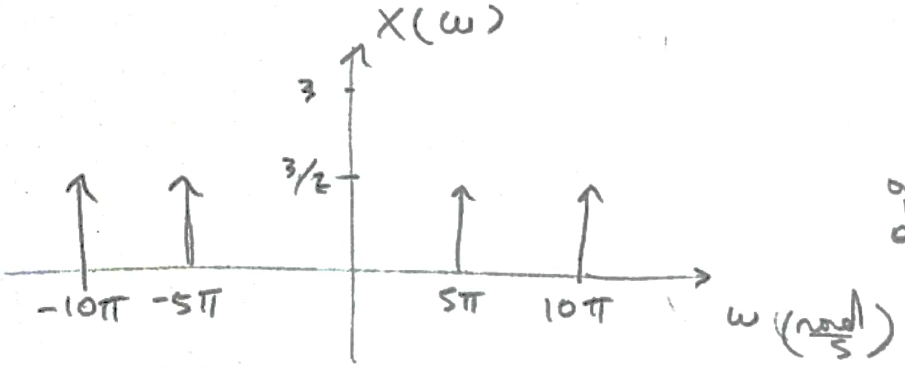
ELE 0531 - Controle digital

Levy Gabriel - 20170056839

1ª LISTA DE EXERCÍCIOS

1. a) Considerando o sinal $x(t) = 3\,\text{sen}(5\pi t) + 3\,\text{sen}(10\pi t)$

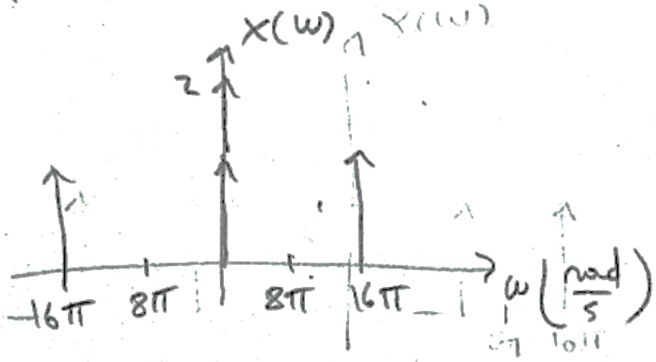
Como é composto de soma de senoides, sua banda será:




Observa-se que a frequência de amostragem para obedecer o teorema de amostragem de Nyquist será:

$$\omega_s > 2 \cdot 10\pi \Rightarrow \omega_s > 20\pi \ \frac{rad}{s}$$

b) O sinal $x(t) = 2\,\text{sen}(8\pi t)\cos(8\pi t)$ é composto de uma multiplicação no tempo, logo sua banda será a convolução da banda da senoide e cossenoide. Outra abordagem é considerar o sinal $x(t)$ como um seno que modula uma portadora em amplitude (AM DSB-SC)




Assim,

$$\omega_s > 2 \cdot 16\pi$$

$$\omega_s > 32\pi \ \frac{rad}{s}$$

Scanned with CamScanner

2. Sendo o sistema: $2\ddot{y}(t) = u(t)$

A representação em espaço de estados será:

$$x_1 = y \Rightarrow \dot{x}_1 = x_2$$
$$x_2 = \dot{y} \qquad \dot{x}_2 = \ddot{y} = \frac{u}{2}$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [1 \ \ 0]\, x(t) \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} \qquad C = [1 \ \ 0]$$

A discretização por retentor de ordem zero segue a seguinte representação em espaço de estados:

$$\begin{cases} x[n+1] = \Phi\, x[n] + \Gamma\, u[n] \\ y[n] = C\, x[n] \end{cases}, \text{ onde } \quad \Phi = e^{Ah}, \quad \Gamma = \int_0^h e^{At} B\, dt$$

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \dots$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} t + 0 + 0, \text{ pois } A^2 = 0$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \Gamma = \int_0^h \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} dt = \int_0^h \begin{bmatrix} 0{,}5t \\ 0{,}5 \end{bmatrix} dt$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0{,}25t^2 \\ 0{,}5t \end{bmatrix} \Bigg|_0^h = \begin{bmatrix} 0{,}25h^2 \\ 0{,}5h \end{bmatrix}$$

