



Universidade Federal do Rio Grande do Norte  
Centro de Tecnologia  
Departamento de Engenharia Elétrica  
ELE0531 - Controle Digital - 2020.5

## **Análise e controle de sistemas em tempo discreto**

Levy Gabriel da Silva Galvão  
Lilianne Fernandes de Carvalho

Natal - RN, Julho de 2020



Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Centro de Tecnologia

Departamento de Engenharia Elétrica

ELE0531 - Controle Digital - 2020.5

## **Análise e controle de sistemas em tempo discreto**

Relatório técnico referente à execução do projeto de controladores digitais na disciplina de Controle Digital, como requisito total de avaliação.

Orientador: Prof<sup>o</sup>. Dr<sup>o</sup>. Allan de Medeiros Martins

Natal - RN, Julho de 2020

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>3</b>
1.1	Sistemas a serem trabalhados . . . . .	3
1.2	Discretização por ROZ . . . . .	3
1.2.1	Representação em espaço de estados em tempo contínuo . . . . .	4
1.2.2	Representação em espaço de estados em tempo discreto . . . . .	5
1.2.3	Período de amostragem . . . . .	7
1.3	Análise das saídas . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Projeto de controlador</b>	<b>12</b>
2.1	Análise em regime permanente . . . . .	12
2.2	Análise em regime transitório . . . . .	14
2.3	Estabilidade . . . . .	15
2.3.1	Estabilidade assintótica . . . . .	16
2.3.2	Estabilidade BIBO . . . . .	17
2.3.3	Critério de Routh-Hurwitz . . . . .	17
2.4	Representação dos sistemas . . . . .	19
2.4.1	Espaço de estados . . . . .	19
2.4.2	Resposta em frequência . . . . .	20

2.5	Lugar das raízes . . . . .	22
2.6	Controladores . . . . .	23
2.6.1	Sistema estável . . . . .	26
2.6.2	Sistema instável . . . . .	28
2.7	Comparação com o controlador <i>dead beat</i> . . . . .	32
<b>3</b>	<b>Projeto de observador</b>	<b>35</b>
3.1	Identificação de sistemas . . . . .	35
3.1.1	Sistema estável . . . . .	35
3.1.2	Sistema instável . . . . .	37
3.2	Análise de controlabilidade e observabilidade em tempo discreto . . . . .	40
3.2.1	Controlabilidade e forma canônica controlável . . . . .	41
3.2.2	Observabilidade e forma canônica observável . . . . .	42
3.3	Observadores de estado . . . . .	43
<b>4</b>	<b>Conclusões</b>	<b>47</b>

# 1 Introdução

O objetivo deste trabalho é detalhar várias etapas da análise de sistemas em tempo discreto, bem como realizar o projeto de controladores e observadores de estado. Para isso são utilizadas duas plantas, uma BIBO estável e outra BIBO instável, para haver uma comparação e abordagem de uma quantidade maior de paradigmas ao lidar com essas plantas.

## 1.1 Sistemas a serem trabalhados

As plantas a serem trabalhadas são baseadas em exemplos básicos de funções de transferência da literatura de controle e estão representadas no domínio da frequência pela transformada de Laplace. A primeira é uma planta (1) estável de segunda ordem e bastante oscilatória. Enquanto que a segunda é uma planta (2) de segunda ordem instável com dois polos diferentes, incluindo um na origem.

$$G_{est}(s) = \frac{10}{(s^2 + 2s + 25)} \quad (1)$$

$$G_{ins}(s) = \frac{2}{s(s + 0.5)} \quad (2)$$

## 1.2 Discretização por ROZ

Para realizar a discretização por retentor de ordem zero (ROZ) das plantas é necessário transformar a representação em função de transferência no domínio da frequência em uma representação por equação diferencial e logo após para uma representação no tempo em espaço de estados. Após obter a representação por espaço de estados em tempo contínuo, realiza-se a discretização e obtém-se a representação por espaço de estados em tempo discreto.

### 1.2.1 Representação em espaço de estados em tempo contínuo

A forma padrão da representação em espaço de estados em tempo contínuo segue as equações 3:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}u(t) \end{cases} \quad (3)$$

Onde  $\mathbf{x}(t)$ ,  $\mathbf{y}(t)$  e  $\mathbf{u}(t)$  são, respectivamente, os vetores de estados, saídas e entradas. As matrizes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  são, respectivamente, a matriz de transição de estados, de entradas, de saídas e de transmissão direta. (LATHI, 2005)

Considerando a planta estável, ao expandir sua FT obtém-se:

$$(s^2 + 2s + 25)Y(s) = 10U(s) \quad (4)$$

Considerando condições iniciais nulas, ao aplicar a transformada inversa de Laplace na equação 4, obtém-se a seguinte

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 25y(t) = 10u(t) \quad (5)$$

Considera-se o sistema de equações 6 para os estados:

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \dot{y} \end{cases} \quad (6)$$

Obtém-se:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{y} = 10u - 25x_1 - 2x_2 \end{cases} \quad (7)$$

Assim as matrizes da representação em espaço de estados serão:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}; D = 0 \quad (8)$$

O processo é análogo para a planta instável e com as mesmas considerações. Sendo a equação 9 a FT expandida, a equação 10 a equação diferencial, o sistema de equações 11 as atribuições dos estados levando em consideração a equação 6 e, por fim, as matrizes da representação de estados na equação 12

$$(s^2 + 0.5s)Y(s) = 2U(s) \quad (9)$$

$$\ddot{y}(t) + 0.5\dot{y}(t) = 2u(t) \quad (10)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{y} = 2u - 0.5x_2 \end{cases} \quad (11)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}; D = 0 \quad (12)$$

### 1.2.2 Representação em espaço de estados em tempo discreto

Encontradas as devidas matrizes dos sistemas, resta discretizar os sistemas para que eles obedeçam a relação da equação 13.

$$\begin{cases} x[n+1] = \Phi x[n] + \Gamma u[n] \\ y[n] = Cx[n] + Du[n] \end{cases} \quad (13)$$

Onde a matriz de transição de estados é  $\Phi = e^{Ah}$ , a matriz de entradas é  $\Gamma = \int_0^h e^{At} B dt$

e  $h$  é o período de amostragem. Durante a análise, a forma de resolver  $e^{Ah}$  irá obedecer a equação 14 (transformada inversa de Laplace da matriz inversa de  $sI - A$ ) e os cálculos de  $\Phi$  e  $\Gamma$  ficarão em função de  $h$  e serão agilizados por meio de *softwares* computacionais, como Scilab e Wolfram Alpha.

$$\Phi = \mathcal{L}^{-1}(sI - A)^{-1} \quad (14)$$

Dessa forma, para o sistema estável tem-se que as matrizes  $\Phi$  e  $\Gamma$  são:

$$\Phi = \begin{bmatrix} e^{-h} \left( \frac{\text{sen}(2\sqrt{6}h) + 2\sqrt{6}\cos(2\sqrt{6}h)}{2\sqrt{6}} \right) & e^{-h} \frac{\text{sen}(2\sqrt{6}h)}{2\sqrt{6}} \\ -25e^{-h} \frac{\text{sen}(2\sqrt{6}h)}{2\sqrt{6}} & e^{-h} \left( \frac{2\sqrt{6}\cos(2\sqrt{6}h) - \text{sen}(2\sqrt{6}h)}{2\sqrt{6}} \right) \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \frac{1}{30}e^{-h}(12e^h - \sqrt{6}\text{sen}(2\sqrt{6}h) - 12\cos(2\sqrt{6}h)) \\ 5e^{-h} \frac{\text{sen}(2\sqrt{6}h)}{2\sqrt{6}} \end{bmatrix} \quad (16)$$

E para o sistema instável tem-se que as matrizes  $\Phi$  e  $\Gamma$  são:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 2(1 - e^{-0.5h}) \\ 0 & e^{-0.5h} \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 4(h + 2e^{-0.5h} - 2) \\ 4(1 - e^{-0.5h}) \end{bmatrix} \quad (18)$$

Finalmente os sistemas estão discretizados.



### 1.2.3 Período de amostragem

A escolha do período de amostragem é essencial para que o sistema discreto represente da melhor maneira possível o sistema contínuo real. Dessarte, este trabalho utilizou a análise a partir da largura de banda limitada pela frequência de corte das funções de transferência (frequência para a qual o módulo da função de transferência é -3dB), de modo que as componentes frequenciais acima desta frequência são deveras atenuadas, permitindo estabelecer esta frequência como a maior permitida no sistema. Para obedecer o teorema de Nyquist e regras de ordem prática, foi adotada uma frequência de amostragem no mínimo quinze vezes maior do que a frequência de corte.

Para encontrar a frequência de corte basta igualar o módulo da função de transferência a -3dB ou 0.5 com  $s = j\omega$  e resolver as equações para 19 e 20  $w$ . Para facilitar os cálculos, foram determinados os polos das funções de transferência.

$$|G_{est}(j\omega)| = \left| \frac{10}{(j\omega + 1 - j2\sqrt{6})(j\omega + 1 + j2\sqrt{6})} \right| = 0.5 \quad (19)$$

$$|G_{ins}(j\omega)| = \left| \frac{2}{j\omega(j\omega + 0.5)} \right| = 0.5 \quad (20)$$

Resolvendo as equações, encontra-se uma frequência de corte para a planta estável de  $\omega_{Best} = 6.3588rad/s$  e de  $\omega_{Bins} = 1.969rad/s$  para a planta instável.

O período de amostragem será dado pela equação 21 para a planta estável e pela equação 22 para a planta instável, considerando as relações de que  $\omega_B = 2\pi f_B$ ,  $f_S = 15f_B$  (para garantir que não haverá *aliasing*) e  $h = f_S^{-1}$

$$h_{est} = 0.06587s \approx 0.01s \quad (21)$$

$$h_{ins} = 0.2127s \approx 0.1s \quad (22)$$

### 1.3 Análise das saídas

Serão avaliadas as saídas dos sistemas para entradas do tipo degrau e senoide em tempo contínuo e discreto à título de comparação.

Considerando a solução no domínio do tempo de equações de estado em tempo contínuo proposta por LATHI (2005) na equação 23, tem-se que a saída é dada como a componente  $x_1$  das variáveis de estado de acordo com o que foi proposto em 6.

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}u(\tau)d\tau \quad (23)$$

Considerando  $t_0 = 0$  e condições iniciais nulas, tem-se que a componente da resposta só depende da resposta forçada:

$$\mathbf{x}(t) = \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}u(\tau)d\tau \quad (24)$$

$$\mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D \quad (25)$$

Já a saída em tempo discreto pode ser encontrada pela equação 26. Pode ser simplificada para 27 considerando condições iniciais nulas e transferência de energia igual a 0 ( $D = 0$ ).

$$y[n] = C\Phi^n x[0] + C \sum_{i=0}^{n-1} \Phi^{n-i-1} \Gamma u[i] + Du[n] \quad (26)$$

$$y[n] = C \sum_{i=0}^{n-1} \Phi^{n-i-1} \Gamma u[i] \quad (27)$$

As saídas foram avaliadas no software Scilab, considerando os períodos de amostragem anteriormente determinados (equações 21 e 22) para o tempo discreto. Os períodos de amostragem para o tempo contínuo foram determinados como cem vezes menor que os períodos para tempo discreto, garantindo um maior detalhamento da simulação com uma baixa granularidade.

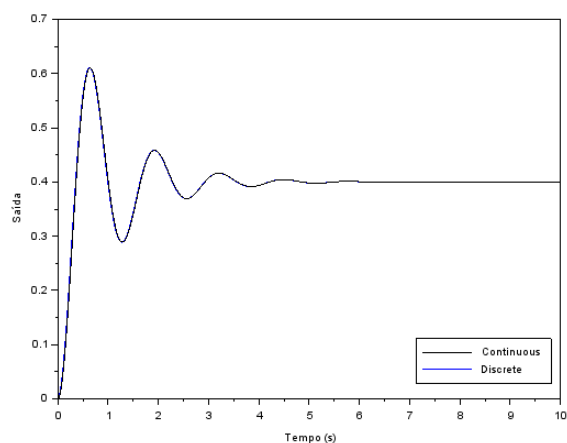
Em seguida, para avaliar o quão divergente são as saídas dos dois sistemas (o sistema BIBO estável e o instável) entre tempo discreto e contínuo, foram destacados os gráficos das saídas, a correlação, gráfico de dispersão e reta de regressão linear. A análise entre saída em tempo contínuo e discreto foi dividida em quatro situações:

- Sistema estável para uma entrada do tipo degrau;
- Sistema instável para uma entrada do tipo degrau;
- Sistema estável para uma entrada do tipo senoide com frequência de 0.5 Hz;
- Sistema instável para uma entrada do tipo senoide com frequência de 0.15 Hz;

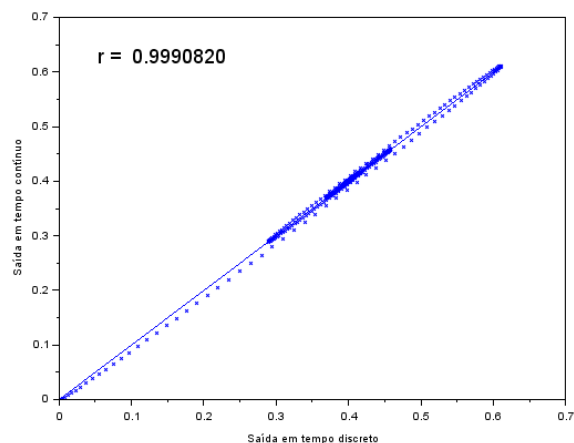
As frequências da senoide foram determinadas de forma a não ultrapassarem a frequência de amostragem, garantindo que o teorema de Nyquist seja obedecido.

