, garantindo que os componentes passivos, tais como resistores e capacitores utilizados, obedeciam a faixa de tolerância oferecida pelo fabricante.

Dessa forma os circuitos foram alimentados e as saídas de tensão foram observadas no osciloscópio, gerando material para ser discutido nos resultados.



## 5 Resultados para o controlador por *negative feedback*

O controlador escolhido para apresentar os resultados práticos foi aquele projeto pelo método frequencial.

### 5.1 Projeto dos circuitos

#### 5.1.1 Planta

O circuito proposto para a planta da figura 11 foi obtido a partir de módulos propostos por KUO (1995).

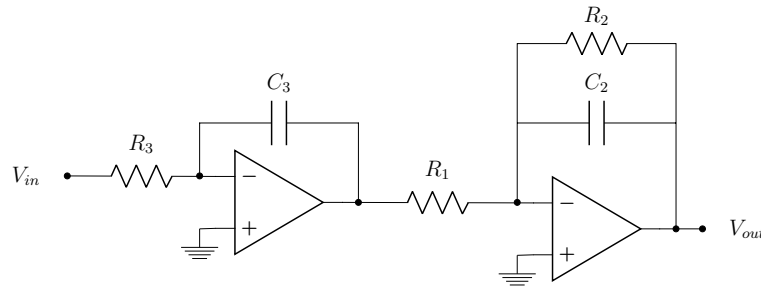


Figura 11: Circuito proposto para a planta.

De acordo com a função de transferência geral genérica dada pela equação 8 e baseada na topologia do circuito explicitado anteriormente, pode-se obter as relações entre os valores dos componentes para que a função de transferência se assemelhe àquela proposta para o trabalho (equação 1).

$$G_p(s) = -\frac{1}{R_3 C_3 s} \times -\frac{\frac{1}{R_1 C_2}}{s + \frac{1}{R_2 C_2}} \quad (8)$$

Os valores dos componentes foram definidos a partir das relações abaixo, resultante da comparação direta das equações 1 e 8.

$$R_3 = 1/C_3$$

$$R_1 C_2 = 0.5$$

$$R_2 C_2 = 0.5$$

Dessa forma, atribuindo-se os valores dos capacitores que são mais difíceis de realizar associações para obter novos valores de capacitância, obtiveram os valores abaixo para os componentes com as devidas associações sugeridas após a igualdade:

$$R_1 = 5k\Omega \approx 4.7k\Omega + 330\Omega$$

$$R_2 = 20k\Omega \approx 18k\Omega + 2.2k\Omega$$

$$R_3 = 100k\Omega$$

$$C_1 = 10\mu F$$

$$C_2 = 100\mu F$$

Ao final, obtém-se a função de transferência prática para a planta de acordo com a equação 9.

$$G_p(s) = \frac{1.988}{s(s + 0.495)} \quad (9)$$

### 5.1.2 Controlador PD

O circuito proposto para o PD da figura 12 foi obtido a partir do módulo proposto por OGATA (2009), um para um integrador ideal e outro para um integrador prático.

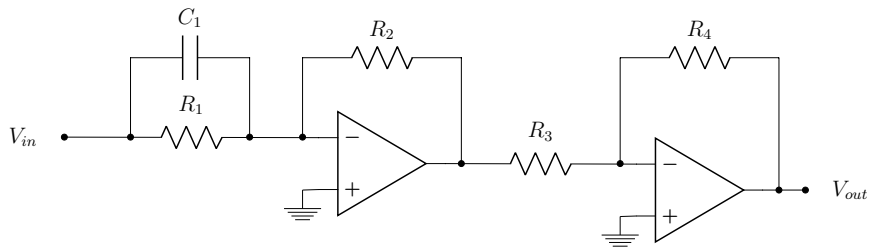


Figura 12: Circuito proposto para o PD.

De acordo com a função de transferência geral genérica dada pela equação 10 e baseada na topologia do circuito explicitado anteriormente, pode-se obter as relações entre os valores dos componentes para que a função de transferência se assemelhe àquela proposta para o trabalho (equação 5).

