Tesis de doctorado

Jorge Alejandro Tarango Yong

15 de diciembre de 2017

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

INSTITUTO DE RADIOASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA

"Estudio de la Interacción de Flujos Múltiples de Fuentes Astrofísicas, Aplicada a los Proplyds Clásicos de la Nebulosa de Orión"

T E S I S

PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE DOCTOR EN CIENCIAS (ASTRONOMÍA)

P R E S E N T A

JORGE ALEJANDRO TARANGO YONG
Director de Tesis: Dr. William J. Henney

Morelia, Michoacán
2017

Índice general

Agradecimientos

Esta tesis se realizó para obtener el título de doctorado en ciencias (Astronomía). Deseo aprovechar esta sección para hacer agradecimientos a personas y/o instituciones que me ayudaron para que pueda completar este trabajo de manera exitosa.

Resumen

Abstract en español

Abstract

Abstract written in english

Capítulo 1

Objetos Astrofísicos Relevantes

1.1. Nubes Moleculares Gigantes

Las grandes "guarderías" de estrellas a lo largo de la Galaxia se localizan en nubes moleculares gigantes, compuestas principalmente por hidrógeno molecular H_2. Siendo que esta molécula solo emite radiación en ultravioleta, donde el medio interestelar tiene una alta extinción, para detectar la presencia de las nubes moleculares se recurre a otras moléculas llamadas "trazadoras", principalmente CO, la segunda molécula más abundante en el medio interestelar, que posee líneas espectrales en el rango de las ondas de radio.

Complejos aomo el de Taurus-Auriga se formaron debido a la convergencia de dos flujos de material neutro (Ballesteros-Paredes et al., 1999) que se enfrió y se volvió más denso debido a inestabilidades térmicas (Hennebelle & Pérault, 1999). Muchas de estas nubes moleculares tienen forma filamentaria debido a que se están colapsando gravitacionalmente en caida libre (Ballesteros-Paredes et al., 2011). Dentro de los filamentos puede haber colapsos locales que pueden dar lugar a regiones de formación estelar de baja masa o incluso asociaciones OB como es el caso de la Nebulosa de Orión (Hartmann & Burkert, 2007).

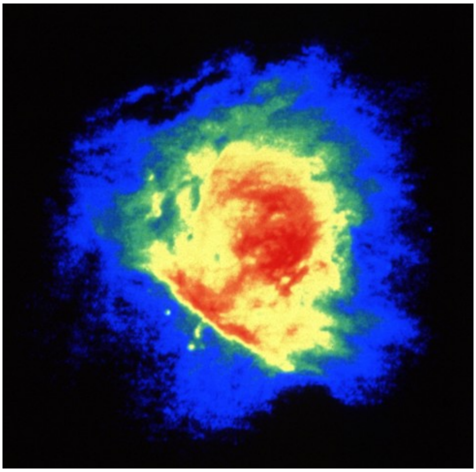


Figura 1.1: La Nebulosa de Orión observada por el VLA en la banda L (λ = 20 cm, ν = 1,4 GHz, Yusef-Zadeh (1990)).

1.2. La Nebulosa de Orión

La Nebulosa de Orión (ONC por sus siglas en inglés), ubicada a $\sim$ 414 pc (Menten et al., 2007), es probablemente la región HII mejor estudiada del cielo (ver §2.4). Forma parte de la nube molecular gigante de Orión, de donde se distinguen dos sub-unidades, llamadas Orión A y Orión B. ONC forma parte de Orión A. El cúmulo de estrellas que se formó y que es responsable de la región HII se conoce como asociación OB Ori Id, cuyos miembros más prominentes son un grupo de cuatro estrellas conocidas como el “Trapecio”. La más masiva de éstas es θ^1 Ori C, de clasificación espectral O6 aproximadamente (ver tabla), tiene una luminosidad de 4×10^5 $L_\odot$ y una temperatura de 4×10^4 K. Cuando la región HII se encuentra embebida en el gas molecular, la región HII no puede ser visible en el rango óptico del espectro. En el caso de ONC, que se ubica cerca del borde de la nube molecular Orion A, el gas ionizado caliente, que posee una presión mayor que el gas molecular frío, se escapa hacia el gas adyacente a la nube molecular en forma de “flujo de champaña” (figura 1.2), y de esta manera el gas ionizado puede ser visible por medio de diferentes líneas espectrales, tanto de hidrógeno como de otros elementos.

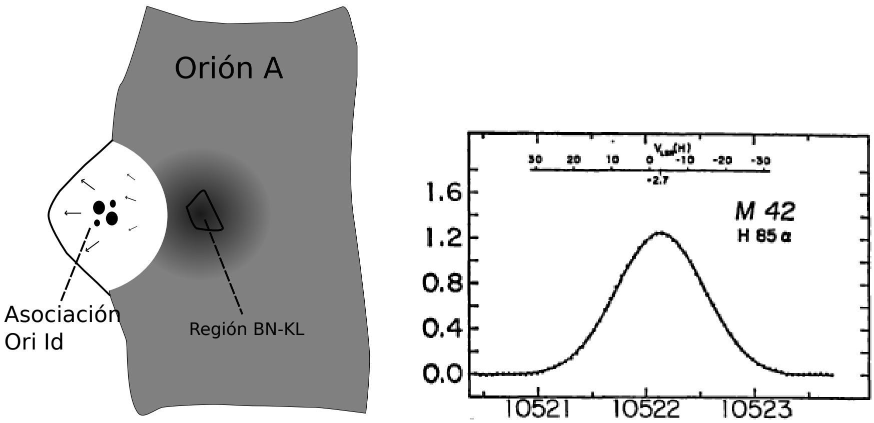


Figura 1.2: Izquierda:Representación esquemática de la Asociación Ori Id y su ubicación dentro de la nube molecular gigante Orión A. La región BN-KL es una región de formación estelar muy activa donde se observan entre otras cosas, máseres de agua y SiO y flujos moleculares (Stahler & Palla, 2004). Derecha: Línea espectral H 85 α de hidrógeno de ONC. El eje horizontal corresponde a la frecuencia en MHz, mientras que el eje verical representa la temperatura de antena. El espectro muestra un corrimiento al azul que muesta que el gas se acerca a una velocidad de $\sim$ 3 km s^{-1} (Stahler & Palla, 2004; Gordon & Churchwell, 1970)

1.3. Discos Protoplanetarios

1.3.1. Formación

1.4. Proplyds

1.4.1. Descubrimiento

Observaciones en óptico de la región del trapecio en filtros de banda angosta de diferentes líneas de emisión tales como $H\alpha$, $H\beta$, $[OIII]$, $[NII]$, $[SII]$ y continuo, revelaron la existencia de objetos puntuales únicamente visibles en líneas de alta ionización ($H\alpha$, $H\beta$ y $[OIII]$) que fueron inicialmente denominados como "condensaciones nebulares" (Laques & Vidal, 1979).
Hasta el momento no se sabía con certeza si "condensaciones nebulares" eran en realidad condensaciones nebulares (regiones donde la densidad de la nebulosa es inusualmente alta por alguna razón o bien esferas de gas molecular cuya envolvente fue ionizada y que la radiación de la estrella central la está "erosionando") o si se trataba de protoestrellas de baja masa cuyo disco protoplanetario estaba siendo fotoevaporado por la estrella central (Churchwell et al., 1987). No fue sino hasta que se contó con observaciones de alta resolución con el Telescopio Espacial Hubble (HST) que se se pudo determinar la verdadera naturaleza de estos objetos (O'dell et al., 1993) y la razón por la que se les denominó "proplyds" (PROtoPLanetarY DiskS). A su vez se encontraron por primera vez arcos delgados y otras estructuras de gran interés.

1.4.2. ¿Qué es un proplyd? Breve introducción (Johnstone et al., 1998)

Las imágenes del HST de la Nebulosa de Orión mostraron imágenes de discos alrededor de estrellas jóvenes de baja masa. Algnuos se ven como siluetas oscuras que contrastan con la nebulosa, y otros casos son visibles en líneas de emisión de líneas de alta ionización. Un proplyd típico tiene forma cometaria, con una cabeza brillante que apunta hacia la fuente de radiación ionizante, y una cola que se extiende en dirección contraria a ésta. La explicación a esta forma es que el disco protoplanetario

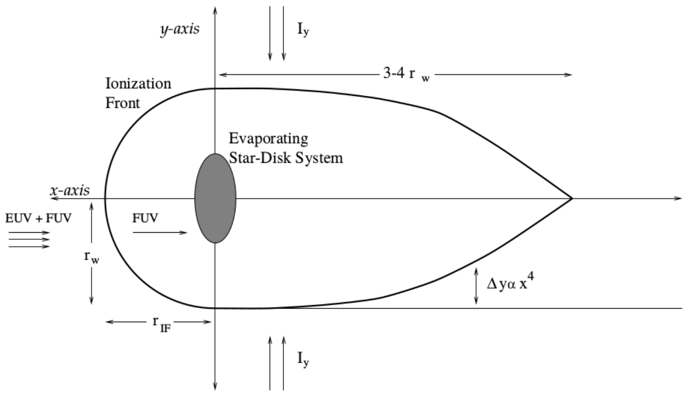


Figura 1.3: Representación esquemática de la formación de un frente de ionización hemisférico y de una cola de gas ionizado detrás del disco en proceso de fotoevaporación. r_{IF} y r_w representan el radio del frente de ionización en las direcciones de los ejes x e y, respectivamente. I_y representa el campo de radiación difusa. Por detrás del disco, la radiación difusa calienta el gas del disco provocando otro flujo fotoevaporado. Δy es la diferencia entre la forma actual del frente de ionización por detrás del disco y una forma cilíndrica. La forma de la colase explica como que el flujo de radiación I_y es capaz de penetrar más cerca del eje x conforme uno se aleja del disco, donde el flujo fotoevaporado es menos denso.

está siendo fotoevaporado por la radiación ionizante de una estrella masiva (θ^1 Ori C en caso de la Nebulosa de Orión), la cabeza es un frente de ionización cuyo radio escala como $R_{IF} \propto D^{2/3}$, donde D es la distancia a la estrella masiva. La forma de la cola se debe a radiación ionizante difusa, producto de dispersión por polvo y por recombinaciones (Figura 1.3)

Churchwell et al. (1987) ya había notado que la tasa de pérdida de masa observada en el gas ionizado implicaba que la fuente de este gas debía oscurecer a la protoestrella huésped, a menos que proviniera de un disco circumestelar. De la emisión de radio observada, se estima la densidad electrónica en $n_e \sim 10^6$ cm^{-3} y la tasa de pérdida de masa en $\dot{M} \sim 10^{-7}$ M$_\odot$ yr^{-1}.

1.4.3. Mecanismos de fotoevaporación (Johnstone et al., 1998)

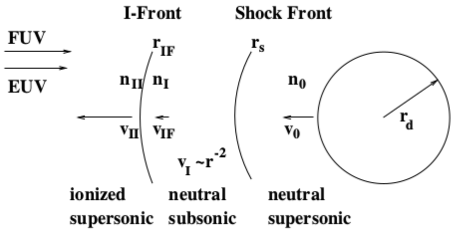
El principal mecanismo de fotoevaporación es el campo de radiación de la estrella central, en la parte ultravioleta del espectro electromagnético. Según la masa de la estrella central, podemos tener dos clases de flujo radiativo: Dominado por el ultravioleta lejano (FUV, $h\nu < 13{,}6$ eV) o dominado por el ultravioleta extremo (EUV, $h\nu \geq 13{,}6$ eV). En general, el FUV se encarga de disociar moléculas y de calentar el gas de la región de fotodisociación (PDR) hasta temperaturas de 100 - 1000 K, mientras que el EUV puede ionizar el gas y elevar su temperatura hasta 10^4 K. El EUV no puede atravesar el frente de ionización (IF) pero el FUV sí.

En el caso de que el flujo sea dominado por el EUV, la presión térmica del flujo fotoevaporado es determinada por la fotoionización, la PDR producida por el FUV es delgada. El gas calentado por el FUV se mueve de manera subsónica hasta llegar al IF y la tasa de pérdida de masa depende de la tasa de ionización inducida por el EUV.

Si el flujo está dominado por el FUV, la presión térmica depende del calentamiento por el FUV. El gas tibio se expande como un viento que empuja el IF lejos del disco. La tasa de pérdida de masa la determina la temperatura de la PDR, el flujo FUV y la opacidad del polvo a las longitudes de onda del FUV.

Inicialmente la forma del disco impone una geometría cilíndrica en el flujo fotoevaporado, pero eventualmente los gradiente de presión tornan esta geometría en esférica.

Las ecuaciones de continuidad de la masa y el momento restringen la velocidad del flujo neutro antes de alcanzar el IF. Mas allá de éste, la presión del gas hace que éste se expanda a velocidades del orden de una a dos veces la velocidad del sonido. Para el gas neutro dentro del IF hay dos posibles soluciones: si el gas neutro es supersónico entonces el IF será de baja densidad (Tipo R) con bajo contraste de densidad entre gas neutro y gas ionizado. O si el gas neutro es subsónico se formará un IF tipo D con un gran contraste de densidad entre el gas neutro y el gas ionizado. Sin embargo, sin importar qué tipo de radiación domina la fotoevaporación, el gas neutro permanece a velocidades subsónicas al llegar al IF, por lo que dicho frente será tipo D. En el caso de un flujo



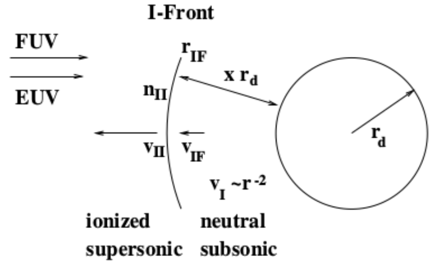


Figura 1.4: Representación esquemática de las regiones del flujo fotoevaporado de un proplyd. Izquierda: Cuando el flujo es dominado por el FUV. Derecha: Flujo dominado por EUV (Johnstone et al., 1998)

dominado por el EUV, el gas neutro permanece a velocidad subsónica, su velocidad decae como $v_I \propto r^{-2}$ y llega a 0,5 kms^{-1} al llegar al frente de ionización. Cundo el flujo es dominado por el FUV, el gas neutro se acelera hasta llegar a velocidades supersónicas, luego atraviesa un choque isotérmico que lo desacelera y llega al frente de ionizacion a 0,5 kms^{-1}.