De acordo com as imagens 1, 2, 3 e 4, observa-se uma boa correlação entre as saídas em tempo contínuo e discreto para cada tipo de sistema e entrada e, apesar de não ser perfeita, ao manter-se sempre acima de 99.9% denota que essa representação é muito fiel à dinâmica real do sistema.

Em uma análise quantitativa extra, com o objetivo de observar como o sistema discretizado é afetado pelo período de amostragem, foi submetido um teste à planta instável com uma senoide de 0.15Hz na entrada. O período de amostragem foi variado em três valores: 0.1s (período de amostragem original), 1s, 10s. Obtendo-se uma correlação de: 99.99%, 90.13% e 7.05%, respectivamente. Isso demonstra que a escolha do período de amostragem é essencial para a representação fidedigna do sistema em tempo discreto.

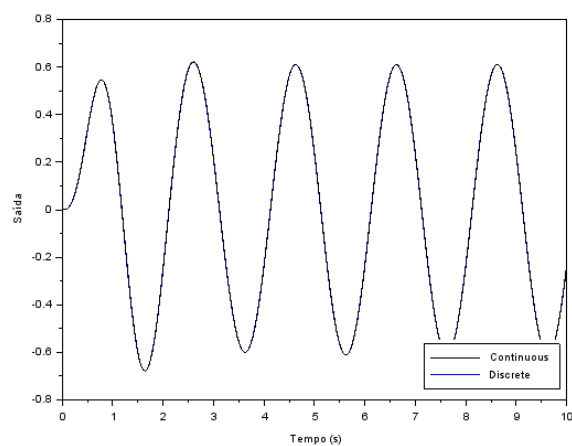


(a) Saída

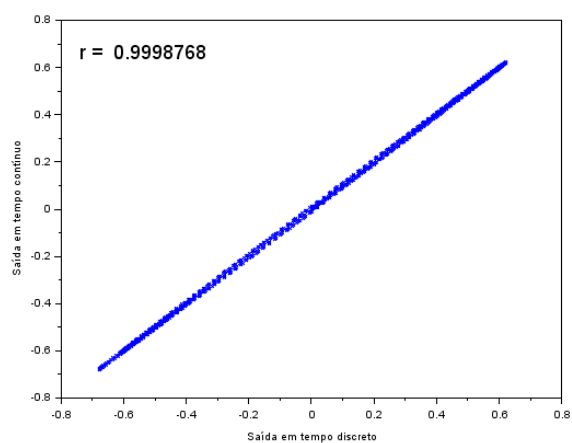


(b) Comparação

Figura 1: (a) Saída do sistema estável para uma entrada do tipo degrau e (b) comparação através de dados estatísticos das saídas no tempo discreto e contínuo

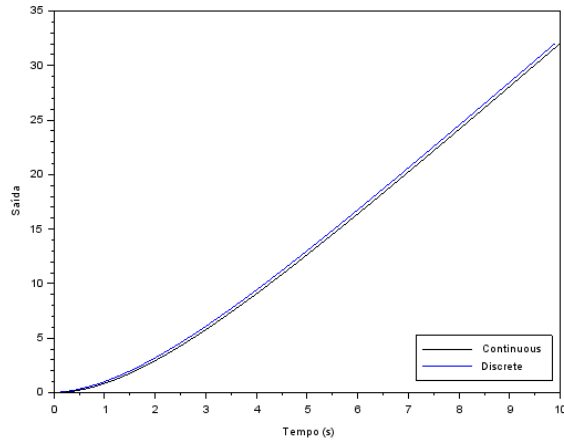


(a) Saída

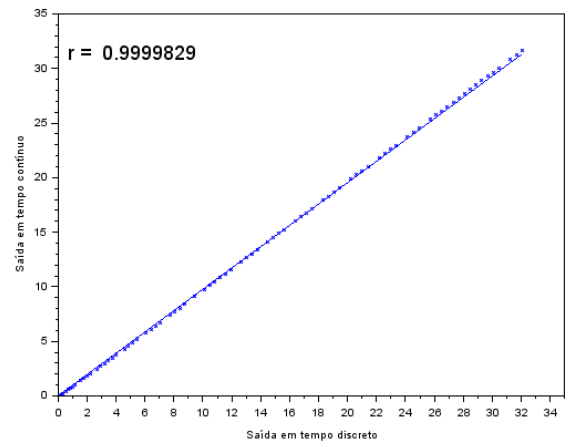


(b) Comparação

Figura 2: (a) Saída do sistema estável para uma entrada do tipo senoide (0.5Hz) e (b) comparação através de dados estatísticos das saídas no tempo discreto e contínuo

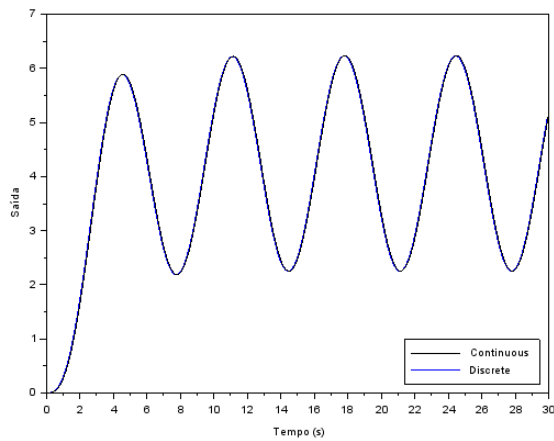


(a) Saída

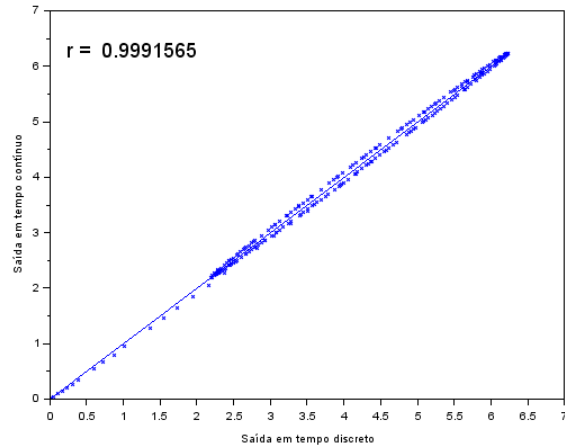


(b) Comparação

Figura 3: (a) Saída do sistema instável para uma entrada do tipo degrau e (b) comparação através de dados estatísticos das saídas no tempo discreto e contínuo



(a) Saída



(b) Comparação

Figura 4: (a) Saída do sistema instável para uma entrada do tipo senoide (0.15Hz) e (b) comparação através de dados estatísticos das saídas no tempo discreto e contínuo

## 2 Projeto de controlador

Para facilitar as análises de regime permanente, regime transitório e estabilidade, os sistemas discretos representados pelo modelo de espaço de estados foram transformados para a representação da função de transferência no domínio da frequência pela transformada Z, por meio da equação 28

$$H(z) = C[(zI - \Phi)^{-1}]\Gamma + D \quad (28)$$

Dessa forma, as funções de transferência para o sistema estável e instável estão representadas de acordo com as equações 29 e 30, respectivamente.

$$H_{est}(z) = \frac{0.0004966z + 0.0004933}{z^2 - 1.977724z + 0.9801987} \quad (29)$$

$$H_{ins}(z) = \frac{0.0098354z + 0.00967728}{z^2 - 1.9512294z + 0.9512294} \quad (30)$$

Para futuras demonstrações, ambos os sistemas podem ser referenciados pelo formato de equação em 31, que mapeia os coeficientes de cada uma das FTs por meio dos coeficientes genéricos **a**, **b**, **c** e **d**.

$$H(z) = \frac{\mathbf{c}z + \mathbf{d}}{z^2 - \mathbf{a}z + \mathbf{b}} \quad (31)$$

### 2.1 Análise em regime permanente

Para a análise em regime permanente foi utilizado o teorema do valor final (equação 32) para entradas ( $U(z)$ ) do tipo degrau e senoide, cuja frequência foi determinada em tópicos anteriores.

$$y(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)H(z)U(z) \quad (32)$$

Consultando o capítulo de transformadas Z do LATHI (2005), obtém-se representações para a transformada Z de um degrau (equação 33) e de um seno de frequência  $\omega'$  (equação 34).

$$1(t > 0) \Rightarrow \frac{z}{z - 1} \quad (33)$$

$$\text{sen}(\omega'n)(t > 0) \Rightarrow \frac{z \text{sen}(\omega')}{z^2 - 2\cos(\omega')z + 1} \quad (34)$$

Vale destacar a diferença entre  $\omega$  e  $\omega'$ . A velocidade angular  $\omega$  refere-se àquela presente no seno em tempo contínuo ( $\text{sen}(\omega t)$ ). Porém, como  $t = nh$ , tem-se que o novo seno será:  $\text{sen}(\omega nh)$ . Finalmente mostrando que  $\omega' = \omega h$ , permitindo que o seno seja representado em tempo discreto e que obedeça a transformação da equação 34.

Ao aplicar a equação 32 para ambos os sistemas discretos e comparando com o teorema do valor final para tempo contínuo, obtém-se a tabela 1 com um compilado dos valores finais obtidos para cada tipo de entrada. O período de amostragem e frequências utilizados seguem os mesmos critérios que os itens anteriores.

Tabela 1: Comparativo entre os valores finais dos sistemas em tempo discreto e tempo contínuo.

-	Tempo contínuo	Tempo discreto
Sistema estável com degrau	0.4	0.400001
Sistema estável com senoide (0.5Hz)	0	0
Sistema instável com degrau	$\infty$	$\infty$
Sistema instável com senoide (0.15Hz)	4.24413	4.24192

Os valores finais para o tempo contínuo foram obtidos a partir da versão do teorema do valor final para a transformada de Laplace. Observa-se que todos os valores se corresponderam. Os valores finais para as senoides correspondem ao valor final médio. O valor final para o sistema instável com a senoide para o tempo discreto foi encontrado cortando um polo em  $(z - 1)$  com o zero na mesma posição devido à fórmula do teorema.

## 2.2 Análise em regime transitório

As figuras de mérito para avaliar o comportamento de um sistema em regime transitório que serão abordadas neste trabalho e que são fundamentais para o projeto de controladores são:

- Tempo de estabilização ( $T_s$ ): é o tempo necessário para que a curva de resposta alcance e permaneça com uma variação menor que 2% em torno do valor final;
- Ultrapassagem máxima ( $OS$ ): equivale à variação do pico máximo em relação ao valor final, geralmente expresso em porcentagem;
- Coeficiente de amortecimento ( $\xi$ );
- Frequência natural amortecida/não amortecida ( $\omega_n$  e  $\omega_d$ );

Para achar essas medidas, parte-se de suas definições no domínio da transformada de Laplace, porém fazendo a consideração de que sua relação com a transformada Z é:  $z = e^{sh}$ . Assim, a partir da representação dos polos em Laplace (equação 35), pode-se achar uma relação no domínio Z.