Porém, por decisão de projeto, ao invés de usar a função de transferência do controlador baseado na equação 5, usou-se baseado na função de transferência otimizada por parâmetros de sensibilidade empírica da equação 11, de forma a dar uma folga inerente aos erros dos valores reais dos componentes, dos arredondamentos de projeto, da fonte de alimentação, do instrumento de medição, etc.

$$G_c(s) = \frac{R_4 R_2}{R_3 R_1} \times (R_1 C_1 s + 1) \quad (10)$$

$$G_c(s) = 2.5(0.7s + 1) \quad (11)$$

Os valores dos componentes foram definidos a partir das relações abaixo, resultante da comparação direta das equações 11 e 8.

$$\begin{aligned} R_1 C_1 &= 0.7 \\ \frac{R_4 R_2}{R_3 R_1} &= 2.5 \end{aligned}$$

Dessa forma, atribuindo-se os valores dos capacitores que são mais difíceis de realizar associações para obter novos valores de capacitância, obtiveram os valores abaixo para os componentes com as devidas associações sugeridas após a igualdade:

$$\begin{aligned} R_1 &= 7k\Omega \approx 6.8k\Omega \\ R_2 &= 1.156k\Omega \approx 1.2k\Omega \\ R_3 &= 6.8k\Omega \\ R_4 &= 100k\Omega \\ C_1 &= 100\mu F \end{aligned}$$

Ao final, obtém-se a função de transferência prática para o controlador PD de acordo com a equação 12.

$$G_c(s) = 2.5951(0.68s + 1) \quad (12)$$

### 5.1.3 Subtrator

O circuito proposto para o subtrator da figura 13 foi obtido a partir das topologias propostas por SEDRA (2016) com base nos amplificadores de instrumentação com resistência de entrada infinita.

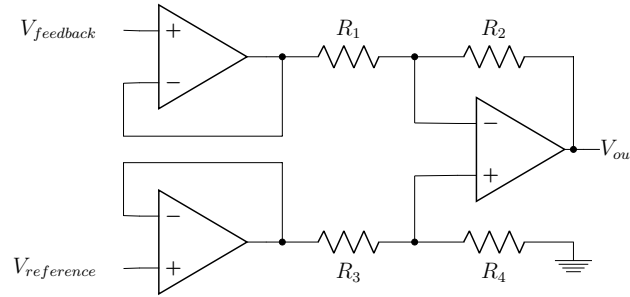


Figura 13: Circuito proposto para o subtrator.

Como há a necessidade de que o ganho do subtrator seja unitário, foi escolhido valores iguais para o resistores de forma que:

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 10k\Omega$$

## 5.2 Simulações no LTSpice

As simulações no LTSpice foram divididas em três: planta em malha aberta, planta em malha fechada e planta em malha fechada com PD.

No controlador em malha aberta (OL), como pode ver no circuito do apêndice A.1, como esperado pela análise teórica observou-se que como o sistema é instável, como ele

não se tornará estável com o passar do tempo, logo seus valores tenderão ao infinito, como podemos notar na simulação abaixo.

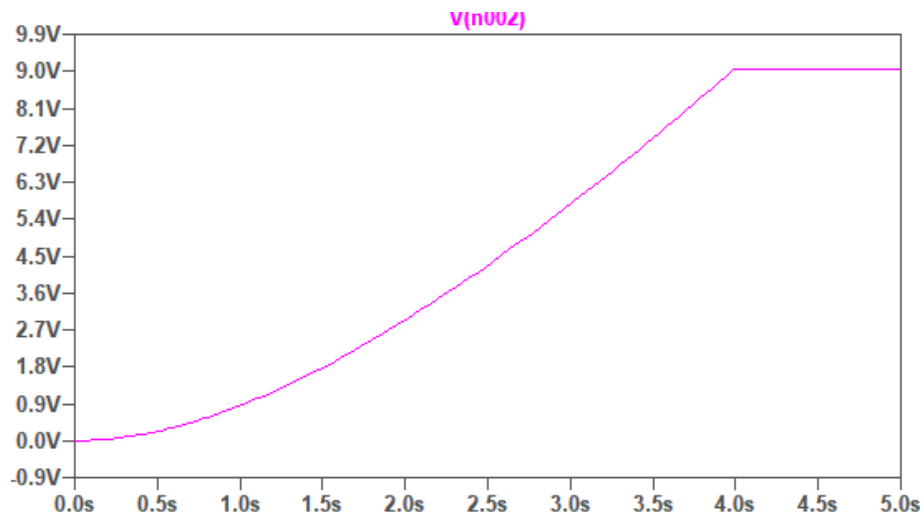


Figura 14: Simulação da planta em malha aberta(LTspice).

Podemos notar que ao passa do tempo o circuito saturará, pois como o LTspice trata os componentes da simulação de forma real logo não podemos aplicar valores infinitos de tensão na entrada.

Para planta em malha fechada, como pode ver no circuito do apêndice A.2, notamos que o comportamento como analisado anteriormente é oscilatório amortecido, devido o sistema ser estável, porém, não possuir um bom tempo de estabilização e um bom percentual de overshoot, com isso não temos uma boa MF. Nesse tipo de situação notamos evidentemente a necessidade de um controlador para ajustar a saída.

