

写在前面

- 讲题安排：
 - 第一场（本场）直播讲解（会在B站再发一遍）
 - 后五场在B站“牛客竞赛”账号发录播讲解
- 参考程序：
 - 在榜单上或“提交”界面点击可以看别人代码（推荐：jiangly）
 - 在“提交”界面搜索 [FriedChicken](#) 可以看讲题人的代码

写在前面

- 参赛选手组成 && 心态调整：
 - 大一纯萌新 刚学完课内C，觉得好玩就报了这个营，也没参加acm组织，几乎不懂acm（约<4题）
 - 大一萌新 参加了学校的acm俱乐部，除C语言还参加了学校的寒假集训，学了些简单的贪心、dp、STL使用（约4~7题）
 - 大二学了一年 || 大一有基础（约7~10题）
 - 大三大四炸鱼 || 很强大的有基础选手（约9~13题）
- 要补题要补题要补题！
- 虽然形式是比赛，但你的收获是用补题后题数来衡量的，而不是赛时过题数！

2023牛客寒假算法基础集训营 第 1 场

出题人: fried-chicken



预估难度

	思维	知识	代码
A			*
L		*	
C	*		
H	*		
D	**		
K	**		
M	*	*	
G	*	*	*
F	**	*	
E		**	**
B	*	**	**
I	**		***
J	*** **		
Jdfs	**		***

- **思维：**指题目对思考的要求，具体来说，包括题目做法的灵感难度、思考难度、思考深度等方面；
- **知识：**指作出该题目所需知识的要求，包括但不限于题目对算法、数据结构、常见trick的要求，评价标准为对知识广度、深度、难度的要求；
- **代码：**指实现该题算法的代码难度，包括对实现技巧的要求、对代码量的要求、对细节处理的要求等。
- 题目特点：
 - 整体难度不高，四个签到都比较预期；
 - 不同出题人有不同的出题风格，这场题目风格比较偏思维，知识点和实现难度相对低一些；
 - 并且加入不少诈骗要素，旨在教育大家不要轻易断言某个题是怎么样的（？）
 - 大家也可以在之后比赛中，有意识的去感受不同出题人的题目风格差异~

过题情况 (一血)

C: 02:18 by [温妍](#)

F: 22:08 by [衣柜歌手](#)

G: 13:53 by [fhjssd](#)

H: 05:57 by [山川四月](#)

K: 06:06 by [我还在唱着无人问津的歌谣](#)

L: 02:04 by [黑白啊兔](#)

M: 08:12 by [wtz2333](#)

ABDEIJ && AK: jiangly (直接看榜一就行了, 很方便)

A 模拟

- 有许多写法，这里介绍代码比较短的一种：
- 枚举 i in $[1, 10]$ ，检查前 i 场是否能确定结果，检查方式：
- 剩余的 $10-i$ 场里，假设最后A最高A1分、最低A2分，B最高B1分、最低B2分，则可以确定胜负当且仅当：
- $(A1 - B2) * (B1 - A2) < 0$
- \uparrow 最好时A能赢B吗 和 B最好时能赢A吗

L 数学 (运气?)

- 因为每个团、每个人直接彼此没区别，所以最佳策略就是依次猜，先猜出团，在猜出团里的人；
- 猜团：5个团，第1次猜中概率是0.2，第二次是0.2，第三次是0.2，**第四次是0.4**；
- 猜人：4个人，第一次是0.25，第二次是0.25，**第三次是0.5**；
- 最终答案：32 (5.05)

