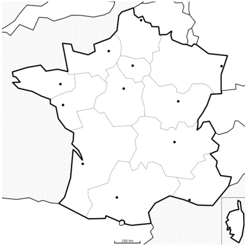
Approximations du problème du voyageur de commerce

Deuxième revue de TIPE

11907: BOURNEUF Romain
2269: JALOUZOT Louis

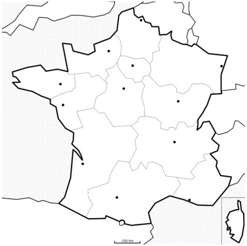
Table des matières

Introduction : exemple



Objectif : Trouver un chemin de longueur minimale passant une et une seule fois par chacune des villes.

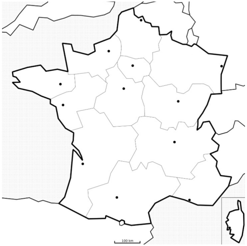
Introduction : exemple



Objectif : Trouver un chemin de longueur minimale passant une et une seule fois par chacune des villes.

Solution naïve : tester tous les chemins, complexité exponentielle
15 villes = 43 milliards de possibilités = 12h de calcul

Introduction : exemple



Objectif : Trouver un chemin de longueur minimale passant une et une seule fois par chacune des villes.

Solution naïve : tester tous les chemins, complexité exponentielle
15 villes = 43 milliards de possibilités = 12h de calcul

Pas de solution efficace connue, problème NP-complet

Approximations

Idée : Déterminer une solution approchée, faisable en temps polynomial

Approximations

Idée : Déterminer une solution approchée, faisable en temps polynomial

Facteur d'approximation : C'est le rapport

$$\frac{qappro}{qexacte}$$

en notant *qappro* la qualité de la solution approchée, et *qexacte* la qualité de la solution exacte

Approximations

Idée : Déterminer une solution approchée, faisable en temps polynomial

Facteur d'approximation : C'est le rapport

$$\frac{qappro}{qexacte}$$

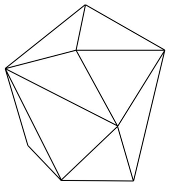
en notant *qappro* la qualité de la solution approchée, et *qexacte* la qualité de la solution exacte

Algorithme de Christofides : 3/2-approximation

Table des matières

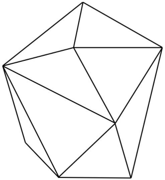
Modélisation

Objet : Graphe complet pondéré et non orienté



Modélisation

Objet : Graphe complet pondéré et non orienté

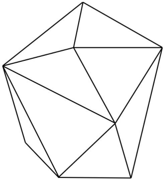


Definition

Un **cycle hamiltonien** est un chemin qui passe par tous les sommets une fois et une seule.
On appelle **poids** d'un ensemble d'arêtes la somme des poids de ses arêtes.

Modélisation

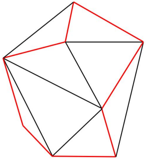
Objet : Graphe complet pondéré et non orienté



Definition

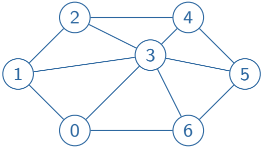
Un **cycle hamiltonien** est un chemin qui passe par tous les sommets une fois et une seule.
On appelle **poids** d'un ensemble d'arêtes la somme des poids de ses arêtes.

Objectif : Cycle hamiltonien de poids minimal



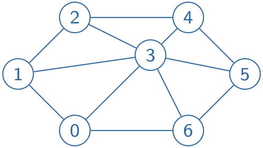
L'algorithme 1/3

Soit $G = (V, E)$ un graphe.
Hypothèse : Les arêtes respectent l'inégalité triangulaire.



L'algorithme 1/3

Soit $G = (V, E)$ un graphe.
Hypothèse : Les arêtes respectent l'inégalité triangulaire.

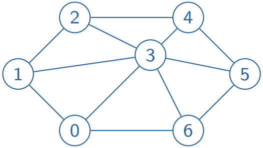


Definition

Un **arbre** de G est un sous-graphe de G connexe sans cycle.
Un arbre de G est dit **couvrant** s'il contient tous les sommets de G.

L'algorithme 1/3

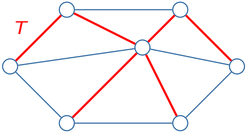
Soit $G = (V, E)$ un graphe.
Hypothèse : Les arêtes respectent l'inégalité triangulaire.



