

Tesis de doctorado



Jorge Alejandro Tarango Yong

7 de febrero de 2018



# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

## INSTITUTO DE RADIOASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA

“Estudio de la Interacción de Flujos Múltiples de Fuentes  
Astrofísicas, Aplicada a los Proplyds Clásicos de la Nebulosa de  
Orión”

T E S I S

PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE  
DOCTOR EN CIENCIAS (ASTRONOMÍA)

P R E S E N T A

JORGE ALEJANDRO TARANGO YONG  
Director de Tesis: Dr. William J. Henney

Morelia, Michoacán  
2017

# Índice general

<b>1. Objetos y Fenómenos Astrofísicos Relevantes</b>	<b>9</b>
1.1. Nubes Moleculares Gigantes . . . . .	9
1.2. La Nebulosa de Orión . . . . .	10
1.3. Discos Protoplanetarios . . . . .	12
1.3.1. Formación . . . . .	12
1.4. Proplyds . . . . .	12
1.4.1. Descubrimiento . . . . .	12
1.4.2. ¿Qué es un proplyd? Breve introducción (Johnstone et al., 1998) . . . . .	12
1.4.3. Mecanismos de fotoevaporación (Johnstone et al., 1998) . . . . .	14
1.5. Objetos LL . . . . .	16
1.5.1. Mapa de Objetos . . . . .	16
1.6. Vientos Estelares . . . . .	16
1.7. Choques . . . . .	16
1.8. Frentes de Ionización . . . . .	16
1.9. Regiones HII (Stahler & Palla, 2004) . . . . .	16
1.9.1. Esfera de Strömgren . . . . .	16
1.9.2. Primera y Segunda expansión . . . . .	19
1.9.3. Flujos de Champaña . . . . .	24
1.9.4. Características de la emisión . . . . .	24
<b>2. Conceptos fundamentales</b>	<b>25</b>
2.1. Planitud y “Alatud” . . . . .	25
2.2. Cuádricas de Revolución . . . . .	28

2.3.	Proyección en el Plano del Cielo . . . . .	31
2.3.1.	Vectores normal y tangente a la superficie . . . . .	32
2.3.2.	Línea tangente . . . . .	33
2.3.3.	Planiud y Alatud proyectadas: caso general . . . . .	35
2.3.4.	Aplicación a las Cuádricas de Revolución . . . . .	35
<b>3.</b>	<b>Modelo de Capa Delgada</b>	<b>43</b>
3.1.	Cantidades conservadas en un flujo hipersónico de capa delgada . . . . .	43
3.2.	Problema de Interacción de Dos Vientos . . . . .	45
3.2.1.	Interacción con un viento esférico isotrópico . . . . .	46
3.2.2.	Interacción de un viento esférico isotrópico con un viento plano-paralelo (Choques Wilkinoides) . . . . .	48
3.2.3.	Planitud y Alatud de los choques Wilkinoides . . . . .	49
3.3.	Obtención de la Forma Aparente . . . . .	49
3.4.	Ajustes a la cabeza . . . . .	51
3.5.	Ajustes a la cola . . . . .	51
3.5.1.	Ajustes a la cabeza y la cola en el caso de la interacción con un viento plano-paralelo . . . . .	52
3.6.	Proyección en el plano del cielo para el modelo de capa delgada . . . . .	53
<b>4.</b>	<b>Resultados obtenidos para los proplyds “clásicos”</b>	<b>55</b>
4.1.	Metodología para la medición de la forma aparente. . . . .	55
4.1.1.	Medición de incertidumbres . . . . .	57
4.2.	Resultados . . . . .	57
<b>5.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>61</b>
<b>Bibliografía</b>		<b>63</b>
<b>A.</b>	<b>Derivación Matemática del Radio de Curvatura</b>	<b>65</b>
A.1.	Radio de curvatura para un polinomio de grado $2n$ . . . . .	67
<b>B.</b>	<b>Derivación paso a paso de los Radios Característicos en la aproximación hipersónica del modelo de interacción de dos vien-</b>	

<b>tos</b>	<b>69</b>
B.1. $R_0$ . . . . .	69
B.2. Alatud de Choques tipo Cantoides y Ancantoides . . . . .	70
B.3. Planitud de choques tipo Cantoides y Ancantoides . . . . .	71
B.4. Radio de Curvatura para choques tipo Wilkinoides . . . . .	74
<b>C. Coeficientes de los parámetros de la hipérbola para el ajuste de la cola</b>	<b>77</b>

## **Agradecimientos**

Esta tesis se realizó para obtener el título de doctorado en ciencias (Astronomía). Deseo aprovechar esta sección para hacer agradecimientos a personas y/o instituciones que me ayudaron para que pueda completar este trabajo de manera exitosa.

## **Resumen**

Abstract en español

## **Abstract**

Abstract written in english

# Capítulo 1

## Objetos y Fenómenos Astrofísicos Relevantes

### 1.1. Nubes Moleculares Gigantes

Las grandes “guarderías” de estrellas a lo largo de la Galaxia se localizan en nubes moleculares gigantes, compuestas principalmente por hidrógeno molecular  $H_2$ . Siendo que esta molécula solo emite radiación en ultravioleta, donde el medio interestelar tiene una alta extinción, para detectar la presencia de las nubes moleculares se recurre a otras moléculas llamadas “trazadoras”, principalmente  $CO$ , la segunda molécula más abundante en el medio interestelar, que posee líneas espectrales en el rango de las ondas de radio.

Complejos como el de Taurus-Auriga se formaron debido a la convergencia de dos flujos de material neutro (Ballesteros-Paredes et al., 1999) que se enfrió y se volvió más denso debido a inestabilidades térmicas (Hennebelle & Péault, 1999). Muchas de estas nubes moleculares tienen forma filamentaria debido a que se están colapsando gravitacionalmente en caída libre (Ballesteros-Paredes et al., 2011). Dentro de los filamentos puede haber colapsos locales que pueden dar lugar a regiones de formación estelar de baja masa o incluso asociaciones OB como es el caso de la Nebulosa de Orión (Hartmann & Burkert, 2007).

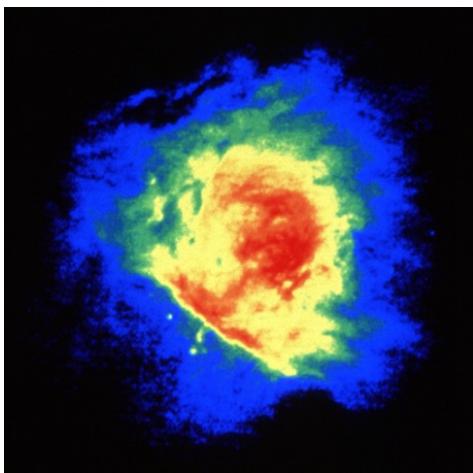


Figura 1.1: La Nebulosa de Orión observada por el VLA en la banda L ( $\lambda = 20$  cm,  $\nu = 1,4$  GHz, Yusef-Zadeh (1990)).

## 1.2. La Nebulosa de Orión

La Nebulosa de Orión (ONC por sus siglas en inglés), ubicada a  $\sim 414$  pc (Menten et al., 2007), es probablemente la región HII mejor estudiada del cielo (ver §1.9). Forma parte de la nube molecular gigante de Orión, de donde se distinguen dos sub-unidades, llamadas Orión A y Orión B. ONC forma parte de Orión A. El cúmulo de estrellas que se formó y que es responsable de la región HII se conoce como asociación OB Ori Id, cuyos miembros más prominentes son un grupo de cuatro estrellas conocidas como el “Trapecio”. La más masiva de éstas es  $\theta^1$  Ori C, de clasificaciónpectral O6 aproximadamente (ver tabla ), tiene una luminosidad de  $4 \times 10^5 L_\odot$  y una temperatura de  $4 \times 10^4$  K. Cuando la región HII se encuentra embebida en el gas molecular, la región HII no puede ser visible en el rango óptico del espectro. En el caso de ONC, que se ubica cerca del borde de la nube molecular Orion A, el gas ionizado caliente, que posee una presión mayor que el gas molecular frío, se escapa hacia el gas adyacente a la nube molecular en forma de “flujo de champaña” (figura 1.2), y de esta manera el gas ionizado puede ser visible por medio de diferentes líneas espectrales, tanto de hidrógeno como de otros elementos.

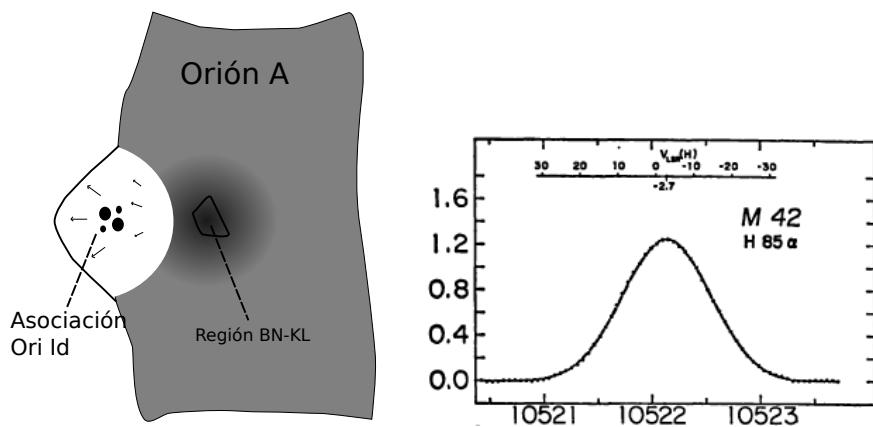


Figura 1.2: Izquierda: Representación esquemática de la Asociación Ori Id y su ubicación dentro de la nube molecular gigante Orión A. La región BN-KL es una región de formación estelar muy activa donde se observan entre otras cosas, máseres de agua y SiO y flujos moleculares (Stahler & Palla, 2004). Derecha: Línea espectral  $H\ 85\ \alpha$  de hidrógeno de ONC. El eje horizontal corresponde a la frecuencia en MHz, mientras que el eje vertical representa la temperatura de antena. El espectro muestra un corrimiento al azul que muesta que el gas se acerca a una velocidad de  $\sim 3\ km\ s^{-1}$  (Stahler & Palla, 2004; Gordon & Churchwell, 1970)

## 1.3. Discos Protoplanetarios

### 1.3.1. Formación

## 1.4. Proplyds

### 1.4.1. Descubrimiento

Observaciones en óptico de la región del trapecio en filtros de banda angosta de diferentes líneas de emisión tales como  $H\alpha$ ,  $H\beta$ , [ $OIII$ ], [ $NII$ ], [ $SII$ ] y continuo, revelaron la existencia de objetos puntuales únicamente visibles en líneas de alta ionización ( $H\alpha$ ,  $H\beta$  y [ $OIII$ ]) que fueron inicialmente denominados como “condensaciones nebulares” (Laques & Vidal, 1979).

Hasta el momento no se sabía con certeza si “condensaciones nebulares” eran en realidad condensaciones nebulares (regiones donde la densidad de la nebulosa es inusualmente alta por alguna razón o bien esferas de gas molecular cuya envolvente fue ionizada y que la radiación de la estrella central la está “erosionando”) o si se trataba de protoestrellas de baja masa cuyo disco protoplanetario estaba siendo fotoevaporado por la estrella central (Churchwell et al., 1987). No fue sino hasta que se contó con observaciones de alta resolución con el Telescopio Espacial Hubble (HST) que se pudo determinar la verdadera naturaleza de estos objetos (O’dell et al., 1993) y la razón por la que se les denominó “proplyds” (PROtoPLanetary DiskS). A su vez se encontraron por primera vez arcos delgados y otras estructuras de gran interés.

### 1.4.2. ¿Qué es un proplyd? Breve introducción (Johnstone et al., 1998)

Las imágenes del HST de la Nebulosa de Orión mostraron imágenes de discos alrededor de estrellas jóvenes de baja masa. Algunos se ven como siluetas oscuras que contrastan con la nebulosa, y otros casos son visibles en líneas de emisión de líneas de alta ionización. Un proplyd típico tiene forma cometaria, con una cabeza brillante que apunta hacia la fuente de radiación ionizante, y una cola que se extiende en dirección contraria a ésta. La explicación a esta forma es que el disco protoplanetario está

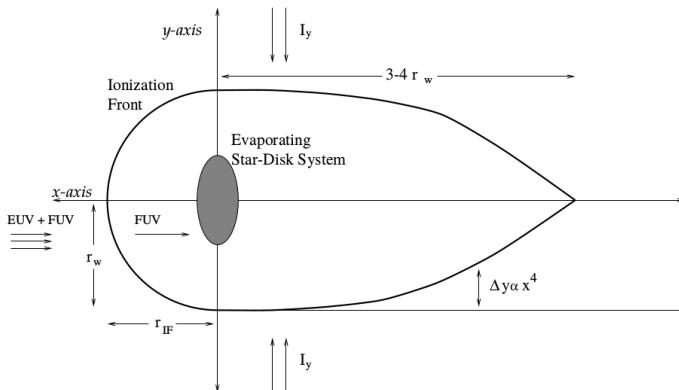


Figura 1.3: Representación esquemática de la formación de un frente de ionización hemisférico y de una cola de gas ionizado detrás del disco en proceso de fotoevaporación.  $r_{IF}$  y  $r_w$  representan el radio del frente de ionización en las direcciones de los ejes *x* e *y*, respectivamente.  $I_y$  representa el campo de radiación difusa. Por detrás del disco, la radiación difusa calienta el gas del disco provocando otro flujo fotoevaporado.  $\Delta y$  es la diferencia entre la forma actual del frente de ionización por detrás del disco y una forma cilíndrica. La forma de la colase explica como que el flujo de radiación  $I_y$  es capaz de penetrar más cerca del eje *x* conforme uno se aleja del disco, donde el flujo fotoevaporado es menos denso.

siendo fotoevaporado por la radiación ionizante de una estrella masiva ( $\theta^1$  Ori C en caso de la Nebulosa de Orión), la cabeza es un frente de ionización cuyo radio escala como  $R_{IF} \propto D^{2/3}$ , donde  $D$  es la distancia a la estrella masiva. La forma de la cola se debe a radiación ionizante difusa, producto de dispersión por polvo y por recombinaciones (Figura 1.3)

Churchwell et al. (1987) ya había notado que la tasa de pérdida de masa observada en el gas ionizado implicaba que la fuente de este gas debía oscurecer a la protoestrella huésped, a menos que proviniera de un disco circumestelar. De la emisión de radio observada, se estima la densidad electrónica en  $n_e \sim 10^6 \text{ cm}^{-3}$  y la tasa de pérdida de masa en  $\dot{M} \sim 10^{-7} M_\odot \text{ yr}^{-1}$ .