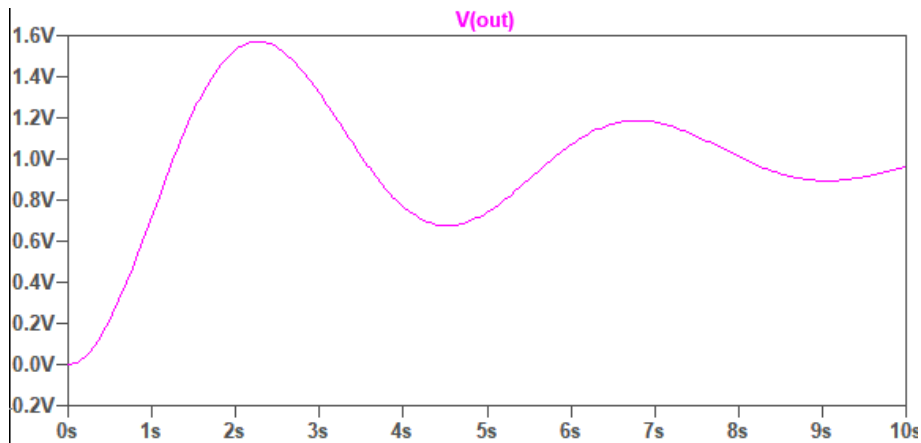


Figura 15: Simulação da planta em malha fechada(LTspice).

Agora analisando o circuito montado no LTspice da planta em malha fechada mais o controlador PD, como pode ver no circuito do apêndice A.3, podemos notar um resultado bem melhor.

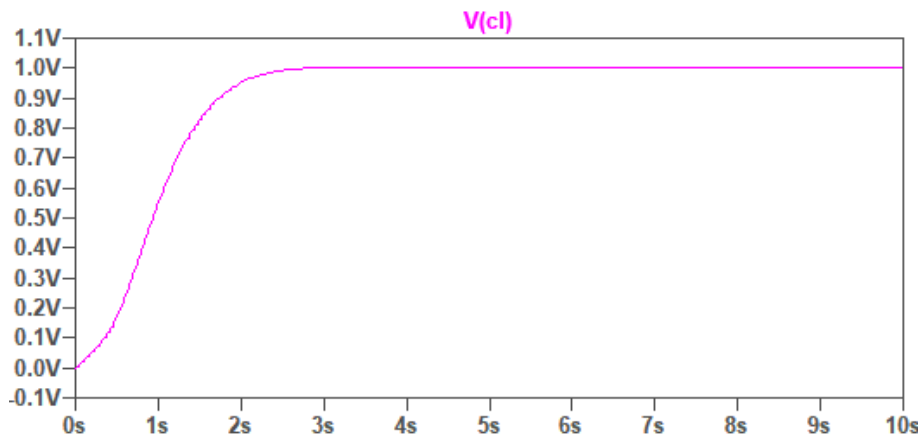


Figura 16: Simulação da planta em malha fechada em com PD(LTspice).

Podemos notar que no tempo, para os parâmetros estipulados e pela relação da margem de fase com o percentual de overshoot (equação 7), um percentual abaixo dos obtemos um percentual em torno dos 5%, além de tempo de estabilização muito bom, em torno dos 3 segundos.

### 5.3 Resultados práticos

Após a montagem do circuito utilizando AMPOPs do CI LM741, obteve-se uma série de formas de ondas. Vale destacar que: o canal 1 (CH1) do osciloscópio representa a saída do circuito; o canal 2 (CH2) representa a referência, que no caso é um degrau unitário; e o canal MATH representa a subtração entre a referência e a saída, ou seja, o erro.

O primeiro circuito implementado representou apenas a planta em malha aberta. Como observado na figura 17, ao inserir o degrau na entrada do circuito, o sistema instabilizou. Como se trata de um sistema prático, o valor de saída saturou no valor de alimentação dos AMPOPs, ao invés de tender a infinito. Pela mesma lógica o valor do erro também satura.

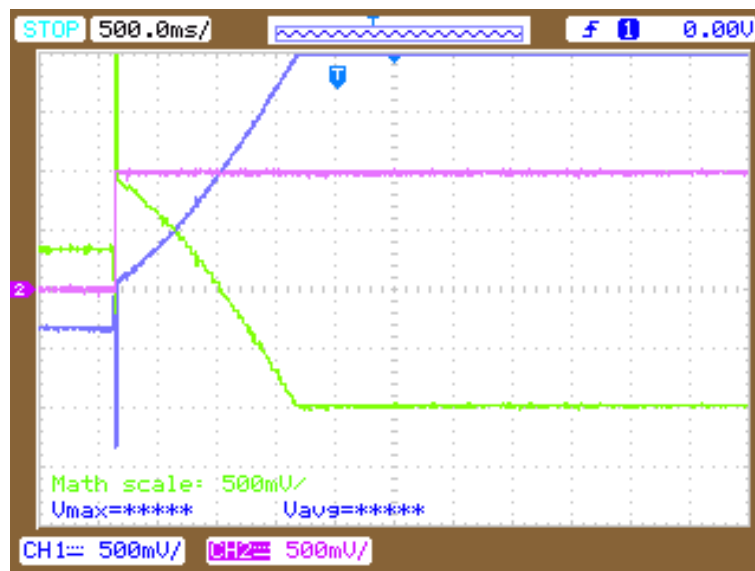


Figura 17: Resultado prático da planta em malha aberta.