C 诈骗 思维 贪心

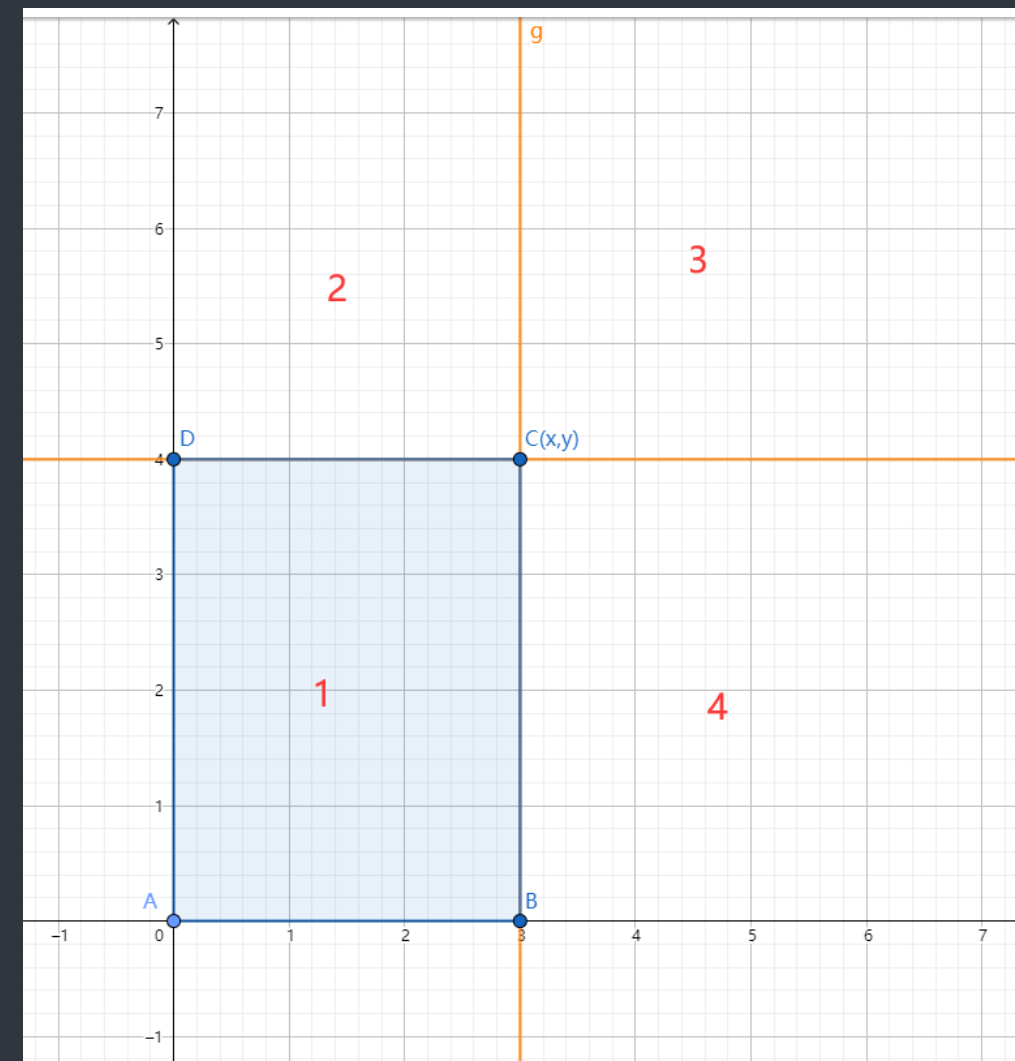
- 注意到不进行重新分配的话，就是最优的；
- 证明：
 - 不分配论文的话，所以引用量非0的论文都带来了1的H指数，最终H指数即为 $\text{sum}(\text{引用非0论文数})$ ；
 - 而根据H指数定义，H指数不可能多于总的引用非0论文数，因此该方案即为最优的；
- 本题体现了 “不要想学术不端，平平淡淡才是真” 的道理 (?)

H 诈骗 思维 贪心

- 注意到拼图总造价是 $10n^2$;
- 拼图总造价 = 给出拼图的造价 + 缺失拼图的造价
- 所以一减就行;
- 本题不仅题目诈骗, 在题面和样例解释中都加入了诈骗要素, 欢迎有志诈骗的出题人深入研究 (?)

D 贪心 数学 分类讨论

- 另一个矩形顶点一定是ABCD之一；
- 考虑P点坐标的四种情况，即右图四个区域
- 区域1：枚举A、B、C、D作为另一顶点的四种情况，取最大IOU；（易证）
- 区域3：取A作为另一顶点；（不易证）
- 区域2：枚举A、B作为另一顶点的两种情况，选较大的IOU；（易证）
- 区域4：枚举A、D作为另一顶点的两种情况，选较大的IOU；（易证）



K 贪心 or 状压dp

- 贪心:
 - 通过手玩小样例，发现类似1001001001.....11111这样的串（也就是密的部分全是1，松的部分一个1占多数的区间都没有）比较优；
 - 枚举 i ，在字符串前 i 个填上形如 100100.....的前缀，后面全填1，判断该串1的个数是否满足条件，满足则和当前答案取min；
- dp:
 - 考虑状压dp[1010][1010][10]，dp[i][j][k]表示考虑到前 i 个数字，用了 j 个 1 且结尾的三个数字的二进制表示为 k 的最少区间数；