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \quad (35)$$

$$z = e^{sh} = e^{s_{1,2}h} = e^{-\xi\omega_n h} e^{\pm j\omega_d h} = e^{-\xi\omega_n h} \angle \pm \omega_d h = |z| \angle \pm \theta$$
$$Q(z) = (z - z_1)(z - z_2) = (z - e^{-\xi\omega_n h} e^{j\omega_d h})(z - e^{-\xi\omega_n h} e^{-j\omega_d h}) =$$

$$z^2 - (2\cos(\omega_d h))e^{-\xi\omega_n h} z + e^{-2\xi\omega_n h} \quad (36)$$

Assim, ao considerar que as funções de transferência de ambos os sistemas trabalhados seguem o formato da equação 31, pode-se comparar seu denominador com a equação 36 para encontrar as figuras de mérito desejadas.

$$x = -\xi\omega_n = \frac{\ln(b)}{2h}$$



$$y = \omega_d = \frac{\text{acos}(\frac{a}{2\sqrt{b}})}{h}$$

Assim, tem-se:

$$\omega_n = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (37)$$

$$\xi = \sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2 + y^2}} \quad (38)$$

$$T_s = \frac{4}{\xi\omega_n} \quad (39)$$

$$OS(\%) = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} * 100\% \quad (40)$$

Tabela 2: Figuras de mérito para avaliação do regime transitório.

-	Sistema estável	Sistema instável
$T_s(s)$	4	-
$OS(\%)$	52.66	-
$\xi$	0.199	-
$\omega_n(\text{rad/s})$	5	-

Primeiramente observa-se que o sistema instável não possui esses parâmetros definidos, uma vez que o pico ou a estabilização nunca são atingidas. No que diz respeito ao sistema estável, os parâmetros são facilmente observados a partir do vetor que gerou o gráfico da figura 2. Esses parâmetros serão fundamentais para o projeto de controladores.

## 2.3 Estabilidade

Considerando os polos das funções de transferência discretas em malha aberta para o sistema estável (29) e instável (30), tem-se que eles são:

$$z_{1,2}^{EST} = 0.988862 \pm j0.0484835 \quad (41)$$

$$z_1^{INS} = 1 \quad (42)$$

$$z_2^{INS} = 0.951229 \quad (43)$$

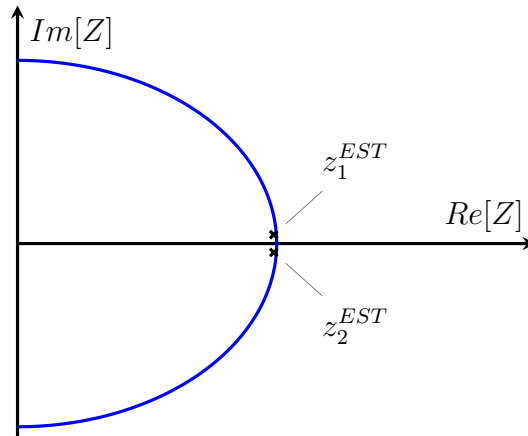


Figura 5: Círculo unitário para o sistema estável.

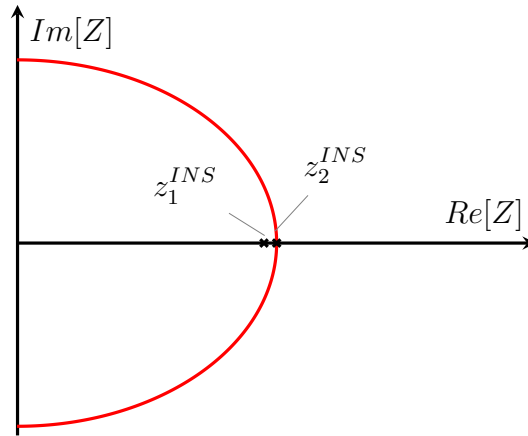


Figura 6: Círculo unitário para o sistema instável.

Pela posição dos polos do sistema estável estar distante da origem, justifica-se o fato de sua resposta levar um tempo maior para se estabilizar ( $T_S \approx 4s$ )

### 2.3.1 Estabilidade assintótica

De acordo com o teorema da estabilidade assintótica, com a ausência de cancelamento de polos e zeros, um sistema digital LT é dito estável se os seus polos pertencem ao círculo unitário aberto e marginalmente estável se seus polos pertencem ao círculo unitário fechado e sem polos repetidos no círculo.

Dessa forma, considerando os polos dos sistemas em malha aberta apresentados nas equações 41, 42 e 43, o sistema proposto como estável, do ponto de vista da estabilidade assintótica, de fato é estável, pois todos os seus polos pertencem ao círculo unitário aberto. Enquanto que o sistema considerado estável, do ponto de vista da estabilidade assintótica ele é marginalmente estável, pois um dos polos habita a periferia do círculo unitário fechado.

### 2.3.2 Estabilidade BIBO

A estabilidade Bounded Input and Bounded Output (BIBO) prevê que se uma entrada limitada inserida no sistema e este responder com uma saída limitada, assim o teorema da estabilidade BIBO propõe para que um sistema seja BIBO estável, sua resposta ao impulso seja totalmente somável. Do ponto de vista dos polos da função de transferência, o sistema discreto no tempo e linear só será estável se seus polos habitarem o interior do círculo unitário.

Portanto, considerando os polos dos sistemas em malha aberta, o sistema estável também é BIBO estável, enquanto que o sistema instável é considerado BIBO instável, pois este possui um polo que habita a periferia do círculo unitário.

### 2.3.3 Critério de Routh-Hurwitz

Para aplicar o critério de estabilidade de Routh-Hurwitz há a necessidade de realizar a transformação bilinear dada pela equação abaixo, de forma a mapear a função de transferência do plano  $z$  para o plano  $s$ , de forma a avaliar o critério de acordo com o que se realizava para sistemas analógicos, ao verificar a mudança dos sinais dos elementos da tabela:

$$z = \frac{1 + s}{1 - s}$$

Assim, ao aplicar a transformação bilinear na função de transferência padrão da equação 31, obtém-se a forma:

$$H(s) = \frac{(d - c)s^2 - (2d)s + (d + c)}{(1 + a + b)s^2(2 - 2b)s + (1 - a + b)}$$

De forma que a tabela de Routh padrão, já considerando os elementos a serem calculados, será:

$s^2$	$1 + a + b$	$1 - a + b$	0
$s^1$	$2 - 2b$	0	0
$s^0$	$\det \left( \begin{bmatrix} 1 + a + b & 1 - a + b \\ 2 - 2b & 0 \end{bmatrix} \right)$		0
	$2 - 2b$	0	0

Aplicando os devidos coeficientes das funções de transferência do sistema considerado estável e o instável, tem-se as funções de transferência transformadas da equação 44 para o sistema considerado estável e a equação 45 para o sistema considerado instável.

$$H(s) = \frac{-3.3e - 6s^2 - 9.866e - 4s + 9.899e - 4}{3.9579227s^2 + 0.0396026s + 0.0024747} \quad (44)$$

$$H(s) = \frac{-1.581e - 4s^2 - 0.0193546s + 0.0195127}{3.9024588s^2 + 0.0975412s} \quad (45)$$

Assim, as tabelas de Routh para cada uma das situações será dada em seguida.

Para a tabela 3, observa-se que o sistema que antes foi considerado estável, de fato é estável com todos os polos no semiplano esquerdo, pois a primeira coluna da tabela de Routh não possui troca de sinais.

Tabela 3: Tabela de Routh para o sistema considerado estável.

$s^2$	3.9579227	0.0024747	0
$s^1$	0.0396026	0	0
$s^0$	0.0024747	0	0

Para o sistema considerado instável, a linha correspondente a  $s^0$  será composta por zeros, dessa forma recorre-se ao polinômio da linha anterior e os coeficientes da derivada desse polinômio irão compor os coeficientes da linha que antes era nula, de forma que:

$$P(s) = 0.0975412s^1$$

$$\frac{dP(s)}{ds} = 0.0975412s^0$$

Essa linha inteira de zeros aparece quando existe um polinômio estritamente par ou estritamente ímpar que for um fator do polinômio original. Porém, ao observar a tabela 45, não há mudança de sinal nas duas últimas linhas, indicando que não há polos no semiplano direito. Como o polinômio é considerado par e não possui polos no semiplano da direita, também não o possui no semiplano da esquerda, indicando que este último polo se encontra na origem. Dessa forma, como não há mudança de sinal da primeira para a segunda linha, há um polo no semiplano esquerdo e, devido a conclusão anterior, há um polinômio na origem, deixando o sistema de fato instável.

Tabela 4: Tabela de Routh para o sistema considerado instável.

$s^2$	3.9024588	0	0
$s^1$	0.0975412	0	0
$s^0$	0.0975412	0	0

A existência do polo na origem poderia ser interpretado pelo próprio polinômio do denominador, mas como estava sendo realizada a análise por Routh-Hurwitz, decidiu-se completá-la. O polo na origem também poderia ser identificado a partir do polinômio da linha  $s^1$ , pois uma vez que este é de grau 1, ele não poderia ter raízes pares.

## 2.4 Representação dos sistemas

### 2.4.1 Espaço de estados

Para o sistema estável, considerando as matrizes encontradas nas equações 15, 16 e para C e D em 8 e atribuindo  $h = 0.01s$  para o período de amostragem, tem-se que a representação em espaço de estados discreto para esse sistema será:

$$\begin{cases} x[n+1] = \begin{bmatrix} 0.9987586 & 0.0098965 \\ -0.2474135 & 0.9789655 \end{bmatrix} x[n] + \begin{bmatrix} 0.0004966 \\ 0.0989654 \end{bmatrix} u[n] \\ y[n] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x[n] \end{cases} \quad (46)$$

Para o sistema instável, considerando as matrizes encontradas nas equações 17, 18 e para C e D em 12 e atribuindo  $h = 0.1s$  para o período de amostragem, tem-se que a representação em espaço de estados discreto para esse sistema será:

$$\begin{cases} x[n+1] = \begin{bmatrix} 1 & 0.0975412 \\ 0 & 0.9512294 \end{bmatrix} x[n] + \begin{bmatrix} 0.0098354 \\ 0.1950823 \end{bmatrix} u[n] \\ y[n] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x[n] \end{cases} \quad (47)$$

#### 2.4.2 Resposta em frequência

Considerando as plantas estudadas neste trabalho no formato da função de transferência discreta da equação 31, sua equação diferença será na forma da equação 48.

$$y[n+2] - ay[n+1] + by[n] = cu[n+1] + du[n] \quad (48)$$

Dessa forma, considerando que  $y[n] = Be^{j\omega n}$  e  $u[n] = Ae^{j\omega n}$  e substituindo na equação diferença, tem-se que a resposta do sistema pode ser expressa como:

$$Be^{j\omega(n+2)} - aBe^{j\omega(n+1)} + bBe^{j\omega n} = cAe^{j\omega(n+1)} + dAe^{j\omega n}$$

$$Be^{j\omega n}(e^{j2\omega} - ae^{j\omega} + b) = Ae^{j\omega n}(ce^{j\omega} + d)$$

$$B = A \frac{ce^{j\omega} + d}{e^{j2\omega} - ae^{j\omega} + b} = AH(e^{j\omega})$$

$$y[n] = H(e^{j\omega})Ae^{j\omega n} \quad (49)$$

Em que a função de transferência na representação em resposta de frequência é dada na forma da equação 50.

$$H(e^{j\omega}) = \frac{ce^{j\omega} + d}{e^{j2\omega} - ae^{j\omega} + b} \quad (50)$$

Dessa forma, a função de transferência discreta na forma da resposta em frequência para a planta estável e instável podem ser observadas na equações 51 e 52, respectivamente, ao substituir os devidos coeficientes.

$$H_{est}(e^{j\omega}) = \frac{0.0004966e^{j\omega} + 0.0004933}{e^{j2\omega} - 1.977724e^{j\omega} + 0.9801987} \quad (51)$$

As curvas de módulo e fase estão apresentadas na figura 7, para a planta estável e na figura 8, para a planta instável. Observa-se, além da periodicidade da resposta, que as curvas de fase são semelhantes. A curva de módulo para a planta estável possui ganhos baixos, na faixa abaixo de 0dB. A planta instável possui ganhos maiores, inclusive um ganho que tende ao infinito em nível DC (foi omitido para não distorcer o gráfico, pois é da ordem de 284 dB), justificando o fato de que a entrada do tipo degrau a instabilizou, enquanto que a senoide que possui componentes frequenciais mais elevadas, não o fez.