Sin importar el tipo de mecanismo de fotoevaporación dominante, el flujo fotoevaporado solo si la presión térmica supera a la gravedad de la protoestrella. Entonces, el flujo fotoevaporado solo existe a partir de un radio crítico r_g, donde este radio se estima a partir del balance entre la energía necesaria para escapar de una órbita kepleriana y la energía térmica:

$$r_g = \frac{GM_*}{a^2} \tag{1.1}$$

Donde M_* es la masa de la protoestrella y a es la velocidad del sonido del gas. Para las protoestrellas típicas del trapecio la masa típica es de $M_* = 0{,}2\ M_\odot$. Para el gas neutro la velocidad del sonido es de $a_I \sim 3$ kms^{-1} y para el gas ionizado es de $a_{II} \sim 10$ kms^{-1}. Por tanto, el radio gravitacional para un flujo dominado por el EUV es de $r_{gII} \sim 2$ AU y para un flujo dominado por el FUV es de $r_{gI} \sim 20$ AU.

1.5. Objetos LL

1.5.1. Mapa de Objetos

Capítulo 2

Marco Teórico

2.1. Vientos Estelares

2.2. Choques

2.3. Frentes de Ionización

Un frente de ionización es la interfaz entre un medio gaseoso neutro y uno ionizado. Ocurren cerca de fuentes de rediación ionizante, tales como estrellas masivas, tipo B temprana o tipo O. el frente de ionización puede tratarse como una discontinuidad en el medio gaseoso.

2.4. Regiones HII (Stahler & Palla, 2004)

Consideremos el caso en que se forma una estrella masiva dentro de una nube molecular, que por simplicidad está compuesta exclusivamente de hidrógeno molecular H_2. La estrella masiva emite fotones ultravioleta que tienen la energía suficiente para disociar el H_2 como para ionizar el hidrógeno atómico resultante. Luego el plasma ionizado se recombina para volver a ser HI emitiendo líneas espectrales de diversas energías, siendo la más energética la línea de Ly α. Como al realizar una ionización se pierde un fotón ionizante y el flujo de radiación proveniente de la estrella es finito, entonces la estrella solo puede ionizar la región

Tipo Espectral	Masa ($M_\odot$)	$\log \mathcal{N}_*$ (s^{-1})	$\log \mathcal{N}_{FUV}$ (s^{-1})
O4	70	49.9	49.5
O5	60	49.4	49.2
O6	40	48.8	48.8
O7	30	48.5	48.6
O8	23	48.2	48.4
O9	20	47.8	48.2
B0	18	47.1	48.1
B1	13	45.4	47.5
B2	10	44.8	47.1

Cuadro 2.1: Tasa de fotones ionizantes para estrellas masivas (Stahler & Palla, 2004)

de la nube más próxima a ésta. Si suponemos que la nube tiene densidad uniforme, entonces esta región tendrá forma esférica, conocida como *esfera de Strömgren*.

2.4.1. Esfera de Strömgren

El plasma ionizado dentro de la Esfera de Strömgren se encuentra en balance de ionización, esto es, que la tasas de ionización y la de recombinación son iguales. La tasa de ionizaciones es igual a la cantidad de fotones ionizantes que emite la estrella central por segundo. Esto es, los fotones que poseen una energía mayor al límite de Lymann, que corresponde a $E = 13{,}6$ eV, o bien $\lambda = 912$ Å. En la tabla 2.1 se muestra la tasa de fotones ionizantes $\mathcal{N}_*$ para estrellas masivas de tipo espectral O y B temprano.
Por otro lado, la tasa volumétrica de recombinaciones se escribe como:

$$\mathcal{R} = n_e n_p \alpha_{rec}(T) = n_e^2 \alpha_{rec}(T) \tag{2.1}$$

Donde α_{rec} es el coeficiente de recombinación, y es una función solo de la temperatura. La última igualdad se obtiene asumiendo neutralidad de la carga.

La tasa total de recombinaciones se obtiene integrando $\mathcal{R}$ en el volumen de la región HII, asumiendo que tanto la densidad de electrones como la tempertaura son constantes espacialmente. De esta manera la condición de balance de ionización queda como sigue:

$$\mathcal{N}_* = \frac{4\pi}{3} n_e^2 \alpha'_{rec}(T) R_s^3 \tag{2.2}$$

Donde R_s es el *radio de Strömgren*. Es importante notar que el coeficiente de recombinación primado es diferente del coeficiente no primado: el coeficiente de recombinación primado no toma en cuenta las recombinaciones al nivel $n = 1$ debido a que estas recombinaciones producen fotones de $E = 13{,}6$ eV que son capaces de ionizar el hidrógeno neutro. Como la densidad de la nube original no cambia apreciablemente cuando el gas es ionizado debido a que el tiempo en que esto pasa es muy corto (como mostraremos en la siguiente sección), entonces $n_e = n_H^0$, donde n_H^0 es la densidad de HI en la región contigua a la nube, y a su vez $n_H^0 = n_{H_2}$, donde n_{H_2} es la densidad de gas molecular. Con esto podemos calcular el radio de Strömgren como sigue:

$$R_s = \left[\frac{3\mathcal{N}_*}{4\pi\alpha'_{rec}(n_H^0)^2}\right]^{1/3} = 0{,}4 \text{ pc} \left(\frac{\mathcal{N}_*}{10^{49} \text{ s}^{-1}}\right)^{1/3} (n_{H_2})^{-2/3} \tag{2.3}$$

En la expresión numérica, se adopta un valor de $\mathcal{N}_*$ de 10^{49}s^{-1}, una temperatura de 10^4 K que es la temperatura característica de una región HII y con la que el coeficiente de recombinación α'_{rec} adopta un valor de $2{,}6 \times 10^{-13}$ cm^3 s^{-1}.

Dentro de la región HII, la probabilidad por unidad de tiempo de ionizar un átomo de hidrógeno dado es mucho mayor a la probabilidad de una recombinación, por lo que el gas está casi completamente ionizado. Sin embargo, en los bordes de la región HII, la densidad de gas neutro aumenta debido a que en dicha región el flujo de fotones ionizantes ha sido atenuado por todo el gas ionizado más próximo a la estrella. La transición de gas ionizado a gas neutro tiene un grosor Δr que corresponde al camino libre medio del gas neutro. Esto es:

$$\Delta R = \frac{1}{\sigma_{\nu_1} n_H^0} \tag{2.4}$$

Donde σ_{ν_1} es la sección recta de un átomo de hidrógeno en el estado base, evaluada en la longitud de onda del límite de Lymann. Utilizando $\sigma_{\nu_1} = 6{,}8 \times 10^{-18}$ cm^2 y $n_H^0 = 2 \times 10^3$ cm^{-3} obtenemos que $\Delta r = 7{,}4 \times 10^{13}$ cm $\sim 5 \times 10^{-5}$ R_s, lo que muestra que las regiones HII tienden a tener bordes bien delimitados.

2.4.2. Primera y Segunda expansión

Las esferas de Strömgren no son objetos estáticos, sino que se expanden con el tiempo. Este proceso ocurre en dos etapas: en la primera inicialmente no existe ninguna región HII pero que la radiación ultravioleta de la estrella hace que se expanda rápidamente al disociar e ionizar el gas a su alrededor hasta alcanzar el radio de Strömgren. En la segunda expansión la diferencia de presiones entre el gas ionizado de la región HII, mucho mayor que la del gas neutro que lo rodea, provoca otra expansión más lenta que la primera hasta que haya equilibrio de presión. A continuación explicaremos el proceso más a detalle:
Sea $F_*(t)$ el flujo de radiación ionizante que alcanza un radio R al tiempo t. Al transcurrir un tiempo dt, el frente de ionización avanza una distancia dR y llega a $n_{H_2}^0$ moléculas de hidrógeno por unidad de área. Se necesitan 3 fotones para ionizar completamente la molécula: uno para disociarla, con energía $E \geq 14{,}7$ eV y otros dos para ionizar cada uno de los átomos resultantes, con $E \geq 13{,}6$ eV. El número de fotones ionizantes atravezando el frente de ionización por unidad de área es $F_*\ dt$. Entonces, como se producen dos ionizaciones por cada tres fotones, tenemos que:

$$\frac{F_* dt}{2 n_{H_2} dR} = \frac{3}{2} \tag{2.5}$$

$$\Longrightarrow \frac{dR}{dt} = \frac{F_*}{3 n_{H_2}} = \frac{2F_*}{3 n_H^0} \tag{2.6}$$

Estamos asumiendo que el flujo tanto de fotones con energías de $E \geq 14{,}7$ eV y $E \geq 13{,}6$ eV es prácticamente el mismo.

Ahora consideremos las recombinaciones: el número total de recombinaciones que llevan a niveles tales que $n \geq 2$ dentro de una esfera de radio R es $\frac{4\pi}{3}\left(n_H^0\right)^2 \alpha'_{rec} R^3$. Si el balance de ionización aun se mantiene, entonces el número de ionizaciones por unidad de tiempo es igual a la tasa de recombinaciones más los fotones que logran atravesar el frente de ionización por unidad de tiempo que es $4\pi R^2 F_*$. Entonces:

$$\mathcal{N}_* = 4\pi R^2 F_* + \frac{4\pi}{3}\left(n_H^0\right)^2 \alpha'_{rec} R^3 \tag{2.7}$$

Resolvemos para F_* y encontramos que:

$$F_* = \frac{\mathcal{N}_*}{4\pi R^2} - \frac{\left(n_H^0\right)^2 \alpha'_{rec} R}{3} \tag{2.8}$$

$$\implies \frac{dR}{dt} = \frac{\mathcal{N}_*}{6\pi n_H^0 R^2} - \frac{2 n_H^0 \alpha'_{rec} R}{9} \tag{2.9}$$

Definimos los siguientes parámetros adimensionales $\lambda \equiv R/R_s$ y $\tau \equiv t/t_{rec}$, donde $t_{rec} = \frac{1}{n_H^0 \alpha'_{rec}}$ es el tiempo medio de recombinación del hidrógeno, que es del órden de 60 yr con los valores de n_H^0 y α'_{rec} utilizados en esta sección. Y con esto la ecuación (2.9) se escribe como sigue:

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = \frac{2}{9}\left(\lambda^{-2} - \lambda\right) \tag{2.10}$$

Resolvemos por el método de separación de variables y aplicamos la condición inicial $\lambda(0) = 0$ y obtenemos lo siguiente:

$$\lambda(\tau) = \left[1 - \exp\left(-\frac{2}{3}\tau\right)\right]^{1/3} \tag{2.11}$$

De la ecuación (2.11) vemos que cuando han pasado dos terceras partes del tiempo de recombinación, la región HII se ha expandido alrededor del 86 % del radio de Strömgren, y aunque la expansión se va desacelerando constantemente, ya es de una extensión considerable.

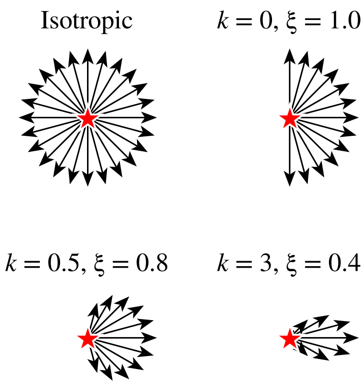


Figura 2.1: Representación esquemática de vientos con diferentes anisotropías: Arriba izquierda: Viento isotrópico esférico. Arriba derecha: viento isotrópico hemisférico. Abajo: Vientos anisotrópicos donde el parámetro k indica el grado de anisotropía (ver capítulo 3)

2.4.3. Flujos de Champaña

2.4.4. Características de la emisión

2.5. Modelo Genérico de los Choques de Proa

Para este trabajo consideramos en general dos modelos de interacción de vientos:

- Una fuente localizada en el origen que emite un viento esférico que puede ser isotrópico o anisotrópico (figura 2.1) no acelerado que interactúa con el viento esférico isotrópico de otra fuente que se encuentra a una distancia D de la primera(figura 2.2)

- Una fuente localizada en el origen que emite un viento esférico isotrópico no acelerado que interactúa con un viento plano paralelo no acelerado y densidad constante (figura)

El sitema en su conjunto tiene simetría cilíndrica.

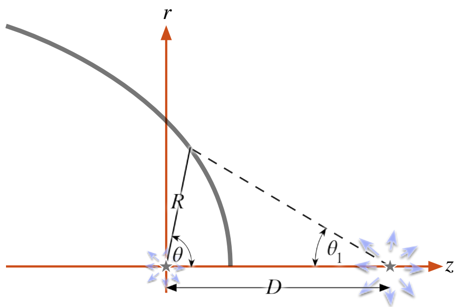


Figura 2.2: Representación esquemática del problema de interacción de dos vientos: Dos fuentes separadas por una distancia D emiten un viento radial que forma un choque de proa a una distancia R del origen. El sistema tiene geometría cilíndrica siendo el eje z el eje de simetría. La forma del choque depende únicamente del ángulo polar θ, medido a partir del origen. Otro ángulo que es de utilidad es θ_1, que corresponde al ángulo polar medido a partir de la posición de la otra fuente.

2.5.1. Planitud y "Alatud"

Las cantidades medibles que nos ayudan a caracterizar un choque de proa las llamamos "Radios característicos" (ilustrados en la figura 2.3):

- Radio del choque en la dirección del eje de simetría del sistema. Denotado como R_0
- Radio en dirección perpendicular al eje de simetría del sistema. Denotado como R_{90}
- Radio de curvatura en la "nariz" del choque de proa. Denotado como R_c. En el apéndice A se muestra el procedimiento para obtener este radio para una curva genérica continua y derivable.

Un último parámetro es el ángulo asintótico de apertura de las alas, denotado como θ_∞. Sin embargo, en la mayoría de los choques de proa es dificil de medirlo debido a que el ángulo polar θ tiende al valor asintótico muy lentamente y además la emisión de las alas es bastante débil. Por otro lado, los radios característicos (R_0, R_c, R_{90}) son medibles observacionalmente en la mayoría de los casos. A partir de éstos, podemos determinar dos parámetros adimensionales llamados "planitud" y "alatud".

