2022中国大学生程序设计竞赛(绵阳站)题解

China Collegiate Programming Contest 2022 (Mianyang Site) Tutorial

Nanjing University

Problem Setters

出题人员名单(按照姓名字典序排序):

Tianxing Ding (LunarFlare)
Hongyang Liu (gisp_zjz)
Yuhang Ran (kimoyami)
Qicheng Shan (uuzlovetree)
Chunyang Wang (Roundgod)
Xinyuan Zhang (triple_a)

Some Statistics

赛前估计题目难度:
Easy: CGH
Medium-Easy: ADM
Medium: EJL
Medium-Hard: BI
Hard: FK

C. Catch You Catch Me

题目描述

给定一棵n个点的以1号点为根的树。初始时$2-n$号点上都有一只蝴蝶。每分钟每只蝴蝶都会向根的方向移动一条边，并且到达根时消失。你可以每次在任意时刻选择一个顶点并捕捉在这个顶点上的所有蝴蝶。问你最少需要几次操作才能抓到所有的蝴蝶。

数据范围：$1 \le n \le 10^5$
出题人：Tianxing Ding (LunarFlare)

C. Catch You Catch Me

解法

- 注意到不同深度的节点可以分开考虑
- 答案是1号节点的所有孩子的(子树深度+1)之和
- 时间复杂度$O(n)$

G. Let Them Eat Cake

题目描述

给定一个长度为n的$1 - n$的排列，每轮删除数组中不大于所有相邻数的数直至只剩下一个数。问持续的轮数。

数据范围：$1 \leq n \leq 10^5$
出题人：Tianxing Ding (LunarFlare)

G. Let Them Eat Cake

解法

- 考虑相邻的两个数，其中较小的数一定无法存活至下一轮。因此每一轮至少有一半(向下取整)的数字被删除
- 暴力模拟即可，时间复杂度为$O(n)$.

H. Life is Hard and Undecidable, but...

题目描述

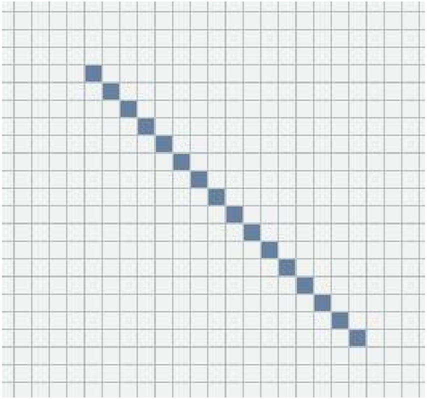
给定正整数k,在300×300的区域内构造出使得生命游戏恰好在k轮后终止的初始状态。

数据范围:$1 \le k \le 100$
出题人: Chunyang Wang (Roundgod)

H. Life is Hard and Undecidable, but...

解法一:直接构造

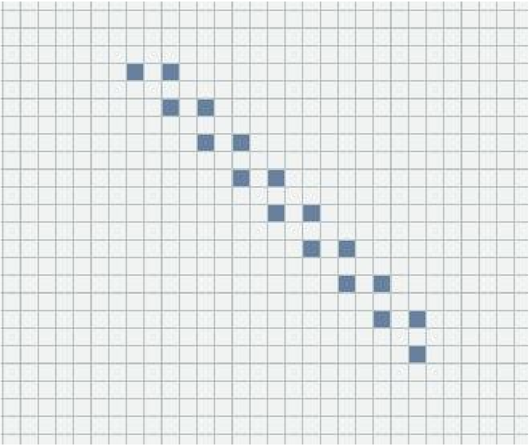
构造方式很多，以下给出一些简单的例子。



H. Life is Hard and Undecidable, but...

解法一:直接构造

构造方式很多，以下给出一些简单的例子。



H. Life is Hard and Undecidable, but...

解法二:间接构造

- 注意到如果能够构造出一个终止轮数有限并且超过100的初始状态，那么对于每个k,从该状态开始演变直到消失前k轮的状态即是一个合法解。
- 可能的构造方法:
  1. 随机+check
  2. 利用题面中给出的“滑翔机”进行对撞