### 1.4.3. Mecanismos de fotoevaporación (Johnstone et al., 1998)

El principal mecanismo de fotoevaporación es el campo de radiación de la estrella central, en la parte ultravioleta del espectro electromagnético. Según la masa de la estrella central, podemos tener dos clases de flujo radiativo: Dominado por el ultravioleta lejano (FUV,  $h\nu < 13,6$  eV) o dominado por el ultravioleta extremo (EUV,  $h\nu \geq 13,6$  eV). En general, el FUV se encarga de disociar moléculas y de calentar el gas de la región de fotodisociación (PDR) hasta temperaturas de 100 - 1000 K, mientras que el EUV puede ionizar el gas y elevar su temperatura hasta  $10^4$  K. El EUV no puede atravesar el frente de ionización (IF) pero el FUV sí.

En el caso de que el flujo sea dominado por el EUV, la presión térmica del flujo fotoevaporado es determinada por la fotoionización, la PDR producida por el FUV es delgada. El gas calentado por el FUV se mueve de manera subsónica hasta llegar al IF y la tasa de pérdida de masa depende de la tasa de ionización inducida por el EUV.

Si el flujo está dominado por el FUV, la presión térmica depende del calentamiento por el FUV. El gas tibio se expande como un viento que empuja el IF lejos del disco. La tasa de pérdida de masa la determina la temperatura de la PDR, el flujo FUV y la opacidad del polvo a las longitudes de onda del FUV.

Inicialmente la forma del disco impone una geometría cilíndrica en el flujo fotoevaporado, pero eventualmente los gradientes de presión tornan esta geometría en esférica.

Las ecuaciones de continuidad de la masa y el momento restringen la velocidad del flujo neutro antes de alcanzar el IF. Mas allá de éste, la presión del gas hace que éste se expanda a velocidades del orden de una a dos veces la velocidad del sonido. Para el gas neutro dentro del IF hay dos posibles soluciones: si el gas neutro es supersónico entonces el IF será de baja densidad (Tipo R) con bajo contraste de densidad entre gas neutro y gas ionizado. O si el gas neutro es subsónico se formará un IF tipo D con un gran contraste de densidad entre el gas neutro y el gas ionizado. Sin embargo, sin importar qué tipo de radiación domina la fotoevaporación, el gas neutro permanece a velocidades subsónicas al llegar al IF, por lo que dicho frente será tipo D. En el caso de un flujo

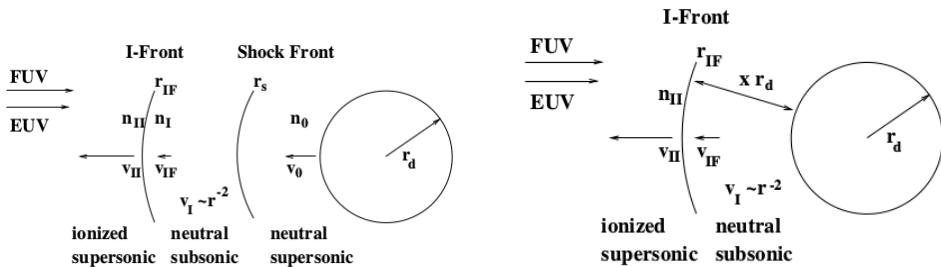


Figura 1.4: Representación esquemática de las regiones del flujo fotoevaporado de un proplyd. Izquierda: Cuando el flujo es dominado por el FUV. Derecha: Flujo dominado por EUV (Johnstone et al., 1998)

dominado por el EUV, el gas neutro permanece a velocidad subsónica, su velocidad decae como  $v_I \propto r^{-2}$  y llega a  $0,5 \text{ kms}^{-1}$  al llegar al frente de ionización. Cundo el flujo es dominado por el FUV, el gas neutro se acelera hasta llegar a velocidades supersónicas, luego atraviesa un choque isotérmico que lo desacelera y llega al frente de ionizacion a  $0,5 \text{ kms}^{-1}$ .

Sin importar el tipo de mecanismo de photoevaporación dominante, el flujo fotoevaporado solo si la presión térmica supera a la gravedad de la protoestrella. Entonces, el flujo fotoevaporado solo existe a partir de un radio crítico  $r_g$ , donde este radio se estima a partir del balance entre la energía necesaria para escapar de una órbita kepleriana y la energía térmica:

$$r_g = \frac{GM_*}{a^2} \quad (1.1)$$

Donde  $M_*$  es la masa de la protoestrella y  $a$  es la velocidad del sonido del gas. Para las protoestrellas típicas del trapecio la masa típica es de  $M_* = 0,2 M_\odot$ . Para el gas neutro la velocidad del sonido es de  $a_I \sim 3 \text{ kms}^{-1}$  y para el gas ionizado es de  $a_{II} \sim 10 \text{ kms}^{-1}$ . Por tanto, el radio gravitacional para un flujo dominado por el EUV es de  $r_{gII} \sim 2 \text{ AU}$  y para un flujo dominado por el FUV es de  $r_{gI} \sim 20 \text{ AU}$ .

## 1.5. Objetos LL

### 1.5.1. Mapa de Objetos

## 1.6. Vientos Estelares

## 1.7. Choques

## 1.8. Frentes de Ionización

Un frente de ionización es la interfaz entre un medio gaseoso neutro y uno ionizado. Ocurren cerca de fuentes de rediación ionizante, tales como estrellas masivas, tipo B temprana o tipo O. el frente de ionización puede tratarse como una discontinuidad en el medio gaseoso.

## 1.9. Regiones HII (Stahler & Palla, 2004)

Consideremos el caso en que se forma una estrella masiva dentro de una nube molecular, que por simplicidad está compuesta exclusivamente de hidrógeno molecular  $H_2$ . La estrella masiva emite fotones ultravioleta que tienen la energía suficiente para disociar el  $H_2$  como para ionizar el hidrógeno atómico resultante. Luego el plasma ionizado se recombina para volver a ser  $HI$  emitiendo líneas espectrales de diversas energías, siendo la más energética la línea de Ly  $\alpha$ . Como al realizar una ionización se pierde un fotón ionizante y el flujo de radiación proveniente de la estrella es finito, entonces la estrella solo puede ionizar la región de la nube más próxima a ésta. Si suponemos que la nube tiene densidad uniforme, entonces esta región tendrá forma esférica, conocida como *esfera de Strömgren*.

### 1.9.1. Esfera de Strömgren

El plasma ionizado dentro de la Esfera de Strömgren se encuentra en balance de ionización, esto es, que la tasas de ionización y la de recombinación son iguales. La tasa de ionizaciones es igual a la cantidad de fotones ionizantes que emite la estrella central por segundo. Esto es, los

Tipo Espectral	Masa ( $M_{\odot}$ )	$\log \mathcal{N}_*$ ( $s^{-1}$ )	$\log \mathcal{N}_{FUV}$ ( $s^{-1}$ )
O4	70	49.9	49.5
O5	60	49.4	49.2
O6	40	48.8	48.8
O7	30	48.5	48.6
O8	23	48.2	48.4
O9	20	47.8	48.2
B0	18	47.1	48.1
B1	13	45.4	47.5
B2	10	44.8	47.1

Cuadro 1.1: Tasa de fotones ionizantes para estrellas masivas (Stahler &amp; Palla, 2004)

fotones que poseen una energía mayor al límite de Lyman, que corresponde a  $E = 13.6$  eV, o bien  $\lambda = 912$  Å. En la tabla 1.1 se muestra la tasa de fotones ionizantes  $\mathcal{N}_*$  para estrellas masivas de tipo espectral O y B temprano.

Por otro lado, la tasa volumétrica de recombinationes se escribe como:

$$\mathcal{R} = n_e n_p \alpha_{rec}(T) = n_e^2 \alpha_{rec}(T) \quad (1.2)$$

Donde  $\alpha_{rec}$  es el *coeficiente de recombination*, y es una función solo de la temperatura. La última igualdad se obtiene asumiendo neutralidad de la carga.

La tasa total de recombinationes se obtiene integrando  $\mathcal{R}$  en el volumen de la región *HII*, asumiendo que tanto la densidad de electrones como la temperatura son constantes espacialmente. De esta manera la condición de balance de ionización queda como sigue:

$$\mathcal{N}_* = \frac{4\pi}{3} n_e^2 \alpha'_{rec}(T) R_s^3 \quad (1.3)$$

Donde  $R_s$  es el *radio de Strömgren*. Es importante notar que el coeficiente de recombination primado es diferente del coeficiente no primado: el

coeficiente de recombinación primado no toma en cuenta las recombinaciones al nivel  $n = 1$  debido a que estas recombinaciones producen fotones de  $E = 13,6$  eV que son capaces de ionizar el hidrógeno neutro. Como la densidad de la nube original no cambia apreciablemente cuando el gas es ionizado debido a que el tiempo en que esto pasa es muy corto (como mostraremos en la siguiente sección), entonces  $n_e = n_H^0$ , donde  $n_H^0$  es la densidad de  $H\text{I}$  en la región contigua a la nube, y a su vez  $n_H^0 = n_{H_2}$ , donde  $n_{H_2}$  es la densidad de gas molecular. Con esto podemos calcular el radio de Strömgren como sigue:

$$R_s = \left[ \frac{3\mathcal{N}_*}{4\pi\alpha'_{rec}(n_H^0)^2} \right]^{1/3} = 0,4 \text{ pc} \left( \frac{\mathcal{N}_*}{10^{49} \text{ s}^{-1}} \right)^{1/3} (n_{H_2})^{-2/3} \quad (1.4)$$

En la expresión numérica, se adopta un valor de  $\mathcal{N}_*$  de  $10^{49} \text{ s}^{-1}$ , una temperatura de  $10^4$  K que es la temperatura característica de una región  $H\text{II}$  y con la que el coeficiente de recombinación  $\alpha'_{rec}$  adopta un valor de  $2,6 \times 10^{-13} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$ .

Dentro de la región  $H\text{II}$ , la probabilidad por unidad de tiempo de ionizar un átomo de hidrógeno dado es mucho mayor a la probabilidad de una recombinación, por lo que el gas está casi completamente ionizado. Sin embargo, en los bordes de la región  $H\text{II}$ , la densidad de gas neutro aumenta debido a que en dicha región el flujo de fotones ionizantes ha sido atenuado por todo el gas ionizado más próximo a la estrella. La transición de gas ionizado a gas neutro tiene un grosor  $\Delta r$  que corresponde al camino libre medio del gas neutro. Esto es:

$$\Delta R = \frac{1}{\sigma_{\nu_1} n_H^0} \quad (1.5)$$

Donde  $\sigma_{\nu_1}$  es la sección recta de un átomo de hidrógeno en el estado base, evaluada en la longitud de onda del límite de Lymann. Utilizando  $\sigma_{\nu_1} = 6,8 \times 10^{-18} \text{ cm}^2$  y  $n_H^0 = 2 \times 10^3 \text{ cm}^{-3}$  obtenemos que  $\Delta r = 7,4 \times 10^{13} \text{ cm} \sim 5 \times 10^{-5} R_s$ , lo que muestra que las regiones  $H\text{II}$  tienden a tener bordes bien delimitados.