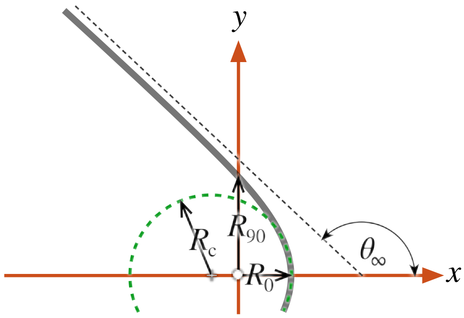


Figura 2.3: Representación esquemática de los radios característicos de un choque de proa

El primero de éstos es una medida de qué tan plano es el choque de proa en la nariz o "apex", y lo denotamos con la letra griega Π, mientras que el segundo es una medida de qué tanto se abren las alas del choque de proa, y lo denotamos con la letra griega Λ. Ambos parámetros se definen a continuación:

$$\Pi \equiv \frac{R_c}{R_0} \tag{2.12}$$

$$\Lambda \equiv \frac{R_{90}}{R_0} \tag{2.13}$$

2.6. Proyección en el Plano del Cielo

Para un choque de proa que es la vez geométricamente delgado y ópticamente delgado, únicamente se observa el borde de éste por abrillantamiento al limbo, por lo tanto, su orientación respecto a la línea de visión modifica su forma respecto a la forma real del choque. Para ello, rotamos el sistema de referencia del choque de proa en coordenadas cartesianas, denotado por (x, y, z), por un ángulo que llamamos *inclinación*, denotado por i, en el plano xz, de modo que la transformación entre el sistema de refencia del choque y el sistema de referencia del plano del cielo, denotado por (x', y', z') queda como sigue:

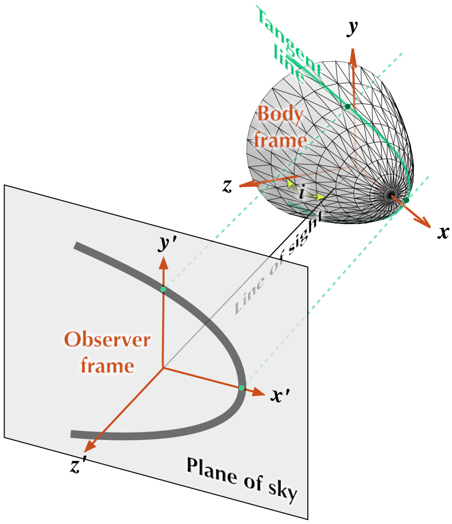


Figura 2.4: Sistema de referencia del choque vs sistema de referencia del plano del cielo. Los ejes x' y y' se encuentran en el plano del cielo, mientras el eje z' es paralelo a la línea de visión. Solo la región del choque cuya tangente sea paralela a la línea de visión será visible por abrillantamiento al limbo.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos i - z\sin i \\ y' \\ z\cos i + x\sin i \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

Por otro lado, la forma tridimensional del choque de proa viene dado por:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

La relación entre ambos sistemas de referencia se ilustra en la figura ??.

2.6.1. Vectores normal y tangente a la superficie

Si definimos los vectores $\hat{n}$ y $\hat{t}$, como los vectores normal y tangente a la superficie, respectivamente para ϕ constante. En el caso $\phi = 0$ (figura

2.5), ambos vectores se encuentran en el plano xy y es fácil mostrar que:

$$\hat{t}_0 = \begin{pmatrix} -\cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \hat{n}_0 = \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

Donde:

$$\tan\alpha = -\frac{dy}{dx} = \frac{1+\omega\tan\theta}{\tan\theta-\omega} \tag{2.17}$$

y:

$$\omega(\theta) = -\frac{1}{R}\frac{dR}{d\theta} \tag{2.18}$$

Para otros valores de ϕ, basta con hacer una rotación de las ecuaciones (2.16) alrededor del eje x. Para la conversión al sistema de referencia del plano del cielo se utiliza la ecuación (2.14):

$$\begin{aligned} \hat{n}' = {} & \frac{1}{(1+\omega^2)^{1/2}} \\ & \times \begin{pmatrix} (\cos\theta+\omega\sin\theta)\cos i - (\sin\theta-\omega\cos\theta)\sin i\sin\phi \\ (\sin\theta-\omega\cos\theta)\cos\phi \\ (\cos\theta+\omega\sin\theta)\sin i + (\sin\theta-\omega\cos\theta)\sin\phi\cos i \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned} \hat{t}' = {} & \frac{1}{(1+\omega^2)^{1/2}} \\ & \times \begin{pmatrix} -(\sin\theta-\omega\cos\theta)\cos i - (\cos\theta+\omega\sin\theta)\sin i\sin\phi \\ (\cos\theta+\omega\sin\theta)\cos\phi \\ -(\cos\theta+\omega\sin\theta)\sin i + (\sin\theta-\omega\cos\theta)\sin\phi\cos i \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.20}$$

2.6.2. Línea tangente

Debido a que el choque es ópticamente delgado y geométricamente delgado, solo la región del choque cuya tangente sea paralela a la línea de visión seré visible. Esto corresponde a una curva que denominamos *línea tangente*, que debe cumplir con la siguiente condición:

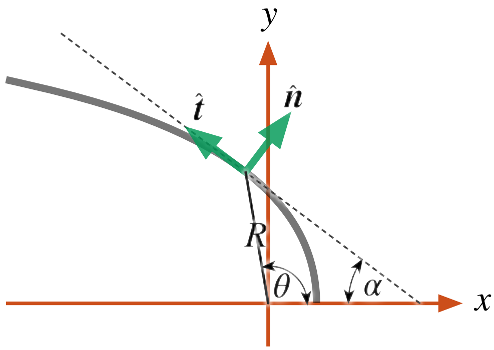


Figura 2.5: Vectores unitarios normal y tangente a la superficie $R(\theta)$ en un plano de azimuth ϕ constante.

$$\hat{n}' \cdot \hat{z}' = 0 \tag{2.21}$$

Denotamos como ϕ_T al ángulo azimutal que cumple la condición anterior para una inclinación dada, en función del ángulo polar θ:

$$\sin\phi_T = \tan i \tan\alpha = \tan i \frac{1 + \omega\tan\theta}{\omega - \tan\theta} \tag{2.22}$$

De esta manera, la forma de la línea tangente del choque de proa, a la que llamamos *forma proyectada* viene dada por:

$$\begin{pmatrix} x'_T \\ y'_T \\ z'_T \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} \cos\theta\cos i - \sin\theta\sin\phi_t\sin i \\ \sin\theta\left(1 - \sin^2\phi_T\right)^{1/2} \\ \cos\theta\sin i + \sin\theta\sin\phi_T\cos i \end{pmatrix} \tag{2.23}$$

En el caso general, z'_T no es una función lineal de x'_T y y'_T, por lo que la línea tangente no se encuentra en un plano.
La forma aparente (x'_T, y'_T) de la línea tangente también puede escribirse en coordenadas polares (R', θ'), donde:

$$R'(\theta) = \left(x'^2_T + y'^2_T\right)^{1/2} \text{y} \qquad \tan\theta' = \frac{y'_T}{x'_T} \tag{2.24}$$

Es de notar a su vez que la ecuación (2.22) no tiene solución para valores arbitrarios de θ y de la inclinación, puesto que se requiere que $|\sin\phi_T| < 1$. Por tanto, la línea tangente solo existe para valores de θ tales que $\theta < \theta_0$ donde θ_0 es el valor de θ en el eje de simetría de la línea tangente proyectada ($\theta'(\theta_0) = 0$) y que se obtiene de la siguiente ecuación implícita:

$$\tan\theta_0 = \frac{|\tan i| + \omega(\theta_0)}{1 - \omega(\theta_0)|\tan i|} \tag{2.25}$$

Esto implica que si el choque de proa es suficientemente "abierto" ($\alpha > \alpha_{min}$), entonces para inclinaciones tales que $|i| > 90° - \alpha_{min}$ no existirá la línea tangente para ningún valor de θ, es decir, el choque de proa se encontrará sufientemente "de cara" como para que ya no parezca un choque de proa para el observador.

2.6.3. Radios característicos en el plano del cielo

En orden de comparar la forma $R(\theta)$ con observaciones, es útil definir los radios característicos R'_0 y R'_{90}, donde R'_0 es el radio del eje de simetría aparente y R'_{90} es el radio aparente en la dirección perpendicular a R'_0. Es decir $R'_0 = x'_T(y'_t = 0)$ y $R'_{90} = y'_t(x'_t = 0)$. Utilizando las ecuaciones (2.22) y (2.23) encontramos que:

$$R'_0 = R(\theta_0)\cos(\theta_0 + i) \tag{2.26}$$

Donde θ_0 es la solución de la ecuación (2.25), y

$$R'_{90} = R(\theta_{90})\sin\theta_{90}\left(1 - \sin^2\phi_T(\theta_{90})\right)^{1/2} \tag{2.27}$$

donde θ_{90} es la solución de la siguiente ecuación implícita:

$$\cot\theta_{90} = \frac{1 - \left(1 + \omega(\theta_{90})^2\sin^2 2i\right)^{1/2}}{2\omega(\theta_{90})\cos^2 i} \tag{2.28}$$

2.7. Cuádricas de Revolución

En el caso general es difícil encontrar la forma aparente para un choque de proa siguiendo el formalismo desarrollado en la sección anterior, por lo que optamos por aproximar la forma éstos con una de las superficies más simples: las *cuádricas de revolución*, que son superficies de revolución de las curvas cónicas. Dado el modelo general descrito en la §2.5, haremos algunas restricciones para las superficies cuádricas que utilizaremos en este trabajo:

- El eje focal se encuentra alineado con el eje x
- La posición del foco de la superficie cuádrica no necesariamente coincide con la posición de la fuente
- En el caso de las hipérbolas, solo tomamos una de las ramas de ésta.

Implementando dichas restricciones, utilizamos la representación paramétrica de las curvas cónicas en términos de un parámetro adimensional denotado con la letra t:

$$x = x_0 + \sigma a \mathcal{C}(t) \tag{2.29}$$

$$y = b\mathcal{S}(t) \tag{2.30}$$

Donde:

$$\mathcal{C}(t), \mathcal{S}(t) = \begin{cases} \cos t, \sin t & \text{elipses} \\ \cosh t, \sinh t & \text{hipérbolas} \end{cases} \tag{2.31}$$

$$\sigma = \begin{cases} +1 & \text{elipses} \\ -1 & \text{hipérbolas} \end{cases} \tag{2.32}$$

$$x_0 = R_0 - \sigma a \tag{2.33}$$

Donde a y b representan la longitud de los semi-ejes de la cónica en cuestión (Figura 2.6). x_0 representa la distancia entre el centro de la cónica y el origen.
La forma polar del choque de proa $R(\theta)$ viene dada por:

$$\tan\theta = \frac{b\mathcal{S}(t)}{a\mathcal{C}(t) + x_0} \tag{2.34}$$

$$R = \left((a\mathcal{C}(t) + x_0)^2 + b^2\mathcal{S}^2(t) \right)^{1/2} \tag{2.35}$$

El tipo de cónica lo podemos caracterizar mediante el parámetro $\mathcal{Q}$, donde:

$$\mathcal{Q} \equiv \sigma \frac{b^2}{a^2} \tag{2.36}$$

Para las superficies abiertas (hiperboloides) tenemos que $\mathcal{Q} < 0$, mientras que para las superficies cerradas tenemos que $\mathcal{Q} > 0$. Casos particulares son la esfera $\mathcal{Q} = 1$ y el paraboloide $\mathcal{Q} = 0$. De manera equivalente se puede definir el ángulo θ_Q como sigue:

$$\tan \theta_Q = \sigma \frac{b}{a} \tag{2.37}$$

Este ángulo se relaciona con la excentricidad de las cónicas (y que sustituye a esta última en este trabajo) como se muestra a continuación:

$$\tan \theta_Q = \sigma \sqrt{|1 - e^2|} \tag{2.38}$$

El set de parámetros $(a, x_0, \mathcal{Q})$ es suficiente para caracterizar a nuestras cuádricas de revolución: $\mathcal{Q}$ nos indica el tipo de cónica, a establece la escala y x_0 el desplazamiento del centro a lo largo del eje x. Sin embargo, para futuras aplicaciones tanto a modelos de interacción de vientos como a observaciones (capítulos 3 y 5) nos sería util hacer la caracterización mediante los parámetros (R_0, Π, Λ) (ver §2.5.1). Las equivalencias entre los dos sets de parámetros los calculamos a continuación:

$$R_c = \frac{b^2}{a} = a|\mathcal{Q}| \tag{2.39}$$

$$R_{90}^2 = b^2 \sigma \left(1 - \frac{x_0^2}{a^2}\right) = \mathcal{Q}\left(a^2 - x_0^2\right) \tag{2.40}$$

Combinando las ecuaciones (2.33)

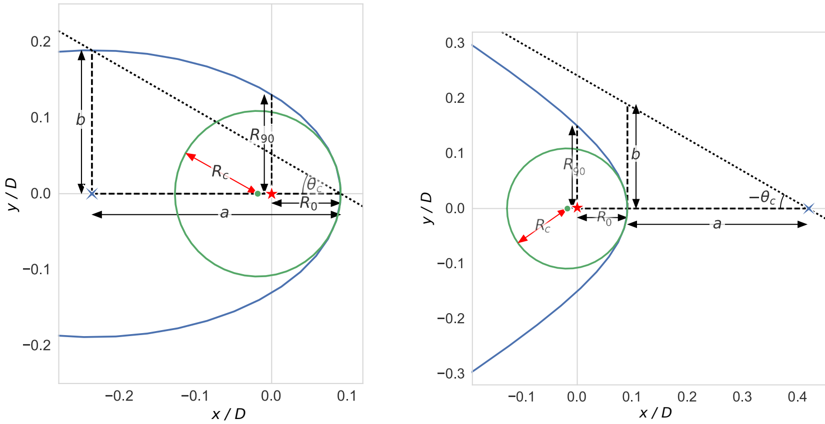


Figura 2.6: Representación esquemática de: Izquierda: Elipse. Y, derecha: Hipérbola. En ambos casos se ilustran los parámetros relevantes de éstas y los radios característicos

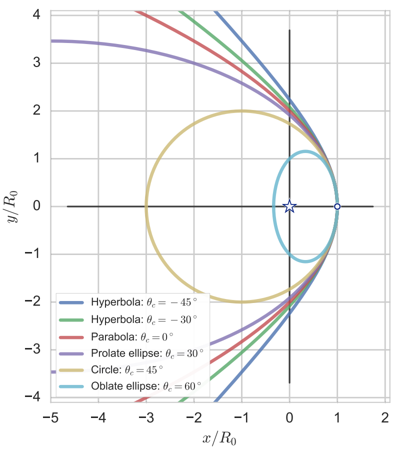


Figura 2.7: Familia de curvas cónicas, donde el valor del parámetro θ_Q varía desde $\theta_Q < 0$ (hipérbolas) hasta $\theta_c > 0$ (elipses). Casos especiales son $\theta_Q = 0$ (parábola) y $\theta_Q = 45°$ (círculo). Este parámetro sustituye en este trabajo a la excentricidad.

$$\tilde{a} = \pm \frac{\tilde{R}_c}{2\tilde{R}_c - \tilde{R}_{90}^2} \tag{2.41}$$

$$\tilde{b} = \frac{\tilde{R}_c}{\left|2\tilde{R}_c - \tilde{R}_{90}^2\right|^{1/2}} \tag{2.42}$$

$$\tan\theta_c = \pm \left|2\tilde{R}_c - \tilde{R}_{90}^2\right|^{1/2} \tag{2.43}$$

Nótese que la cantidad $T_c \equiv 2\tilde{R}_c - \tilde{R}_{90}^2$ nos sirve como discriminante para distinguir el tipo de curva cónica que mejor ajusta a un choque de proa dado.