A. Ban or Pick, What's the Trick?

题目描述

两个队伍分别有n个英雄可以选择，价值分别为$a_1, ..., a_n$和$b_1, ..., b_n$。两队轮流操作，每次可以自己选1个英雄或者禁用对方1个英雄。最终每方得分为选取英雄价值前k大的价值和。
双方尽可能最大化"己方得分"-“对方得分”。求双方最优策略下的两队得分差。

数据范围：$1 \le n \le 10^5, 1 \le k \le 10$。
出题人：Hongyang Liu (gisp_zjz)

A. Ban or Pick, What's the Trick?

观察

- 选取/禁用英雄时，一定会选择己方/对方剩余英雄中价值最大的。
- 注意到当某方选到k个英雄后，它不会再做"选取英雄"操作，而是尽可能地去做"禁用英雄"操作。
- 通过上述观察，双方轮流操作时能到达的"状态数"只有$O(nk^2)$个。

解法

- 用$dp(x,i,j)$表示当前双方总共操作x轮，分别已经选取了i,j个英雄时的答案。
- 确定(x,i,j)后,双方已经被选/禁的英雄个数p,q是可以确定的:

$$p = \lfloor \frac{x}{2} \rfloor + i - j, q = \lfloor \frac{x+1}{2} \rfloor - i + j$$

- 可以使用记忆化搜索或动态规划求出答案。

D. Gambler's Ruin

题目描述

两个队伍打比赛，有n个下注者，每个下注者对双方胜率估计有一个预测$p : 1 - p$。你作为庄家要为两队开设赔率，如果一个下注者i发现在他的胜率预测下，赌某一方赢会期望赚钱，他就会下注c_i。
你需要最大化“最坏情况下”（两队中某队获胜）的收益。

数据范围：$1 \leq n \leq 10^6$
出题人：Hongyang Liu (gisp_zjz)

D. Gambler's Ruin

提示

庄家无论如何都不应该开出倒数之和小于1的赔率，否则一个“聪明”的下注者就可以通过两头下注，保证无论赛过如何都可以获得收益。

解法

- 赔率的倒数之和大于1，确保了不会有下注者"两端下注"。
- 将所有下注者按照预测队伍1的胜率p从小到大排序$p_1 < p_2 < \ldots < p_n$。
- 在赔率确定后，一定会使得排序后编号$\leq x$的下注者会对“队伍2”投注，编号$\geq y$的下注者对“队伍1”投注。
- 此时队伍1, 2的赔率应该分别为$1/p_y, 1/(1-p_x)$。
- 可以枚举x，用三分答案或者双指针找到最优的y。
- 复杂度:$O(n)$或$O(n \log n)$。

M. Rock-Paper-Scissors Pyramid

题目描述

给定一个底层s由RPS三种字母组成的金字塔，按照石头剪刀布的规则递推，问最终顶层的符号是什么

数组范围:$|s| \leq 10^6$
出题人：Chunyang Wang (Roundgod)

M. Rock-Paper-Scissors Pyramid

解法一

观察一

- 如果存在$\cdots XY \ldots YX \cdots$，其中$X$能战胜$Y$，那么将这段中的$Y$全部替换成$X$不影响最终答案
- 如果存在$Y \cdots YX \cdots$ 或者$\cdots XY \cdots Y$，其中X能战胜Y，那么将这段中的Y全部替换成X也不影响最终答案

观察二

按照观察一不断替换后，最终原串中的字母只会剩下同一种

根据以上,可以用一个栈来不断维护并更新RPS序列,时间复杂度$O(|s|)$。

M. Rock-Paper-Scissors Pyramid

解法二

- 对于所有$1 \le i \le |s|$,令$d_i = \begin{cases} 0 & i = 1 \\ d_{i-1} - 1 & i > 1, s_i\text{战胜}s_{i-1} \\ d_{i-1} & i > 1, s_i\text{打平}s_{i-1} \\ d_{i-1} + 1 & i > 1, s_i\text{输给}s_{i-1} \end{cases}$
- 则d_i最小值所在位置的符号即为最终答案，证明留作练习。
- 该解法可以同时高效处理区间询问以及单点修改操作

E. Hammer to Fall

题目描述

在一张（带边权）图$G(V,E)$上，第i个点居住着a_i个人。在连续q天，每天会在一个图中的某个点降落锤子。我们可以通过图中的道路运输居民，运输1个居民通过某条道路的代价为该道路的长度。
要求用最小的代价，确保q天中不会有居民被锤子砸到。