O primeiro circuito implementado representou apenas a planta em malha fechada, ou seja, com o circuito da planta e do subtrator. Como observado na figura 18, ao inserir o degrau na entrada do circuito, a resposta oscilou bruscamente até tender ao valor de referência. Ao observar a escala de tensão, observa-se que o valor máximo de tensão para a saída é de 1.4V, com a entrada de 1V. Dessa forma o percentual de overshoot é de 28.57%, resultando, pela equação 7, em uma margem de fase de 37.04°.

O terceiro circuito implementado representou o sistema em malha fechada e com o controlador PD, contendo os circuitos da planta, controlador PD e subtrator. Como

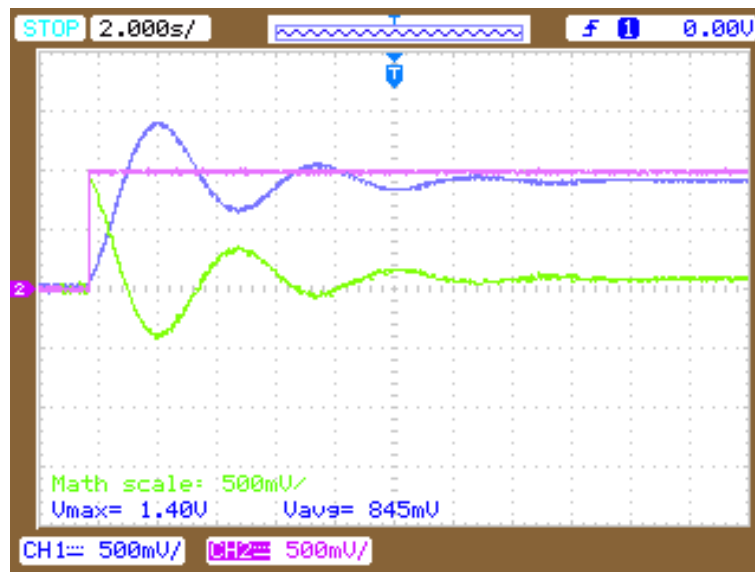


Figura 18: Resultado prático da planta em malha fechada.

observado na figura 19, ao inserir o degrau na entrada do circuito, a resposta alcançou o valor de referência suavemente. Ao observar a escala de tensão, observa-se que o valor máximo de tensão para a saída é cerca de 1.04V (desprezando o ruído contido nas medições do osciloscópio e medindo com cursores) com a entrada de 1V. Dessa forma o percentual de overshoot é de 3.84%, resultando, pela equação 7, em uma margem de fase de  $71.98^\circ$ .

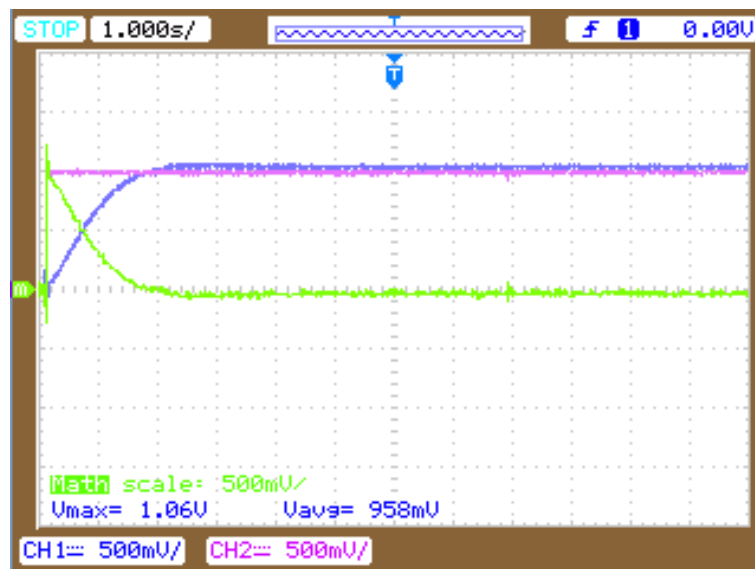


Figura 19: Resultado prático da planta em malha fechada e com PD.





## 6.2 Simulações no LTspice

Analizando o circuito montado no LTspice do circuito com realimentação de estados (figura 20), podemos notar um resultado bem próximo do esperado.