2.7.1. Proyección en el plano del cielo

El objetivo de esta sección es obtener la forma proyectada de las cuádricas de revolución, puesto que son una aproximación buena y mucho más sencilla a la forma real de un choque de proa. La forma tridimensional de las cuádricas de revolución viene dada por:

$$x = a\mathcal{C}(t) + x_0 \tag{2.44}$$

$$y = b\mathcal{S}(t)\cos\phi \tag{2.45}$$

$$z = b\mathcal{S}(t)\sin\phi \tag{2.46}$$

Siguiendo el procedimiento mostrado en la §2.6 calculamos el ángulo azimutal ϕ que cumple con el criterio de ser tangente al la línea de visión:

$$\sin\phi_T = \frac{b}{a}\tan i\mathcal{T}(t) \tag{2.47}$$

Donde:

$$\mathcal{T}(t) = \begin{cases} \cot t & \text{si } \theta_c > 0 \\ \coth t & \text{si } \theta_c < 0 \end{cases} \tag{2.48}$$

Ahora utilizamos la ecuación (2.14) para obtener la forma aparente de una cuádrica dada:

$$x'_T = \frac{\mathcal{C}(t)}{a\cos i}\left(a^2\cos^2 i \pm b^2\sin^2 i\right) + x_0\cos i \tag{2.49}$$

$$y'_T = b\mathcal{S}(t)\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\tan^2 i\mathcal{T}^2(t)\right)^{1/2} \tag{2.50}$$

Se espera que la forma proyectada de una cuádrica dada sea otra cuádrica del mismo tipo, por lo que es posible escribir las ecuaciones (2.49) y (2.50) de la siguiente manera:

$$x'_T = a'\mathcal{C}(t') + x'_0 \tag{2.51}$$

$$y'_T = b'\mathcal{S}(t') \tag{2.52}$$

Donde:

$$x'_0 = x_0\cos i \tag{2.53}$$

$$a' = \left(a^2\cos^2 i \pm \underline{2}\sin^2 i\right)^{1/2} \tag{2.54}$$

$$b' = b \tag{2.55}$$

$$\mathcal{C}(t') = \frac{a'\mathcal{C}(t)}{a\cos i} \tag{2.56}$$

$$\mathcal{S}(t') = \left(1 - \mathcal{C}^2(t')\right)^{1/2} \tag{2.57}$$

Dos cantidades que nos van a ser de utilidad son los valores del parámetro t que denominaremos t_0 y t_{90} y son tales que $t'(t_0) = 0$ y $t'(t_{90}) = \frac{\pi}{2}$ o bien $y'_T(t_0) = 0$ y $x'_T(t_{90}) = 0$. De esta manera obtenemos las siguientes ecuaciones implícitas evaluando las ecuaciones (2.49) y(2.50) en $t = t_{90}$ y $t = t_0$ respectivamente:

$$\mathcal{T}(t_0) = \frac{a}{b}\cot i = \frac{\cot i}{|\tan\theta_c|} \tag{2.58}$$

$$\mathcal{C}(t_{90}) = -\frac{a x_0\cos^2 i}{a^2\cos^2 i \pm b^2\sin^2 i} \tag{2.59}$$

Los radios característicos aparentes los podemos calcular a partir de las ecuaciones (2.51) y (2.52) como se hizo para los radios característicos en el sistema no primado:

$$R'_0 = \pm a' + x'_0 \tag{2.60}$$

$$R'_c = \frac{b'^2}{a'} \tag{2.61}$$

$$\tan\theta'_c = \pm\frac{b'}{a'} \tag{2.62}$$

$$R'_{90} = \left(2R'_c \mp \tan^2\theta'_c\right)^{1/2} \tag{2.63}$$

Utilizando las ecuaciones (2.33), (2.54) y (2.55), utlizando la definición $D' = D\cos i$ e introduciendo la función $f(i;\theta_c) \equiv \left(1 \pm \tan^2\theta_c \tan^2 i\right)^{1/2}$ obtenemos ecuaciones explícitas para los radios característicos en el sistema de referencia del plano del cielo en términos de la inclinación:

$$\frac{q'}{q} = 1 \pm \tilde{R}_c \cot^2\theta_c \left(f(i;\theta_c) - 1\right) \tag{2.64}$$

$$\tilde{R}'_c = \frac{\tilde{R}_c}{\cos^2 i f(i;\theta_c)\frac{q'}{q}} \tag{2.65}$$

$$\tan\theta'_c = \frac{\tan\theta_c}{\cos i f(i;\theta_c)} \tag{2.66}$$

$$\tilde{R}'_{90} = \left(\frac{2\tilde{R}_c f(i;\theta_c) \mp \tan^2\theta_c \frac{q'}{q}}{q'/q}\right)^{1/2} \frac{\sec i}{f(i;\theta_c)} \tag{2.67}$$

Cuando $\tilde{R}'_{90}$ es medible, entonces es posible hacer diagramas de diagnóstico como el de la figura 2.8 para comparar con observaciones, independientemente de cualquier modelo de choques de proa.

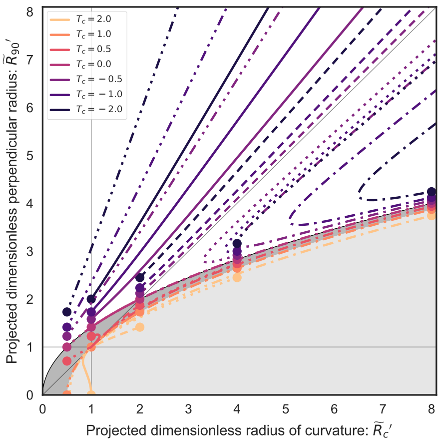


Figura 2.8: Diagrama de diagnóstico $\tilde{R}'_{90}$ vs $\tilde{R}'_c$ para las cuádricas de revolución. En la región sin sombrear se representan las superficies abiertas (hiperboloides, $\theta_c < 0$), mientras que la región más oscura representa a elipsoides prolatos ($0 < \theta_c < 45°$) y la región poco sombreada a elipsoides oblatos ($\theta_c > 45°$)

Capítulo 3

Interacción de dos vientos: Aproximación Hipersónica (Canto et al., 1996)

El problema de interacción de dos vientos es de gran interés en astrofísica, y ha sido estudiado en múltiples ocasiones, principalmente mediante simulaciones hidrodinámicas. Sin embargo, cuando se toman en cuenta diversos factores, incluídos conservación de masa, momento y momento angular, el problema puede resolverse de manera algebraica.

3.1. Cantidades conservadas en un flujo hipersónico de capa delgada

Consideramos dos flujos hipersónicos, no acelerados que forman una capa estacionaria delgada formada por dos choques radiativos separados por una discontinuidad de contacto. El sistema tiene geometría cilíndrica y los vientos no tienen velocidad azimutal. Bajo estos términos, describimos la posición de la capa delgada como $R(\theta)$, donde R es el radio de la capa medido a partir de la posición del origen del viento con menor momento y θ es el ángulo polar. Si asumimos que el gas chocado está bien mezclado, entonces tiene una sola velocidad pos choque dada por:

$$\vec{v} = v_r\hat{r} + v_z\hat{z} \tag{3.1}$$

Donde el eje de simetría del sistema es paralelo a $\hat{z}$, y $\hat{r}$ es el radio cilíndrico. Definimos $\dot{M}(\theta)$, $\dot{\vec{\Pi}}(\theta)$ y $\dot{J}(\theta)$ como la tasa de pérdida de masa, la tasa de momento y la tasa de momento angular, respectivamente, de la capa delgada integradas desde $\theta = 0$ hasta θ. Éstas se calculan de la siguiente manera:

$$\dot{\vec{\Pi}}(\theta) = \dot{\Pi}_r(\theta)\hat{r} + \dot{\Pi}_z(\theta)\hat{z} = \dot{M}\left(v_r\hat{r} + v_z\hat{z}\right) \tag{3.2}$$

$$\dot{\vec{J}}(\theta) = \vec{R}(\theta) \times \dot{\vec{\Pi}}(\theta) \tag{3.3}$$

$$\dot{M}(\theta) = \dot{M}_w(\theta) + \dot{M}_{w1} \tag{3.4}$$

Donde $\vec{R}(\theta) \equiv R(\theta)\sin\theta\ \hat{r} + R(\theta)\cos\theta\ \hat{z}$. Resolviendo el producto cruz y tomando su magnitud encontramos que:

$$\dot{J}(\theta) = \dot{M}(\theta)R(\theta)v_\theta \tag{3.5}$$

$$\text{donde}: \ \ v_\theta = v_r\cos\theta - v_z\sin\theta \tag{3.6}$$

Por otro lado, al asumir estado estacionario, necesitamos que la tasa de pérdida de masa, la tasa de momento y la tasa de momento angular de la capa delgada sean iguales a aquellas inyectadas por los dos vientos. Entonces definimos estas cantidades como $\dot{M}_w$, $\dot{\Pi}_{wr}$, $\dot{\Pi}_{wz}$ y $\dot{J}_w$ para el viento con menor momento, y para el otro viento se utiliza la misma notación solo que utilizando el subíndice "w1". De esta forma tenemos que:

$$\dot{\Pi}_r(\theta)\hat{r} + \dot{\Pi}_z(\theta)\hat{z} = \left[\dot{\Pi}_{wr}(\theta) + \dot{\Pi}_{wr1}(\theta)\right]\hat{r} + \left[\dot{\Pi}_{wz}(\theta) + \dot{\Pi}_{wz1}(\theta)\right]\hat{z} \tag{3.7}$$

$$\dot{J} = \dot{J}_w(\theta) + \dot{J}_{w1}(\theta) \tag{3.8}$$

$$\dot{M}(\theta) = \dot{M}_w(\theta) + \dot{M}_{w1}(\theta) \tag{3.9}$$

Combinando las ecuaciones (3.2), (3.5), (3.4), (3.7), (3.8) y (3.9) encontramos que:

$$\dot{M}(\theta)\left[v_r\hat{r} + v_z\hat{z}\right] = \left(\dot{\Pi}_{wr}(\theta) + \dot{\Pi}_{wr1}(\theta)\right)\hat{r} + \left(\dot{\Pi}_{wz}(\theta) + \dot{\Pi}_{wz1}(\theta)\right)\hat{z} \quad (3.10)$$

$$\dot{M}(\theta)v_\theta R(\theta) = \dot{J}_w(\theta) + \dot{(J)}_{w1}(\theta) \quad (3.11)$$

Y finalmente combinando con la ecuación (3.6) resolvemos para $R(\theta)$:

$$R(\theta) = \frac{\dot{J}_w(\theta) + \dot{(J)}_{w1}(\theta)}{\left(\dot{\Pi}_{wr}(\theta) + \dot{\Pi}_{wr1}(\theta)\right)\cos\theta - \left(\dot{\Pi}_{wz}(\theta) + \dot{\Pi}_{wz1}(\theta)\right)\sin\theta} \quad (3.12)$$

3.2. Problema de Interacción de Dos Vientos

Aplicamos el formalismo ya mencionado para la interacción de dos vientos radiales. El viento con menor momento se localiza en el origen, y su densidad a radio fijo varía con el ángulo polar como una ley de potencias (figura 2.1):

$$n(\theta) = n_0 \cos^k\theta \quad (3.13)$$

Donde el índice k indica el grado de anisotropía del viento “interno”. Algunos casos particularmente interesantes son el viento para un proplyd (Henney & Arthur, 1998), donde ($k = 1/2$) y el caso “isotrópico” (Canto et al., 1996) donde $k = 0$. Por el momento restringimos al viento “externo” como isotrópico. El problema se muestra de manera esquemática en la figura 2.2.

Utilizando la ecuación (3.13) encontramos que la tasa de pérdida de masa está dada por:

$$\dot{M}_w = \int_0^\theta\int_0^{2\pi}\rho_w v_w \; d\theta \; d\phi = \frac{M_w^0}{2\,(k+1)}\left(1 - \cos^{k+1}\theta\right) \quad (3.14)$$

Donde v_w es la velocidad del viento inteno, $\rho_w = n\bar{m}$ es su densidad, n se obtiene de la ecuación (3.13), $M_w^0 = 4\pi r_0^2 v_w n_0 \bar{m}$ es la tasa de pérdida de masa integrada hasta $\theta = \pi$ para el caso isotrópico, $\bar{m}$ es la masa promedio de las partículas del viento y r_0 es el radio del viento al cual se alcanza la velocidad terminal v_w. Para un proplyd consideramos que dicho radio es el del frente de ionización.