### 1.9.2. Primera y Segunda expansión

Las esferas de Strömgren no son objetos estáticos, sino que se expanden con el tiempo. Este proceso ocurre en dos etapas: en la primera inicialmente no existe ninguna región *HII* pero que la radiación ultravioleta de la estrella hace que se expanda rápidamente al disociar e ionizar el gas a su alrededor hasta alcanzar el radio de Strömgren. En la segunda expansión la diferencia de presiones entre el gas ionizado de la región *HII*, mucho mayor que la del gas neutro que lo rodea, provoca otra expansión más lenta que la primera hasta que haya equilibrio de presión. A continuación explicaremos el proceso más a detalle:

Sea  $F_*(t)$  el flujo de radiación ionizante que alcanza un radio  $R$  al tiempo  $t$ . Al transcurrir un tiempo  $dt$ , el frente de ionización avanza una distancia  $dR$  y llega a  $n_{H_2}^0$  moléculas de hidrógeno por unidad de área. Se necesitan 3 fotones para ionizar completamente la molécula: uno para disociarla, con energía  $E \geq 14,7$  eV y otros dos para ionizar cada uno de los átomos resultantes, con  $E \geq 13,6$  eV. El número de fotones ionizantes atravezando el frente de ionización por unidad de área es  $F_* dt$ . Entonces, como se producen dos ionizaciones por cada tres fotones (Figura 1.5), tenemos que:

$$\frac{F_* dt}{2n_{H_2} dR} = \frac{3}{2} \quad (1.6)$$

$$\Rightarrow \frac{dR}{dt} = \frac{F_*}{3n_{H_2}} = \frac{2F_*}{3n_H^0} \quad (1.7)$$

Estamos asumiendo que el flujo tanto de fotones con energías de  $E \geq 14,7$  eV y  $E \geq 13,6$  eV es prácticamente el mismo.

Ahora consideremos las recombinaciones: el número total de recombinaciones que llevan a niveles tales que  $n \geq 2$  dentro de una esfera de radio  $R$  es  $\frac{4\pi}{3} (n_H^0)^2 \alpha'_{rec} R^3$ . Si el balance de ionización aun se mantiene, entonces el número de ionizaciones por unidad de tiempo es igual a la tasa de recombinaciones más los fotones que logran atravesar el frente de ionización por unidad de tiempo que es  $4\pi R^2 F_*$ . Entonces:

$$\mathcal{N}_* = 4\pi R^2 F_* + \frac{4\pi}{3} (n_H^0)^2 \alpha'_{rec} R^3 \quad (1.8)$$

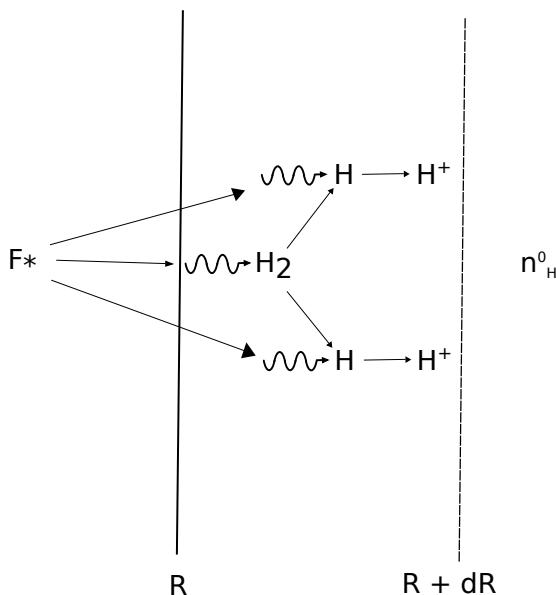


Figura 1.5: Representación de la primera expansión del frente de ionización de una región *HII* con densidad numérica del hidrógeno  $n_H^0$ . De cada tres fotones ionizantes que cruzan el frente en  $R$ , uno disocia una molécula de hidrógeno y los otros dos ionizan los átomos resultantes (Stahler & Palla, 2004)

Resolvemos para  $F_*$  y encontramos que:

$$F_* = \frac{\mathcal{N}_*}{4\pi R^2} - \frac{(n_H^0)^2 \alpha'_{rec} R}{3} \quad (1.9)$$

$$\Rightarrow \frac{dR}{dt} = \frac{\mathcal{N}_*}{6\pi n_H^0 R^2} - \frac{2n_H^0 \alpha'_{rec} R}{9} \quad (1.10)$$

Definimos los siguientes parámetros adimensionales  $\lambda \equiv R/R_s$  y  $\tau \equiv t/t_{rec}$ , donde  $t_{rec} = \frac{1}{n_H^0 \alpha'_{rec}}$  es el tiempo medio de recombinación del hidrógeno, que es del orden de 60 yr con los valores de  $n_H^0$  y  $\alpha'_{rec}$  utilizados en esta sección. Y con esto la ecuación (1.10) se escribe como sigue:

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = \frac{2}{9} (\lambda^{-2} - \lambda) \quad (1.11)$$

Resolvemos por el método de separación de variables y aplicamos la condición inicial  $\lambda(0) = 0$  y obtenemos lo siguiente:

$$\lambda(\tau) = \left[ 1 - \exp \left( -\frac{2}{3}\tau \right) \right]^{1/3} \quad (1.12)$$

De la ecuación (1.12) vemos que cuando han pasado una y media veces del tiempo de recombinación, la región *HII* se ha expandido alrededor del 86 % del radio de Strömgren, y aunque la expansión se va descelerando constantemente, ya es de una extensión considerable.

La velocidad del sonido en el gas ionizado con temperatura de  $\sim 10^4$ K es de  $a_{II} \sim 10 \text{ km s}^{-1}$ , si comparamos esta velocidad con la media de la velocidad del frente de ionización, por ejemplo, en el intervalo  $0 < \tau < \frac{3}{2}$ , en el que ya comprobamos que el frente de ionización casi alcanza el radio de Strömgren, encontramos lo siguiente:

$$\bar{v}_{IF} = \frac{R_s}{t_{rec}} \frac{1}{\frac{3}{2} - 0} \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{d\lambda}{d\tau} d\tau = \frac{2R_s}{3t_{rec}} \lambda(3/2) \quad (1.13)$$

Con los valores típicos adoptados en esta sección obtenemos que:

$$\bar{v}_{IF} \simeq 135 \text{ km s}^{-1} \left( \frac{\mathcal{N}_*}{10^{49} \text{ s}^{-1}} \right)^{1/3} (n_{H_2})^{-2/3} \quad (1.14)$$

Dado que la velocidad media del IF es mucho mayor que la del sonido del gas ionizado, entonces es razonable asumir que la densidad del gas ionizado es igual a la del gas neutro dado que la densidad del gas no tiene tiempo de reajustarse después de ser ionizado. Sin embargo, la presión sí se vuelve mucho mayor en el gas ionizado que en el gas de la nubecircundante, tanto que incluso el frente de ionización es precedido por una onda de choque, dejando una delgada capa de gas neutro entre el frente de ionización y la onda de choque (ver figura 1.6), y este gas empieza a generar una segunda expansión más lenta que la primera, que provoca que la densidad del gas ionizado disminuya, hasta que llega a un equilibrio de presión con el gas neutro circundante.

Para encontrar el comportamiento de la segunda expansión, nos basamos en que el enfriamiento pos choque es muy eficiente y por tanto el choque puede ser considerado isotérmico. En este caso, el equilibrio de presiones entre la región HII y la capa de gas neutro viene dada por:

$$n_H^1 a_1^2 = n_H^0 \left( \frac{dR}{dt} \right)^2 \quad (1.15)$$

Donde  $n_H^1$  es la densidad numérica del gas ionizado,  $a_1$  la velocidad del sonido del gas ionizado y  $dR/dt$  es la velocidad a la que se expande la onda de choque.

Ahora, casi todos los fotones ionizantes en esta etapa son consumidos en la región HII, de esta forma modificamos la ecuación (1.4) como sigue:

$$R = \left[ \frac{3\mathcal{N}_*}{4\pi\alpha'_{rec}(n_H^1)^2} \right]^{1/3} \quad (1.16)$$

Combinando las ecuaciones (1.15, 1.16) encontramos la ecuación de movimiento de la segunda expansión:

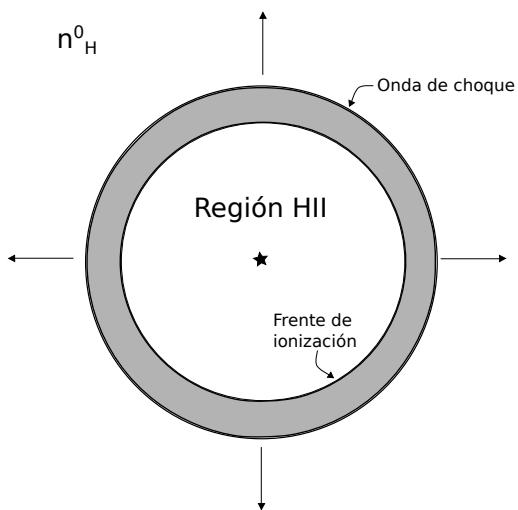


Figura 1.6: Representación esquemática de la segunda expansión de la región HII: Dado que la diferencia de presiones entre el gas neutro e ionizado es muy grande, se forma una onda de choque que precede al frente de ionización, dejando una capa de gas neutro entre ambas (región sombreada). Por esta misma diferencia de presiones, esta capa se expande hasta que se logre el equilibrio de presión.

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{a_1^2}{n_H^0} \left[ \frac{3\mathcal{N}_*}{4\pi\alpha'_{rec} R^3} \right]^{1/2} = a_1^2 \left( \frac{R}{R_s} \right)^{-3/2} \quad (1.17)$$

De nuevo hacemos el cambio de variable  $\lambda \equiv R/R_s$ , pero en esta ocasión definiremos una nueva variable de tiempo adimensional  $\tau' \equiv a_1 t/R_s$ , para que la ecuación (1.17) quede como sigue:

$$\frac{d\lambda}{d\tau'} = \lambda^{-3/4} \quad (1.18)$$

Integrando y tomando como condición inicial  $\lambda(0) = 1$ , puesto que la primera expansión es bastante rápida, encontramos que:

$$\lambda = \left( 1 + \frac{7\tau'}{4} \right)^{4/7} \quad (1.19)$$

### 1.9.3. Flujos de Champaña

La segunda expansión lleva a que la región *HII* se expanda dos órdenes de magnitud por encima del radio de Strömgren, pero el tiempo que toma alcanzar dichas dimensiones es tan largo que la estrella central muere antes de que la región *HII* alcance el equilibrio de presiones. Sin embargo, es más probable que el frente de ionización rebase el borde de la nube molecular donde se formó, y en este caso el gas ionizado altamente presurizado escapa directamente hacia el medio interestelar que lo rodea, creando el *Flujo de champaña*.

### 1.9.4. Características de la emisión

## Capítulo 2

# Conceptos fundamentales

Para este trabajo consideramos en general dos modelos de interacción de vientos:

- Una fuente localizada en el origen que emite un viento esférico que puede ser isotrópico o anisotrópico (figura 2.1) no acelerado que interactúa con el viento esférico isotrópico de otra fuente que se encuentra a una distancia  $D$  de la primera (figura 2.2). A los choques de proa resultantes se conocen como “Cantoides” y “Ancantoides”, respectivamente.
- Una fuente localizada en el origen que emite un viento esférico isotrópico no acelerado que interactúa con un viento plano paralelo no acelerado y densidad constante (figura ). Los choques resultantes en este caso se conocen como “Wilkinoides”.

El sistema en su conjunto tiene simetría cilíndrica.

### 2.1. Planitud y “Alatud”

Las cantidades medibles que nos ayudan a caracterizar un choque de proa las llamamos “Radios característicos” (ilustrados en la figura 2.3):

- Radio del choque en la dirección del eje del ápex. Denotado como  $R_0$

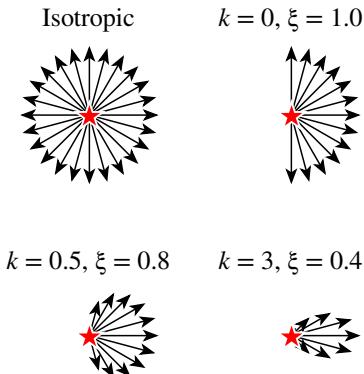


Figura 2.1: Representación esquemática de vientos con diferentes anisotropías: Arriba izquierda: Viento isotrópico esférico. Arriba derecha: viento isotrópico hemisférico. Abajo: Vientos anisotrópicos donde el parámetro  $k$  indica el grado de anisotropía (ver capítulo 3)

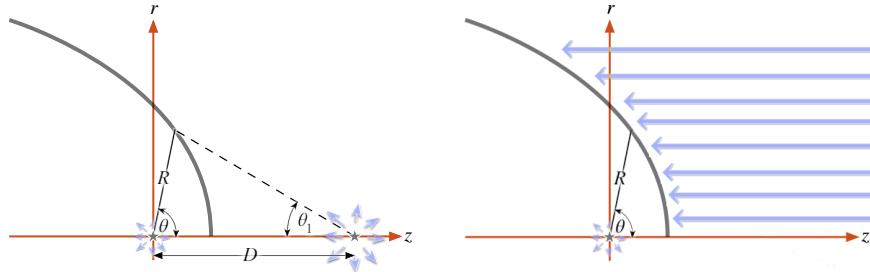


Figura 2.2: Izquierda: Representación esquemática del problema de interacción de dos vientos esféricos: Dos fuentes separadas por una distancia  $D$  emiten un viento radial que forma un choque de proa a una distancia  $R$  del origen. El sistema tiene geometría cilíndrica siendo el eje  $z$  el eje de simetría. La forma del choque es función únicamente del ángulo polar  $\theta$ , medido a partir del origen. Otro ángulo que es de utilidad es  $\theta_1$ , que corresponde al ángulo polar medido a partir de la posición de la otra fuente. Cuando el viento interior tiene densidad constante y es esférico, denominamos al choque resultante como “cantoide”, mientras que si su densidad sigue una ley de potencias de  $\cos \theta$ , siguiendo la ecuación (3.13) del capítulo 3, será un choque “ancantoide”. Derecha: Representación esquemática de la interacción de un choque esférico e isotrópico con una corriente plano-paralela de densidad y velocidad constantes. El choque resultante es en este caso de tipo “wilkinoido”

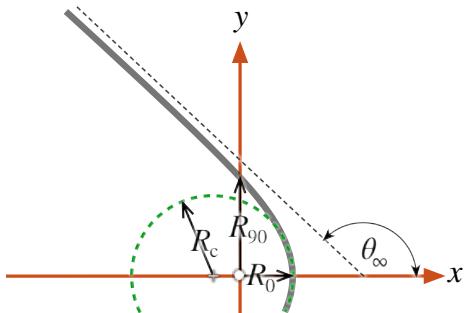


Figura 2.3: Representación esquemática de los radios característicos de un choque de proa

- Radio en dirección perpendicular al ápex. Denotado como  $R_{90}$
- Radio de curvatura en el ápex. Denotado como  $R_c$ . En el apéndice A se muestra el procedimiento para obtener este radio para una curva genérica continua y derivable.