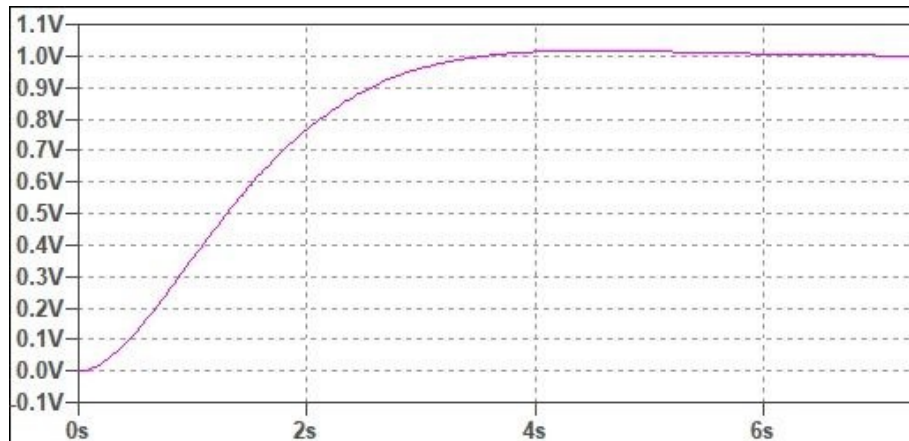


Figura 21: Simulação do circuito de realimentação de estados no LTspice.

Nota-se que no tempo, para os parâmetros estipulados e o percentual de overshoot, obtemos um percentual em torno dos 5%, além de tempo de estabilização muito bom, em torno dos 4 segundos.

## 6.3 Resultados práticos

Foi realizada a montagem do circuito projetado no protoboard (figura 22) e em seguida mediu-se no osciloscópio o sinal resultante.

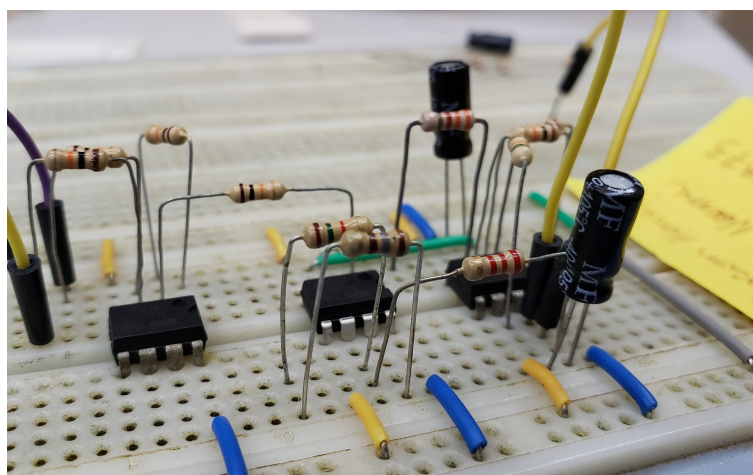


Figura 22: Circuito de realimentação de estados montado em protoboard.

Os ganhos foram distribuídos entre o somador não inversor, de forma que as divergências causadas pela utilização de valores comerciais de resistores originou um pequeno, porém não desprezível, erro em regime permanente.

Ademais, em relação ao tempo de estabilização, podemos observar na figura 23 que a saída se estabiliza em 3,44s, estando dentro do tempo esperado de 4s.

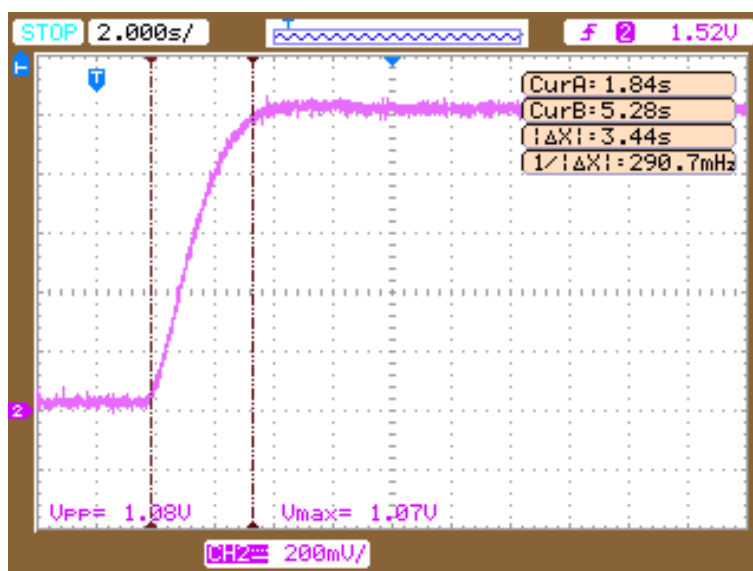


Figura 23: Sinal resultante - Tempo de estabilização.