Con esto, obtenemos las tasas de momento y momento angular:

$$\dot{\Pi}_{wz} = \int_0^\theta v_w \cos\theta \; d\dot{M}_w = \frac{v_w \dot{M}_w^0}{2\,(k+2)} \left(1 - \cos^{k+2}\theta\right) \tag{3.15}$$

$$\dot{\Pi}_{wr} = \int_0^\theta v_w \sin\theta \; d\dot{M}_w = \frac{1}{2} \dot{M}_w^0 v_w I_k(\theta) \tag{3.16}$$

$$\dot{J}_w = \int_0^\theta |\vec{R} \times \vec{v}_w| d\dot{M}_w = 0 \tag{3.17}$$

Donde la integral $I_k(\theta) = \int_0^\theta \cos^k\theta \sin^2\theta \; d\theta$ tiene solución analítica para $k = 0$, es una integral elíptica de segundo tipo cuando $k = \frac{1}{2}$ y su solución es aun más compleja para el resto de los casos. Las tasa de momento angular para el viento interior es cero debido a que éste se mide respecto al origen, donde se localiza la fuente con menor momento. En este punto los vectores de posición y velocidad para un valor de θ dado son paralelos.

Para el viento exterior consideramos dos casos principales: un viento esférico e isotrópico y un viento plano–paralelo de densidad y velocidad constante.

3.2.1. Interacción con un viento esférico isotrópico

En este caso tomamos como variable independiente al ángulo polar medido a partir de la posición de la fuente del viento externo, denotado por θ_1. De esta forma las tasas de pérdida de masa, momento y momento angular quedan como sigue:

$$\dot{M}_{w1} = \frac{M^0_{w1}}{2}\left(1 - \cos\theta_1\right) \tag{3.18}$$

$$\dot{\Pi}_{wz1} = -\frac{v_{w1}\dot{M}^0_{w1}}{4}\sin^2\theta_1 \tag{3.19}$$

$$\dot{\Pi}_{wr1} = \frac{v_{w1}\dot{M}^0_{w1}}{4}\left(\theta_1 - \sin\theta_1\cos\theta_1\right) \tag{3.20}$$

$$\dot{J}_{w1} = \int_0^{\theta_1} R(\theta) v_{w1} \sin(\pi - \theta - \theta_1)\; d\dot{M}_{w1} \tag{3.21}$$

Utilizando la ley de los senos (ver figura 2.2), la ecuación (3.21) queda como sigue:

$$\dot{J}_{w1} = D v_{w1} \int_0^{\theta_1} \sin\theta_1\; d\dot{M}_{w1} = \frac{v_{w1}\dot{M}^0_{w1}}{4}\left(\theta_1 - \sin\theta_1\cos\theta_1\right) D \tag{3.22}$$

Por otro lado, de la figura 2.2, podemos deducir la siguiente relación geométrica entre $R(\theta)$, θ y θ_1:

$$\frac{R(\theta)}{D} = \frac{\sin\theta_1}{\sin(\theta + \theta_1)} \tag{3.23}$$

Combinando las ecuaciones (3.12), (3.15) - (3.22) y (3.23) obtenemos una ecuación implícita que nos indica la dependencia de θ_1 con θ:

$$\theta_1 \cot\theta_1 - 1 = 2\beta I_k(\theta)\cot\theta - \frac{2\beta}{k+2}\left(1 - \cos^{k+2}\theta\right) \tag{3.24}$$

Donde $\beta = \frac{\dot{M}^0_w v_w}{\dot{M}^0_{w1} v_{w1}}$ es el cociente del momentos entre los vientos. Este parámetro, junto con el índice de anisotropía k son los que determinan la forma del choque de proa.

Los radios característicos en este caso se muestran a continuación. El procedimiento detallado se puede consultar en el apéndice B:

$$\frac{R_0}{D} = \frac{\beta^{1/2}}{1+\beta^{1/2}} \tag{3.25}$$

$$\tilde{R}_{90} = \frac{(3\xi)^{1/2}\left(1+\beta^{1/2}\right)}{\left(1+\frac{1}{5}\xi\beta\right)^{1/2}(1-\xi\beta)} \tag{3.26}$$

$$\tilde{R}_c = |1-2\gamma|^{-1} \tag{3.27}$$

$$\text{Donde}: \ \gamma = \frac{C_{k\beta}}{1+\beta^{1/2}} + \frac{1+2\beta^{1/2}}{6} \tag{3.28}$$

3.2.2. Interacción de un viento esférico isotrópico con un viento plano–paralelo

En este caso las tasas de pérdida de masa, de momento y momento angular del viento plano–paralelo con velocidad v_a y densidad uniforme ρ_a quedan como sigue:

$$\dot{M}_{w1} = \pi\rho_a v_a R^2 \sin^2\theta \tag{3.29}$$

$$\dot{\Pi}_{wz1} = -\pi\rho_a v_a^2 R^2 \sin^2\theta \tag{3.30}$$

$$\dot{\Pi}_{wr1} = 0 \tag{3.31}$$

$$\dot{J}_{w1} = \int_0^r r' v_a \sin\theta \, d\dot{M}_{w1} = \frac{2}{3}\pi\rho_a v_a^2 R^3 \sin^3\theta \tag{3.32}$$

Sustituyendo estas ecuaciones en (3.12) junto con (3.14) - (3.17) para el caso isotrópico ($k=0$) obtenemos lo siguiente:

$$R = \frac{\frac{2}{3}\pi\rho_a v_a R^3 \sin^3\theta}{\frac{\dot{M}_w^0 v_w}{4}(\theta - \sin\theta\cos\theta)\cos\theta - \left(\frac{\dot{M}_w^0 v_w}{4}\sin^2\theta - \pi\rho_a v_a^2 R^2 \sin^2\theta\right)\sin\theta} \tag{3.33}$$

La condición de equilibrio de presión en este caso nos lleva a la siguiente relación:

$$\frac{\dot{M}_w^0 v_w}{4\pi R_0^2} = \rho_a v_a^2 \tag{3.34}$$

Por tanto:

$$\tilde{R} = \frac{\frac{2}{3}\tilde{R}^3 \sin^3\theta}{(\theta - \sin\theta\cos\theta)\cos\theta - \left(\sin^2\theta - \tilde{R}^2\sin^2\theta\right)\sin\theta} \tag{3.35}$$

Resolviendo para $\tilde{R}$ encontramos que:

$$\tilde{R} = \left[\csc^2\theta\,(1 - \theta\cot\theta)\right]^{1/2} \tag{3.36}$$

3.2.3. Radios Característicos

En este caso los radios característicos se calculan de la siguiente manera: R_0 se obtiene directamente de la ecuación (3.34) como

$$R_0 = \left(\frac{\dot{M}_w^0 v_w}{4\pi\rho_a v_a^2}\right)^{1/2} \tag{3.37}$$

R_{90} se calcula evaluando la ecuación (3.36) en $\theta = \frac{\pi}{2}$:

$$\tilde{R}_{90} = \sqrt{3} \tag{3.38}$$

Por último, el radio de curvatura se obtiene haciendo una expansión de la ecuación (3.36) y encontrando el coeficiente de segundo órden. El procedimiento detallado se muestra en el apéndice B.4:

$$\tilde{R}_c = \frac{5}{3} \tag{3.39}$$

Capítulo 4

Obtención de la Forma Aparente de los Choques en el Modelo de Aproximación Hipersónica

La obtención de la forma aparente de los Radios Característicos de los choques de proa no se obtiene de manera analítica de forma sencilla, por lo que recurrimos a hacer aproximaciones a la forma de un choque dado, utilizando las cuádricas de revolución. Éstas cuádricas dan un buen ajuste pero no son capaces de reproducir la forma completa de un choque de proa dado, por lo que recurrimos al uso de dos cuádricas que en conjunto ajustan a la forma completa del choque: una para la "cabeza" del choque, y otro para la cola. Y cómo ya vimos en la sección , los radios característicos aparentes se pueden obtener de manera sencilla para estas superficies.

En la figura 4.2 se muestra el residuo del ajuste en función del ángulo polar, y observamos que para $\theta \sim 150°$ el ajuste de la cola deja de ser bueno. Esto implica que existe una inclinación límite i_{lim} más allá de la cual no podemos confiar en el modelo propuesto en este trabajo, y que calcularemos en la §4.3.

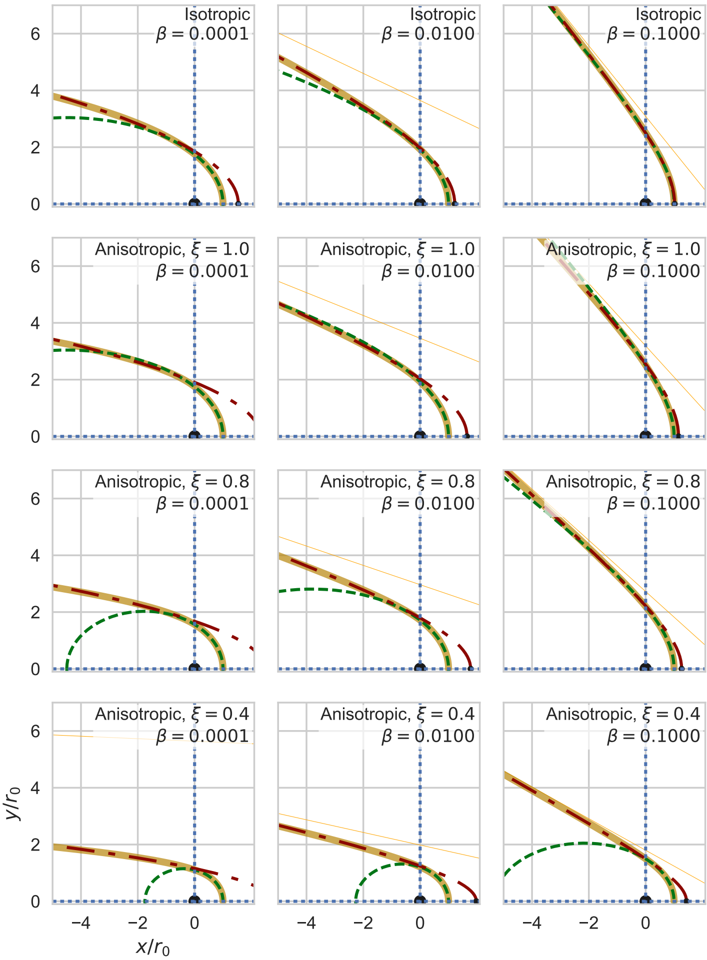


Figura 4.1: Ajuste de dos cuádricas a las soluciones de capa delgada. La línea gruesa continua representa la forma de un choque bajo la aproximación de capa delgada (capítulo 3) para los parámetros enlistados en cada pánel. La línea verde es el ajuste obtenido para la cabeza, mientras que la roja corresponde al ajuste para la cola.

4.1. Ajustes a la cabeza

Utilizando las ecuación (2.43) de la §**??** y las ecuaciones (3.27) y (3.26) de la §3.2 podemos calcular el parámetro θ_c que nos indicará el tipo de cónica que ajusta mejor a cada solución del modelo de capa delgada en función de los parámetros β y ξ:

$$\tan\theta_c = \pm\left|\frac{3\xi\left(1+\beta^{1/2}\right)^2}{(1-\xi\beta)^2\left(1+\frac{1}{5}\xi\beta\right)} - \frac{2}{|1-2\gamma|}\right|^{1/2} \tag{4.1}$$

En la figura se ilustra la dependencia de θ_c con los parámetros β y ξ, así como al tipo de cónica que ajusta mejor tanto la cabeza como la cola de cada solución a la forma de los choques de proa.

4.2. Ajustes a la cola

En el caso general del problema de capa delgada, el comportamiento de la cola tiende a ser hiperbólico, dado que el ángulo polar θ tiende a un valor asintótico denominado como θ_∞. Este ángulo es tal que $\theta_\infty + \theta_{1\infty} = \pi$ y se calcula resolviendo la siguiente ecuación explícita:

El ajuste a la hipérbola se logra ajustando tres parámetros fundamentales: $\theta_c = \theta_\infty - \pi$, la distancia entre la hipérbola y el centro de ésta a lo largo del eje focal a_t y la distancia entre el origen y el centro de la hipérbola $x_{0,t}$. a_t y $x_{0,t}$ se obtienen inicialmente con un ajuste numérico para una malla de valores de β y ξ. Posteriormente hacemos tres ajustes anidados en tres niveles para determinar de manera analítica los parámetros de la hipérbola en función de β y ξ. A continuación mostramos las funciones y los parámetros que mejor ajustan a la cola para cada solución a la forma de los choques de proa. CAbe destacara

Cuadro 4.1: Coeficientes del ajuste hiperbólico a la cola de los choques de Proa

Ecuación (4.2)	Ecuación (4.4)	. . . .	. . . .
$C_0^{\text{iso}} = +1{,}3195$	$c_{0,0} = +2{,}0758$	$c_{1,0} = -0{,}2309$	$c_{2,0} = -0{,}2532$
$C_1^{\text{iso}} = +0{,}4229$	$c_{0,1} = +0{,}9571$	$c_{1,1} = -0{,}1530$	$c_{2,1} = -0{,}2487$
$C_2^{\text{iso}} = +0{,}1092$	$c_{0,2} = +0{,}2528$	$c_{1,2} = -0{,}0360$	$c_{2,2} = -0{,}0794$
$C_3^{\text{iso}} = +0{,}0051$	$c_{0,3} = +0{,}0171$	$c_{1,3} = -0{,}0010$	$c_{2,3} = -0{,}0095$
Ecuación (4.3)	Ecuación (4.5)	. . . .	. . . .
$D_0^{\text{iso}} = +0{,}7962$	$d_{0,0} = +0{,}8516$	$d_{1,0} = -0{,}0907$	$d_{2,0} = -0{,}2002$
$D_1^{\text{iso}} = -0{,}2363$	$d_{0,1} = -0{,}7620$	$d_{1,1} = +0{,}1411$	$d_{2,1} = -0{,}0295$
$D_2^{\text{iso}} = -0{,}0126$	$d_{0,2} = -0{,}0683$	$d_{1,2} = +0{,}0390$	$d_{2,2} = -0{,}0236$

$$x_{0,t} = 0{,}7\beta^{-0{,}55}\left[C_3\left(\log_{10}\beta\right)^3 + C_2\left(\log_{10}\beta\right)^2 + C_1\left(\log_{10}\beta\right) + C_0\right] \quad (4.2)$$

$$(x_{0,t} - a_t) = D_2\left(\log_{10}\beta\right)^2 + D_1\left(\log_{10}\beta\right) + D_0 \quad (4.3)$$

Donde:

$$C_k = c_{2,k}\xi^2 + c_{1,k}\xi + c_{0,k} \text{ para } k = [0,1,2,3] \quad (4.4)$$

$$D_k = d_{2,k}\xi^2 + d_{1,k}\xi + d_{0,k} \quad \text{para } k = [0,1,2] \quad (4.5)$$

Los coeficientes de los ajustes para la cola se muestran en la tabla 4.1:
En el apéndice C se muestran los detalles de cómo se obtuvieron los coeficientes de la tabla 4.1.