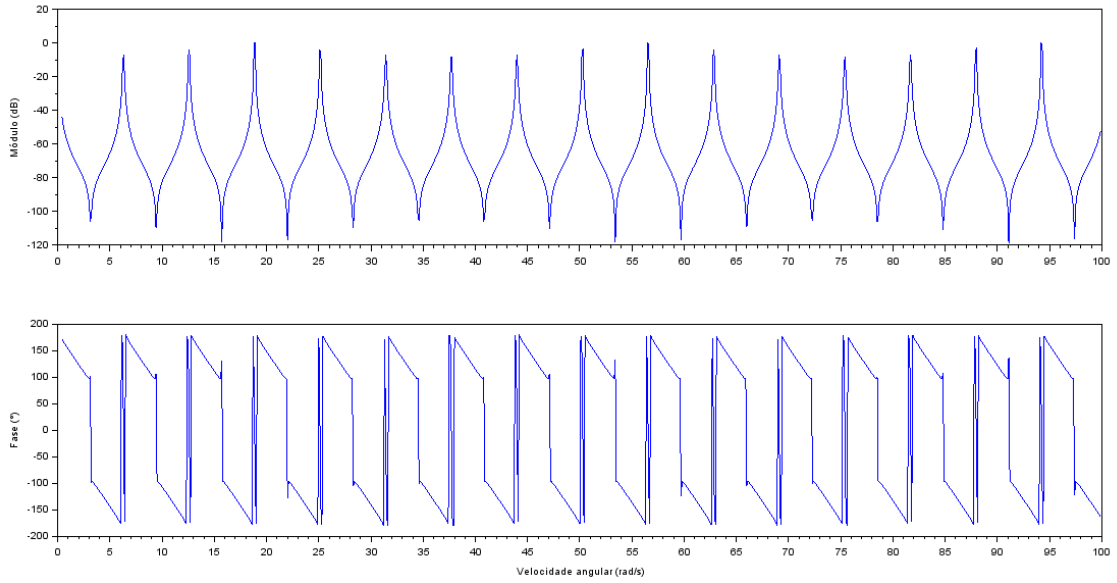


Figura 7: Curvas de módulo e frequência para a planta estável.

$$H_{ins}(e^{j\omega}) = \frac{0.0098354e^{j\omega} + 0.00967728}{e^{j2\omega} - 1.9512294e^{j\omega} + 0.9512294} \quad (52)$$

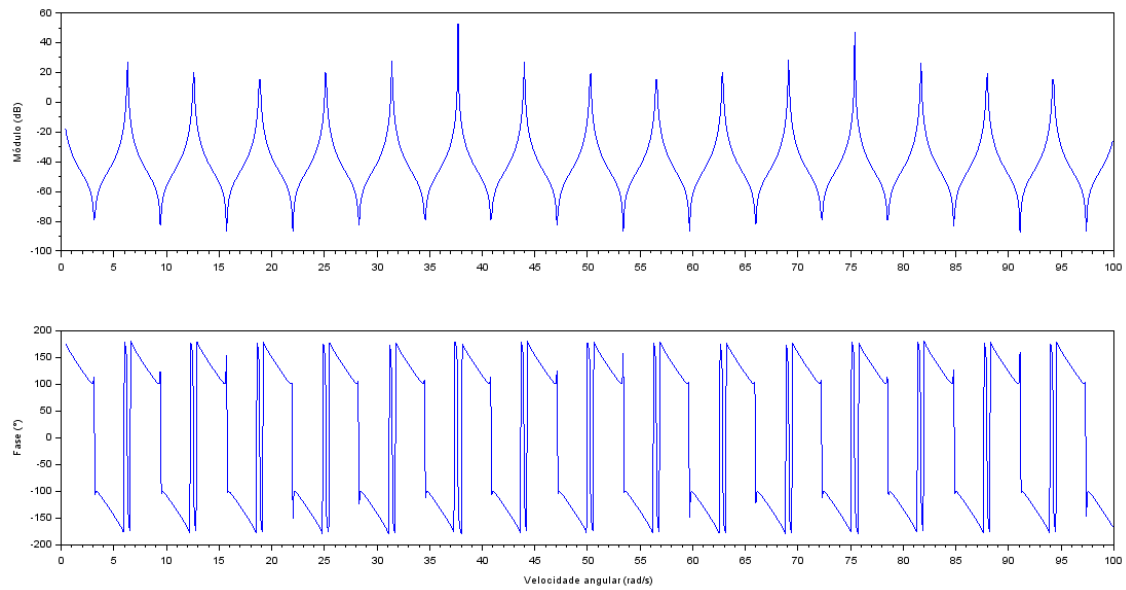


Figura 8: Curvas de módulo e frequência para a planta instável.

## 2.5 Lugar das raízes

Para entender o comportamento dos polos do sistema discreto em malha fechada é necessário avaliar o diagrama do lugar das raízes de ambos os sistemas. Dessa forma foi utilizado o software computacional MATLAB para auxiliar na construção do lugar das raízes.

Para o sistema instável, observa-se no diagrama que ambos os polos se encontram no eixo real no polo de 0.975 e deixam o eixo, iniciando a ter uma resposta oscilatória para poucos valores de ganho. Em seguida os polos deixam o círculo de raio unitário, garantindo que a resposta seja sempre instável. Eles voltam a se encontrar no eixo real por volta de -2.94, mas ainda instável. Para valores maiores de ganho, um polo retorna à periferia do círculo unitário e o outro tende ao infinito. Para a planta estável o comportamento é igual, com a exceção de que os polos não se encontram no eixo real, pois já partem para a instabilidade a partir de polos complexos.



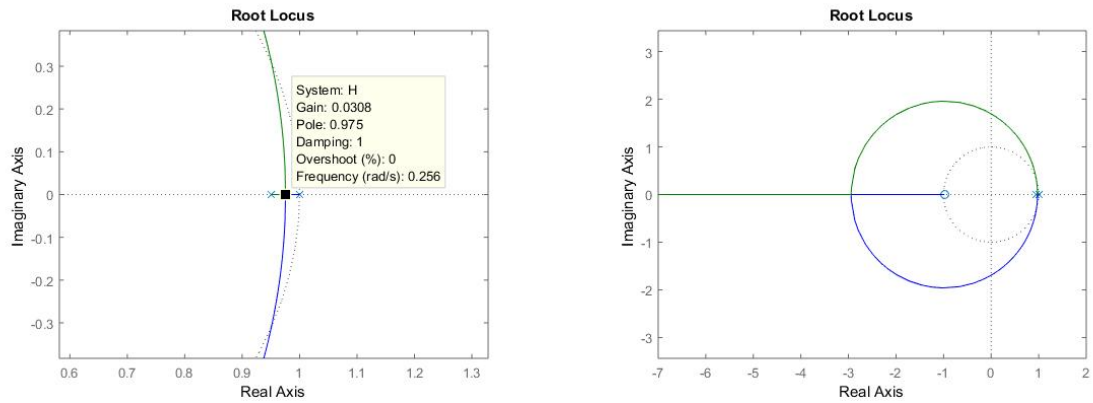


Figura 9: Lugar das raízes para a planta instável em malha aberta.

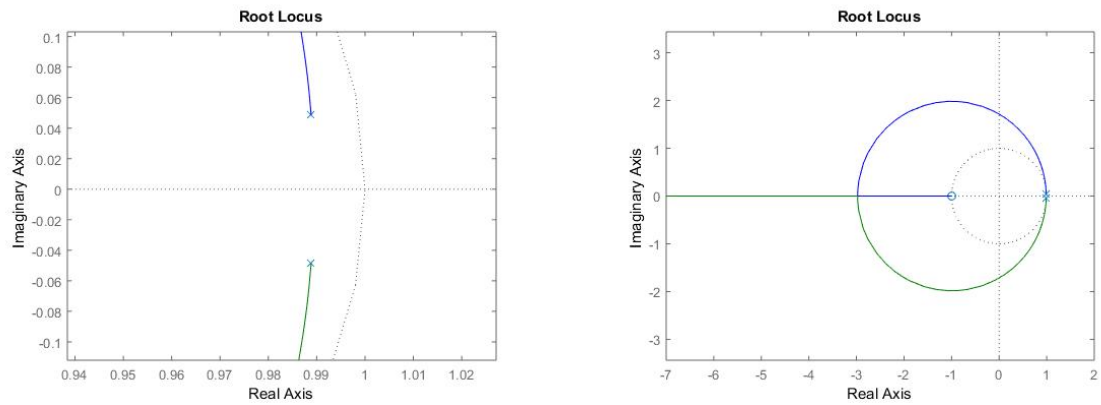


Figura 10: Lugar das raízes para a planta instável em malha aberta.

## 2.6 Controladores

Esta seção será responsável pelo detalhamento do projeto dos controladores para a planta estável e instável. Uma vez que o projeto é livre, será escolhido o método de projeto pelo lugar das raízes para ambas as plantas analógicas, sendo necessário discretizar o controlador, a posteriori.

O sistema em malha fechada com controlador deve possuir erro de regime permanente nulo para uma entrada do tipo degrau, tempo de estabilização menor ou igual que meio

segundo ( $T_S \leq 0.5s$ ) e percentual de ultrapassagem menor ou igual a 5% ( $OS(\%) \leq 5\%$ ). De acordo com os dados da tabela 2 - que apesar de se referirem aos sistemas discretos, também são iguais para a versão analógica - observa-se que ambos os sistemas não cumprem os requisitos, exceto o requisito de erro nulo ao degrau que a planta instável já cumpre, pois possui um integrador.

Dessa forma, espera-se que o modelo das plantas sigam: PID para o sistema estável, pois necessita de melhor desempenho e erro de regime nulo; PD para o sistema instável para melhorar apenas o desempenho.

De acordo com os requisitos de desempenhos que devem ser impostos, os elementos da equação 35 podem ser relacionados com os requisitos de desempenho de acordo com o proposto em OGATA (2009) e com a equação 53 para o coeficiente de amortecimento e percentual de ultrapassagem e a equação 54 para a frequência natural e o tempo de estabilização. Os requisitos de desempenho utilizados obedecerão o valor limítrofe.

$$\xi = \frac{-\ln(OS)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(OS)}} = 0.6901 \approx 0.7 \quad (53)$$

$$\omega_n = \frac{4}{T_S \xi} = 11.428 \text{ rad/s} \quad (54)$$

A partir do polinômio arbitrário observa-se que as raízes pretendidas e que estabelecem os critérios de desempenho são:  $s_{1,2} = -8 \pm j8.16122$ . Assim, o projeto pelo lugar das raízes vai garantir que estes polos sejam alcançados.

O PID desejado será na forma:

$$C(s) = \frac{k_c \tau_d \left(s + \frac{1}{2\tau_d}\right)^2}{s} \quad (55)$$

Vale destacar que o PID está na forma simplificada, considerando o termo integrativo quatro vezes o derivativo, restando apenas o derivativo com dois polos iguais.

Enquanto que o PD será:

$$C(s) = k_c \tau_d \left( s + \frac{1}{\tau_d} \right) \quad (56)$$

Para encontrar os controlador PID discreto, será utilizada a transformação bilinear:

$$s = \frac{1}{h} \ln(z) \approx \frac{2}{h} \left[ \frac{z-1}{z+1} \right]$$

FADALI (2013) resume o controlador PID, discretizado de acordo com a transformação linear na equação 57. Vale destacar que a transformação do controlador PID resulta em um PD digital. Assim, sendo  $c = \frac{2}{h}$ , tem-se:

$$C(z) = K \frac{(s+a)(s+b)}{s} \Big|_{s=c \left[ \frac{z-1}{z+1} \right]} = K \frac{(a+c)(b+c)}{c} \frac{\left[ z + \left( \frac{a-c}{a+c} \right) \right] \left[ z + \left( \frac{b-c}{b+c} \right) \right]}{(z+1)(z-1)}$$

$$C(z) = \frac{K}{2} \frac{(a+c)(b+c)}{c} \frac{\left[ z + \left( \frac{a-c}{a+c} \right) \right] \left[ z + \left( \frac{b-c}{b+c} \right) \right]}{z(z-1)} \quad (57)$$

O controlador possui um zero para melhorar o transitório e um polo em  $z = -1$ . O polo em  $z = -1$  corresponde a uma resposta em frequência não limitada e deve ser eliminado. Mas se eliminá-lo, o controlador será irrealizável. Assim, uma aproximação é trocar o polo por outro na origem associado a uma resposta rápida e com distorções que podem ser resolvidas cortando o ganho DC pela metade e demais ajustes. O polo em  $z = 1$  introduzido pelo PID discreto contribui para anular o erro em regime permanente.

Para o controlador PD será utilizada a aproximação da derivada para frente (por não introduzir polo no controlador, como a aproximação para trás faz, podendo gerar distorções):

$$s \rightarrow \frac{z-1}{h} \quad (58)$$

### 2.6.1 Sistema estável

Para realizar a análise a partir do lugar das raízes, vale lembrar que existem um par de polos devido à planta ( $P1$  e  $P2$ ), dois zeros iguais ( $Z$ ) e um polo na origem ( $P3$ ) devidos ao PID. Assim, as condições para que um dos polos de  $s_{1,2} = s_i$  pertençam ao lugar das raízes, deve seguir o critério de fase e módulo.