Un último parámetro es el ángulo asintótico de apertura de las alas, denotado como  $\theta_\infty$ . Sin embargo, esta medida solo aplica para choques cuyas alas son asintóticamente cónicas, y aún para éstos en la mayoría de los casos es difícil de medirlo debido a que el ángulo polar  $\theta$  tiende al valor asintótico muy lentamente y además la emisión de las alas es bastante débil. Por otro lado, los radios característicos ( $R_0, R_c, R_{90}$ ) son medibles observacionalmente en la mayoría de los casos. A partir de éstos, podemos determinar dos parámetros adimensionales llamados “planitud” y “alatud”. El primero de éstos es una medida de qué tan plano es el choque de proa en la nariz o “apex”, y lo denotamos con la letra griega  $\Pi$ , mientras que el segundo es una medida de qué tanto se abren las alas del choque de proa, y lo denotamos con la letra griega  $\Lambda$ . Ambos parámetros se definen a continuación:

$$\Pi \equiv \frac{R_c}{R_0} \quad (2.1)$$

$$\Lambda \equiv \frac{R_{90}}{R_0} \quad (2.2)$$

## 2.2. Cuádricas de Revolución

En el caso general es difícil encontrar la forma aparente para un choque de proa siguiendo el formalismo desarrollado en la sección anterior, por lo que optamos por aproximar la forma éstos con una de las superficies más simples: las *cuádricas de revolución*, que son superficies de revolución de las curvas cónicas. Dado el modelo general descrito en la §2, haremos algunas restricciones para las superficies cuádricas que utilizaremos en este trabajo:

- El eje focal se encuentra alineado con el eje  $x$
- La posición del foco de la superficie cuádrica no necesariamente coincide con la posición de la fuente
- En el caso de las hipérbolas, solo tomamos una de las ramas de ésta.

Implementando dichas restricciones, utilizamos la representación paramétrica de las curvas cónicas en términos de un parámetro adimensional denotado con la letra  $t$ :

$$x = x_0 + \sigma a \mathcal{C}(t) \quad (2.3)$$

$$y = b \mathcal{S}(t) \quad (2.4)$$

Donde:

$$\mathcal{C}(t), \mathcal{S}(t) = \begin{cases} \cos t, \sin t & \text{elipses} \\ \cosh t, \sinh t & \text{hipérbolas} \end{cases} \quad (2.5)$$

$$\sigma = \begin{cases} +1 & \text{elipses} \\ -1 & \text{hipérbolas} \end{cases} \quad (2.6)$$

$$x_0 = R_0 - \sigma a \quad (2.7)$$

Donde  $a$  y  $b$  representan la longitud de los semi-ejes de la cónica en cuestión (Figura 2.4).  $x_0$  representa la distancia entre el centro de la cónica y el origen.

La forma polar del choque de proa  $R(\theta)$  viene dada por:

$$\tan \theta = \frac{b\mathcal{S}(t)}{a\mathcal{C}(t) + x_0} \quad (2.8)$$

$$R = \left( (a\mathcal{C}(t) + x_0)^2 + b^2\mathcal{S}^2(t) \right)^{1/2} \quad (2.9)$$

El tipo de cónica lo podemos caracterizar mediante el parámetro  $\mathcal{Q}$ , donde:

$$\mathcal{Q} \equiv \sigma \frac{b^2}{a^2} \quad (2.10)$$

Para las superficies abiertas (hiperboloides) tenemos que  $\mathcal{Q} < 0$ , mientras que para las superficies cerradas tenemos que  $\mathcal{Q} > 0$ . Casos particulares son la esfera  $\mathcal{Q} = 1$  y el paraboloide  $\mathcal{Q} = 0$ . De manera equivalente se puede definir el ángulo  $\theta_Q$  como sigue:

$$\tan \theta_Q = \sigma \frac{b}{a} \quad (2.11)$$

Este ángulo se relaciona con la excentricidad de las cónicas (y que sustituye a esta última en este trabajo) como se muestra a continuación:

$$\tan \theta_Q = \sigma \sqrt{|1 - e^2|} \quad (2.12)$$

El set de parámetros  $(a, x_0, \mathcal{Q})$  es suficiente para caracterizar a nuestras cuádricas de revolución:  $\mathcal{Q}$  nos indica el tipo de cónica,  $a$  establece la escala y  $x_0$  el desplazamiento del centro a lo largo del eje x. Sin embargo, para futuras aplicaciones tanto a modelos de interacción de vientos como a observaciones (capítulos 3 y 4) nos sería útil hacer la caracterización mediante los parámetros  $(R_0, \Pi, \Lambda)$  (ver §2.1). Las equivalencias entre los dos sets de parámetros los calculamos a continuación:

$$R_c = \frac{b^2}{a} = a|\mathcal{Q}| \quad (2.13)$$

$$R_{90}^2 = b^2 \sigma \left( 1 - \frac{x_0^2}{a^2} \right) = \mathcal{Q} (a^2 - x_0^2) \quad (2.14)$$

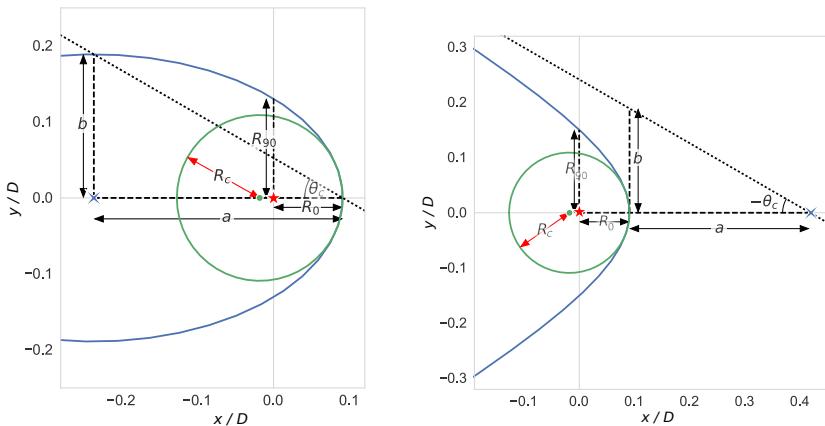


Figura 2.4: Representación esquemática de: Izquierdo: Elipse. Y, derecha: Hipérbola. En ambos casos se ilustran los parámetros relevantes de éstas y los radios característicos

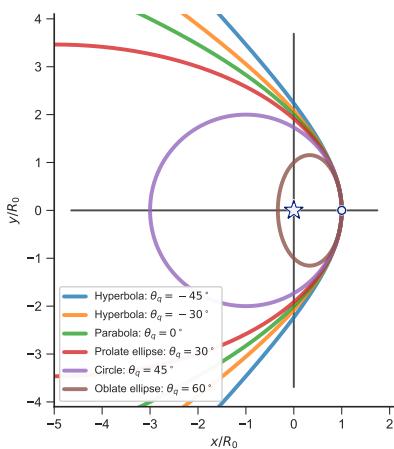


Figura 2.5: Familia de curvas cónicas, donde el valor del parámetro  $\theta_Q$  varía desde  $\theta_Q < 0$  (hipérbolas) hasta  $\theta_Q > 0$  (elipses). Casos especiales son  $\theta_Q = 0$  (parábola) y  $\theta_Q = 45^\circ$  (círculo). Este parámetro sustituye en este trabajo a la excentricidad.

Combinando las ecuaciones (2.1, 2.2, 2.7, 2.10, 2.13, 2.14), obtenemos lo siguiente:

$$R_0 = x_0 + \sigma a \quad (2.15)$$

$$\Pi = \frac{a|\mathcal{Q}|}{x_0 + \sigma a} = \frac{a\mathcal{Q}}{\sigma(x_0 + \sigma a)} = \frac{a\mathcal{Q}}{(a + \sigma x_0)} \quad (2.16)$$

$$\Lambda = \left( \mathcal{Q} \frac{a - \sigma x_0}{a + \sigma x_0} \right)^{1/2} \quad (2.17)$$

De aquí podemos escribir el parámetro de las cuádricas  $\mathcal{Q}$  en términos de la planitud y la alatud:

$$\mathcal{Q} = 2\Pi - \Lambda^2 \quad (2.18)$$

Por tanto, el signo de  $2\Pi - \lambda^2$  determina si una cuádrica es esferoidal o hiperboloidal. En la figura 2.5 mostramos como, para planitud constante, podemos tener una familia de cónicas variando únicamente la alatud, y por consiguiente, el parámetro  $\mathcal{Q}$ .

### 2.3. Proyección en el Plano del Cielo

Para un choque de proa que es la vez geométricamente delgado y ópticamente delgado, únicamente se observa el borde de éste por abrillantamiento al limbo, por lo tanto, su orientación respecto a la línea de visión modifica su forma respecto a la forma real del choque. Para ello, rotamos el sistema de referencia del choque de proa en coordenadas cartesianas, denotado por  $(x, y, z)$ , por un ángulo que llamamos *inclinación*, denotado por  $i$ , en el plano  $xz$ , de modo que la transformación entre el sistema de referencia del choque y el sistema de referencia del plano del cielo, denotado por  $(x', y', z')$  queda como sigue:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos i - z \sin i \\ y' \\ z \cos i + x \sin i \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

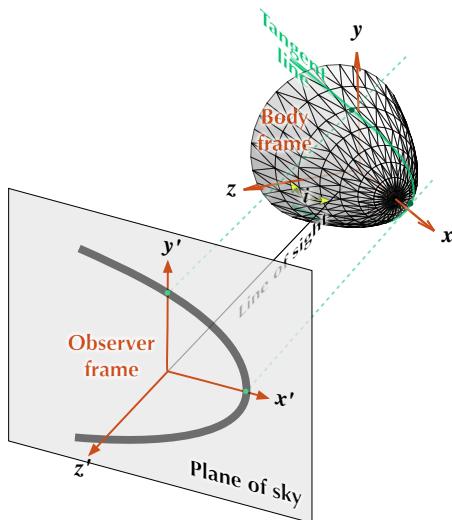


Figura 2.6: Sistema de referencia del choque vs sistema de referencia del plano del cielo. Los ejes  $x'$  y  $y'$  se encuentran en el plano del cielo, mientras el eje  $z'$  es paralelo a la línea de visión. Solo la región del choque cuya tangente sea paralela a la línea de visión será visible por abrillantamiento al limbo.

Por otro lado, la forma tridimensional del choque de proa viene dado por:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

La relación entre ambos sistemas de referencia se ilustra en la figura ??.