4.2.1. Ajustes a la cabeza y la cola en el caso de la interacción con un viento plano–paralelo

En este caso el ajuste a la cabeza es muy simple, utilizando los resultados para sus radios característicos (ecuaciones (3.38) y (3.39)) encontramos que el ajuste a la cabeza corresponde con una elipse tal que $\tan\theta_c = \frac{1}{3}$.

Para el ajuste a la cola encontramos que ninguna de las cuádricas da una buena aproximación a la forma de la cola, pero contamos con la forma explícita del choque de proa (ecuación (3.36)) así que ningún ajuste fue necesario.

4.3. Proyección en el plano del cielo para el modelo de capa delgada

La proyección en el plano del cielo se realizó utilizando las ecuaciones (2.65), (2.66) y (2.67) para los ajuste de la cabeza y de la cola, respectivamente.
En la figura 4.2 se muestra el residuo del ajuste de diferentes soluciones contra el ángulo polar θ. Se puede apreciar que para cierto valor de θ, que podemos denominar como θ_{tran}, ocurre la transición donde el mejor ajuste deja de ser el de la cabeza y el ajuste de la cola empieza a ser más efectivo. Debido a esto, tenemos que tener cuidado qué ajuste elegir para calcular los radios característicos aparentes. Si $\theta_0 < \theta_{tran}$ entonces podemos utilizar el ajuste a la cabeza para calcular el radio de curvatura aparente, en caso contrario se tiene que utilizar el ajuste a la cola, lo que ocurre a inclinaciones altas. Para calcular R'_{90} hay que vigilar si θ_{90} es mayor o menor a θ_{tran} para decidir qué ajuste utilizar. En este último caso será el de la cola para la mayoría de las inclinaciones.
Utilizando las ecuaciones (2.34), (2.58) y (2.59) calculamos los valores para θ_0 y θ_{90} para las cuádricas:

$$\cot\theta_0 = \cot\theta_c \cot i + \frac{x_0}{b}\sqrt{\cot^2\theta_c \cot^2 i \pm 1} \tag{4.6}$$

Utilizando las ecuaciones (2.33), (2.42) y (2.43) encontramos que:

$$\frac{x_0}{b} = \frac{|\tan\theta_c|}{\tilde{R}_c} - |\cot\theta_c| \tag{4.7}$$

Por otro lado:

$$\mathcal{T}(\theta_{90}) = f_2(i;\theta_c)\left[\frac{x_0}{b} - \frac{x_0}{a}\frac{|\cot\theta_c|}{f^2(i;\theta_c)}\right] \tag{4.8}$$

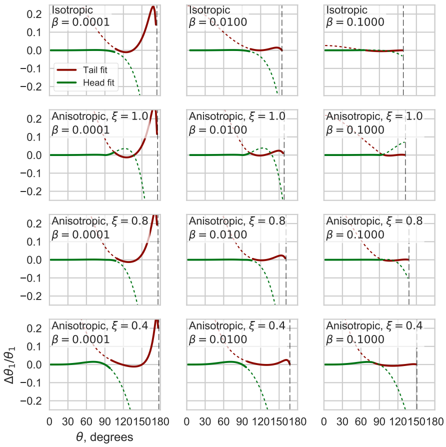


Figura 4.2: Residuo del ajuste de las cónicas a la forma del choque. La línea verde muestra el residuo del ajuste a la cabeza y la roja el ajuste a la cola. En todos los casos existe un valor de θ_{tran} donde para $\theta < \theta_{tran}$ el mejor ajuste es el de la cabeza y para $\theta \geq \theta_{tran}$ el mejor ajuste es el de la cola

.

Donde $f(i;\theta_c)$ fue definido en la sección 2.7 y:

$$f_2(i;\theta_c) \equiv \left(1 \mp \frac{x_0^2}{a^2 f^4(i;\theta_c)}\right)^{-1/2} \tag{4.9}$$

Capítulo 5

Resultados obtenidos para los proplyds “clásicos”

Probamos nuestro modelo descrito en los capítulos anteriores en una muestra de proplyds pertenecientes a la Nebulosa de Orión (ONC) que presentan un choque de proa. En la figura se muestran los proplyds que pertencen a nuestra muestra.
En todos los casos no fue posible medir el radio característico R_{90} debido a que el brillo de la cáscara decae con el ángulo polar θ y no es detectale para ángulos del orden de $60°$. Sin embargo, a continuación mostraremos la metodología para obtener la inclinación más probable de cada choque, así como los parámetros del modelo de cada uno de éstos que nos indican su forma intrínseca.

5.1. Metodología para la medición de la forma aparente.

Se utilizaron imágenes en el filtro de $[OIII]$ de la cámara WPC2 del Telescopio Espacial Hubble (HST). Se utilizaron las herramientas del programa DS9 para análisis de imágenes astronómicas para trazar la posición de θ^1 Ori C y de cada uno de los proplyds de la muestra. La posición y la forma de los choques de proa fue trazada con una serie de marcas a lo largo del choque. Las coordenadas de las marcas fueron guardadas

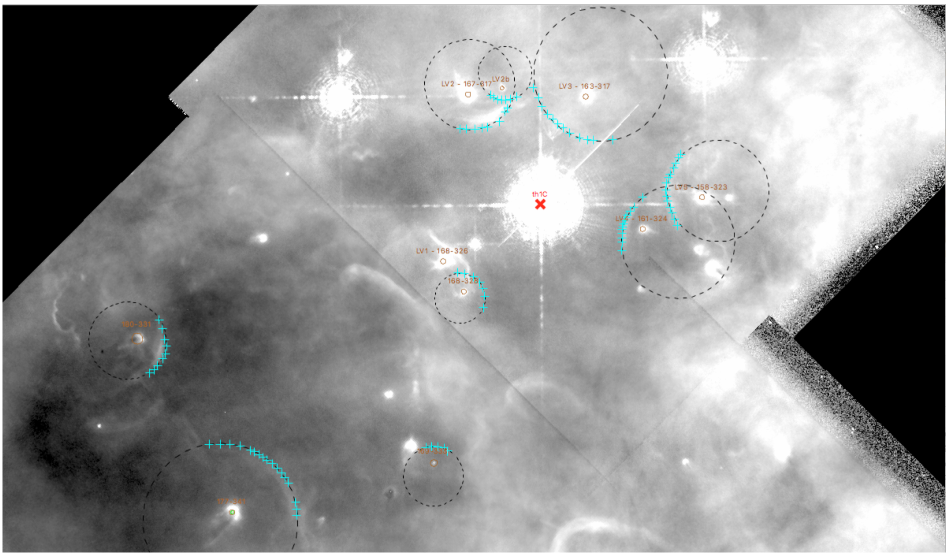


Figura 5.1: Imagen de la parte central de la Nebulosa de Orión donde se ubican los proplyds de nuestra muestra. Las cruces color cyan corresponden a las mediciones de la forma aparente para cada choque de proa. Los círculos amarillos marcan la posición de cada proplyd y la “x” roja corresponde a la posición de la estrella ionizante θ^1 Ori C. Los círculos negros ilustran de manera esquemática el radio de curvatura de cada choque.

en un archivo y luego procesadas para tener las coordenadas del choque en el sistema de referencia del proplyd (Figura 5.1). El radio de curvatura aparente se obtiene haciendo un ajuste de mínimos cuadrados de la forma de un círculo de las mediciones obtenidas. R_0 se obtiene como la distancia mínima entre el proplyd y el ajuste circular dentro del rango de las coordenadas de las mediciones.

5.1.1. Medición de incertidumbres

Para saber qué tan confiables son las coordenadas de las mediciones, se realizó el procedimiento siguiente: Del total de mediciones realizadas para cada proplyd, se crearon varias sub-muestras donde se utilizamos aproximadamente las dos terceras partes de las mediciones, pero dejando un mínimo de cuatro puntos, y se procedió a calcular los radios característicos para cada submuestra, y comprobar qué tanto se desvían estas mediciones de la original. En la figura 5.2 se muestran ejemplos de dichas sub-muestras para algunos proplyds.

5.2. Resultados

Los radios característicos obtenidos para la muestra original y para las submuestras se muestran en la figura 5.3. En cada pánel se utiliza un valor fijo para el parámetro de anisotropía ξ. Las mediciones para el proplyd LV4 son consistentes con un viento isotrópico, mientras que para los proplyds LV2b, 169-338, 180-331, 168-328, 177-341, LV3 y LV5 sus mediciones son consistentes para vientos con un grado de anisotropía bajo ($\xi \gtrsim 0{,}8$). Finalmente para LV2 sus mediciones son consistentes con un viento con un grado de anisotropía alto ($\xi \lesssim 0{,}4$).
Con base a este análisis, se resume en la tabla 5.1 los ajustes a los parámteros de los proplyds: inclinación, distancia a θ^1 Ori C intrínseca D y radio del choque en el eje de simetría R_0/D.

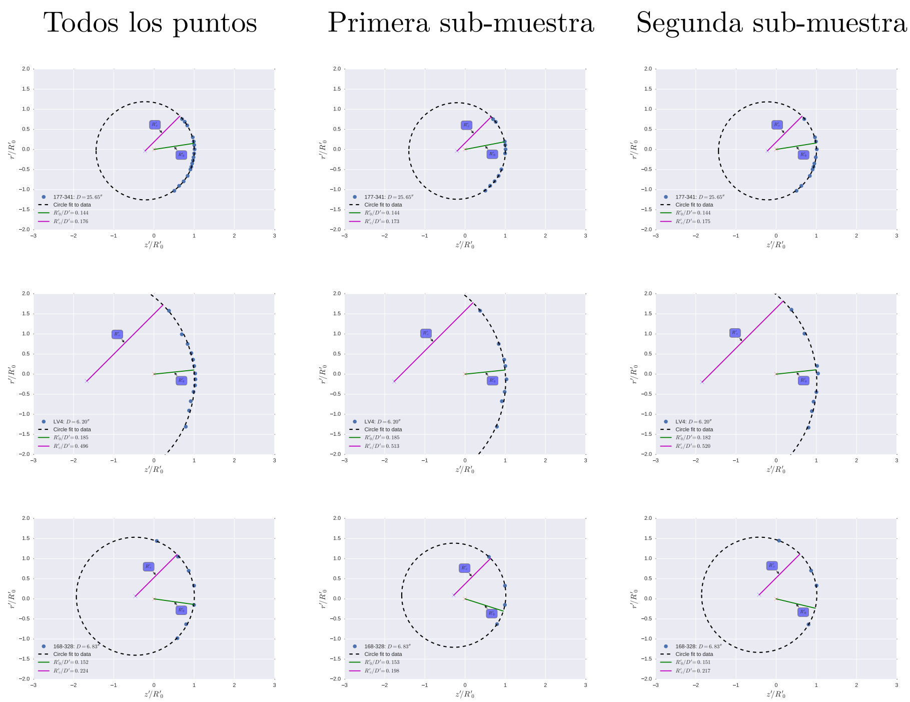


Figura 5.2: Ejemplos de incertidumbres sistemáticas en los ajustes circulares a la forma de los choques para tres fuentes (desde la línea superior hasta la inferior): 177-341, LV4 y 168-328. La columna de la izquierda muestra el ajuste a todos los puntos identificados en el borde de la cáscara, donde el número y el espaciamiento de los puntos es una medida subjetiva de nuestra confianza al trazar el borde de cada cáscara. Las dos columnas restantes muestran ajustes a sub-muestras seleccionadas aleatoriamente que contienen 2/3 partes de los puntos de la muestra original para cada cáscara.

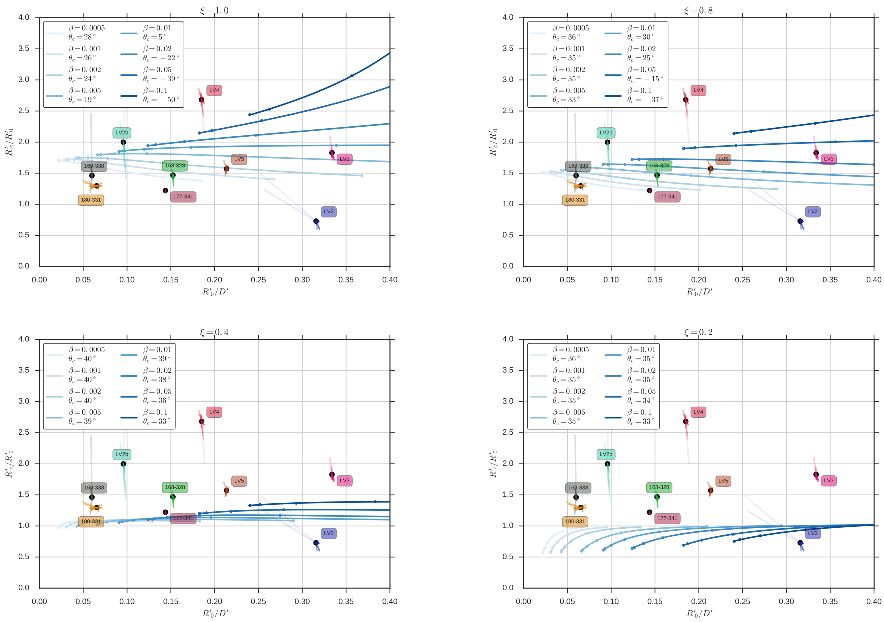


Figura 5.3: Mediciones de los radios característicos de los proplyds R_c y R_0. Las curvas representan el ajuste de una cuádrica para un choque de proa con un cociente de momentos β fijo, además se muestra su respectivo valor de θ_c. Los puntos a lo largo de cada curva representan una separación en inclinación de 15°. Las mediciones para cada proplyd vienen acompañadas con el set de sub-muestras representadas como líneas radiales de colores. En cada gráfica se utiliza un valor diferente para el parámetro de anisotropía ξ, iniciando con un viento isotrópico ($\xi = 1$), hasta el viento con mayor anisotropía ($\xi = 0{,}2$).