Definition

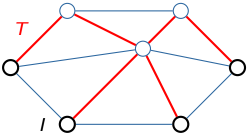
Un **arbre** de G est un sous-graphe de G connexe sans cycle.
Un arbre de G est dit **couvrant** s'il contient tous les sommets de G.

1. Déterminer un **arbre couvrant de poids minimal** T de G.



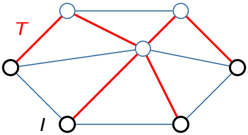
L'algorithme 2/3

On note I l'ensemble des **sommets de degré impair** de T et $G|_I$ le sous-graphe induit par ces sommets.



L'algorithme 2/3

On note I l'ensemble des **sommets de degré impair** de T et $G|_I$ le sous-graphe induit par ces sommets.

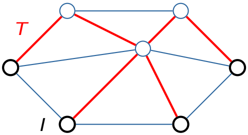


Definition

Un **couplage parfait** M de G est un ensemble d'arêtes de G tel que chaque sommet de G soit adjacent à une unique arête de M.

L'algorithme 2/3

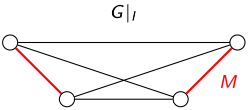
On note I l'ensemble des **sommets de degré impair** de T et $G|_I$ le sous-graphe induit par ces sommets.



Definition

Un **couplage parfait** M de G est un ensemble d'arêtes de G tel que chaque sommet de G soit adjacent à une unique arête de M.

2. Déterminer un **couplage parfait de poids minimal** M de $G|_I$.



L'algorithme 3/3

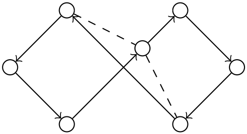
Definition

On appelle **cycle eulérien** de G tout cycle de G passant une et une seule fois par chaque arête de G.
Un graphe est dit **eulérien** s'il admet un tel cycle.

L'algorithme 3/3

Definition

On appelle **cycle eulérien** de G tout cycle de G passant une et une seule fois par chaque arête de G.
Un graphe est dit **eulérien** s'il admet un tel cycle.



3. Déterminer le **cycle eulérien** de $T \cup M$ et retirer les sommets qui y apparaissent 2 fois pour avoir le **cycle hamiltonien**.

Table des matières

Arbre couvrant de poids minimal

On note n le nombre de sommets de G et m son nombre d'arêtes.

Algorithme de Prim : Complexité $O(n^2) = O(m)$ ici

Algorithme de Kruskal : Complexité $O(mlog(m))$

Algorithme de Boruvka : Complexité $O(mlog(n))$

Couplage parfait de poids minimal 1/2

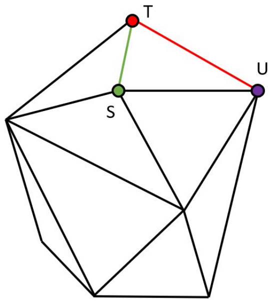
Algorithme de Drake et Hougardy : $2-$approximation de complexité $O(m)$

Couplage parfait de poids minimal 1/2

Algorithme de Drake et Hougardy : $2-$approximation de complexité $O(m)$
Algorithme de Christofides "affaibli" : $2-$approximation

Couplage parfait de poids minimal 1/2

Algorithme de Drake et Hougardy : 2−approximation de complexité $O(m)$
Algorithme de Christofides "affaibli" : 2−approximation

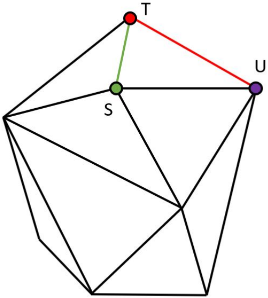


Déroulement :

- Choisir un point de départ S (arbitraire)

Couplage parfait de poids minimal 1/2

Algorithme de Drake et Hougardy : 2−approximation de complexité $O(m)$
Algorithme de Christofides "affaibli" : 2−approximation

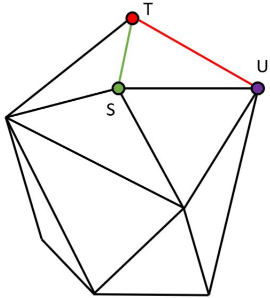


Déroulement :

- Choisir un point de départ S (arbitraire)
- Initialiser deux couplages $M1$ et $M2$ vides

Couplage parfait de poids minimal 1/2

Algorithme de Drake et Hougardy : 2−approximation de complexité $O(m)$
Algorithme de Christofides "affaibli" : 2−approximation