M DP

- 并没有规律 (
- $dp[i][j]$ 表示已经给 i 个人分了仙贝, 分出去了共 j 个收获的最大好感度是多少;
- $dp[i][j] = \max_{k \leq j} (dp[i-1][j-k] + \frac{k}{m-(j-k)})$
- 即枚举第 i 个人分到的仙贝数 k ;
- 初值 $dp[0][0] = 0$, 答案 $dp[n][m]$ (或者更保险的, 求下全dp数组的最大值);

G 各种数据结构 性质题

- 性质: $f(x)$ 经过不多次数的操作会收敛到一个不变的值 $f(x_0) = x_0$;
- x_0 有三个: 0、99、100;
- 即, 总操作次数不大;
- 如何得到一个**总操作次数**为复杂度的做法?
- `set<int>` 存所有未到达 x_0 的下标;
- 并查集维护某个数下一个未到达 x_0 的下标;
- 线段树直接维护;

F 思维 基础图论 BFS

- 注意到对于一个大小为 sz 的联通块，无论块内的炸蛋如何放置，这个联通块任意两点作为起点终点的 $sz * sz$ 种**所有方案都可以做到**：
 - 证明：考虑联通块是一颗树的情况，可以先从 s 不放炸蛋的走到 t ，然后从 t 出发，按照类似dfs的方式遍历这棵树，在回溯时选择放炸蛋即可做到放完所有炸蛋最终回到 t 。
- 因此，记第 i 个联通块的大小为 sz_i ，有炸蛋的联通块数量为 B ，则：
 - $B=0$ ：输出 $\sum sz_i^2$ ；
 - $B=1$ ：输出有炸弹联通块 j 的 sz_j^2 ；
 - $B=2$ ：无解，输出 0

E 计算几何 叉积

- 可以看出，操作3能做到而操作1+2做不到的，就是将铁丝进行沿AB或BC的翻转（例如A变为关于BC的对称点），这可以使用叉乘来判断；
- 具体来说，首先将AB、BC和ED、EF按照长度进行匹配，找到ABC与DEF的关系，假设ABC与DEF一一对应，则 $\text{cross}(AB, BC)$ 与 $\text{cross}(DE, EF)$ 正负性不同时，说明一定进行了操作3，cross为叉乘；
- 特别的，AB和BC长度相等时无法判断，总是no；
- 若遇到精度问题，考虑比较AB和BC长度时使用整数而非浮点数比较；或在ABC和DEF进行匹配时使用**较大的**eps（如 $1e-5$ ，注意这里使用较小的如 $1e-9$ 等eps反而可能炸）

B DP 前缀和优化 or 组合数

- 其实是个很久之前在校内赛用过的题，直接放个老题解在这儿；
- <https://www.cnblogs.com/fried-chicken/p/13736254.html>

I 思维 构造 码力

- 出处:
- 18海淀高三一模数学;
- (赛前两天发现还撞了ARC143B)
- 结论: 不可能有两个或更多牛牛点;
- 证明:

 $a_{i1,j2}$
 $a_{i1,j1}$
 $a_{i2,j2}$
 $a_{i2,j1}$

(20) (本小题 13 分)

设 $A = (a_{i,j})_{n \times n} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$ 是由 $1, 2, 3, \dots, n^2$ 组成一个 n 行 n 列的数表

(每个数恰好出现一次), $n \geq 2$ 且 $n \in \mathbf{N}^*$.

若存在 $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$, 使得 $a_{i,j}$ 既是第 i 行中的最大值, 也是第 j 列中的最小值, 则称数表 A 为一个“ N -数表”, $a_{i,j}$ 为数表 A 的一个“ N -值”.

对任意给定的 n , 所有“ N -数表”构成的集合记作 Ω_n .

(I) 判断下列数表是否是“ N -数表”. 若是, 写出它的一个“ N -值”

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 8 & 2 & 5 \\ 6 & 9 & 3 \end{pmatrix};$$

(II) 求证: 若数表 A 是“ N -数表”, 则 A 的“ N -值”是唯一的;

(III) 在 Ω_{19} 中随机选取一个数表 A , 记 A 的“ N -值”为 X , 求 X 的数学期望

$E(X)$.