O critério de fase permite encontrar o ângulo relativo dos zeros com o polo de referência. Os demais ângulos são facilmente encontrados a partir de relações trigonométricas ( $\theta_{P1} = 155.0123^\circ$ ,  $\theta_{P2} = 118.19^\circ$  e  $\theta_{P3} = 134.43^\circ$ ).

$$\angle A(s_i) = 2\theta_Z - \theta_{P1} - \theta_{P2} - \theta_{P3} = 180^\circ \Rightarrow \theta_Z = 112.816^\circ \quad (59)$$

O termo derivativo pode ser facilmente encontrado por relações trigonométricas, como:  $\tau_d = 0.11369$ .

A condição de módulo permite encontrar o ganho proporcional, uma vez que o termo derivativo fora encontrado. Ela deve ser computada a partir da distância relativa de todos os polos e zeros ao polo de referência. As relações são facilmente encontradas a partir de relações trigonométricas ( $A_Z = 79.58$ ,  $A_{P1} = 7.72$ ,  $A_{P2} = 14.81$  e  $A_{P3} = 11.42$ ).

$$|A(s_i)| = \frac{k_c \tau_d A_Z^2}{A_{P1} A_{P2} A_{P3}} = 1 \Rightarrow k_c = 144.54 \quad (60)$$

Assim, a forma final do controlador analógico será:

$$C(s) = 16.4327s + 144.5387 + \frac{317.83}{s} \quad (61)$$

Ao realizar a transformação bilinear por meio da equação 57, obtém-se o controlador discreto.

$$C(z) = 1716.3343 \frac{z^2 - 1.9139z + 0.9157}{z(z - 1)} \quad (62)$$

Ao simular o sistema discreto em malha fechada e com o controlador para uma entrada do tipo degrau e compará-lo com a mesma situação para o sistema em tempo contínuo, obtém-se a figura 11.

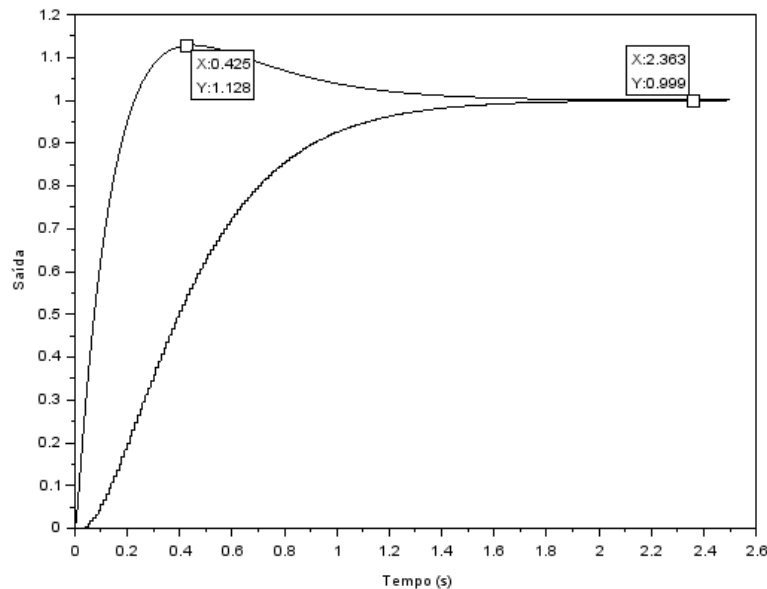


Figura 11: Comparação entre a saída em tempo contínuo e tempo discreto para o sistema estável em malha fechada e com controlador.

A partir da análise da figura, observa-se que a resposta para o sistema contínuo possuiu uma ultrapassagem maior que a esperada pelo projeto do controlador, ou seja, ao invés de 5% obteve-se cerca de 12%, mas o tempo de estabilização se manteve em cerca de 0.5s. Porém, em termos da resposta discreta, a transformação bilinear causou distorções a ponto de contribuir para a redução do percentual de ultrapassagem (anulando-o), mas com o prejuízo de dobrar o tempo de estabilização (1s). Ambas alcançaram o regime permanente de acordo com a referência degrau. Essa compensação de desempenhos entre as representações foi devido ao fator de ganho do controlador ser ajustado para a metade, devido às distorções geradas pelo polo na origem do controlador discreto. Em conclusão, os valores são bastante aceitáveis, uma vez que o critério de tempo de estabilização de 0.5s foi decidido com base em eventuais distorções.

Por fim, ao inserir o controlador, o lugar das raízes para o sistema em malha fechada foi amplamente alterado, com os polos mantendo-se sempre dentro do círculo unitário e com

polos que para um ganho infinito tendem a -0.993 e 0.957. Enquanto que este último é um polo duplo devido a inserção do polo em  $z=1$  do controlador (polo na origem do plano  $s$ ).

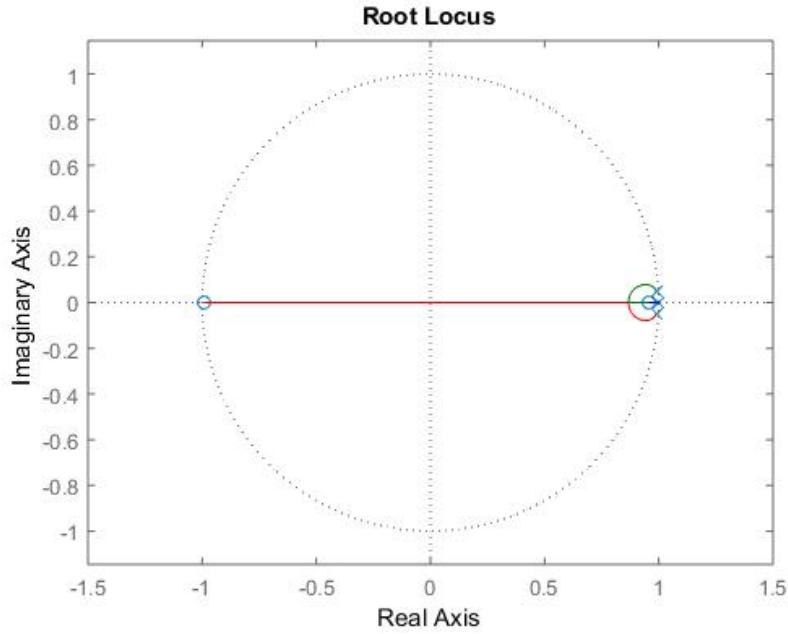


Figura 12: Lugar das raízes para a planta estável com o controlador.

### 2.6.2 Sistema instável

Para realizar a análise a partir do lugar das raízes, vale lembrar que a planta possui um polo na origem ( $P_2$ ) e outro no eixo real ( $P_1$ ). A planta irá inserir apenas um zero ( $Z$ ).

Analogamente ao projeto anterior, os ângulos podem ser encontrados por relações trigonométricas ( $\theta_{P_1} = 132.582^\circ$  e  $\theta_{P_2} = 134.53^\circ$ ) e o ângulo do zero será encontrado pelo critério de fase.

$$\angle A(s_i) = \theta_Z - \theta_{P_1} - \theta_{P_2} = 180^\circ \Rightarrow \theta_Z = 87.112^\circ \quad (63)$$

O termo derivativo pode ser facilmente encontrado por relações trigonométricas, como:  $\tau_d = 0.11888$ .

Os módulos relativos ao polo desejado são facilmente encontrados a partir de relações trigonométricas para garantir a condição de módulo ( $A_Z = 8.1716$ ,  $A_{P1} = 11.084$  e  $A_{P2} = 11.4282$ ).

$$|A(s_i)| = \frac{k_c \tau_d A_Z}{A_{P1} A_{P2}} = 1 \Rightarrow k_c = 130.395 \quad (64)$$

Assim, a forma final do controlador analógico será:

$$C(s) = 15.5014s + 130.395 \quad (65)$$

Ao realizar a transformação por meio da aproximação da derivada para a frente por meio da relação 58, obtém-se o controlador discreto.

$$C(z) = 155.014(z - 0.15882) \quad (66)$$

Ao simular o sistema discreto em malha fechada e com o controlador para uma entrada do tipo degrau e compará-lo com a mesma situação para o sistema em tempo contínuo, obtém-se a figura 13.

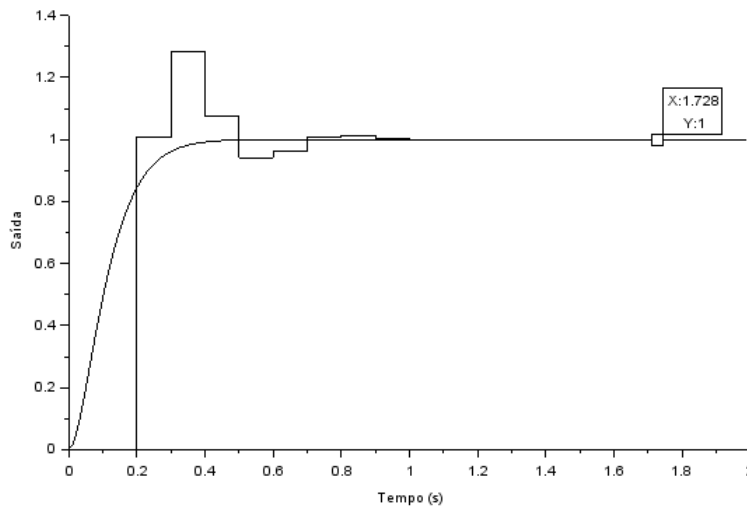


Figura 13: Comparação entre a saída em tempo contínuo e tempo discreto para o sistema instável em malha fechada e com controlador.

A partir da análise da figura, observa-se que a relação de troca que antes houve para o sistema estável, não aconteceu aqui. No sistema contínuo, apesar de ter sido projetado o percentual de ultrapassagem de 5%, na simulação ele anulou a ultrapassagem, possuindo uma resposta bem suave e que alcança a referência degrau.

Enquanto isso, o sistema discretizado cumpriu o requisito de tempo e estabilização (0.5s), alcançando em 5 amostras (tempo de amostragem de 0.1s), mas o percentual de ultrapassagem foi deveras alto, cerca de 28% (sinal máximo de 1.28). Essa distorção pode ser considerada devido a aproximação adotada (derivada para frente) e diretamente ligado ao tempo de amostragem baixo. Isso se justifica, pois em experimentos, ao reduzir o período de amostragem ( $/10$ ) a resposta suavizou e se aproximou da resposta contínua.

Outra opção mais fácil de implementar foi dobrar o ganho derivativo ou reduzir o ganho proporcional do controlador. As saídas para ambas as opções apresentam sobrepostas na figura 14, não sendo necessário identificar uma ou outra, pois possuem comportamento bem semelhante: percentual de ultrapassagem nulo e tempo de estabilização de 0.6s (6 amostras).



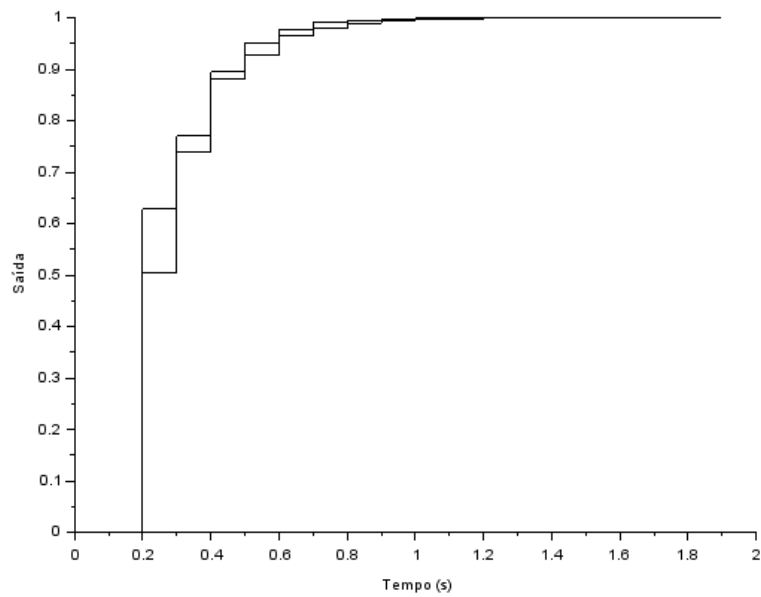


Figura 14: Comparação entre a saída discreta com controlador ajustado.