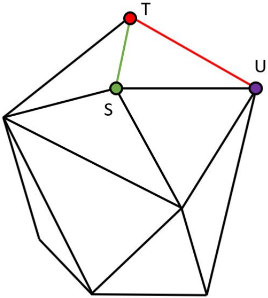


Déroulement :

- Choisir un point de départ S (arbitraire)
- Initialiser deux couplages $M1$ et $M2$ vides
- Ajouter l'arête la plus légère adjacente à S à $M1$, notons-la (ST)

Couplage parfait de poids minimal 1/2

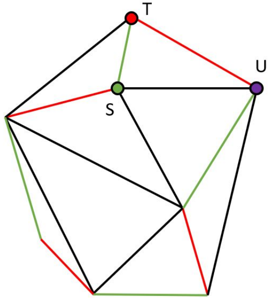
Algorithme de Drake et Hougardy : 2−approximation de complexité $O(m)$
Algorithme de Christofides "affaibli" : 2−approximation



Déroulement :

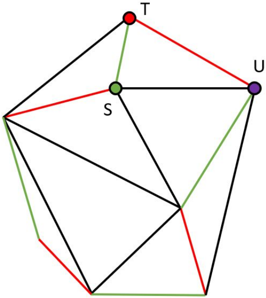
- Choisir un point de départ S (arbitraire)
- Initialiser deux couplages $M1$ et $M2$ vides
- Ajouter l'arête la plus légère adjacente à S à $M1$, notons-la (ST)
- Ajouter l'arête la plus légère adjacente à T à $M2$ (autre que (ST)), notons-la (TU)

Couplage parfait de poids minimal 2/2



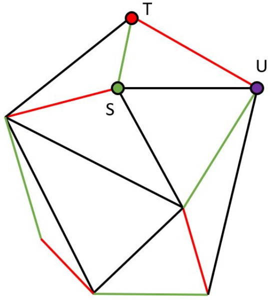
- Itérer le processus à partir de U sans revenir sur un sommet déjà visité

Couplage parfait de poids minimal 2/2



- Itérer le processus à partir de U sans revenir sur un sommet déjà visité
- Quand tous les sommets ont été visités, $M1$ et $M2$ sont des couplages parfaits

Couplage parfait de poids minimal 2/2



- Itérer le processus à partir de U sans revenir sur un sommet déjà visité
- Quand tous les sommets ont été visités, $M1$ et $M2$ sont des couplages parfaits
- Le plus léger des deux sera au pire deux fois plus lourd qu'un couplage parfait de poids minimal

Cycle eulérien 1/2

Propriété : Un graphe connexe dont tous les sommets sont de degré pair est eulérien.

Cycle eulérien 1/2

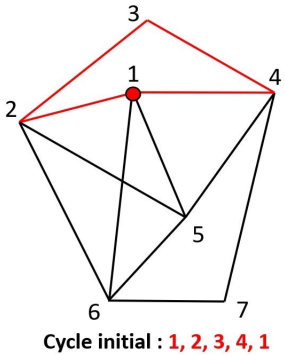
Propriété : Un graphe connexe dont tous les sommets sont de degré pair est eulérien.

Algorithme d'Euler-Hierholzer : Complexité $O(m)$

Cycle eulérien 1/2

Propriété : Un graphe connexe dont tous les sommets sont de degré pair est eulérien.

Algorithme d'Euler-Hierholzer : Complexité $O(m)$



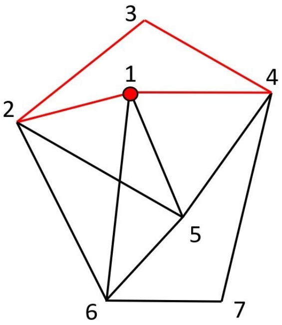
Principe :

- On choisit un sommet (arbitraire)

Cycle eulérien 1/2

Propriété : Un graphe connexe dont tous les sommets sont de degré pair est eulérien.

Algorithme d'Euler-Hierholzer : Complexité $O(m)$

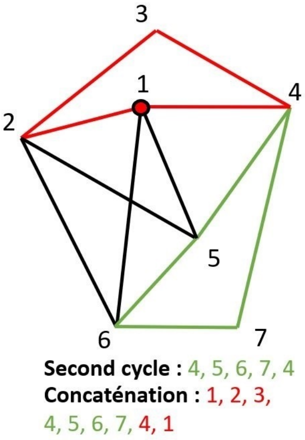


Cycle initial : 1, 2, 3, 4, 1

Principe :