Cuadro 5.1: Ajuste a los parámetros de los arcos para los choques de proa de los proplyds

		. . . . Obsetvado			. . . .	
OW	Nombre	D'	R'_0/D'	$(R'_c/R'_0)_{\mathrm{shape}}$	$(R'_c/R'_0)_{\mathrm{flux}}$	β
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
168-328		6.8	$0{,}152 \pm 0{,}001$	$1{,}42 \pm 0{,}09$	$1{,}45 \pm 0{,}05$	$0{,}018 \pm 0{,}003$
169-338		16.4	$0{,}059 \pm 0{,}001$	$1{,}76 \pm 0{,}48$	$1{,}50 \pm 0{,}05$	$0{,}002 \pm 0{,}001$
177-341	HST1	25.6	$0{,}144 \pm 0{,}001$	$1{,}21 \pm 0{,}02$	$1{,}25 \pm 0{,}02$	$0{,}018 \pm 0{,}003$
180-331		25.1	$0{,}061 \pm 0{,}007$	$1{,}30 \pm 0{,}05$	$1{,}27 \pm 0{,}05$	$0{,}003 \pm 0{,}001$
167-317	LV2	7.8	$0{,}305 \pm 0{,}025$	$0{,}81 \pm 0{,}28$	$1{,}50 \pm 0{,}1$	$0{,}085 \pm 0{,}015$
	LV2b	7.2	$0{,}097 \pm 0{,}002$	$2{,}00 \pm 0{,}62$	$1{,}63 \pm 0{,}08$	$0{,}008 \pm 0{,}003$
163-317	LV3	6.9	$0{,}334 \pm 0{,}002$	$1{,}81 \pm 0{,}12$	$1{,}85 \pm 0{,}15$	$0{,}075 \pm 0{,}025$
161-324	LV4	6.2	$0{,}186 \pm 0{,}002$	$2{,}59 \pm 0{,}24$	$2{,}05 \pm 0{,}07$	$0{,}040 \pm 0{,}014$
168-323	LV5	9.6	$0{,}213 \pm 0{,}002$	$1{,}57 \pm 0{,}07$	$1{,}60 \pm 0{,}07$	$0{,}055 \pm 0{,}005$

Notes – Col. (1): ID de la fuente (O'Dell & Wen, 1994). Col. (2): Nombre alternativo de la fuente. Col. (3): Distancia proyectada desde θ^1 Ori C, segundos de arco. Col. (4): Radio exterior aparente a lo largo del eje, normalizado con la distancia proyectada, con una incertidumbre de $\pm 1\sigma$, determinado con el ajuste circular decrito en § 5.1. Col. (5): Radio de curvatura aparente, normalizado con el radio a lo largo del eje, con incertidumbres de $\pm 1\sigma$, determinado con el ajuste circular descrito en § 5.1. Col. (6): Igual que Col. (5) pero aplicando el criterio adicional de que el brillo superficial del proplyd obtenido debe coincidir con la predicción teórica. Col. (7): Cociente de momentos entre el viento del proplyd y la estrella O (ver capítulo 3). Col. (8): Parámetro de anisotropía del viento del proplyd. Col. (9): Inclinación respecto al plano del cielo, en grados. Col. (10): Distancia real desde θ^1 Ori C, parsecs. Col. (11): Radio real de la cáscara a lo largo del eje, normalizado con distancia.

Capítulo 6

Resultados obtenidos para otros objetos

This is chapter 6

Capítulo 7

Conclusiones

Bibliografía

Ballesteros-Paredes J., Hartmann L., Vázquez-Semadeni E., 1999, , 527, 285

Ballesteros-Paredes J., Hartmann L. W., Vázquez-Semadeni E., Heitsch F., Zamora-Avilés M. A., 2011, , 411, 65

Canto J., Raga A. C., Wilkin F. P., 1996, , 469, 729

Churchwell E., Felli M., Wood D. O. S., Massi M., 1987, , 321, 516

Gordon M. A., Churchwell E., 1970, , 9, 307

Hartmann L., Burkert A., 2007, , 654, 988

Hennebelle P., Pérault M., 1999, , 351, 309

Henney W. J., Arthur S. J., 1998, , 116, 322

Johnstone D., Hollenbach D., Bally J., 1998, , 499, 758

Laques P., Vidal J. L., 1979, , 73, 97

Menten K. M., Reid M. J., Forbrich J., Brunthaler A., 2007, , 474, 515

O'Dell C. R., Wen Z., 1994, , 436, 194

O'dell C. R., Wen Z., Hu X., 1993, , 410, 696

Stahler S. W., Palla F., 2004, The Formation of Stars. Wiley-VCH

Yusef-Zadeh F., 1990, , 361, L19

Apéndice A

Derivación Matemática del Radio de Curvatura

Tomamos una curva genérica $\vec{\sigma}(t) \equiv x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y}$ continua y suave para todo valor de t real y finito. Sus derivadas se denotan como $\vec{\sigma}'(t)$ y $\vec{\sigma}''(t)$. Su longitud de arco está dada por:

$$s(t) = \int_0^t \left\| \vec{\sigma}'(t') \right\| \, dt' \tag{A.1}$$

Reparametrizamos la trayectoria $\vec{\sigma}(t)$ con la longitud de arco y diferenciando respecto a ésta obtenemos lo siguiente:

$$\frac{d\vec{\sigma}}{ds} = \frac{\vec{\sigma}'(t)}{\|\vec{\sigma}'(t)\|} \equiv \vec{T}(s) \tag{A.2}$$

Esta última expresión se logró diferenciando la ecuación (A.1) y aplicando la regla de la cadena al diferenciar $\frac{d\vec{\sigma}}{ds}$. $\vec{T}(s)$ es el vector tangente a la trayectoria $\vec{\sigma}(s)$.

La curvatura κ se define como la magnitud de la derivada del vector tangente respecto a la longitud de arco, o bien, como la segunda derivada de la trayectoria $\vec{\sigma}(s)$:

$$\kappa \equiv \left\| \vec{T}'(s) \right\| = \left\| \vec{\sigma}''(s) \right\| \tag{A.3}$$

El radio de curvatura se define como el radio de un círculo que ajusta localmente a la trayectoria, y se calcula como el inverso multiplicativo de la curvatura:

$$R_c = \frac{1}{\kappa} \tag{A.4}$$

Aplicando la regla de la cadena encontramos la siguiente expresión para la curvatura:

$$\kappa = \left\| \frac{\vec{\sigma}''(t)}{\|\vec{\sigma}'(t)\|^2} - \frac{\vec{\sigma}'(t)}{\|\vec{\sigma}'(t)\|^4} \vec{\sigma}'(t) \cdot \vec{\sigma}''(t) \right\| \tag{A.5}$$

Escribimos las componentes de las derivadas de $\vec{\sigma}(t)$ para calcular los factores que intervienen en la ecuación (A.5):

$$\vec{\sigma}'(t) = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} \tag{A.6}$$

$$\vec{\sigma}''(t) = \ddot{x}\hat{x} + \ddot{y}\hat{y} \tag{A.7}$$

$$\implies \vec{\sigma}'(t) \cdot \vec{\sigma}''(t) = \dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} \tag{A.8}$$

De esta forma, calculamos la curvatura como sigue:

$$\kappa = \left[\left(\frac{\ddot{x}}{\|\vec{\sigma}'\|^2} - \frac{\dot{x}(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y})}{\|\vec{\sigma}'\|^4} \right)^2 + \left(\frac{\ddot{y}}{\|\vec{\sigma}'\|^2} - \frac{\dot{y}(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y})}{\|\vec{\sigma}'\|^4} \right)^2 \right]^{1/2} \tag{A.9}$$

$$\begin{aligned} \kappa = \left\|\vec{\sigma}'\right\|^{-2} \Big[&\big(\ddot{x}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \dot{x}(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}) \big)^2 \\ &+ \big(\ddot{y}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \dot{y}(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}) \big)^{2^{1/2}} \end{aligned} \tag{A.10}$$

$$\kappa = \left\|\vec{\sigma}'\right\|^{-2} \left[\left(\ddot{x}\dot{y}^2 - \dot{x}\dot{y}\ddot{y} \right)^2 + \left(\ddot{y}\dot{x}^2 - \dot{y}\dot{x}\ddot{x} \right)^2 \right]^{1/2} \tag{A.11}$$

$$\kappa = \left\|\vec{\sigma}'\right\|^{-3} \left[\ddot{x}^2\dot{y}^2 + \ddot{y}^2\dot{x}^2 - 2\ddot{x}\ddot{y}\dot{x}\dot{y} \right]^{1/2} \tag{A.12}$$

$$\kappa = \frac{|\ddot{x}\dot{y} - \ddot{y}\dot{x}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} \tag{A.13}$$

Utilizando coordenadas polares, la expresión para el radio de curvatura queda como sigue:

$$R_c = R\frac{\left(1+\omega^2\right)^{3/2}}{|1+\omega^2-\dot{\omega}|} \tag{A.14}$$

Donde $\omega \equiv \frac{1}{R}\frac{dR}{d\theta}$ (ver sección 2.6)

A.1. Radio de curvatura para un polinomio de grado $2n$

Dado que es de nuestro interés calcular el radio de curvatura del choque en el eje de simetría ($\theta = 0$), debido a que es analíticamente más fácil de calcular, y a su vez es medible observacionalmente ajustando un círculo a una serie de mediciones de la posición del choque (sección). Entonces, hacemos una aproximación para la función $R(\theta)$ que nos da la forma del choque mediante un polinomio par de grado $2n$ de la siguiente forma:

$$R(\theta) \simeq R_0\left(1+\gamma\theta^2+\Gamma\theta^4+\cdots+\Gamma_n\theta^n\right) \tag{A.15}$$

De esta forma calculamos las derivadas de $R(\theta)$:

$$\dot{R}(\theta) \simeq R_0\theta\left(2\gamma+4\Gamma\theta^2+\cdots+n\Gamma_n\theta^{n-2}\right) \tag{A.16}$$

$$\ddot{R}(\theta) \simeq R_0\left(2\gamma+12\Gamma\theta^2+\cdots+n(n-1)\Gamma_n\theta^{n-2}\right) \tag{A.17}$$

Evaluando en $\theta = 0$ obtenemos los siguiente:

$$R(0) = R_0 \tag{A.18}$$

$$\dot{R}(0) = 0 \tag{A.19}$$

$$\ddot{R}(0) = 2\gamma R_0 \tag{A.20}$$

$$\implies \omega(0) = 0 \tag{A.21}$$

$$\dot{\omega}(0) \equiv \frac{\ddot{R}(0)}{R(0)} - \left(\frac{\dot{R}(0)}{R(0)}\right)^2 = 2\gamma \tag{A.22}$$

Sustituyendo en la ecuación (A.14) obtenemos el radio de curvatura en $\theta = 0$:

$$R_c = \frac{R_0}{|1 - 2\gamma|} \tag{A.23}$$

Por esto en el apéndice B para encontrar el radio de curvatura nos enfocamos en encontrar el coeficiente de segundo orden en la expansión en serie de $R(\theta)$.

Apéndice B

Derivación paso a paso de los Radios Característicos en la aproximación hipersónica del modelo de interacción de dos vientos

B.1. R_0

Podemos determinar el radio característico R_0 a partir de la condición de que el choque es estacionario. En este caso, los momentos de los dos vientos son iguales en la posición del choque. Por tanto, utilizando la ecuación de momento en $\theta = 0$ obtenemos lo siguiente:

$$\rho_{ws} v_w^2 = \rho_{ws1} v_{w1}^2 \tag{B.1}$$

Donde ρ_{ws} y ρ_{ws1} son las densidades de los dos vientos en la posición del choque. Por otro lado, como la tasa de pérdida de masa es constante para un ángulo θ dado, entonces podemos hacer lo siguiente:

$$\frac{\dot{M}_w^0}{4\pi R^2 v_w} v_w^2 = \frac{\dot{M}_{w1}^0}{4\pi \left(D - R\right)^2 v_{w1}} v_{w1}^2 \tag{B.2}$$

En esta última ecuación hemos sustituído $\dot{M}_w^0 = 4\pi R_0^2 v_w \rho_{ws}$ y $\dot{M}_{w1}^0 = 4\pi \left(D - R_0\right)^2 v_{w1} \rho_{ws1}$ aprovechando que dichas cantidades deben conservarse.
Reduciendo la ecuación (B.2) encontramos una expresión para R_0:

$$\frac{R_0}{D} = \frac{\beta^{1/2}}{1 + \beta^{1/2}} \tag{B.3}$$

B.2. $\tilde{R}_{90}$

R_{90} puede determinarse a partir de evaluar las ecuaciones (3.23) y (3.24) en $\theta = \frac{\pi}{2}$ como sigue:

$$\frac{R_{90}}{D} = \tan\theta_{1,90} \tag{B.4}$$

$$\theta_{1,90}\cot\theta_{1,90} - 1 = -\frac{2\beta}{k+2} \tag{B.5}$$

Donde $\theta_{1,90} = \theta_1\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Introducimos un nuevo parámetro $\xi \equiv \frac{2}{k+2}$ de modo que combinando las dos ecuaciones anteriores obtenemos lo siguiente:

$$\frac{R_{90}}{D} = \tan\theta_{1,90} = \frac{\theta_{1,90}}{1 - \xi\beta} \tag{B.6}$$

Hacemos una expansión en serie para el lado izquierdo de la ecuación y reducimos:

$$\theta_{1,90}^2\left(1 + \frac{\theta_{1,90}^2}{15}\right) \simeq 3\beta\xi \tag{B.7}$$

Tomamos la solución a primer orden $\theta_{1,90} = 3\beta\xi$, sustituímos este valor en el término correctivo y resolvemos para $\theta_{1,90}$:

$$\theta_{1,90} = \left(\frac{3\xi\beta}{1 + \frac{1}{5}\xi\beta}\right)^{1/2} \tag{B.8}$$

Finalmente sustituímos (B.8) en (B.6) para obtener R_{90}:

$$\frac{R_{90}}{D} = \frac{(3\xi\beta)^{1/2}}{\left(1 + \frac{1}{5}\xi\beta\right)^{1/2}(1 - \xi\beta)} \tag{B.9}$$

$$\tilde{R}_{90} = \frac{(3\xi)^{1/2}\left(1 + \beta^{1/2}\right)}{\left(1 + \frac{1}{5}\xi\beta\right)^{1/2}(1 - \xi\beta)} \tag{B.10}$$

B.3. Radio de Curvatura en el caso de la interacción de dos vientos esféricos.