### 2.3.1. Vectores normal y tangente a la superficie

Si definimos los vectores  $\hat{n}$  y  $\hat{t}$ , como los vectores normal y tangente a la superficie, respectivamente para  $\phi$  constante. En el caso  $\phi = 0$  (figura 2.7), ambos vectores se encuentran en el plano  $xy$  y es fácil mostrar que:

$$\hat{t}_0 = \begin{pmatrix} -\cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \hat{n}_0 = \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

Donde:

$$\tan \alpha = -\frac{dy}{dx} = \frac{1 + \omega \tan \theta}{\tan \theta - \omega} \quad (2.22)$$

y:

$$\omega(\theta) = -\frac{1}{R} \frac{dR}{d\theta} \quad (2.23)$$

Para otros valores de  $\phi$ , basta con hacer una rotación de las ecuaciones (2.21) alrededor del eje  $x$ . Para la conversión al sistema de referencia del plano del cielo se utiliza la ecuación (2.19):

$$\begin{aligned} \hat{n}' &= \frac{1}{(1 + \omega^2)^{1/2}} \\ &\times \begin{pmatrix} (\cos \theta + \omega \sin \theta) \cos i - (\sin \theta - \omega \cos \theta) \sin i \sin \phi \\ (\sin \theta - \omega \cos \theta) \cos \phi \\ (\cos \theta + \omega \sin \theta) \sin i + (\sin \theta - \omega \cos \theta) \sin \phi \cos i \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} \hat{t}' &= \frac{1}{(1 + \omega^2)^{1/2}} \\ &\times \begin{pmatrix} -(\sin \theta - \omega \cos \theta) \cos i - (\cos \theta + \omega \sin \theta) \sin i \sin \phi \\ (\cos \theta + \omega \sin \theta) \cos \phi \\ -(\cos \theta + \omega \sin \theta) \sin i + (\sin \theta - \omega \cos \theta) \sin \phi \cos i \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.25)$$

### 2.3.2. Línea tangente

Debido a que el choque es ópticamente delgado y geométricamente delgado, solo la región del choque cuya tangente sea paralela a la línea de visión será visible. Esto corresponde a una curva que denominamos *línea tangente*, que debe cumplir con la siguiente condición:

$$\hat{n}' \cdot \hat{z}' = 0 \quad (2.26)$$

Denotamos como  $\phi_T$  al ángulo azimutal que cumple la condición anterior para una inclinación dada, en función del ángulo polar  $\theta$ :

$$\sin \phi_T = \tan i \tan \alpha = \tan i \frac{1 + \omega \tan \theta}{\omega - \tan \theta} \quad (2.27)$$

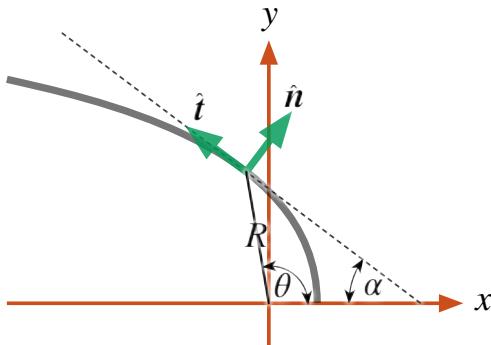


Figura 2.7: Vectores unitarios normal y tangente a la superficie  $R(\theta)$  en un plano de azimuth  $\phi$  constante.

De esta manera, la forma de la línea tangente del choque de proa, a la que llamamos *forma proyectada* viene dada por:

$$\begin{pmatrix} x'_T \\ y'_T \\ z'_T \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} \cos \theta \cos i - \sin \theta \sin \phi_T \sin i \\ \sin \theta (1 - \sin^2 \phi_T)^{1/2} \\ \cos \theta \sin i + \sin \theta \sin \phi_T \cos i \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

En el caso general,  $z'_T$  no es una función lineal de  $x'_T$  y  $y'_T$ , por lo que la línea tangente no se encuentra en un plano. La forma aparente  $(x'_T, y'_T)$  de la línea tangente también puede escribirse en coordenadas polares  $(R', \theta')$ , donde:

$$R'(\theta) = (x'^2_T + y'^2_T)^{1/2} \quad \tan \theta' = \frac{y'_T}{x'_T} \quad (2.29)$$

Es de notar a su vez que la ecuación (2.27) no tiene solución para valores arbitrarios de  $\theta$  y de la inclinación, puesto que se requiere que  $|\sin \phi_T| < 1$ . Por tanto, la línea tangente solo existe para valores de  $\theta$  tales que  $\theta < \theta_0$  donde  $\theta_0$  es el valor de  $\theta$  en el eje de simetría de la línea tangente proyectada ( $\theta'(\theta_0) = 0$ ) y que se obtiene resolviendo la siguiente ecuación implícita:

$$\tan \theta_0 = \frac{|\tan i| + \omega(\theta_0)}{1 - \omega(\theta_0)|\tan i|} \quad (2.30)$$

Esto implica que si el choque de proa es suficientemente “abierto” ( $\alpha > \alpha_{min}$ ), entonces para inclinaciones tales que  $|i| > 90^\circ - \alpha_{min}$  no existirá la línea tangente para ningún valor de  $\theta$ , es decir, el choque de proa se encontrará suficientemente “de cara” como para que ya no parezca un choque de proa para el observador.

### 2.3.3. Planiud y Alatud proyectadas: caso general

En orden de comparar la forma  $R(\theta)$  con observaciones, es útil definir los radios característicos  $R'_0$  y  $R'_{90}$ , donde  $R'_0$  es el radio del eje de simetría aparente y  $R'_{90}$  es el radio aparente en la dirección perpendicular a  $R'_0$ . Es decir  $R'_0 = x'_T(y'_t = 0)$  y  $R'_{90} = y'_t(x'_t = 0)$ . Utilizando las ecuaciones (2.27) y (2.28) encontramos que:

$$R'_0 = R(\theta_0) \cos(\theta_0 + i) \quad (2.31)$$

Donde  $\theta_0$  es la solución de la ecuación (2.30), y

$$R'_{90} = R(\theta_{90}) \sin \theta_{90} (1 - \sin^2 \phi_T(\theta_{90}))^{1/2} \quad (2.32)$$

donde  $\theta_{90}$  es la solución de la siguiente ecuación implícita:

$$\cot \theta_{90} = \frac{1 - (1 + \omega(\theta_{90})^2 \sin^2 2i)^{1/2}}{2\omega(\theta_{90}) \cos^2 i} \quad (2.33)$$

### 2.3.4. Aplicación a las Cuádricas de Revolución

El objetivo de esta sección es obtener la forma proyectada de las cuádricas de revolución, puesto que son una aproximación buena y mucho más sencilla a la forma real de un choque de proa. Para esto es conveniente utilizar un sistema de referencia donde el origen se ubica en el centro de la sección cónica:

$$(X, Y, Z) = (x - x_0, y, z) \quad (2.34)$$

De esta manera, la forma de la cuádrica de revolución es:

$$X = a\mathcal{C}(t) \quad (2.35)$$

$$Y = b\mathcal{S}(t) \cos \phi \quad (2.36)$$

$$Z = b\mathcal{S}(t) \sin \phi \quad (2.37)$$

Siguiendo el procedimiento mostrado en la §2.3 calculamos el ángulo azimutal  $\phi$  que cumple con el criterio de ser tangente a la línea de visión:

$$\sin \phi_T = \frac{b\mathcal{C}(t)}{a\mathcal{S}(t)} \tan i \quad (2.38)$$

Ahora utilizamos la ecuación (2.19) para obtener la forma aparente de una cuádrlica dada:

$$X'_T = \frac{\mathcal{C}(t)}{a \cos i} (a^2 \cos^2 i + \sigma b^2 \sin^2 i) \quad (2.39)$$

$$Y'_T = b\mathcal{S}(t) \left( 1 - \frac{b^2 \mathcal{C}^2(t)}{a^2 \mathcal{S}^2(t)} \tan^2 i \right)^{1/2} \quad (2.40)$$

Podemos mostrar que la forma proyectada de una sección cónica (elipse o hipérbola), es de la misma clase que la sección cónica original. Si ese fuera el caso, entonces podemos escribir las ecuaciones (2.39, 2.40) de la siguiente manera:

$$X'_T = a'\mathcal{C}(t') \quad (2.41)$$

$$Y'_T = b'\mathcal{S}(t') \quad (2.42)$$

Después de un poco de álgebra encontramos que nuestra suposición es consistente, con las siguientes equivalencias:

$$a' = a \cos i f_{\mathcal{Q},i} \quad (2.43)$$

$$b' = b \quad (2.44)$$

$$\mathcal{C}(t') = f_{\mathcal{Q},i} \mathcal{C}(t) \quad (2.45)$$

Donde introducimos el factor de proyección de las cuádricas:

$$f_{Q,i} = (1 + Q \tan^2 i)^{1/2} \quad (2.46)$$

Como ya demostramos que la forma proyectada de la línea tangente de una superficie cónica es una sección cónica del mismo tipo, entonces podemos determinar la forma proyectada reutilizando las ecuaciones (2.15-2.18) sustituyendo las cantidades no primadas por sus equivalentes primados. De esta manera, utilizando las ecuaciones (2.10, 2.43, 2.44) encontramos que el parámetro de las cuádricas para la forma proyectada es:

$$Q' = \frac{Q}{f_{Q,i}^2 \cos^2 i} \quad (2.47)$$

Ahora regresamos al sistema de referencia centrado en la estrella:

$$(x'_T, y'_T) = (X'_T + x'_0, Y'_T) \quad (2.48)$$

donde el desplazamiento proyectado  $x'_0$  es:

$$x'_0 = x_0 \cos i \quad (2.49)$$

La proyección de la distancia al ápex viene dada por la versión primada de la ecuación (2.15):

$$R'_0 = x'_0 + \sigma a' \quad (2.50)$$

$$\implies \frac{R'_0}{R_0} = \cos i \left[ 1 + \frac{\Pi}{Q} (1 - f_{Q,i}) \right] \quad (2.51)$$

Asimismo la planitud y la alatud proyectada pueden calcularse a partir de las ecuaciones (2.16, 2.18, 2.43, 2.47):

$$\Pi' = \frac{\Pi}{(R'_0/R_0) f_{Q,i} \cos i} \quad (2.52)$$

$$\Lambda' = (2\Pi' - Q')^{1/2} \quad (2.53)$$

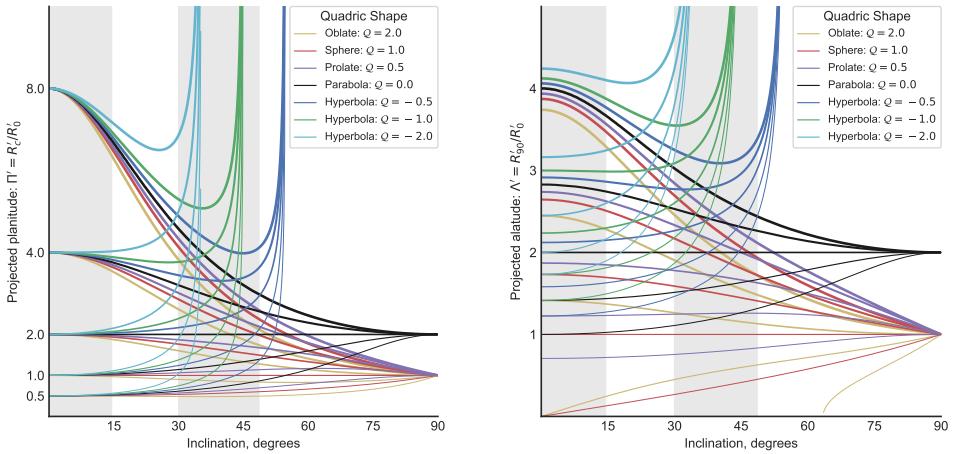


Figura 2.8: Efectos de la proyección sobre las cuádricas de revolución con la inclinación  $|i|$ . Los colores de las curvas representan variaciones en el parámetro  $Q$  de las cuádricas. El grosor de la curva indica el valor de la planitud intrínseca  $\Pi$ . Los rectángulos sombreados muestran cuartiles de  $|\sin i|$  que se encuentran equitativamente poblados para una distribución isotrópica de orientaciones. (a) Planitud aparente  $\Pi'$ . (b) Alatud aparente  $\Lambda'$

En la figura (2.8) mostramos el comportamiento de la planitud y la alatud aparente con la inclinación para distintos valores del parámetro  $Q$  (color) y de la planitud  $\Pi$  (grosor de la curva). Se puede observar que para las superficies elipsoidales ( $Q > 0$ ), la planitud y alatud aparente tienden a  $\Pi' = \Lambda' = 1$  conforme  $i \rightarrow 90^\circ$ . Esto se debe a que en este límite observamos la superficie de frente y vemos su sección transversal circular. En el caso del parabolóide la convergencia se da a  $\Lambda' = \Pi' = 2$ . Por otro lado, la planitud y alatud aparente divergen cuando  $|i| \rightarrow i_{\text{crit}} = 90^\circ - |\theta_Q|$  debido a que cuando  $|i| > i_{\text{crit}}$  ya no existe una línea tangente a la línea de visión y por tanto no se observaría abrillantamiento al limbo. También cabe destacar dos casos particulares: El esferoide confocal con planitud unitaria ( $\Pi = 1$ ) y el parabolóide confocal ( $\Pi = \Lambda = 2$ ). En estos dos casos su forma aparente no se ve afectada por la inclinación.