Por fim, ao inserir o controlador, o lugar das raízes para o sistema em malha fechada foi amplamente alterado, com os polos mantendo-se sempre dentro do círculo unitário e com polos que para um ganho infinito tendem a  $-0.984$  e  $0.579$ .

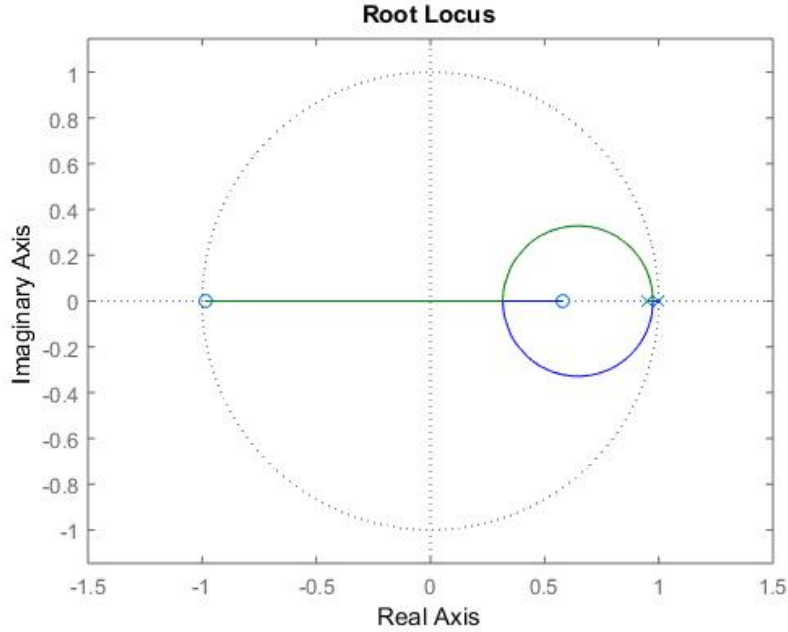


Figura 15: Lugar das raízes para a planta instável com o controlador.

## 2.7 Comparação com o controlador *dead beat*

No projeto do *dead beat* foi considerada a forma padrão (equação 31) das plantas discretas trabalhadas. Como o denominador e o numerador da planta tornam-se o numerador e denominador do controlador, respectivamente, e com uma quantidade  $n$  de polos em  $z = 1$  adicionados no controlador para garantir a resposta desejada. Como a diferença no grau do denominador para o numerador da planta difere de 1, implica que  $n = 1$ . Assim, o formato dos *dead beats* utilizados neste trabalho segue a forma:

$$C(z) = \frac{z^2 - az + b}{(cz + d)(z - 1)}$$

Com o controlador pronto e aplicado ao sistema realimentado negativamente, assim como nos sistemas anteriores com seus respectivos controladores. Na intenção de comparar os controladores trabalhados em tópicos anteriores com o *dead beat*, não adianta recorrer à saída, pois ao considerar o sistema com o *dead beat*, esta será apenas a entrada global do sistema com uma quantidade  $n$  de atrasos. Assim, basta recorrer ao sinal de controle, pois

este indica o quão rígido o controle foi. Devido à natureza do *dead beat*, espera-se que os sinais de controle por ele gerados possuam amplitudes maiores e banda de frequência mais ampla, enquanto que o controlador tradicional possui uma saída mais suave.

Sendo a linguagem dos fatos a mais eloquente, permite-se passar diretamente para os dados experimentais, frutos da simulação, que autorizam discutir a respeito da hipótese proferida.

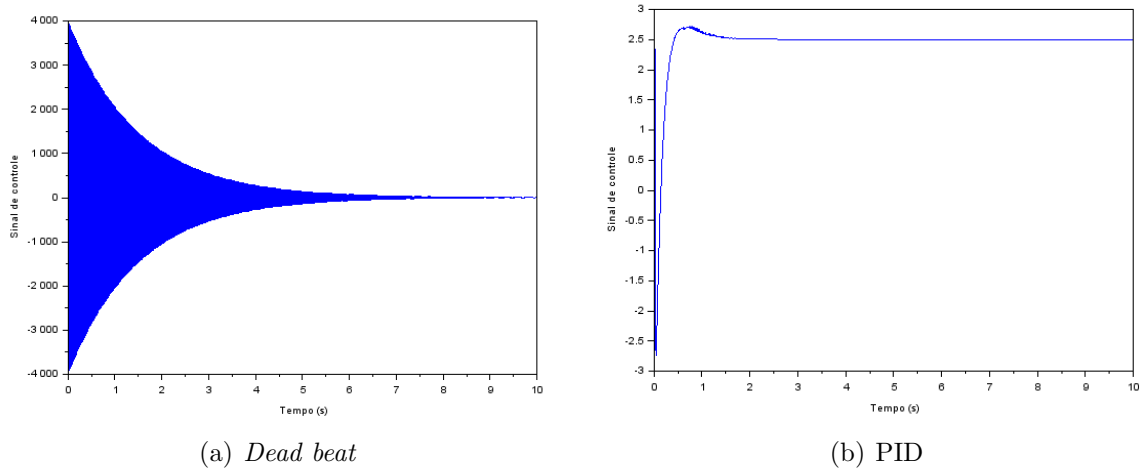


Figura 16: Comparação entre os sinais de controle gerados pelos controladores (a) *dead beat* e o (b) PID para a planta estável e com a entrada do tipo degrau.

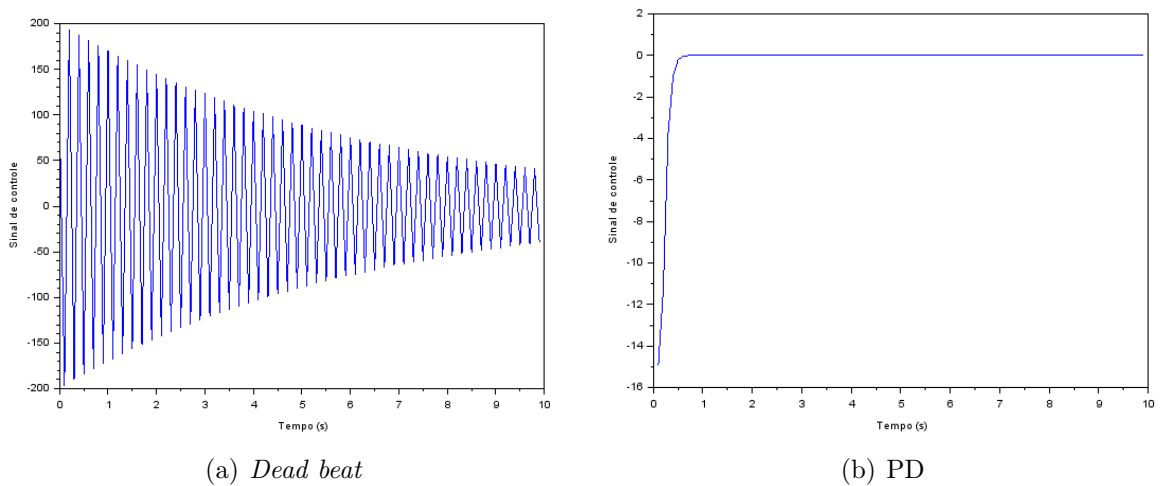


Figura 17: Comparação entre os sinais de controle gerados pelos controladores (a) *dead beat* e o (b) PD para a planta instável e com a entrada do tipo degrau.

De acordo com as imagens 16 e 17, observa-se que a excursão da amplitude dos sinais de controle pelos *dead beats* foi muito mais elevada que para os outros controladores: PID e PD. Ao longo do tempo o sinal tende a estabilizar. A frequência também se mostra elevada, enquanto que para os controladores tradicionais, as respostas são bem suaves e que tendem a seguir o formato da saída do sistema.

Um fato importante, e que foi omitido no gráfico para evitar distorções, é que os controladores PID e PD possuem, em suas primeiras amostras, uma grande amplitude do sinal de controle. Isto é devido às parcelas derivativas do controlador que deriva a entrada degrau, resultando em uma taxa de crescimento infinita. Porém, com o tempo, esses valores são corrigidos por meio do próprio controle para valores relativos à dinâmica do sistema.

## 3 Projeto de observador

### 3.1 Identificação de sistemas

Considerando a equação da função de transferência padrão 31, a sua equação diferença será na forma:

$$y[n+2] = cx[n+1] + dx[n] + ay[n+1] - by[n]$$

Assim, um modelo básico para identificação dos coeficientes do sistema podem ser considerados pela equação matricial 67 para um conjunto de  $N$  amostras:

$$\begin{bmatrix} y[2] \\ y[1] \\ \vdots \\ y[N] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u[1] & u[0] & -y[1] & -y[0] \\ u[2] & u[1] & -y[2] & -y[1] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u[N-1] & u[N-2] & -y[N-1] & -y[N-2] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \\ a \\ b \end{bmatrix} \quad (67)$$

Com  $y$  representando o vetor de amostras da resposta do sistema analógico e  $u$  a entrada do sistema. Para uma identificação mais precisa do sistema, a entrada deve possuir componentes frequenciais que busquem explorar todos os modos de excitação do sistema.

O sistema acima pode ser escrito como a equação matricial:  $y = Mc$ , de forma que o vetor de coeficientes pode ser encontrado por:  $c = M^{-1}y$ . Porém, como a matriz  $M$  não é quadrada, ela não possuirá inversa, sendo necessário recorrer à pseudo inversa:

$$c = (M^t M)^{-1} M^t y \quad (68)$$

#### 3.1.1 Sistema estável

Para a identificação do sistema estável, foi utilizada uma entrada de pulsos de amplitudes aleatórias (variam de 0 a 1) com no mínimo uma frequência de amostragem de 100

vezes maior que a do sistema simulado, gerando uma saída do sistema contínuo simulado no XCOS do Scilab. Essa saída foi utilizada para computar o vetor de coeficientes de acordo com a equação matricial 68.

O perfil da entrada utilizada comparada com a saída encontrada estão apresentados na figura 18

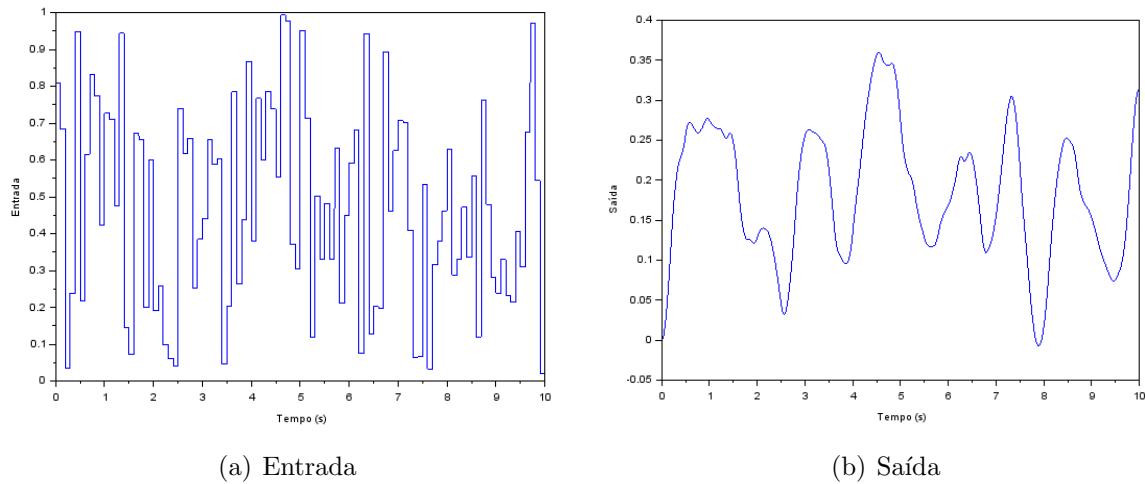


Figura 18: (a) Entrada aleatória e sua respectiva (b) saída para o sistema estável.

Utilizando o vetor saída encontrado no passo anterior para identificar o sistema, observou-se que o vetor de coeficientes encontrados foi:

- $a = 1.9768486$ ;
- $b = 0.9792891$ ;
- $c = 0.0008145$ ;
- $d = 0.0001605$ ;

Comparando com os coeficientes originais:

- $a = 1.977724$ ;

- $b = 0.9801987$
- $c = 0.0004966$
- $d = 0.0004933$

Pela comparação observa-se que os coeficientes do denominador possuem uma alta correspondência, enquanto que, à primeira vista, os coeficientes do numerador diferem. Essa falta de correspondência é solucionada ao simular o sistema para uma entrada degrau unitário, resultando na figura 19.