Siendo que el choque de proa en nuestro modelo genérico es simétrico, entonces la forma $R(\theta)$ debe ser una función par, por tanto podemos hacer la siguiente expansión en serie:

$$R(\theta) \simeq R_0\left(1 + \gamma\theta^2 + \Gamma\theta^4 + \cdots + \cdots\right) \tag{B.11}$$

De esta forma el radio de curvatura para $\theta = 0$ queda como sigue (ver apéndice A):

$$\tilde{R}_c = (1 - 2\gamma)^{-1} \tag{B.12}$$

Para encontrar el coeficiente de segundo orden γ hacemos una expansión en serie de las ecuaciones (3.24) y (3.23) para ángulos pequeños, mostrando a continuación la expansión de cada término para al final hacer la reducción algebraica:

$$\theta_1 \cot\theta_1 - 1 \simeq -\frac{\theta_1^2}{3}\left(1+\frac{\theta_1^2}{15}\right) \tag{B.13}$$

$$\cos^k\theta \simeq \left(1-\frac{\theta^2}{2}\right)^k \simeq \left(1-\frac{k\theta^2}{2}\right) \tag{B.14}$$

$$\sin^2\theta \simeq \theta^2\left(1-\frac{\theta^2}{6}\right)^2 \simeq \theta^2\left(1-\frac{\theta^2}{3}\right) \tag{B.15}$$

$$\implies \cos^k\theta\sin^2\theta \simeq \theta^2\left[1-\left(\frac{1}{3}+\frac{k}{2}\right)\theta^2\right] \tag{B.16}$$

$$\implies I_k(\theta) \simeq \frac{\theta^3}{3}\left[1-\frac{1}{10}\left(3k+2\right)\theta^2\right] \tag{B.17}$$

$$\cot\theta \simeq \theta^{-1}\left(1-\frac{\theta^2}{3}\right) \tag{B.18}$$

$$\implies 2\beta I_k(\theta)\cot\theta \simeq \frac{2}{3}\beta\theta^2\left[1-\frac{1}{30}\left(9k+16\right)\theta^2\right] \tag{B.19}$$

$$-\frac{2\beta}{k+2}\left(1-\cos^{k+2}\theta\right) \simeq \beta\theta^2\left[1-\frac{1}{12}\left(3k+4\right)\right] \tag{B.20}$$

Sustituyendo las expansiones anteriores en (3.24) obtenemos lo siguiente:

$$\theta_1^2\left(1+\frac{\theta_1^2}{15}\right) \simeq \beta\theta^2\left[1+\frac{1}{60}\left(4-9k\right)\theta^2\right] \tag{B.21}$$

La solución a primer orden (ignorando el término cuártico) es $\theta_1^2 \simeq \beta\theta^2$. Sustituímos esta solución en el término correctivo y resolvemos para θ_1^2:

$$\theta_1^2 \simeq \beta\theta^2 \left[1 + \frac{1}{60}\left(4 - 9k\right)\theta^2\right]\left(1 + \frac{\beta\theta^2}{15}\right)^{-1} \tag{B.22}$$

$$\theta_1^2 \simeq \beta\theta^2 \left[1 + \frac{1}{60}\left(4 - 9k\right)\theta^2\right]\left(1 - \frac{\beta\theta^2}{15}\right) \tag{B.23}$$

$$\implies \theta_1^2 \simeq \beta\theta^2 \left(1 + 2C_{k\beta}\theta^2\right) \tag{B.24}$$

$$\text{Donde :} \quad C_{k\beta} = \frac{1}{2}\left(A_k - \frac{\beta}{15}\right) \tag{B.25}$$

$$A_k = \frac{1}{15} - \frac{3k}{20} \tag{B.26}$$

Utilizamos esta solución para θ_1 en la ecuación (3.23), ignorando términos de orden superior al cuártico dentro de los corchetes:

$$\theta_1 \simeq \beta^{1/2}\theta \left(1 + 2C_{k\beta}\theta^2\right)^{1/2} \tag{B.27}$$

$$\implies \theta + \theta_1 \simeq \theta \left[1 + \beta^{1/2}\left(1 + C_{k\beta}\theta^2\right)\right] \tag{B.28}$$

$$\sin\theta_1 \simeq \theta_1 \left(1 - \frac{\theta_1^2}{6}\right) \tag{B.29}$$

$$\simeq \beta^{1/2}\theta \left(1 + C_{k\beta}\theta^2\right)\left[1 - \frac{\beta\theta^2\left(1 + 2C_{k\beta}\theta^2\right)}{6}\right] \tag{B.30}$$

$$\implies \sin\theta_1 \simeq \beta^{1/2}\theta \left[1 + \left(C_{k\beta} - \frac{\beta}{6}\right)\theta^2\right] \tag{B.31}$$

$$\sin(\theta+\theta_1) \simeq (\theta+\theta_1)\left[1-\frac{(\theta+\theta_1)^2}{6}\right] \tag{B.32}$$

$$\simeq \theta\left[1+\beta^{1/2}\left(1+C_{k\beta}\theta^2\right)\right]\left[1-\frac{\theta^2\left(1+\beta^{1/2}\left(1+C_{k\beta}\theta^2\right)\right)^2}{6}\right] \tag{B.33}$$

$$\simeq \theta\left(1+\beta^{1/2}\right)\left[1+\left(\frac{\beta^{1/2}C_{k\beta}}{1+\beta^{1/2}}-\frac{1}{6}\left(1+\beta^{1/2}\right)^2\theta^2\right)\right] \tag{B.34}$$

$$\implies \frac{R}{D} \simeq \frac{\beta^{1/2}}{1+\beta^{1/2}}\left[1+\left(C_{k\beta}-\frac{\beta}{6}\right)\theta^2\right] \left[1+\left(\frac{\beta^{1/2}C_{k\beta}}{1+\beta^{1/2}}-\frac{\left(1+\beta^{1/2}\right)^2}{6}\right)\right]^{-1} \tag{B.35}$$

$$\simeq R_0\left[1+\left(\frac{C_{k\beta}}{1+\beta^{1/2}}+\frac{1+2\beta^{1/2}}{6}\right)\theta^2\right] \tag{B.36}$$

B.4. Radio de Curvatura en el caso de interacción con un viento plano–paralelo

Hacemos expansión Taylor hasta cuarto orden de cada uno de los términos de la ecuación (3.36)

$$\csc^2\theta \simeq \theta^{-2}\left(1-\frac{\theta^2}{6}+\frac{\theta^4}{120}\right)^{-2} \simeq \theta^{-2}\left(1+\frac{\theta^2}{3}+\frac{\theta^4}{15}\right) \tag{B.37}$$

$$\theta\cot\theta \simeq 1-\frac{\theta^2}{3}\left(1+\frac{\theta^2}{15}+\frac{2\theta^4}{315}\right) \tag{B.38}$$

$$\implies 1-\theta\cot\theta \simeq \frac{\theta^2}{3}\left(1+\frac{\theta^2}{15}+\frac{2\theta^4}{315}\right) \tag{B.39}$$

Sustituímos en la ecuación (3.36):

$$\tilde{R}(\theta) \simeq \left[3\theta^{-2}\left(1+\frac{\theta^2}{3}-\frac{\theta^4}{10}\right)\frac{\theta^2}{15}\left(1+\frac{\theta^2}{15}\right)\right]^{1/2} \tag{B.40}$$

$$\implies \tilde{R}(\theta) \simeq \left[1+\frac{2\theta^2}{5}+\frac{2\theta^4}{21}\right]^{1/2} \tag{B.41}$$

$$\implies \tilde{R}(\theta) \simeq 1+\frac{\theta^2}{5}+\frac{29\theta^4}{1050} \tag{B.42}$$

De esta forma mostramos que el coeficiente de segundo orden en este caso es $\gamma = \frac{1}{5}$. Por lo tanto, sustituyendo este valor en la ecuación (A.23) encontramos que

$$R_c = \frac{5}{3} \tag{B.43}$$

Apéndice C

Coeficientes de los parámetros de la hipérbola para el ajuste de la cola

Como ya se mencionó en la §4.2, se hizo un ajuste numérico a la cola de un set de choques de proa con parámetros dentro de una malla pequeña para los parámetros del choque (β, ξ), que se encuentran dentro de los rangos $-4{,}3 < \log \beta < -1$ y $0{,}2 < \xi < 1$, de modo que los coeficientes encontrados solo son válidos en este rango, pero es lo suficientemente amplio como para abarcar el espectro de choques de proa observados en ONC.

El ajuste nos permitió encontrar una tabla de valores para los parámetros de la hipérbola $(x_{0,t}, x_{0,t} - a_t)$. En particular, para $x_{0,t}$ se observó que la dependencia con β tenía un comportamiento que tendía a ser de una ley de potencias, con un índice de $\sim -0{,}55$, y cuyo residuo ajustó a un polinomio de tercer grado del logaritmo de β. Para $x_{0,t} - a_t$ se ajustó un polinomio de segundo grado para el logaritmo de β. En la figura C.1 se muestra el residuo de x_0 y $x_{0,t} - a_t$ como función de β para diferentes valores de ξ, mientras que en la figura C.2 se muestra el ajuste de los coeficientes C_k y D_k en función de ξ, que resultó ser un polinomio de segundo grado. Los parámetros del ajuste para todos los coeficientes se muestran en la tabla 4.1.

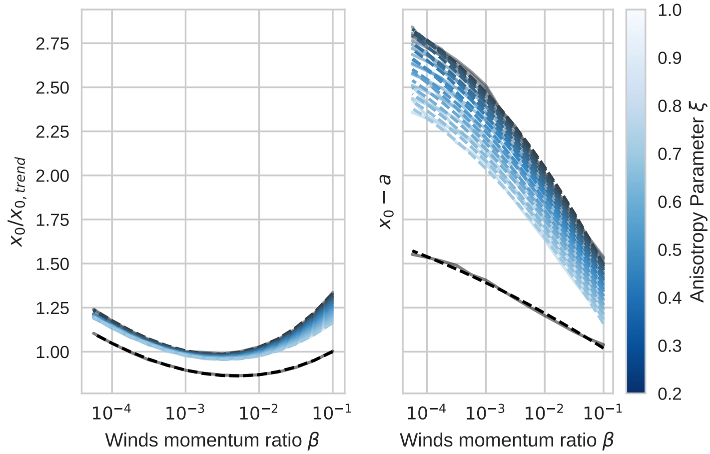


Figura C.1: Ajuste de los parámetros $x_{0,t}$ (normalizado con la tendencia) y $x_{0,t} - a_t$. En cada curva se utiliza un valor diferente del parámetro de anisotropía ξ, indicado por la barra de colores. La curva negra representa el ajuste del caso “isotrópico”. En el caso del residuo del coeficiente $x_{0,t}$ se ajustó a un polinomio de tercer grado en función del logaritmo de β, y se obtuvieron los coeficientes ($C_k(\xi)$, donde $k = [0, 1, 2, 3]$ mientras que para $x_{0,t} - a_t$ el ajustó un polinomio de segudo grado, y se obtuvieron los coeficientes $D_k(\xi)$, donde $k = [0, 1, 2]$.

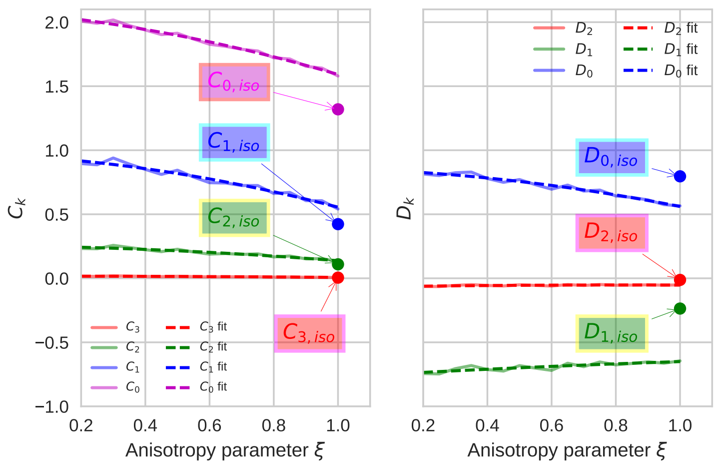


Figura C.2: Ajuste de los coeficientes C_k y D_k de los ajustes de los parámetros $x_{0,t}$ y $x_{0,t} - a_t$. En ambos casos se ajustó un polinomio de segundo grado de donde se obtuvieron los coeficientes c_k y d_k, donde $k = [0, 1, 2]$. Para el caso isotrópico se obtuvo un valor único de los coeficientes C_k y D_k. Los valores numéricos de todos estos coeficientes se encuentran en la tabla 4.1