En la figura 2.9a observamos el diagrama de diagnóstico  $\Pi' - \Lambda'$ . Cada curva representa a una cuádrica de revolución siguiendo la misma

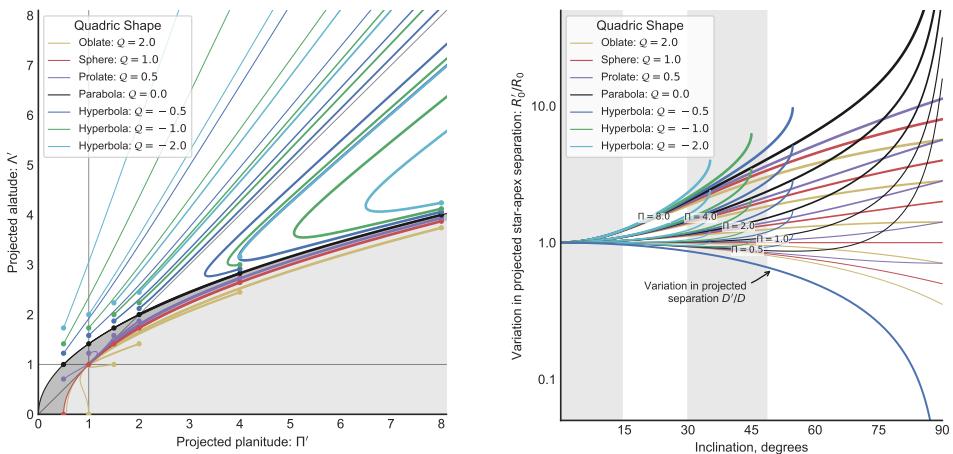


Figura 2.9: Enter Caption

convención que en la figura 2.8 para los valores de  $Q$  y  $\Pi$  y variando la inclinación a lo largo de cada una de éstas, donde además el punto donde  $i = 0$  (cuádrica vista de canto) se marca con un punto. Las regiones sombreadas representan a cada clase de cuádrica, la zona superior más clara a los hiperboloides, la zona gris delgada a los elipsoides proláticos, la interfaz entre estas dos últimas a los hiperboloides y la zona gris inferior a los elipsoides oblatos. Se puede observar que en ningún caso las curvas cruzan de una región a otra. También se observa de nuevo que las curvas elipsoidales convergen a  $(\Pi', \Lambda') = (1, 1)$ , las curvas hiperbólicas a  $(\Pi', \Lambda') = (+\infty, +\infty)$  y las parabólicas a  $(\Pi', \Lambda') = (2, 2)$ . Asimismo en la figura 2.9 observamos el comportamiento de la separación aparente estrella–ápex con inclinación. En este caso se observa que para inclinaciones pequeñas ( $|i| < 30^\circ$ ), esta separación depende muy poco del parámetro  $Q$ , siendo más importante la planitud  $\Pi$ . Por otro lado, para inclinaciones mayores, la separación aparente se incrementa cada vez más rápido para cuádricas abiertas ( $Q \leq 0$ ), mientras que para los elipsoides la separación es cada vez más lenta e incluso puede decrecer con inclinación.

De manera complementaria en la figura 2.10 mostramos una visión complementaria del análisis de la forma aparente con la inclinación. En esta

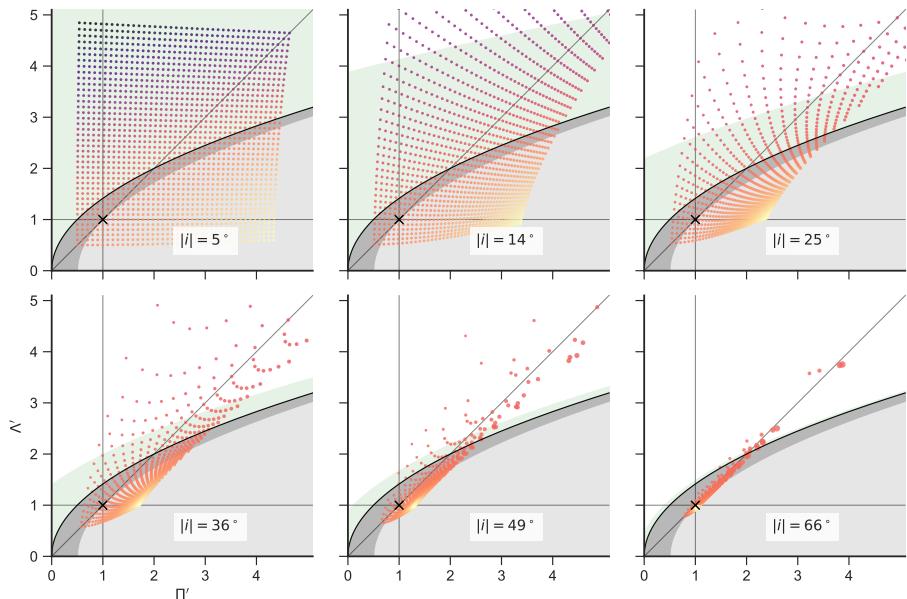


Figura 2.10: Efectos de la inclinación de la forma aparente de arcos cuádricos cuya planitud y alatud están uniformemente distribuidos en los rangos  $\Pi = [0,5,4,5]$ ,  $\Lambda = [0,5,4,5]$ . En cada pánel se muestra la forma aparente incrementando la inclinación en intervalos iguales de  $|\sin i|$ . El color representa el parámetro  $Q$ , desde azul (menor valor de  $Q$ , que representa formas más abiertas), pasando por naranja, hasta amarillo (elipsoides oblato-spheroidales). El tamaño representa la distancia aparente estrella–ápex  $R'_0/R_0$ .

figura se toman “capturas” de  $(\Pi', \Lambda')$  en intervalos regulares de  $\sin i$ . Los valores de la planitud y alatud intrínseca están uniformemente distribuidos en los intervalos  $\Pi = [0,5, 4,5]$  y  $\Lambda = [0,5, 4,5]$ , lo que nos da un cuadrado uniformemente distribuido de valores cuando  $|i| = 0$ , y que se va distorsionando conforme  $|i|$  se incrementa. La escala de color representa el parámetro  $Q$ , incrementándose dicho parámetro desde el azul hasta el amarillo, pasando por el naranja, mientras que el tamaño del punto es proporcional a  $R'_0/R_0$ . Se puede observar que todos los puntos tienden a la línea  $\Pi' = \Lambda'$  a altas inclinaciones, y que los puntos azules quedan fuera del rango de la gráfica. Esto es porque a altas inclinaciones, para las formas muy abiertas ya no existe la línea tangente a la línea de visión. De hecho, la región verde sombreada es la región para la cual aun existe la línea de visión para cada inclinación y se hace cada vez más pequeña conforme la inclinación aumenta. Esta figura es meramente cualitativa, puesto que no hay razón para esperar una distribución uniforme de planitud y alatud (en el siguiente capítulo encontramos que en el modelo de capa delgada no encontramos formas cuyo parametro  $Q$  sea mayor a 1, por ejemplo).



# Capítulo 3

## Modelo de Capa Delgada

Un ejemplo más realista para la forma de los choques de proa proviene de modelos hidrodinámicos en estado estacionario de la interacción de flujos hipersónicos en el límite de capa delgada. Ejemplos clásicos son la interacción entre dos vientos de Canto et al. (1996) (de aquí en adelante) y la interacción entre un viento con una corriente plano-paralela (?).

### 3.1. Cantidades conservadas en un flujo hipersónico de capa delgada

Consideramos dos flujos hipersónicos, no acelerados que forman una capa estacionaria delgada formada por dos choques radiativos separados por una discontinuidad de contacto. El sistema tiene geometría cilíndrica y los vientos no tienen velocidad azimutal. Bajo estos términos, describimos la posición de la capa delgada como  $R(\theta)$ , donde  $R$  es el radio de la capa medida a partir de la posición del origen del viento con menor momento y  $\theta$  es el ángulo polar. Asumimos que el gas chocado está bien mezclado, esto implica que tiene una sola velocidad pos-choque dada por:

$$\vec{v} = v_r \hat{r} + v_z \hat{z} \quad (3.1)$$

Donde el eje de simetría del sistema es paralelo a  $\hat{z}$ , y  $\hat{r}$  es el radio cilíndri-

co. Definimos  $\dot{M}(\theta)$ ,  $\vec{\Pi}(\theta)$  y  $\vec{j}(\theta)$  como la tasa de pérdida de masa, la tasa de momento y la tasa de momento angular, respectivamente, de la capa delgada integradas desde  $\theta = 0$  hasta  $\theta$ . Éstas se calculan de la siguiente manera:

$$\vec{\Pi}(\theta) = \dot{\Pi}_r(\theta)\hat{r} + \dot{\Pi}_z(\theta)\hat{z} = \dot{M}(v_r\hat{r} + v_z\hat{z}) \quad (3.2)$$

$$\vec{j}(\theta) = \vec{R}(\theta) \times \vec{\Pi}(\theta) \quad (3.3)$$

$$\dot{M}(\theta) = \dot{M}_w(\theta) + \dot{M}_{w1} \quad (3.4)$$

Donde  $\vec{R}(\theta) \equiv R(\theta) \sin \theta \hat{r} + R(\theta) \cos \theta \hat{z}$ . Resolviendo el producto cruz y tomando su magnitud encontramos que:

$$\vec{j}(\theta) = \dot{M}(\theta)R(\theta)v_\theta \quad (3.5)$$

$$\text{donde : } v_\theta = v_r \cos \theta - v_z \sin \theta \quad (3.6)$$

Por otro lado, al asumir estado estacionario, necesitamos que la tasa de pérdida de masa, la tasa de momento y la tasa de momento angular de la capa delgada sean iguales a aquellas inyectadas por los dos vientos. Entonces definimos estas cantidades como  $\dot{M}_w$ ,  $\dot{\Pi}_{wr}$ ,  $\dot{\Pi}_{wz}$  y  $\vec{j}_w$  para el viento con menor momento, y para el otro viento se utiliza la misma notación solo que utilizando el subíndice “w1”. De esta forma tenemos que:

$$\dot{\Pi}_r(\theta)\hat{r} + \dot{\Pi}_z(\theta)\hat{z} = [\dot{\Pi}_{wr}(\theta) + \dot{\Pi}_{wr1}(\theta)]\hat{r} + [\dot{\Pi}_{wz}(\theta) + \dot{\Pi}_{wz1}(\theta)]\hat{z} \quad (3.7)$$

$$\vec{j} = \vec{j}_w(\theta) + \vec{j}_{w1}(\theta) \quad (3.8)$$

$$\dot{M}(\theta) = \dot{M}_w(\theta) + \dot{M}_{w1}(\theta) \quad (3.9)$$

Combinando las ecuaciones (3.2), (3.5), (3.4), (3.7), (3.8) y (3.9) encontramos que:

$$\dot{M}(\theta)[v_r\hat{r} + v_z\hat{z}] = (\dot{\Pi}_{wr}(\theta) + \dot{\Pi}_{wr1}(\theta))\hat{r} + (\dot{\Pi}_{wz}(\theta) + \dot{\Pi}_{wz1}(\theta))\hat{z} \quad (3.10)$$

$$\dot{M}(\theta)v_\theta R(\theta) = \vec{j}_w(\theta) + \vec{j}_{w1}(\theta) \quad (3.11)$$

Y finalmente combinando con la ecuación (3.6) resolvemos para  $R(\theta)$ :

$$R(\theta) = \frac{\dot{J}_w(\theta) + (\dot{J})_{w1}(\theta)}{\left( \dot{\Pi}_{wr}(\theta) + \dot{\Pi}_{wr1}(\theta) \right) \cos \theta - \left( \dot{\Pi}_{wz}(\theta) + \dot{\Pi}_{wz1}(\theta) \right) \sin \theta} \quad (3.12)$$

## 3.2. Problema de Interacción de Dos Vientos

Aplicamos el formalismo ya mencionado para la interacción de dos vientos radiales. El viento con menor momento se localiza en el origen, y su densidad a radio fijo varía con el ángulo polar como una ley de potencias (figura 2.1):

$$n(\theta) = n_0 \cos^k \theta \quad (3.13)$$

Donde el índice  $k$  indica el grado de anisotropía del viento “interno”.

Cuando  $k = 0$  denominamos a los choques resultantes como “cantoides”, por Canto et al. (1996), mientras que en el resto de los casos los denominamos “Ancantoides”. Un caso particularmente interesantes son el viento para un prolyd (Henney & Arthur, 1998), donde ( $k = 1/2$ ). Por el momento restringimos al viento “externo” como isotrópico. El problema se muestra de manera esquemática en la figura 2.2.

Utilizando la ecuación (3.13) encontramos que la tasa de pérdida de masa está dada por:

$$\dot{M}_w = \int_0^\theta \int_0^{2\pi} \rho_w v_w \, d\theta \, d\phi = \frac{M_w^0}{2(k+1)} \left( 1 - \cos^{k+1} \theta \right) \quad (3.14)$$

Donde  $v_w$  es la velocidad del viento intenso,  $\rho_w = n\bar{m}$  es su densidad,  $n$  se obtiene de la ecuación (3.13),  $M_w^0 = 4\pi r_0^2 v_w n_0 \bar{m}$  es la tasa de pérdida de masa integrada hasta  $\theta = \pi$  para un viento isotrópico,  $\bar{m}$  es la masa promedio de las partículas del viento y  $r_0$  es el radio del viento al cual se alcanza la velocidad terminal  $v_w$ . Para un prolyd consideramos que dicho radio es el del frente de ionización.

Con esto, obtenemos las tasas de momento y momento angular:

$$\dot{\Pi}_{wz} = \int_0^\theta v_w \cos \theta \, d\dot{M}_w = \frac{v_w \dot{M}_w^0}{2(k+2)} (1 - \cos^{k+2} \theta) \quad (3.15)$$

$$\dot{\Pi}_{wr} = \int_0^\theta v_w \sin \theta \, d\dot{M}_w = \frac{1}{2} \dot{M}_w^0 v_w I_k(\theta) \quad (3.16)$$

$$\vec{j}_w = \int_0^\theta |\vec{R} \times \vec{v}_w| d\dot{M}_w = 0 \quad (3.17)$$

Donde la integral  $I_k(\theta) = \int_0^\theta \cos^k \theta \sin^2 \theta \, d\theta$  tiene solución analítica para  $k = 0$ , es una integral elíptica de segundo tipo cuando  $k = \frac{1}{2}$  y su solución es aun más compleja para el resto de los casos. Las tasa de momento angular para el viento interior es cero debido a que éste se mide respecto al origen, donde se localiza la fuente con menor momento. En este punto los vectores de posición y velocidad para un valor de  $\theta$  dado son paralelos.