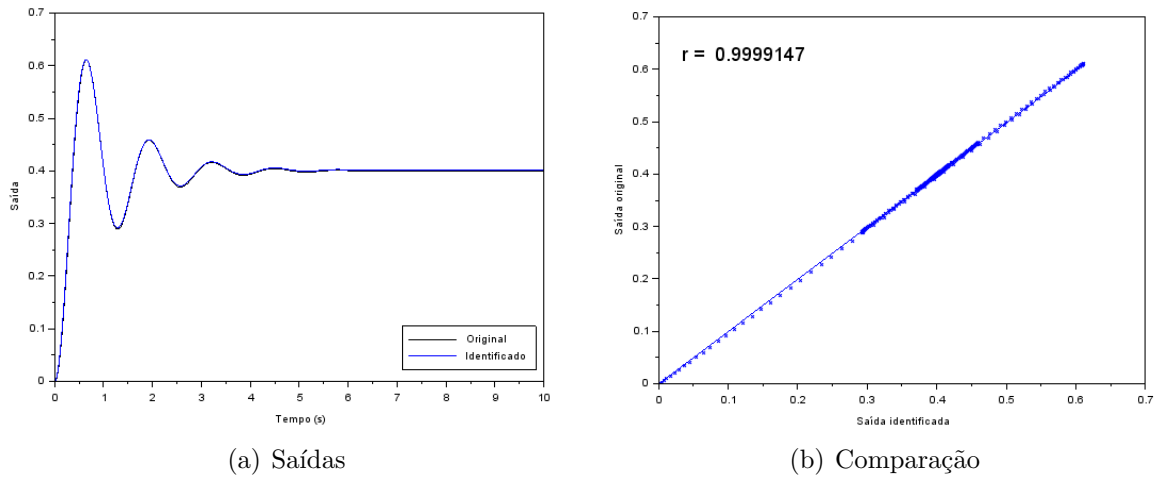


Figura 19: (a) Comparação entre as saídas para os sistemas original e identificado e a (b) correlação dos valores.

De acordo com a figura, observa-se que a comparação da resposta do sistema identificado com o sistema discreto simulado com os coeficientes originais possuem uma alta correlação, representando um bom modelo para identificação de sistemas contínuos. Porém, deve ser levado em conta que o sistema identificado é tão preciso quanto diversificado for o sinal de entrada.

### 3.1.2 Sistema instável

A identificação do sistema instável é um pouco mais difícil, pois entradas que possuem um *offset* levam o sistema a um crescimento indefinido. Neste caso o sistema instabilizando,

seus modos de excitação não são amplamente explorados, resultando em coeficientes que equivalem a um sistema que diverge significativamente, ou uma matriz singular.

A alternativa encontrada foi realizar a realimentação negativa de ganho unitário na planta para que ela se estabilize. Considerando que a planta em malha aberta é aquela da equação 30, tem-se que a planta em malha fechada a partir do mesmo processo de discretização submetido anteriormente (processo facilitado pela função *c2d* do MATLAB), será:

$$H_{ins}(z) = \frac{0.009819z + 0.009657}{z^2 - 1.932z + 0.9512} \quad (69)$$

Observa-se nessa planta que o numerador continua o mesmo que o da malha aberta e que os coeficientes do denominador mudaram de acordo com o numerador (número pequeno, o suficiente para que o sistema não instabilize. Desta forma ao realizar a identificação para esse sistema, basta subtrair os coeficientes encontrados para o numerador dos devidos coeficientes do denominador.

Outro detalhe importante é que a matriz do sistema 67 irá mudar. Uma vez que a entrada  $u$  não mais representará a entrada global do sistema, mas apenas o erro.

A partir deste ponto, a análise é análoga à anterior. O perfil da entrada utilizada comparada com a saída encontrada estão apresentados na figura 20. Neste caso, foi optado por uma entrada mais simples, mas ainda gerada randomicamente.



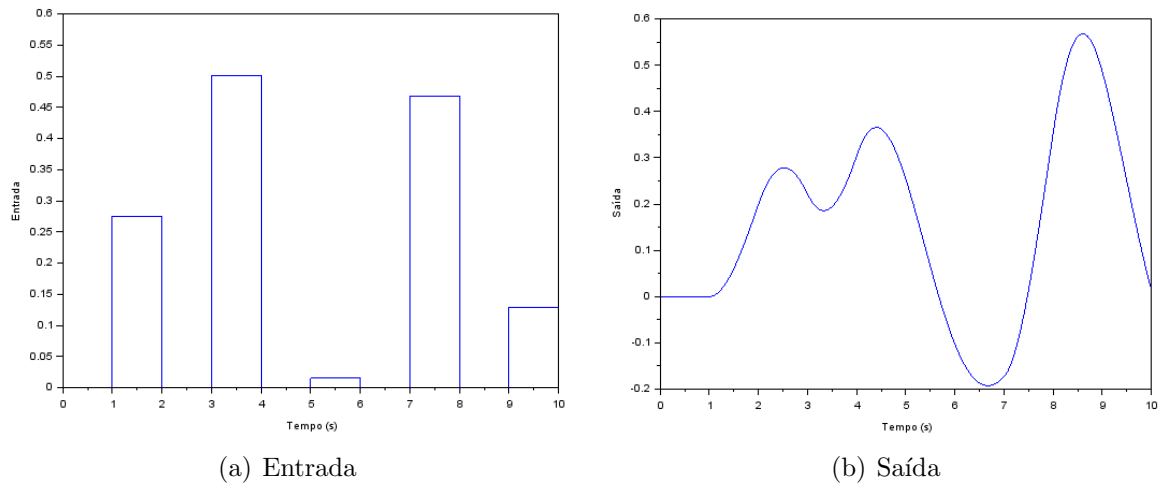


Figura 20: (a) Entrada aleatória e sua respectiva (b) saída para o sistema instável.

Utilizando o vetor saída encontrado no passo anterior para identificar o sistema, observou-se que o vetor de coeficientes encontrados foi:

- $a = 1.9994965$ ;
- $b = 0.9994965$ ;
- $c = 0.0000024$ ;
- $d = -0.0000004$ ;

Comparando com os coeficientes originais:

- $a = 1.9512294$ ;
- $b = 0.9512294$
- $c = 0.0098354$
- $d = 0.00967728$

Pela comparação observa-se que os coeficientes do denominador possuem uma relativa correspondência, enquanto que, à primeira vista, os coeficientes do numerador diferem.

Essa falta de correspondência é solucionada ao simular o sistema para uma entrada degrau unitário e com período de amostragem adequado à corresponder, resultando na figura 19 que permite concluir que a representação foi boa.

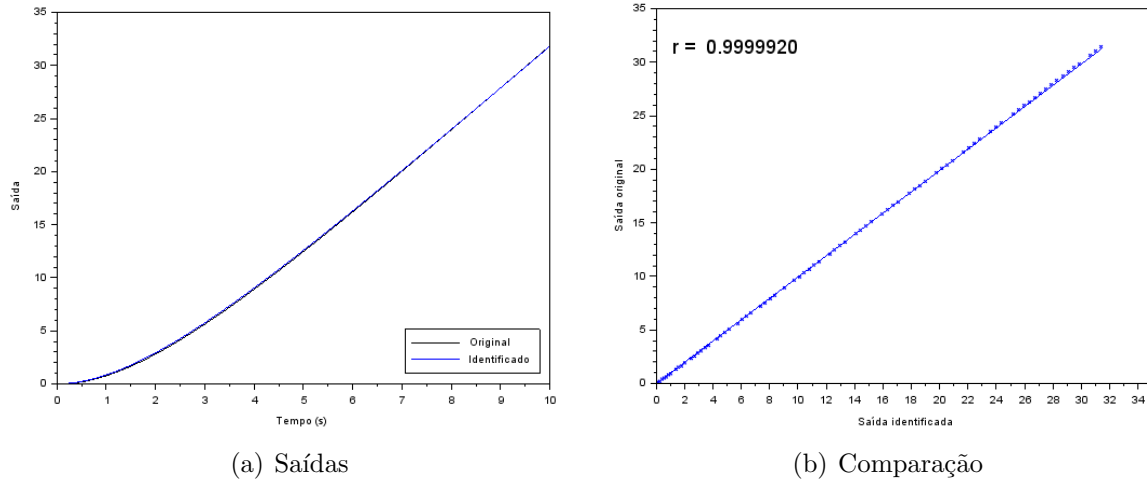


Figura 21: (a) Comparação entre as saídas para os sistemas original e identificado e a (b) correlação dos valores.

### 3.2 Análise de controlabilidade e observabilidade em tempo discreto

Será verificada a controlabilidade e observabilidade de cada uma das plantas a partir das representações em espaço de estados em tempo discreto. Em seguida, para cada análise, a planta será reescrita na forma canônica controlável ou observável.

Um sistema linear invariante no tempo será controlável se e somente se, a matriz de controlabilidade da equação 70 de dimensões  $n \times m.s$  possuir posto  $n$ . Enquanto que para ser observável, a matriz de observabilidade da equação 71 de dimensões  $l.n \times n$  deve possuir posto  $n$ .

$$W_C = \begin{bmatrix} \Gamma & \Phi\Gamma \end{bmatrix} \quad (70)$$

$$W_O = \begin{bmatrix} C \\ C\Phi \end{bmatrix} \quad (71)$$

A partir da representação em FADALI (2013), a representação na forma canônica controlável e observável do sistema padrão adotado neste trabalho por meio da equação 31 são representadas, respectivamente, pelos sistemas de equações 72 e 73.

$$\begin{cases} x[n+1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & a \end{bmatrix} x[n] + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u[n] \\ y[n] = \begin{bmatrix} d & c \end{bmatrix} x[n] \end{cases} \quad (72)$$

$$\begin{cases} x[n+1] = \begin{bmatrix} a & 1 \\ -b & 0 \end{bmatrix} x[n] + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} u[n] \\ y[n] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x[n] \end{cases} \quad (73)$$

### 3.2.1 Controlabilidade e forma canônica controlável

Considerando o sistema estável, sua matriz de controlabilidade será:

$$W_{C_{EST}} = \begin{bmatrix} 0.0004966 & 0.0014754 \\ 0.0989654 & 0.0967608 \end{bmatrix} \quad (74)$$

Enquanto que para o sistema instável, sua matriz de controlabilidade será:

$$W_{C_{INS}} = \begin{bmatrix} 0.0098354 & 0.0288639 \\ 0.1950823 & 0.185568 \end{bmatrix} \quad (75)$$

Dessa forma, observando que todas as linhas da matriz de controlabilidade da planta estável e instável são linearmente independentes, com posto 2 (ou o determinante não nulo), logo os sistemas nessa representação são controláveis.

Caso a representação em espaço de estados considerada até agora não fosse controlável, uma solução seria representar o sistema em sua forma canônica controlável a partir da função de transferência discreta que garante que ele seja sempre controlável. Assim, a partir da fórmula expressa na equação 72 a partir da literatura e para um sistema de ordem 2, a

representação na forma canônica controlável para o sistema estável e instável podem ser observadas nos sistemas 76 e 77, respectivamente.

$$\begin{cases} x[n+1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.9801987 & 1.977724 \end{bmatrix} x[n] + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u[n] \\ y[n] = \begin{bmatrix} 0.0004933 & 0.0004966 \end{bmatrix} x[n] \end{cases} \quad (76)$$

$$\begin{cases} x[n+1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.9512294 & 1.9512294 \end{bmatrix} x[n] + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u[n] \\ y[n] = \begin{bmatrix} 0.00967728 & 0.0098354 \end{bmatrix} x[n] \end{cases} \quad (77)$$

### 3.2.2 Observabilidade e forma canônica observável

Considerando o sistema estável, sua matriz de observabilidade será:

$$W_{O_{EST}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.9987586 & 0.0098965 \end{bmatrix} \quad (78)$$

Enquanto que para o sistema instável, sua matriz de observabilidade será:

$$W_{O_{INS}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0.0975412 \end{bmatrix} \quad (79)$$

Dessa forma, observando que todas as linhas da matriz de observabilidade da planta estável e instável são linearmente independentes, com posto 2 (ou o determinante não nulo), logo os sistemas nessa representação são observáveis.