I 思维 构造 码力

- 构造方式:
- 0个牛牛点, 乱填就行, 注意是个 $1 \sim n^2$ 的排列;
- 1个牛牛点, 其实代码并不好写, 比较考验码力:
 - 假设牛牛点是 (i, j) , 贪心在第 i 行放小的、第 j 列放大的;
 - 注意求行列最值时别漏了算上已经固定的位置;
 - 注意若 (i, j) 本身有1操作赋的值了, 你的写法是否还能正确处理。
- 也存在不使用这个性质硬拓扑排序做的方法, 不大懂

J 位运算 + (思维 or dfs)

- 提前鸣谢ddl战神的[fallleaves01](#)帮我指出一大堆锅（
- 本题有纯人类智慧和DFS两种写法，尽管大家都喜欢人类智慧，但其实这个DFS做法意外的好写&&小清新，所以着重介绍DFS做法；
- （你看，题目没骗人吧）

J 位运算 + (思维 or dfs)

- 记当前选手眼中，**对方手中**可以使 $\&|\wedge$ 成立的数字集合为 S_{and}, S_{or}, S_{xor} ，则当且仅当三者之间存在一个集合包含另外两者的关系时可以猜出，方案是猜最大的集合对应的位运算。
- 如 $(S_{or} \cup S_{and}) \subseteq S_{xor}$ ，则猜xor一定可以，因为就算有某个数在别的位运算下可以，在xor一定也可以；
- 反之，如果不存在这样的关系，则一定存在一个数字 x ，使得 x 只能通过 $op1$ 得到 c 、一定存在另一个数字 y 使得 y 只能通过 $op2$ 得到 c 。此时当前选手就不知道是 x 还是 y ，自然也不知道是 $op1$ 还是 $op2$ 。
- 人类智慧做法：根据上述关系讨论；
- DFS法：根据上述关系，硬讨论一个小范围的答案（如 $0 \sim 7$ ），对于输入，按照是否为 θ 、 abc 关系等，将输入映射到 $0 \sim 7$ 并输出答案。

致谢

- 感谢qcjj和验题人（图）的帮助；
- 感谢做题的小白们来捧场~~~

11	Keven	南昌航空大学	6	12001	917 (-1)	926	959 (-2)	(-4)	1521 (-2)	1606 (-3)	3409 (-125)	(-1)
12	tarjen	上海大学	6	29427	298 (-1)	1526	26392 (-2)	304	343 (-8)	342		
13	Ycen	广东东软学院	5	87183	13315	13351	13360	25096 (-1)	19199 (-142)			
14	谢天意	阜阳师范大学	4	61062	14750	14761	14770	14800 (-99)	(-2)			
15	星辰是我的	安阳工学院	4	93685	14889 (-2)	29027	29033	19316 (-69)				
16	图书馆工作人员	宏帆集团附属图书馆	3	30025		440	500	29045 (-2)				
17	KEYL	湖南人文科技学院	2	35608	(-2)	16418		14929 (-213)				
18	MR_GAO2019 1106072328	中国音乐学院	1	13321	13321							

名次	参赛者	学校	通过	罚时	A 16 22	B 8 18	C 15 16	D 10 15	E 6 61	F 8 8	G 9 20	H 15 19	I 7 30	J 5 26	K 13 19	L 14 730	M 9 22
1	zankizero	马鞍山市第二中学	13 AK	16688	539	594	626	646	896 (-41)	914	929 (-1)	940	1041 (-10)	1836 (-2)	2180	2185 (-1)	2195 (-3)
2	Dewset	苏州大学	13 AK	27276	00	717 (-4)	08	204	229	4207	336 (-5)	143 (-1)	456 (-4)	20108 (-14)	32	49 (-2)	163 (-1)
3	FriedChicken	北京理工大学	13 AK	30846 2	28128	363	27993	28154	27997	27995	28154	28151	27987	27040	28024	340	28130
4	积极的防守者	天津大学	12	21551 6	12125	12163 (-1)	12172	12204	12250	12255	23154	23157	24845 (-2)	(-1)	23261	23268 (-1)	24536 (-2)
5	沙烬	武昌理工学院	11	11886 8	519	10935	10912 (-1)	10950 (-1)	(-7)	10992	11008 (-3)	8915	(-1)	17845 (-3)	11013	9491 (-4)	16044
6	nullccxxy	北京演艺专修学院	10	40481	2109	7968 (-3)	2116	3603 (-1)		8966	2185 (-2)	3553 (-1)			2153	3550 (-28)	3574
7	suika_predator	浙江大学	9	31376	3404	3440	3449	3461	3479 (-2)	3491	3508	3515	3564 (-1)	(-1)			
8	cstdios	家里蹲小学	8	6125	126	156 (-1)	161	175		192	1756	1762			1773		
9	比那名属的桃子	北京信息科技大学	8	8152	199	(-1)	251	351 (-1)	466			1643			1660	1684 (-3)	1734 (-4)
10	荆蔚懿	国fufu中学	7	25999	1809		2859				1855	1887	(-3)		1901	3407 (-20)	11878