Com relação ao percentual de overshoot, conseguimos visualizar na imagem 24 e calcular a partir da fórmula a seguir:

$$PO\% = (V_{max} - 1) * 100 = (1.02 - 1) * 100 = 2\% \quad (13)$$

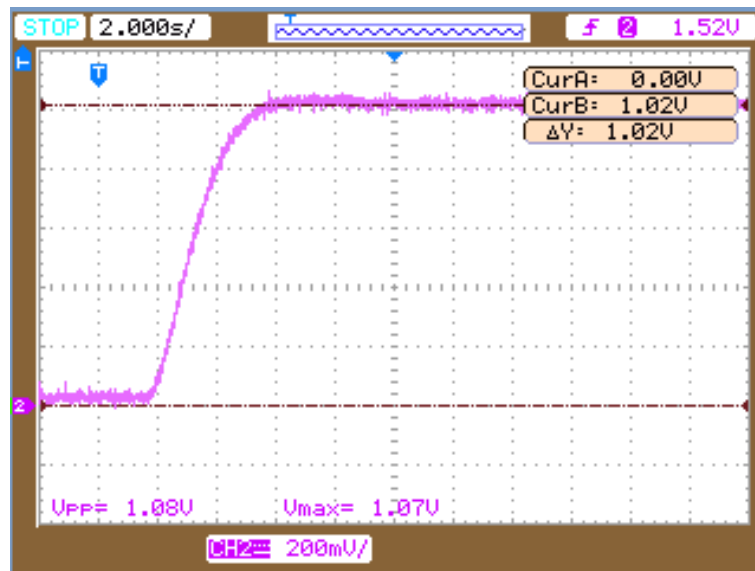


Figura 24: Sinal resultante - percentual de overshoot.

## 7 Conclusões

À vista do que foi apresentado durante o trabalho, foi construída uma tabela com todos os parâmetros de desempenho, elencando os valores obtidos em cada fase do projeto, sendo que a tabela 1 traça um comparativo entre os resultados e projeto do controlador PD e o controlador por realimentação de estados.

Tabela 1: Comparativo entre os parâmetros simulados e obtidos nos resultados para os controladores em malha fechada com a planta.

-	MF (graus)	$T_{s2\%}(s)$	Overshoot (%)	e.r
Simulação para <i>negative feedback</i>	74.75	2.5	3	0
Resultado para <i>negative feedback</i>	71.98	2.2	3.84	0
Simulação para <i>state feedback</i>	71.56	4	5	0
Resultado para <i>state feedback</i>	73.14	3.44	2	0

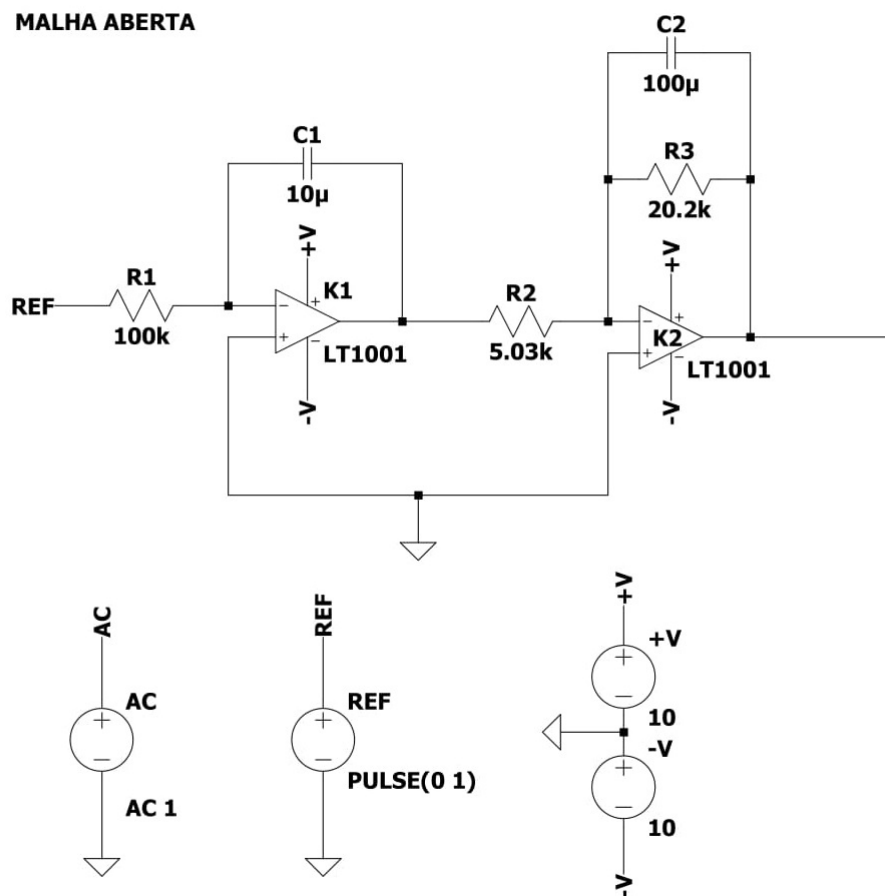
Dessarte, faz-se evidente que o sistema controlado, tanto com o controlador PD como através da realimentação de estados, atende aos parâmetros solicitados para projetos. Destaca-se ainda a conformidade entre os resultados das simulações e da implementação, onde a diferença ocorre uma vez que os componentes passivos possuem uma margem de tolerância, logo seus valores divergem do teórico.