De acordo com o que foi discutido para a forma canônica controlável, também é aplicável a transformação do sistema para sua forma canônica observável, garantindo a observabilidade. Assim, a partir da fórmula expressa na equação 73 a partir da literatura e para um sistema de ordem 2, a representação na forma canônica observável para o sistema estável e instável podem ser observadas nos sistemas 80 e 81, respectivamente.

$$\begin{cases} x[n+1] = \begin{bmatrix} 1.977724 & 1 \\ -0.9801987 & 0 \end{bmatrix} x[n] + \begin{bmatrix} 0.0004966 \\ 0.0004933 \end{bmatrix} u[n] \\ y[n] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x[n] \end{cases} \quad (80)$$

$$\begin{cases} x[n+1] = \begin{bmatrix} 1.9512294 & 1 \\ -0.9512294 & 0 \end{bmatrix} x[n] + \begin{bmatrix} 0.0098354 \\ 0.00967728 \end{bmatrix} u[n] \\ y[n] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x[n] \end{cases} \quad (81)$$

### 3.3 Observadores de estado

Os observadores de estado projetados partiram da equação 36 para obter os polos do observador que são encontrados na forma:  $a^*(z) = z^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)z + (\lambda_1\lambda_2)$ . Assim, escolhe-se os polos para  $\omega_n = 3.384rad/s$  e  $\xi = 0.591$ , obtendo  $\lambda_1 = 0.979916$  e  $\lambda_2 = 0.980481$ , para os polos do observador do sistema estável e  $\lambda_{1,2} = 0.818726 \pm j0.00278153$ , para os polos do observador do sistema instável.

A partir dos polos encontra-se a matriz L de ganhos do observador. Resolvendo o sistema de equações  $\det(\lambda I - \Phi - LC) = 0$  para os polos do observador, permite-se encontrar a matriz L. O sistema foi considerado aquele na forma canônica observável que garante que o sistema sempre será observável. Para ambos os sistemas, a matriz encontrada foi:

$$L_{est} = \begin{bmatrix} 0.017327 \\ -0.0194097 \end{bmatrix}; L_{ist} = \begin{bmatrix} 0.3137774 \\ -0.2809094 \end{bmatrix}$$

A partir das matrizes encontradas, foi realizada a simulação do sistema com o observador de estado em malha fechada (equação matricial 82) para observar como as variáveis de estado estimadas se comportam em relação às variáveis originais.

$$\begin{cases} \tilde{x}[n+1] = (\Phi - LC)\tilde{x}[n] + \Gamma u[n] + Ly[k] \\ \tilde{y}[n] = C\tilde{x}[n] + Du[n] \end{cases} \quad (82)$$

Antes de realizar a simulação, os valores de saída originais foram somados a um sinal

aleatório limitado em  $\pm 0.05$  para funcionar como ruído.

Dessa forma, foram avaliadas como as variáveis de estado estimadas se comportam e seus erros relativos às variáveis originais. O erro será avaliado com e sem adição de ruído.

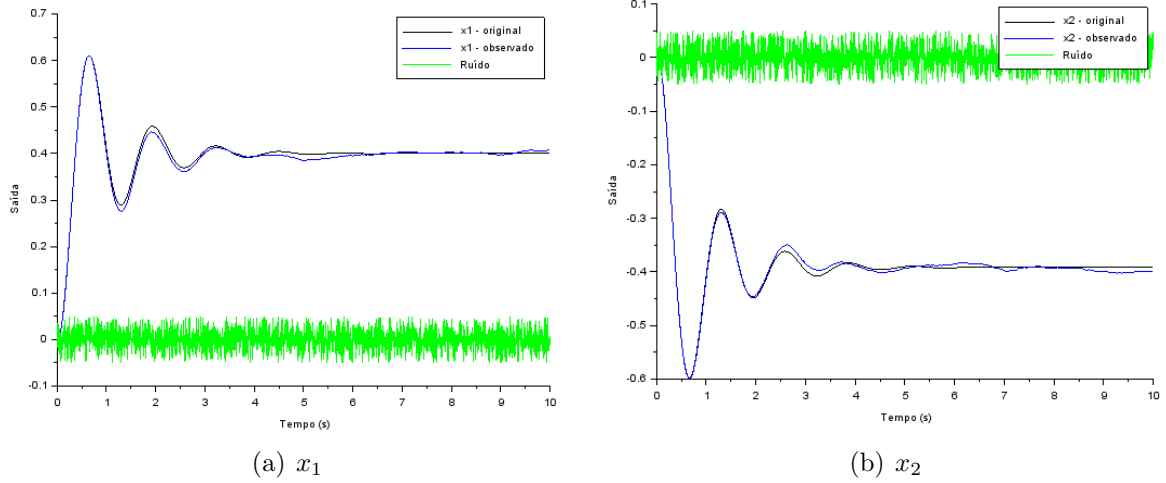


Figura 22: Comparação entre as variáveis de estado estimadas e originais (a) 1 e (b) 2, do sistema estável.

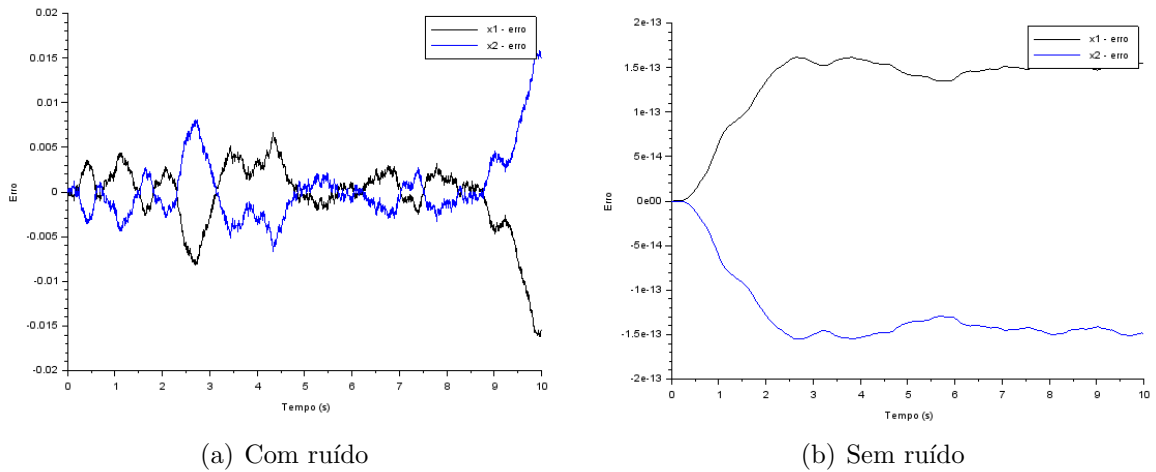


Figura 23: Comparação entre os erros entre as variáveis de estados, considerado o caso em que (a) um sinal de erro é somado à saída original do sistema estável e (b) quando não é.

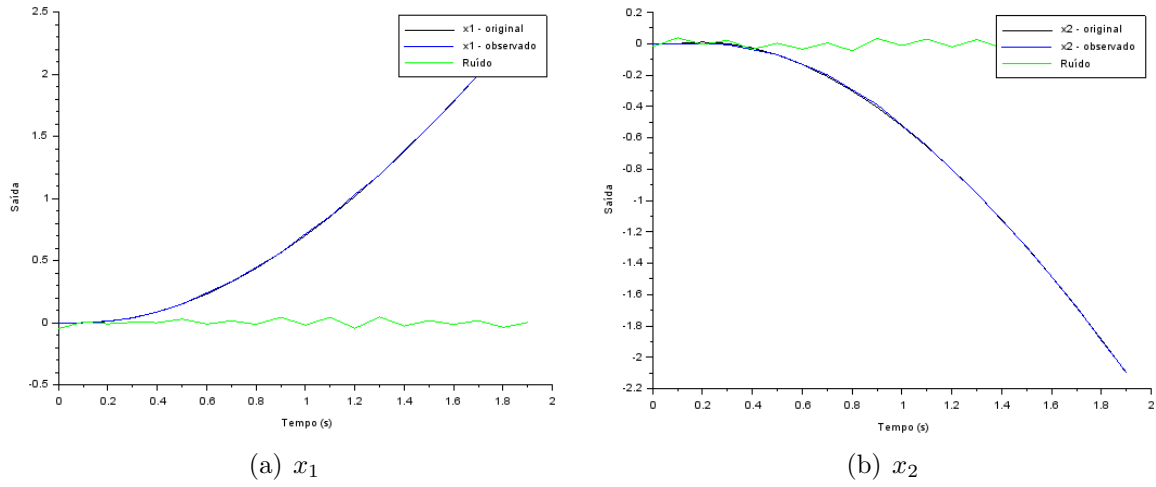


Figura 24: Comparação entre as variáveis de estado estimadas e originais (a) 1 e (b) 2, do sistema instável.

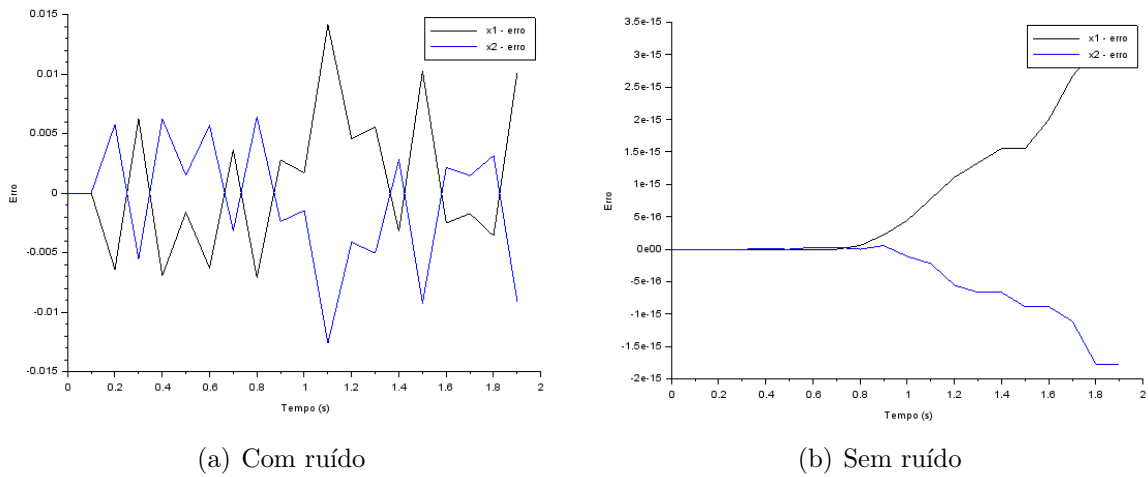


Figura 25: Comparação entre os erros entre as variáveis de estados, considerado o caso em que (a) um sinal de erro é somado à saída original do sistema instável e (b) quando não é.

A partir dos resultados, pode-se notar que o observador de estados possui uma alta fidelidade em estimar os estados reais do sistema. Porém, de acordo com os resultados para o sistemas estável, notou-se um ligeiro aumento no erro de acordo com que o sinal alcançava a região de regime, enquanto que na planta instável esse efeito é inexistente. Outro fato a ser analisado é o comportamento do erro de acordo com a presença do ruído, mudando significativamente o erro e o tornando imprevisível. Há de notar que, principalmente no

caso estável que possui uma maior frequência de amostragem, o ruído, que possui alta frequências, foi modulado pelo erro.

Ao atribuir polos mais rápidos para o observador, observou que, de fato, o erro se propagava com maior intensidade, exaltando a importância de que um bom projeto de observador, na prática, faz toda a diferença.



## 4 Conclusões

O controle digital por computador se mostrou uma boa alternativa ao controle analógico tradicional, pois ele permite a facilidade de reprojetar e um ambiente com condições externas controladas, evitando ter que se preocupar com fatores limitantes do ambiente ou de tolerância de componentes. Porém, como a representação digital é apenas uma aproximação da representação analógica, a velocidade no processamento dos dados será uma barreira limitante, pois ela dita a precisão do modelo. Entretanto, ao obedecer o teorema da amostragem e conhecimento prévio do hardware no qual o controlador será implementado, as barreiras limitantes diminuem, permitindo a expansão das técnicas de controle tradicionais para novos horizontes de aplicações.

## Referências

- [1] Åström, Karl J., and Björn Wittenmark. Computer-controlled systems: theory and design. Courier Corporation, 2013.
- [2] de Lauro Castrucci, Plínio Benedicto, e Anselmo Bittar. Controle automático. Grupo Gen-LTC, 2000.
- [3] Fadali, M. Sami, and Antonio Visioli. Digital control engineering: analysis and design. Academic Press, 2013.
- [4] Introduction to Control Systems in Scilab. Disponível em: <http://www.openeering.com/>.
- [5] Lathi, Bhagwandas Pannalal, and Roger A. Green. Linear systems and signals. Vol. 2. New York: Oxford University Press, 2005.
- [6] Ogata, Katsuhiko. Modern control engineering. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2009.
- [7] Ogata, Katsuhiko. Discrete-time control systems. Vol. 2. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1995.