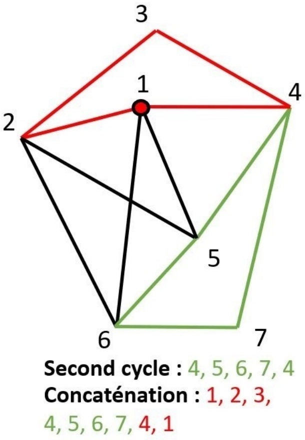
- On choisit un sommet (arbitraire)
- On parcourt le graphe afin de créer un cycle

Cycle eulérien 2/2



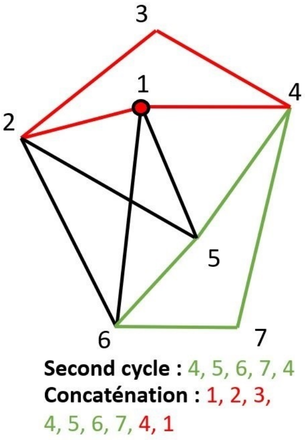
- On recommence tant qu'il reste un sommet avec une arête adjacente non déjà visitée

Cycle eulérien 2/2



- On recommence tant qu'il reste un sommet avec une arête adjacente non déjà visitée
- On insère chaque cycle obtenu dans le cycle initial

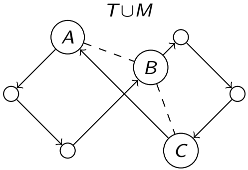
Cycle eulérien 2/2



- On recommence tant qu'il reste un sommet avec une arête adjacente non déjà visitée
- On insère chaque cycle obtenu dans le cycle initial
- On obtient ainsi un cycle eulérien

Passage au cycle hamiltonien

Pour obtenir un cycle hamiltonien :
Pour chaque sommet B visité plus d'une fois, remplacer les arêtes (AB) et (BC) par (AC)



Annexes

Complexité totale

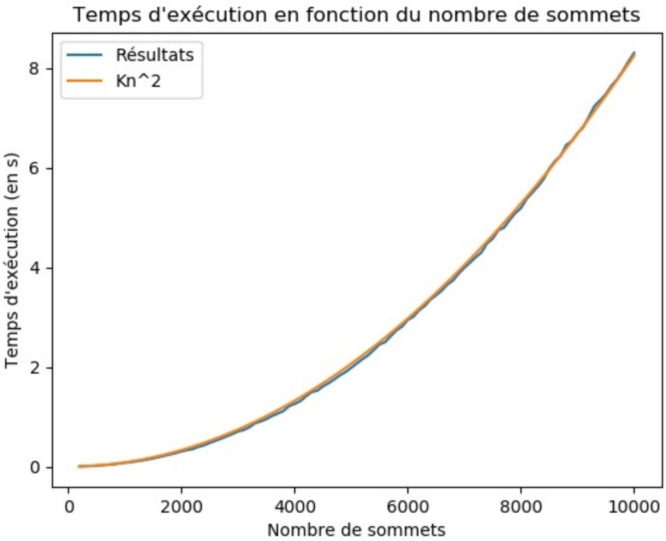
- Arbre couvrant de poids minimal :$O(n^2)$
- Trouver les sommets de degré impair : $O(n)$
- Couplage parfait de poids minimal (approché) : $O(m)$
- Cycle eulérien : $O(m)$
- Trouver le cycle hamiltonien : $O(n)$

Complexité totale

- Arbre couvrant de poids minimal :$O(n^2)$
- Trouver les sommets de degré impair : $O(n)$
- Couplage parfait de poids minimal (approché) : $O(m)$
- Cycle eulérien : $O(m)$
- Trouver le cycle hamiltonien : $O(n)$