## Referências

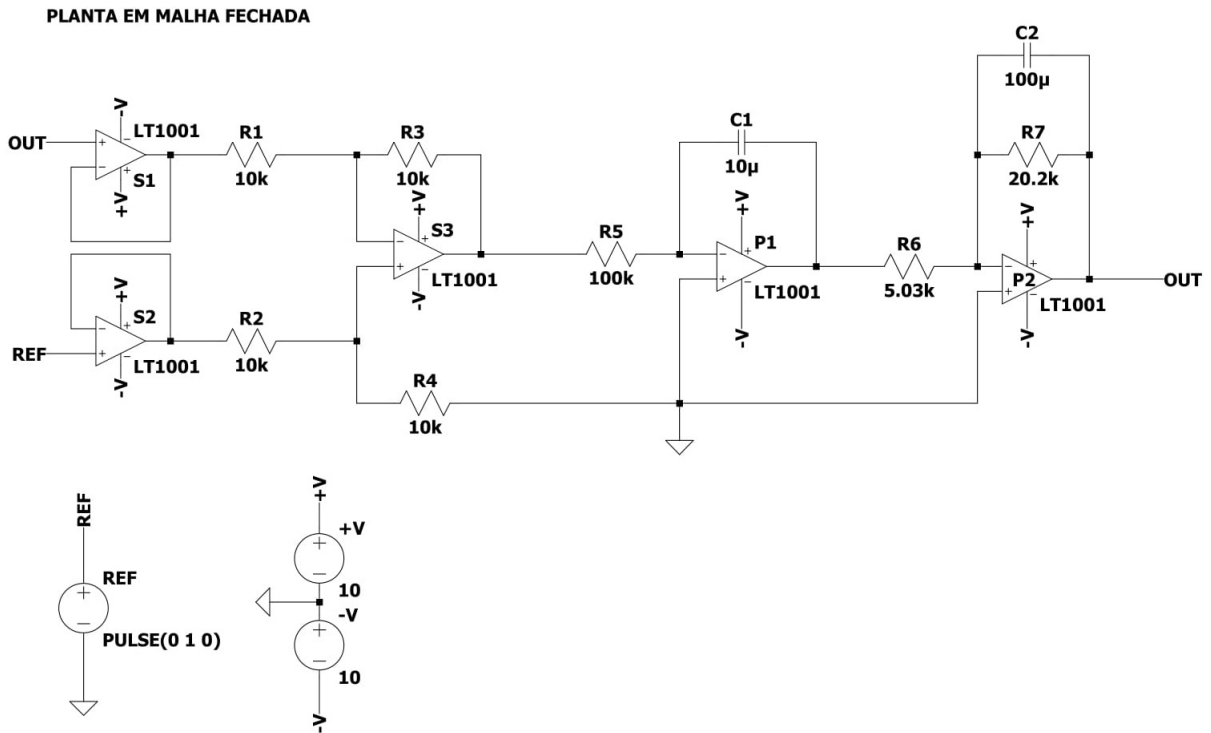
- [1] de Lauro Castrucci, Plínio Benedicto, e Anselmo Bittar. Controle automático. Grupo Gen-LTC, 2000.
- [2] Kuo, Benjamin C., e Farid Golnaraghi. Automatic control systems. Vol. 9. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1995.
- [3] Introduction to Control Systems in Scilab. Disponível em: <http://www.openeering.com/>.
- [4] Ogata, Katsuhiko. Modern control engineering. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2009.
- [5] Sedra, Adel S., et al. Microelectronic circuits. Oxford University Press, 2016.