Para el viento exterior consideramos dos casos principales: un viento esférico e isotrópico y un viento plano-paralelo de densidad y velocidad constante.

### 3.2.1. Interacción con un viento esférico isotrópico

En este caso tomamos como variable independiente al ángulo polar medido a partir de la posición de la fuente del viento externo, denotado por  $\theta_1$ . De esta forma las tasas de pérdida de masa, momento y momento angular quedan como sigue:

$$\dot{M}_{w1} = \frac{M_{w1}^0}{2} (1 - \cos \theta_1) \quad (3.18)$$

$$\dot{\Pi}_{wz1} = -\frac{v_{w1} \dot{M}_{w1}^0}{4} \sin^2 \theta_1 \quad (3.19)$$

$$\dot{\Pi}_{wr1} = \frac{v_{w1} \dot{M}_{w1}^0}{4} (\theta_1 - \sin \theta_1 \cos \theta_1) \quad (3.20)$$

$$\vec{j}_{w1} = \int_0^{\theta_1} R(\theta) v_{w1} \sin(\pi - \theta - \theta_1) \, d\dot{M}_{w1} \quad (3.21)$$

Utilizando la ley de los senos (ver figura 2.2), la ecuación (3.21) queda como sigue:

$$\dot{J}_{w1} = Dv_{w1} \int_0^{\theta_1} \sin \theta_1 \, d\dot{M}_{w1} = \frac{v_{w1} \dot{M}_{w1}^0}{4} (\theta_1 - \sin \theta_1 \cos \theta_1) D \quad (3.22)$$

Por otro lado, de la figura 2.2, podemos deducir la siguiente relación geométrica entre  $R(\theta)$ ,  $\theta$  y  $\theta_1$ :

$$\frac{R(\theta)}{D} = \frac{\sin \theta_1}{\sin(\theta + \theta_1)} \quad (3.23)$$

Combinando las ecuaciones (3.12), (3.15) - (3.22) y (3.23) obtenemos una ecuación implícita que nos indica la dependencia de  $\theta_1$  con  $\theta$ :

$$\theta_1 \cot \theta_1 - 1 = 2\beta I_k(\theta) \cot \theta - \frac{2\beta}{k+2} (1 - \cos^{k+2} \theta) \quad (3.24)$$

Donde  $\beta = \frac{\dot{M}_w^0 v_w}{\dot{M}_{w1}^0 v_{w1}}$  es el cociente del momentos entre los vientos. Este parámetro, junto con el índice de anisotropía  $k$  son los que determinan la forma del choque de proa.

El radio en el ápex, la planitud y la alatud en este caso se muestran a continuación. El procedimiento detallado se puede consultar en el apéndice B:

$$\frac{R_0}{D} = \frac{\beta^{1/2}}{1 + \beta^{1/2}} \quad (3.25)$$

$$\Lambda = \frac{(3\xi)^{1/2} (1 + \beta^{1/2})}{(1 + \frac{1}{5}\xi\beta)^{1/2} (1 - \xi\beta)} \quad (3.26)$$

$$\Pi = |1 - 2R_{\theta,\theta}|^{-1} \quad (3.27)$$

$$\text{Donde : } R_{\theta,\theta} = \frac{C_{k\beta}}{1 + \beta^{1/2}} + \frac{1 + 2\beta^{1/2}}{6} \quad (3.28)$$

### 3.2.2. Interacción de un viento esférico isotrópico con un viento plano-paralelo (Choques Wilkinoides)

En este caso las tasas de pérdida de masa, de momento y momento angular del viento plano-paralelo con velocidad  $v_a$  y densidad uniforme  $\rho_a$  quedan como sigue:

$$\dot{M}_{w1} = \pi \rho_a v_a R^2 \sin^2 \theta \quad (3.29)$$

$$\dot{\Pi}_{wz1} = -\pi \rho_a v_a^2 R^2 \sin^2 \theta \quad (3.30)$$

$$\dot{\Pi}_{wr1} = 0 \quad (3.31)$$

$$\dot{J}_{w1} = \int_0^r r' v_a \sin \theta \, d\dot{M}_{w1} = \frac{2}{3} \pi \rho_a v_a^2 R^3 \sin^3 \theta \quad (3.32)$$

Sustituyendo estas ecuaciones en (3.12) junto con (3.14) - (3.17) para el caso isotrópico ( $k = 0$ ) obtenemos lo siguiente:

$$R = \frac{\frac{2}{3} \pi \rho_a v_a R^3 \sin^3 \theta}{\frac{\dot{M}_w^0 v_w}{4} (\theta - \sin \theta \cos \theta) \cos \theta - \left( \frac{\dot{M}_w^0 v_w}{4} \sin^2 \theta - \pi \rho_a v_a^2 R^2 \sin^2 \theta \right) \sin \theta} \quad (3.33)$$

La condición de equilibrio de presión en este caso nos lleva a la siguiente relación:

$$\frac{\dot{M}_w^0 v_w}{4\pi R_0^2} = \rho_a v_a^2 \quad (3.34)$$

Por tanto:

$$R/R_0 = \frac{\frac{2}{3} (R/R_0)^3 \sin^3 \theta}{(\theta - \sin \theta \cos \theta) \cos \theta - \left( \sin^2 \theta - (R/R_0)^2 \sin^2 \theta \right) \sin \theta} \quad (3.35)$$

Resolviendo para  $\tilde{R}$  encontramos que:

$$R = R_0 [\csc^2 \theta (1 - \theta \cot \theta)]^{1/2} \quad (3.36)$$

### 3.2.3. Planitud y Alatud de los choques Wilkinoides

En este caso el radio en el ápex, la planitud y alatud se calculan de la siguiente manera:

$R_0$  se obtiene directamente de la ecuación (3.34) como

$$R_0 = \left( \frac{\dot{M}_w^0 v_w}{4\pi\rho_a v_a^2} \right)^{1/2} \quad (3.37)$$

La alatud se calcula evaluando la ecuación (3.36) en  $\theta = \frac{\pi}{2}$ :

$$\Lambda = \sqrt{3} \quad (3.38)$$

Por último, el radio de curvatura se obtiene haciendo una expansión de la ecuación (3.36) y encontrando el coeficiente de segundo orden. El procedimiento detallado se muestra en el apéndice B.4:

$$\Pi = \frac{5}{3} \quad (3.39)$$

## 3.3. Obtención de la Forma Aparente

La obtención de la forma aparente de los Radios Característicos de los choques de proa no se obtiene de manera analítica de forma sencilla, por lo que recurrimos a hacer aproximaciones a la forma de un choque dado, utilizando las cuádricas de revolución. Éstas cuádricas dan un buen ajuste pero no son capaces de reproducir la forma completa de un choque de proa dado, por lo que recurrimos al uso de dos cuádricas que en conjunto ajustan a la forma completa del choque: una para la “cabeza” del choque, y otro para la cola. Y cómo ya vimos en la sección , los radios característicos aparentes se pueden obtener de manera sencilla para estas superficies.

En la figura 3.2 se muestra el residuo del ajuste en función del ángulo polar, y observamos que para  $\theta \sim 150^\circ$  el ajuste de la cola deja de ser bueno. Esto implica que existe una inclinación límite  $i_{lim}$  más allá de la cual no podemos confiar en el modelo propuesto en este trabajo, y que calcularemos en la §3.6.

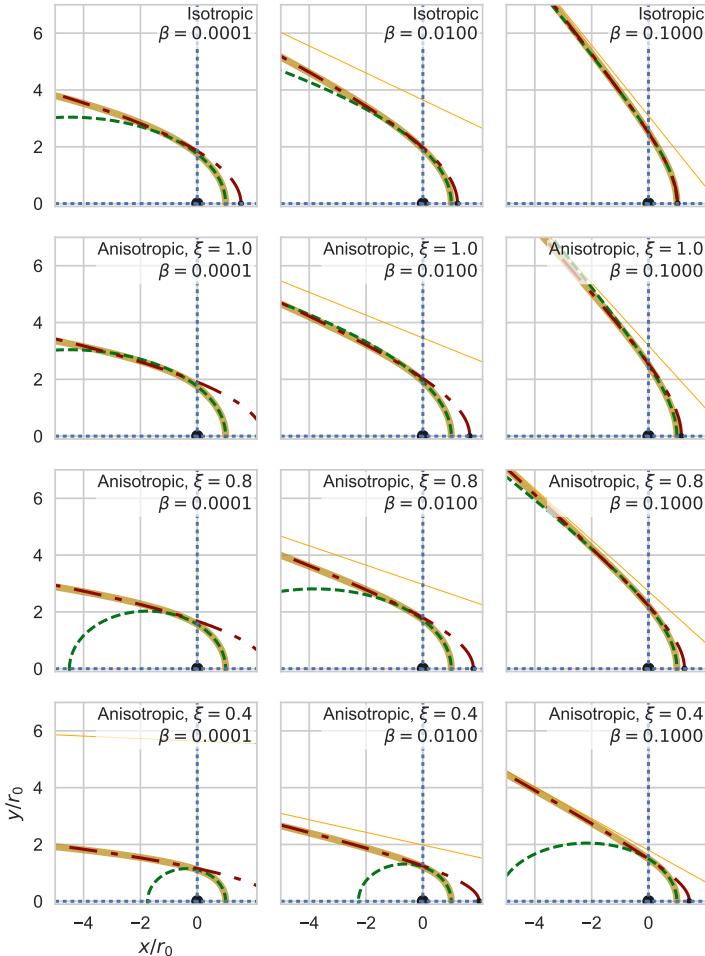


Figura 3.1: Ajuste de dos cuádricas a las soluciones de capa delgada. La línea gruesa continua representa la forma de un choque bajo la aproximación de capa delgada (capítulo 3) para los parámetros enlistados en cada pánel. La línea verde es el ajuste obtenido para la cabeza, mientras que la roja corresponde al ajuste para la cola.

### 3.4. Ajustes a la cabeza

Utilizando las ecuación (??) de la §?? y las ecuaciones (3.27) y (3.26) de la §3.2 podemos calcular el parámetro  $\theta_c$  que nos indicará el tipo de cónica que ajusta mejor a cada solución del modelo de capa delgada en función de los parámetros  $\beta$  y  $\xi$ :

$$\tan \theta_c = \pm \left| \frac{3\xi (1 + \beta^{1/2})^2}{(1 - \xi\beta)^2 (1 + \frac{1}{5}\xi\beta)} - \frac{2}{|1 - 2\gamma|} \right|^{1/2} \quad (3.40)$$

En la figura se ilustra la dependencia de  $\theta_c$  con los parámetros  $\beta$  y  $\xi$ , así como al tipo de cónica que ajusta mejor tanto la cabeza como la cola de cada solución a la forma de los choques de proa.

### 3.5. Ajustes a la cola

En el caso general del problema de capa delgada, el comportamiento de la cola tiende a ser hiperbólico, dado que el ángulo polar  $\theta$  tiende a un valor asintótico denominado como  $\theta_\infty$ . Este ángulo es tal que  $\theta_\infty + \theta_{1\infty} = \pi$  y se calcula resolviendo la siguiente ecuación explícita:

El ajuste a la hipérbola se logra ajustando tres parámetros fundamentales:  $\theta_c = \theta_\infty - \pi$ , la distancia entre la hipérbola y el centro de ésta a lo largo del eje focal  $a_t$  y la distancia entre el origen y el centro de la hipérbola  $x_{0,t}$ .  $a_t$  y  $x_{0,t}$  se obtienen inicialmente con un ajuste numérico para una malla de valores de  $\beta$  y  $\xi$ . Posteriormente hacemos tres ajustes anidados en tres niveles para determinar de manera analítica los parámetros de la hipérbola en función de  $\beta$  y  $\xi$ . A continuación mostramos las funciones y los parámetros que mejor ajustan a la cola para cada solución a la forma de los choques de proa. Cabe destacar

Cuadro 3.1: Coeficientes del ajuste hiperbólico a la cola de los choques de Proa

Ecuación (3.41)	Ecuación (3.43) .....
$C_0^{\text{iso}} = +1,3195$	$c_{0,0} = +2,0758 \quad c_{1,0} = -0,2309 \quad c_{2,0} = -0,2532$
$C_1^{\text{iso}} = +0,4229$	$c_{0,1} = +0,9571 \quad c_{1,1} = -0,1530 \quad c_{2,1} = -0,2487$
$C_2^{\text{iso}} = +0,1092$	$c_{0,2} = +0,2528 \quad c_{1,2} = -0,0360 \quad c_{2,2} = -0,0794$
$C_3^{\text{iso}} = +0,0051$	$c_{0,3} = +0,0171 \quad c_{1,3} = -0,0010 \quad c_{2,3} = -0,0095$
Ecuación (3.42)	Ecuación (3.44) .....
$D_0^{\text{iso}} = +0,7962$	$d_{0,0} = +0,8516 \quad d_{1,0} = -0,0907 \quad d_{2,0} = -0,2002$
$D_1^{\text{iso}} = -0,2363$	$d_{0,1} = -0,7620 \quad d_{1,1} = +0,1411 \quad d_{2,1} = -0,0295$
$D_2^{\text{iso}} = -0,0126$	$d_{0,2} = -0,0683 \quad d_{1,2} = +0,0390 \quad d_{2,2} = -0,0236$

$$x_{0,t} = 0,7\beta^{-0,55} \left[ C_3 (\log_{10} \beta)^3 + C_2 (\log_{10} \beta)^2 + C_1 (\log_{10} \beta) + C_0 \right] \quad (3.41)$$

$$(x_{0,t} - a_t) = D_2 (\log_{10} \beta)^2 + D_1 (\log_{10} \beta) + D_0 \quad (3.42)$$

Donde:

$$C_k = c_{2,k}\xi^2 + c_{1,k}\xi + c_{0,k} \text{ para } k = [0, 1, 2, 3] \quad (3.43)$$

$$D_k = d_{2,k}\xi^2 + d_{1,k}\xi + d_{0,k} \text{ para } k = [0, 1, 2] \quad (3.44)$$

Los coeficientes de los ajustes para la cola se muestran en la tabla 3.1: En el apéndice C se muestran los detalles de cómo se obtuvieron los coeficientes de la tabla 3.1.