数据范围：$|V|,|E|,q \leq 10^5$
出题人：Hongyang Liu (gisp_zjz)

E. Hammer to Fall

解法

- 每个居民对总答案的贡献只根他初始时所在点有关。故我们需要对图中每个点u，求出保护1个初始在点u的居民的代价。
- 令$dp_k(u)$表示1个居民在k天过后处于点u时的答案。倒着对$k = q, q-1, ..., 0$更新dp值，每次只有“当天出现锤子“的点u的dp值会更新：

$$dp(u) = \min_{v \in N(u)} dp(v) + e(u, v)$$

E. Hammer to Fall

解法

维护更新：

$$dp(u) = \min_{v \in N(u)} dp(v) + e(u, v)$$

- 对于度数$\leq B$的点，我们每次可以暴力更新dp值。
- 对于度数$> B$的点，考虑对时间分块，每隔B天更新一次"信息"：
- 对于点u，找到并记录它邻居中$dp(v) + e(u, v)$最小的前$B + 1$个点，使用`nthelement`可以做到线性。
- 由于B天至多修改B个点的dp值，故计算$dp(u)$时，只需要枚举它$dp(v) + e(u, v)$前$B + 1$小的邻居即可。
- 令$B = \sqrt{m}$，复杂度：$O(q\sqrt{m})$。

J. Middle Race

题目描述

给定三个正整数A, B, C。Alice有一个整数X，Bob有两个整数Y, Z。初始时X, Y, Z均为0。Alice和Bob进行如下操作n轮:

- Alice从A, B, C中选择一个数加到X上; 随后Bob将剩下两个数分别加到Y和Z上。

最终若X介于Y和Z中间，则Alice获胜。请给出Alice的一种获胜方案或者判定Alice不存在获胜方案。

数据范围: $1 \leq n, A, B, C \leq 10^5$
出题人: Xinyuan Zhang (triple_a)

J. Middle Race

解法

令$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3 \mid 0 \le x, y, z \le n, x + y + z = n\}$,
$M = \min_{(x,y,z)\in S} \left|Ax + By + Cz - \frac{n(A+B+C)}{3}\right|$.
考虑达到最小值M的正整数组$(x_0, y_0, z_0) \in S$，容易证明Alice执行如下策略可确保胜利。

- Alice选取A,B,C的次数分别为x_0,y_0,z_0。

可用二分或者其他方法在$O(n \log A)$的时间内求得上述正整数组。

L. Por Una Cabeza

题目描述

- 有一个电视节目中有一个投票环节，有n个人m个机器，每个机器接受奇数个输入，输入为人的投票结果(0/1)或者编号更小的机器的输出结果，在确定过半输入是某个值的时候把这个值作为输出，在此之前没有输出。每个人的投票和每个编号小于m的机器的输出都恰好作为一个机器的输入。人按编号从小到大依次投票，而机器的计算时间可以忽略不计。
- 电视节目的主办方不关心投票结果，但是希望尽可能制造悬念吸引收视率，所以要求**每个机器都在获得所有输入的时候才能决定输出结果**。电视台提前知道了每个人准备投票的内容和需要多少钱来改变投票内容，希望使用最少的钱数来达到目标。有q次修改,并询问此时电视台需要的最小花费。

数据范围：$1 \leq n, m \leq 10^5$
出题人：Tianxing Ding (LunarFlare)

L. Por Una Cabeza

解法

- 假设机器的输入有$2k+1$个，这等价于机器的时间上前$2k$个输入中要有恰好k个0和k个1，而机器的输出内容和时间都等同于最晚的输入。
- 编号小于n的投票者每个人都恰好真实贡献于一个机器，而编号等于n的投票者是无关要求的。
- 对每一个机器，它需要的额外开销的计算方法是看对它负责的$2k$个投票者，如果0比1多并且有x个所需要的额外开销就是开销最小的$x-k$个0的和，1比0多同理。
- 我们可以用小根堆维护0和1不超过k个的部分，用大根堆维护超过的部分，即可快速更新答案。时间复杂度$O(n\log n)$。