## A Esquemáticos dos circuitos

### A.1 Planta em malha aberta



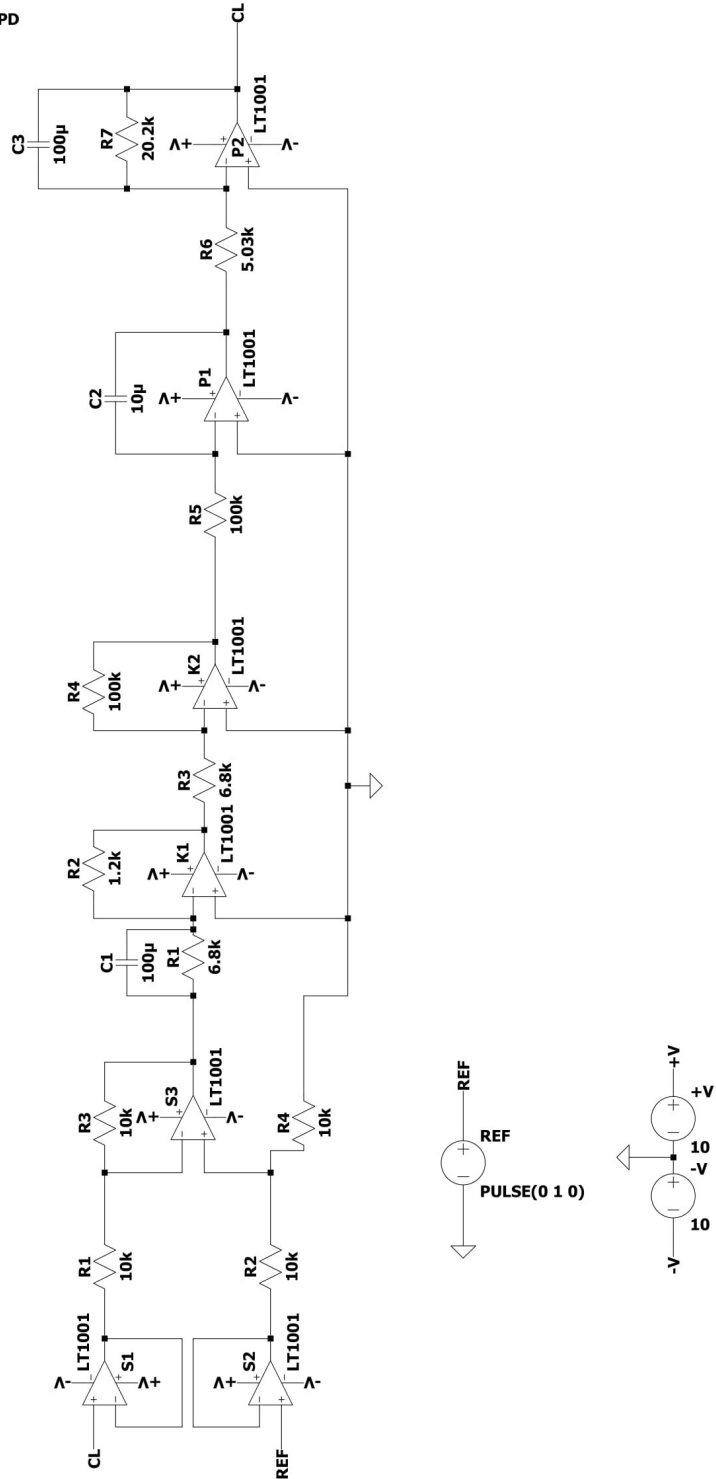
## A.2 Planta em malha fechada





### A.3 Planta e controlador PD em malha fechada

MALHA FECHADA COM PD



## B Scilab *scripts*

### B.1 Margens de estabilidade e diagramas de Bode e Nyquist

```
1 limit = 10000;
2 s = poly(0, "s");
3 //planta
4 P = syslin('c', 2/(s*(s+0.5)));
5 //planta+PD
6 P_PD = syslin('c', 2.4271*(1+0.573302*s)*2/(s*(s+0.5)));
7
8 //plots de Bode e Nyquist
9 figure;
10 bode(P);
11 xname("Diagramas de Bode da planta")
12 figure;
13 nyquist(P);
14 xname("Diagrama de Nyquist da planta")
15 figure;
16 bode(P_PD);
17 xname("Diagramas de Bode da planta com PD")
18 figure;
19 nyquist(P_PD);
20 xname("Diagrama de Nyquist da planta com PD")
21
22 // margens de estabilidade
23 [MF_p, fcg_p] = p_margin(P);
24 [MG_p, fcf_p] = g_margin(P);
25 fcg_p = 2*%pi*fcg_p;
26 fcf_p = 2*%pi*fcf_p;
27 [MF_ppd, fcg_ppd] = p_margin(P_PD);
28 [MG_ppd, fcf_ppd] = g_margin(P_PD);
29 fcg_ppd = 2*%pi*fcg_ppd;
30 fcf_ppd = 2*%pi*fcf_ppd;
```