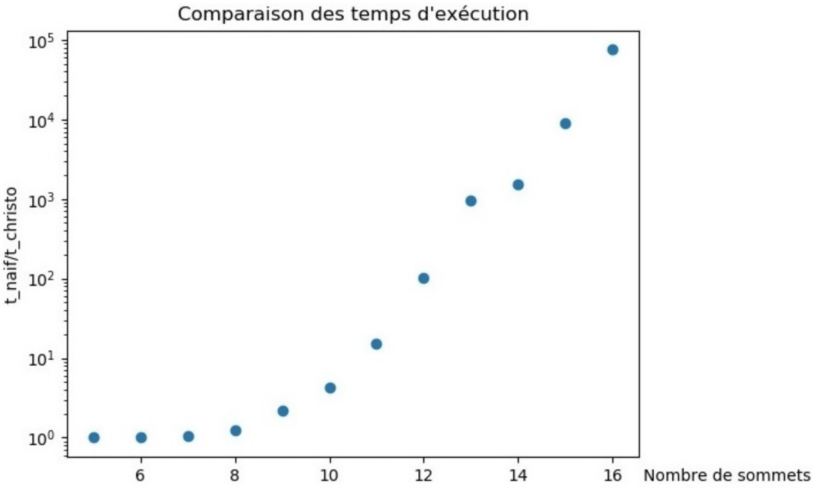
- Complexité totale : $O(n^2)$

Temps d'exécution 1/2

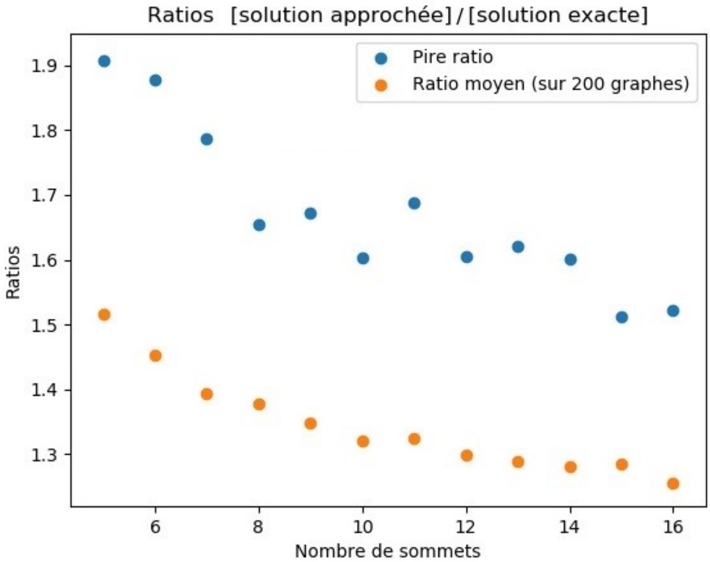


Temps d'exécution 2/2

t_{chris} : temps d'exécution de l'algorithme de Christofides affaibli
t_{naif} : temps d'exécution de l'algorithme naïf



Précision


Ratios [solution approchée] / [solution exacte]
Pire ratio
Ratio moyen (sur 200 graphes)
Ratios
1.9
1.8
1.7
1.6
1.5
1.4
1.3
6
8
10
12
14
16
Nombre de sommets

Annexes

Preuve du facteur d'approximation

On note C le **cycle hamiltonien de poids minimal** et $w(C)$ son poids.

- Puisqu'en enlevant une arête à ce cycle on obtient un **arbre couvrant**, il vient $w(T) \leq w(C)$.

Preuve du facteur d'approximation

On note C le **cycle hamiltonien de poids minimal** et $w(C)$ son poids.

- Puisqu'en enlevant une arête à ce cycle on obtient un **arbre couvrant**, il vient $w(T) \leq w(C)$.

On note C' le **cycle hamiltonien de poids minimal** de $G|_I$.

- L'inégalité triangulaire nous assure $w(C') \leq w(C)$.

Preuve du facteur d'approximation

On note C le **cycle hamiltonien de poids minimal** et $w(C)$ son poids.

- Puisqu'en enlevant une arête à ce cycle on obtient un **arbre couvrant**, il vient $w(T) \leq w(C)$.

On note C' le **cycle hamiltonien de poids minimal** de $G|_I$.

- L'inégalité triangulaire nous assure $w(C') \leq w(C)$.
- De plus, en enlevant une arête sur 2 de ce cycle, on obtient un **couplage parfait**. Ce dernier (ou son complémentaire) est de poids inférieur à $w(C')/2$ donc $w(M) \leq w(C')/2 \leq w(C)/2$.

Preuve du facteur d'approximation

On note C le **cycle hamiltonien de poids minimal** et $w(C)$ son poids.

- Puisqu'en enlevant une arête à ce cycle on obtient un **arbre couvrant**, il vient $w(T) \leq w(C)$.

On note C' le **cycle hamiltonien de poids minimal** de $G|_I$.

- L'inégalité triangulaire nous assure $w(C') \leq w(C)$.
- De plus, en enlevant une arête sur 2 de ce cycle, on obtient un **couplage parfait**. Ce dernier (ou son complémentaire) est de poids inférieur à $w(C')/2$ donc $w(M) \leq w(C')/2 \leq w(C)/2$.
- Finalement, $w(T) + w(M) \leq 3/2w(C)$.

  Rq: Le passage du cycle eulérien au hamiltonien conserve cette inégalité.