DCO1013 - Lista de exercícios 2

Levy Gabriel da S. G.
Engenharia elétrica - UFRN

1. Dado um sinal amostrado a $8kHz$ e com 64 níveis de representação, ou seja, 6 bits ($n = log_2(64) = 6$ bits), um sistema PCM possuirá a seguinte taxa de transmissão de bits:

$$C = nf_s = 6 \times 8000 = 48 \text{ kbps}$$

Se a onda PCM for transmitida por um canal de banda base que utilizada modulação PAM discreta com três situações de níveis de amplitude: 2, 4 e 8 níveis (ou seja, com $n_1 = log_2(2) = 1$, $n_2 = log_2(4) = 2$ e $n_3 = log_2(8) = 3$ bits), a taxa de transmissão original será escalonada por essa quantidade de níveis, resultando na seguinte sequência de taxas para cada uma das situações do PAM multinível:

$$C_1 = C/n_1 = 48000/1 = 48 \text{ kbauds}$$
$$C_2 = C/n_2 = 48000/2 = 24 \text{ kbauds}$$
$$C_3 = C/n_3 = 48000/3 = 16 \text{ kbauds}$$

Considerando que a banda mínima é dada pela metade da taxa de transmissão ($B = C/2$), a banda ocupada por cada um dos sistemas será:

$$B_1 = C_1/2 = 24 \text{ kHz}$$
$$B_2 = C_2/2 = 12 \text{ kHz}$$
$$B_3 = C_3/2 = 8 \text{ kHz}$$

2. No problema da lista anterior era descrito um sistema PAM binário com taxa de transmissão de 56kbps projetado para ter um espectro do tipo *raised cosine*. Assim solicitava-se a determinação da largura de banda de transmissão para diferentes fatores de decaimento (*roll-off*): $r = [0.25; 0.5; 0.75; 1]$.

   Porém, neste caso considera-se um PAM de oito níveis e que cada pulso pode transmitir até 3 bits ($n = 3$). Isso significa que as larguras de bandas serão reduzidas em um terço dos valores binários.

   Primeiramente, semelhante aos casos anteriores, calcula-se a banda mínima de transmissão, para em seguida adicionar a banda excedente proporcionada pelo espectro do *raised cosine*.

$$B_m = \frac{C_{bin}}{n}\frac{1}{2} = \frac{56000}{3}\frac{1}{2} = 9.333 \text{ kHz}$$

   O excedente de banda será tal que a expressão da banda total será:

$$B_T = (1 + r)B_m$$

   Finalmente, aplicando os fatores de *roll-off* para cada caso:

$$\begin{gathered}
B_T(r = 0.25) = (1 + 0.25) \times 9333.3 \approx 11.67 \text{ kHz} \\
B_T(r = 0.5) = (1 + 0.5) \times 9333.3 = 14 \text{ kHz} \\
B_T(r = 0.75) = (1 + 0.75) \times 9333.3 \approx 16.33 \text{ kHz} \\
B_T(r = 1) = (1 + 1) \times 9333.3 \approx 18.67 \text{ kHz}
\end{gathered}$$

3. Os dados do problema são traduzidos como: PCM com 128 níveis com pulso de sincronização que representa uma amostra do sinal analógico adicionado no fim de cada palavra código ($n = log_2(128) = 7$bits); largura do canal de transmissão é de $B_T = 12$kHz; sistema PAM quaternário ($M = 4$ níveis de amplitude); espectro *raised cosine* de fator de *roll-off* unitário ($r = 1$)

   (a) Considerando que a relação entre a taxa de símbolos C e a taxa de bits C_{bin} é ponderada pelo número de níveis M do PAM quaternário da seguinte forma:

   $$C_{bin} = Clog_2(M)$$

   E a banda total de transmissão considerando a formatação pelo *raised cosine*:

   $$B_T = (1 + r)B_m = (1 + r)\frac{C}{2}$$

   Isolando a taxa de bits:

   $$C_{bin} = \frac{2log_2(M)B_T}{1 + r} = \frac{2 \times log_2(4) \times 12000}{1 + 1} = 24\text{kbps}$$

   (b) A adição do pulso de sincronização no final de cada palavra código solicita +1 bits acima da quantidade de bits requerida para os 128 níveis, assim a quantidade de bits será $n = 8$ bits para cada palavra. Assim, considerando a taxa de transmissão de bits C_{bin} encontrada anteriormente, a frequência de amostragem será:

   $$f_s = \frac{C_{bin}}{n} = \frac{24000}{8} = 3\text{kHz}$$

   De acordo com o teorema da amostragem de Nyquist, a maior frequência do sinal analógico amostrado deve ser igual a metade da taxa de amostragem. No caso deste problema, essa frequência será de 1.5kHz.

4. Uma vez que a probabilidade do erro é:

$$P_e = 2\left(1 - \frac{1}{M}\right) Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right)$$

Fazendo $u = A/(2\sigma)$ e considerando a função do MATLAB/Octave *qfuncinv()* para computar a inversa da função Q, tem-se:

$$u = qfuncinv\left(\frac{P_e}{2}\left(1 - \frac{1}{M}\right)^{-1}\right) \tag{1}$$

Sendo a energia do pulso de amplitude $A/2$ dada por $E_p = A^2/4$, a energia média do pulso será:

$$E_{mdia} = \frac{M^2 - 1}{3} E_p = \frac{M^2 - 1}{3}\frac{A^2}{4} = \frac{M^2 - 1}{12} A^2$$

Substituindo na expressão da SNR:

$$SNR = \frac{E_{mdia}}{\sigma^2} = \left(\frac{A}{\sigma}\right)^2 \frac{M^2 - 1}{12}$$

Relembrando o valor de u definido anteriormente, tem-se:

$$SNR = (2u)^2 \frac{M^2 - 1}{12} = u^2 \frac{M^2 - 1}{3}$$

Resolvendo a equação 1 para valores de M na base 2 e $P_e = 10^{-6}$, obtém-se valores crescentes para u, de acordo com a tabela abaixo:

M	u
2	4.7534
4	4.8347
8	4.8653
16	4.8789
32	4.8854
64	4.8885

De acordo com a tabela, conclui-se que um valor crescente de níveis de amplitude gera maiores valores para u. Assim, para minimizar a SNR pode-se truncar o valor de u para $M = 4$ (primeiro valor que garante um PAM M-ário), resultando em uma SNR mínima de aproximadamente:

$$SNR_{min} \approx 7.8(M^2 - 1)$$