Finalmente:

$$x[n+1] = \begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x[n] + \begin{bmatrix} 0{,}25h^2 \\ 0{,}5h \end{bmatrix} u[n]$$

$$y[n] = [1 \ \ 0]\, x[n]$$

3. Sendo o sistema discreto

$$x[k+1] = \begin{bmatrix} -0,1 & 1 \\ 0 & -0,3 \end{bmatrix} x[k] + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u[k]$$

$$y[k] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x[k]$$

A função de transferência no tempo pode ser encontrada por:

$$H(q) = C\left[(qI - \Phi)^{-1}\Gamma\right] + D$$

Onde:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} -0,1 & 1 \\ 0 & -0,3 \end{bmatrix}; \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad D = 0$$

$$H(q) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\left(\left(\underbrace{\begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0,1 & 1 \\ 0 & -0,3 \end{bmatrix}}\right)^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix} q+0,1 & -1 \\ 0 & q+0,3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(q+0,1)(q+0,3)+1}\begin{bmatrix} q+0,3 & 1 \\ 0 & q+0,1 \end{bmatrix}$$

$$H(q) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{q^2+0,4q+1,03} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} q+0,3 & 1 \\ 0 & q+0,1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} 1 \\ q+0,1 \end{bmatrix}}$$

$$H(q) = \frac{q+1,1}{q^2+0,4q+1,03}$$

4. Sendo a FT do sistema:

$$X(z) = \frac{8z-19}{(z-2)(z-3)}$$

Sendo a entrada:

$$r[k] = \delta[k] \overset{z}{\rightleftharpoons} R[z] = 1$$

A expressão para a resposta ao impulso será:

$$z^{-1}\{X(z)R(z)\} = z^{-1}\{\underbrace{\frac{8z-19}{(z-2)(z-3)}}_{\text{DECOMPOR EM FRAÇÕES PARCIAIS}}\}$$

$$\frac{8z-19}{(z-2)(z-3)} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z-3}$$

$$A = \left.\frac{8z-19}{z-3}\right|_{z=2} = 3 \quad e \quad B = \left.\frac{8z-19}{z-2}\right|_{z=3} = 5$$

Assim,

$$z^{-1}\left\{\frac{8z-19}{(z-2)(z-3)}\right\} = z^{-1}\left\{\frac{3}{z-2} + \frac{5}{z-3}\right\}$$

$$= 3\,z^{-1}\left\{\frac{1}{z-2}\right\} + 5\,z^{-1}\left\{\frac{1}{z-3}\right\}$$

$$\Rightarrow x[k] = \left[3\cdot(2)^{k-1} + 5\,(3)^{k-1}\right] 1[k-1]$$

5. Sendo $1[k] \rightleftharpoons \dfrac{z}{z-1} = U(z)$

O valor em regime para o sistema da planta $X(z)$ pode ser encontrado pelo teorema do valor final:

$$y[\infty] = \lim_{z \to 1} (z+1)\, X(z) U(z) = \lim_{z \to 1} \cancel{(z-1)} \frac{z}{\cancel{z-1}} \frac{8z-19}{(z-2)(z-3)}$$

$$y[\infty] = \lim_{z \to 1} \frac{8z^2 - 19z}{z^2 - 5z + 6} = \frac{8-19}{1-5+6} = \frac{-11}{2} = -5{,}5$$

6. Dado o sinal $x[k] = 1^k + 5^{-k} + 2^{-3k}$

Sua transformada $z$ será tal que:

$$X[z] = \sum_{k=0}^{\infty} x[k]\, z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(1^k + 5^{-k} + 2^{-3k}\right) z^{-k}$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} 1^k z^{-k}}_{(1)} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} 5^{-k} z^{-k}}_{(2)} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-3k} z^{-k}}_{(2)}$$

$$(1): \quad = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \ldots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^k = \frac{\cancel{(1/z)^{\infty}} - (1/z)}{1/z - 1} = -\frac{1}{(1-z)/z} = \frac{z}{z-1}$$

$$(2): \quad = 1 + \left(\frac{1}{5}\right) z^{-1} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 z^{-2} + \ldots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5z}\right)^k = \frac{(1/5z)^{\infty} - (1/5z)}{1/5z - 1} = \frac{-1}{(1-5z)/5z} = \frac{z}{z - 1/5}$$

$$(3): \quad = 1 + \left(\frac{1}{8}\right)^1 z^{-1} + \left(\frac{1}{8}\right)^2 z^{-2} + \ldots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{8z}\right)^k = \text{ANALOGAMENTE} = \frac{z}{z - 1/8}$$

Assim,

$$X[z] = \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z - 1/5} + \frac{z}{z - 1/8}$$