B. Call Me Call Me

题目描述

你要邀请n个人来参加会议。第i个人会同意参加当且仅当区间$[l_i, r_i]$内已经有k_i个人同意参加。问最多能邀请多少个人来参加。

数据范围:$1 \leq n \leq 4 \times 10^5$

出题人: Yuhang Ran (kimoyami) and Qicheng Shan (uuzlovetree)

B. Call Me Call Me

解法

- 如果题目每次给的不是一个区间$[l_i, r_i]$而是一个前缀$[1, r_i]$，可以怎么做?
- 利用线段树维护，要支持的操作是查询并提取全局最小值以及区间减一。

B. Call Me Call Me

解法

- 再次考虑:如果存在一个$1 \le pos \le n$，使得题目每次给的区间$[l_i, r_i]$都满足$l_i \le pos < r_i$呢?
- 那样的话可以将$[l_i, r_i]$拆成$[l_i, pos]$和$[pos+1, r_i]$两部分，这两部分分别是区间$[1, pos]$的后缀以及$[pos+1, n]$的前缀。
- 将一组(l_i, r_i, k_i)拆成$(l_i, pos, \lceil \frac{k_i}{2} \rceil)$以及$(pos, r_i+1, \lceil \frac{k_i}{2} \rceil)$两部分"alarm"并放在两个线段树中分别维护。当某个"alarm"中的次数耗尽时计算另一部分中剩下的值并重新拆分。不难发现只用拆分$O(\log k_i)$次，因此总时间复杂度是$O(n \log^2 n)$。

B. Call Me Call Me

解法

- 对于一般的$[l_i, r_i]$，我们考虑分治：对于包含$mid = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$的区间我们按照之前说的做法作为$[1, mid]$的后缀以及$[mid+1, n]$的前缀放在线段树内维护。否则我们递归下去维护。最终会形成一个类似线段树套线段树的结构，空间复杂度$O(n \log n)$。
- 考虑时间复杂度,每个区间最多会被合并/拆分$O(\log n)$次，因此总合并/拆分次数是$O(n \log n)$，总合并/拆分复杂度是$O(n \log^2 n)$。当一个区间被完全耗尽时，会对结构中$O(\log n)$个线段树中执行区间减一操作。因为最多有n个区间被完全耗尽，这部分的时间复杂度也是$O(n \log^2 n)$的。

I. Mental Abuse To Humans

题目描述

给定正整数n以及m个限制(x_i, t_i)，求满足下列条件的子集$A \subseteq \mathbb{Z}_n$个数:

- 对于所有的$1 \le i \le m$, $x_i \in A$当且仅当$t_i = 1$;
- $A + (\mathbb{Z}_n \setminus A) = \mathbb{Z}_n$.

数据范围: $n \le 10^{18}, m \le 5$

出题人: Xinyuan Zhang (triple__a)

I. Mental Abuse To Humans

解法

我们先证明如下引理:

引理

对于$A \subseteq \mathbb{Z}_n$，若$S \triangleq A + (\mathbb{Z}_n \setminus A) \neq \mathbb{Z}_n$，则存在正整数$m|n$满足

- A 和S的周期为p，即对于任意的$i \in \mathbb{Z}_n$, $i \in A$ (同样的，$i \in S$) 当且仅当$i + p \in A$ (同样的，$i + p \in S$)。这里的加法是模n意义下的加法。
- 更进一步，存在唯一的$0 \leq x < p$，使得$x \notin S$.

我们首先利用反证法证明上述性质。
若结论不然，令p_0为最小周期，则存在$0 \leq x_0 < x_1 < p_0$使得$x_0, x_1 \notin S$。由S的定义，对于任意的$i, j \in \mathbb{Z}_n$满足$i - j = x_1 - x_0$，我们有$i \in A$当且仅当$j \in A$。此时不难验证$\gcd(p_0, x_1 - x_0)$为A和S的周期，矛盾。

I. Mental Abuse To Humans

解法

由上述引理，给定周期p以及$0 \le x < p$，令

$$S_{p,x} = \{i \in \mathbb{Z}_n \mid i \equiv x \mod p\}.$$

我们考虑$A + (\mathbb{Z}_n \setminus A) = S_{p,x}$的个数$f_{p,x}$。
为了求出$f_{p,x}$，我们考虑有多少周期为p的集合A满足$x \notin A + (\mathbb{Z}_n \setminus A)$。
一方面，上述恰好等于$\sum_{d|p} f_{d,x \mod d}$。而另一方面，上述集合的个数$g_{p,x}$恰好等于下列方程解的个数:

- $z_0, z_1, \dots, z_{p-1} \in \{0, 1\}$;
- 对于任意的$0 \le i, j < p$满足$i + j \equiv x \mod p$，$z_i = z_j$;
- 另外有m个形如$z_i = 0$或者$z_i = 1$的约束。

不难发现上述集合个数恰好为0或者2的幂次的形式，至多$O(m^2)$个x需要额外讨论$g_{p,x}$的取值，且所有取值都可在$O(1)$时间内得到。

I. Mental Abuse To Humans

解法

可以发现对于最终的答案，我们只需要求$\sum_{d|n}\sum_{0\le x<d} f_{d,x}$即可。由上述讨论有恒等式$\sum_{d|p} f_{d,x} \mod d = g_{p,x}$。因此，由莫比乌斯变换，

$$\sum_{d|n}\sum_{0\le x<d} f_{d,x} = \sum_{d|n}\sum_{0\le x<d}\sum_{r|d}\mu(d/r)g_{r,x} \mod d$$
$$= \sum_{r|n}\sum_{0\le x<r} g_{r,x}\left(\sum_{d|n/r}\mu(d)d\right)$$

综合以上讨论，问题可以在$O(m^2 d(n))$内解决，其中$d(n)$为n的因子个数（10^{18}内的数其因子个数不超过103680）。

F. Infinite Strife

题目描述

二维平面上给定n个点，每个点可从过该顶点的$2m$个半平面内选择一个半平面。有多少种选法使得正方形被这一系列的半平面覆盖。

数据范围：$n \leq 100$，$m \leq 10$，坐标大小绝对值不超过10
出题人：Xinyuan Zhang (triple_a)

F. Infinite Strife

解法

问题等价于每个点独立均匀随机选择一个过该点的半平面，使得半平面与正方形的交非空的概率。
注意到问题中经过每一个顶点的$2m$个半平面具有对称性，即第i个半平面和第$i+m$个半平面是同一条直线将平面划分的两个不同半平面。因此，当我们固定选取直线的随机性（而不固定直线的两侧选取方式时），此时这n条直线将正方形划分为F个区域。不难观察到，划分出的每一个区域恰好对应一种半平面的选取方式。因此，问题转化为求n条直线将正方形划分的区域数的期望值。由欧拉定理，我们可以将问题拆分为顶点个数期望值以及边数期望值。通过对nm条直线两两的交点以及交点可能的来源进行分析，可以在$O(n^2m^2)$(或者$O(n^2m^3)$，取决于实现)时间内计算出上述期望。

另外，本题也可以考虑枚举最终非空半平面交的最左上端点，通过动态规划以及对称性得到类似复杂度的算法。

K. Pattern Matching in A Minor "Low Space"

题目描述

给定两个长度分别为n和m的由小写字母构成的字符串s和t,计算t在s中作为子串出现次数。**空间限制1MB**。输入只能读入一次。

数据范围: $1 \le n, m \le 10^7$
出题人: Chunyang Wang (Roundgod)

K. Pattern Matching in A Minor “Low Space”

- 直接读入字符串s或者字符串t都会超出空间限制，需要逐字符读入并处理。

解法

- 读入模板串s时计算出长度为$\lfloor\sqrt{n}\rfloor$的前缀的哈希值以及完整串的哈希值,使用空间$O(1)$。
- 在读入文本串t时记录并更新能匹配长度为$\lfloor\sqrt{n}\rfloor$的前缀的所有位置，对这些位置用全串的哈希检查。
- 根据Periodicity Lemma可以证明,这些位置构成至多$\lceil\sqrt{n}\rceil$个等差数列，且这些位置和对应的哈希值可以用$O(\sqrt{n})$的空间记录，在读入新字符时可以$O(1)$时间更新。
- 题目设计思路来自于流算法(streaming algorithm)，做法思路来自于Porat&Porat算法(FOCS 2009),该算法可以在$O(\log n)$空间$O(n \log n)$时间解决字符串匹配问题。