### 3.5.1. Ajustes a la cabeza y la cola en el caso de la interacción con un viento plano-paralelo

En este caso el ajuste a la cabeza es muy simple, utilizando los resultados para sus radios característicos (ecuaciones (3.38) y (3.39)) encontramos que el ajuste a la cabeza corresponde con una elipse tal que  $\tan \theta_c = \frac{1}{3}$ .

Para el ajuste a la cola encontramos que ninguna de las cuádricas da una buena aproximación a la forma de la cola, pero contamos con la forma explícita del choque de proa (ecuación (3.36)) así que ningún ajuste fue necesario.

### 3.6. Proyección en el plano del cielo para el modelo de capa delgada

La proyección en el plano del cielo se realizó utilizando las ecuaciones (??), (??) y (??) para los ajuste de la cabeza y de la cola, respectivamente.

En la figura 3.2 se muestra el residuo del ajuste de diferentes soluciones contra el ángulo polar  $\theta$ . Se puede apreciar que para cierto valor de  $\theta$ , que podemos denominar como  $\theta_{tran}$ , ocurre la transición donde el mejor ajuste deja de ser el de la cabeza y el ajuste de la cola empieza a ser más efectivo. Debido a esto, tenemos que tener cuidado qué ajuste elegir para calcular los radios característicos aparentes. Si  $\theta_0 < \theta_{tran}$  entonces podemos utilizar el ajuste a la cabeza para calcular el radio de curvatura aparente, en caso contrario se tiene que utilizar el ajuste a la cola, lo que ocurre a inclinaciones altas. Para calcular  $R'_{90}$  hay que vigilar si  $\theta_{90}$  es mayor o menor a  $\theta_{tran}$  para decidir qué ajuste utilizar. En este último caso será el de la cola para la mayoría de las inclinaciones.

Utilizando las ecuaciones (2.8), (??) y (??) calculamos los valores para  $\theta_0$  y  $\theta_{90}$  para las cuádricas:

$$\cot \theta_0 = \cot \theta_c \cot i + \frac{x_0}{b} \sqrt{\cot^2 \theta_c \cot^2 i \pm 1} \quad (3.45)$$

Utilizando las ecuaciones (2.7), (??) y (??) encontramos que:

$$\frac{x_0}{b} = \frac{|\tan \theta_c|}{\tilde{R}_c} - |\cot \theta_c| \quad (3.46)$$

Por otro lado:

$$\mathcal{T}(\theta_{90}) = f_2(i; \theta_c) \left[ \frac{x_0}{b} - \frac{x_0}{a} \frac{|\cot \theta_c|}{f^2(i; \theta_c)} \right] \quad (3.47)$$

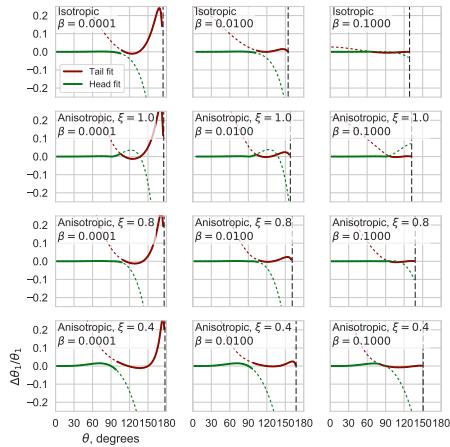


Figura 3.2: Residuo del ajuste de las cónicas a la forma del choque. La línea verde muestra el residuo del ajuste a la cabeza y la roja el ajuste a la cola. En todos los casos existe un valor de  $\theta_{tran}$  donde para  $\theta < \theta_{tran}$  el mejor ajuste es el de la cabeza y para  $\theta \geq \theta_{tran}$  el mejor ajuste es el de la cola

Donde  $f(i; \theta_c)$  fue definido en la sección 2.2 y:

$$f_2(i; \theta_c) \equiv \left( 1 \mp \frac{x_0^2}{a^2 f^4(i; \theta_c)} \right)^{-1/2} \quad (3.48)$$

## Capítulo 4

# Resultados obtenidos para los prolyds “clásicos”

Probamos nuestro modelo descrito en los capítulos anteriores en una muestra de prolyds pertenecientes a la Nebulosa de Orión (ONC) que presentan un choque de proa. En la figura se muestran los prolyds que pertenecen a nuestra muestra.

En todos los casos no fue posible medir el radio característico  $R_{90}$  debido a que el brillo de la cáscara decae con el ángulo polar  $\theta$  y no es detectable para ángulos del orden de  $60^\circ$ . Sin embargo, a continuación mostraremos la metodología para obtener la inclinación más probable de cada choque, así como los parámetros del modelo de cada uno de éstos que nos indican su forma intrínseca.

### 4.1. Metodología para la medición de la forma aparente.

Se utilizaron imágenes en el filtro de [OIII] de la cámara WPC2 del Telescopio Espacial Hubble (HST). Se utilizaron las herramientas del programa DS9 para análisis de imágenes astronómicas para trazar la posición de  $\theta^1$  Ori C y de cada uno de los prolyds de la muestra. La posición y la forma de los choques de proa fue trazada con una serie de marcas a lo largo del choque. Las coordenadas de las marcas fueron guardadas

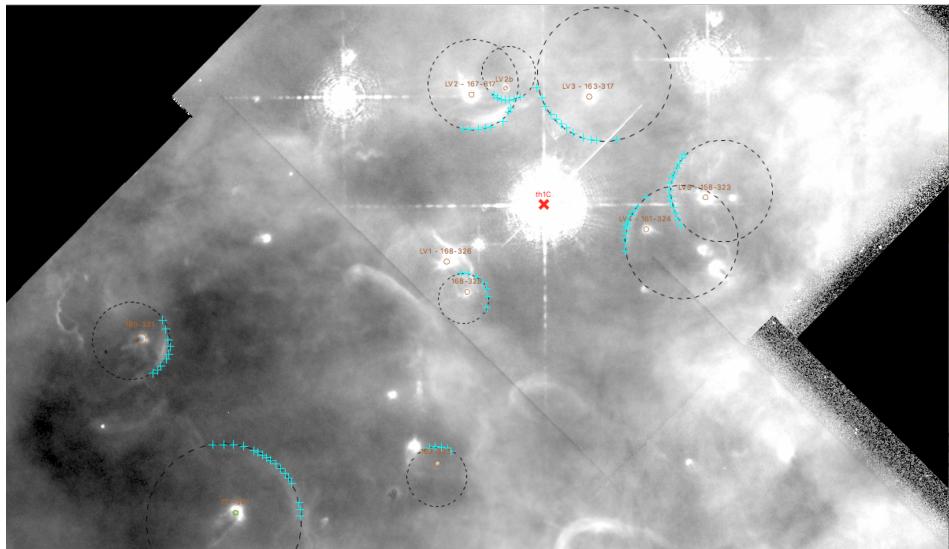


Figura 4.1: Imagen de la parte central de la Nebulosa de Orión donde se ubican los proplyds de nuestra muestra. Las cruces color cyan corresponden a las mediciones de la forma aparente para cada choque de proa. Los círculos amarillos marcan la posición de cada proplyd y la “x” roja corresponde a la posición de la estrella ionizante  $\theta^1$  Ori C. Los círculos negros ilustran de manera esquemática el radio de curvatura de cada choque.

en un archivo y luego procesadas para tener las coordenadas del choque en el sistema de referencia del prolyd (Figura 4.1). El radio de curvatura aparente se obtiene haciendo un ajuste de mínimos cuadrados de la forma de un círculo de las mediciones obtenidas.  $R_0$  se obtiene como la distancia mínima entre el prolyd y el ajuste circular dentro del rango de las coordenadas de las mediciones.

#### 4.1.1. Medición de incertidumbres

Para saber qué tan confiables son las coordenadas de las mediciones, se realizó el procedimiento siguiente: Del total de mediciones realizadas para cada prolyd, se crearon varias sub-muestras donde se utilizamos aproximadamente las dos terceras partes de las mediciones, pero dejando un mínimo de cuatro puntos, y se procedió a calcular los radios característicos para cada submuestra, y comprobar qué tanto se desvían estas mediciones de la original. En la figura 4.2 se muestran ejemplos de dichas sub-muestras para algunos prolyds.

## 4.2. Resultados

Los radios característicos obtenidos para la muestra original y para las submuestras se muestran en la figura 4.3. En cada pánel se utiliza un valor fijo para el parámetro de anisotropía  $\xi$ . Las mediciones para el prolyd LV4 son consistentes con un viento isotrópico, mientras que para los prolyds LV2b, 169-338, 180-331, 168-328, 177-341, LV3 y LV5 sus mediciones son consistentes para vientos con un grado de anisotropía bajo ( $\xi \gtrsim 0,8$ ). Finalmente para LV2 sus mediciones son consistentes con un viento con un grado de anisotropía alto ( $\xi \lesssim 0,4$ ).

Con base a este análisis, se resume en la tabla 4.1 los ajustes a los parámetros de los prolyds: inclinación, distancia a  $\theta^1$  Ori C intrínseca  $D$  y radio del choque en el eje de simetría  $R_0/D$ .

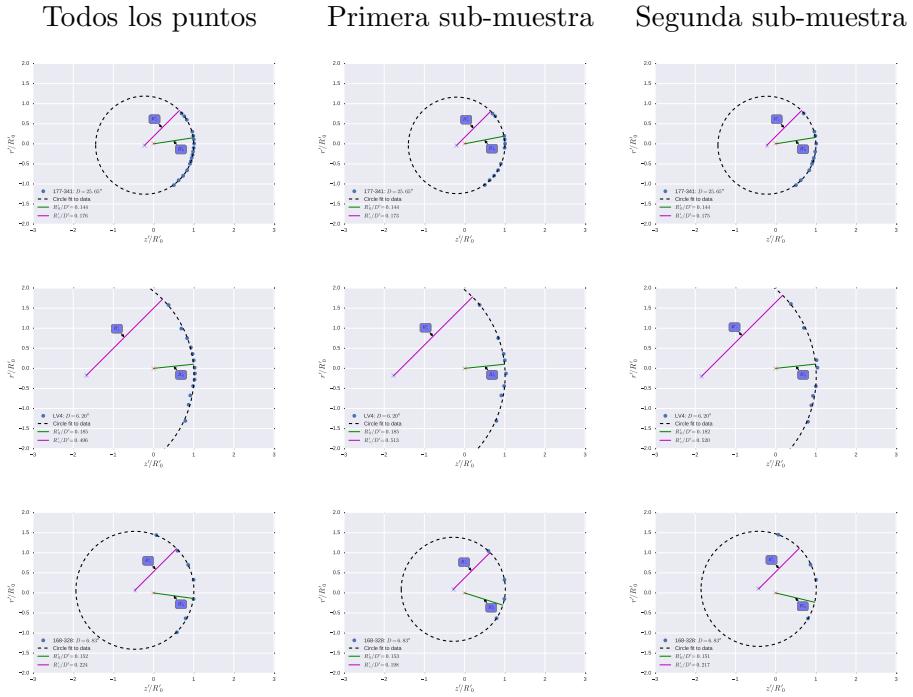


Figura 4.2: Ejemplos de incertidumbres sistemáticas en los ajustes circulares a la forma de los choques para tres fuentes (desde la línea superior hasta la inferior): 177-341, LV4 y 168-328. La columna de la izquierda muestra el ajuste a todos los puntos identificados en el borde de la cáscara, donde el número y el espaciamiento de los puntos es una medida subjetiva de nuestra confianza al trazar el borde de cada cáscara. Las dos columnas restantes muestran ajustes a sub-muestras seleccionadas aleatoriamente que contienen 2/3 partes de los puntos de la muestra original para cada cáscara.

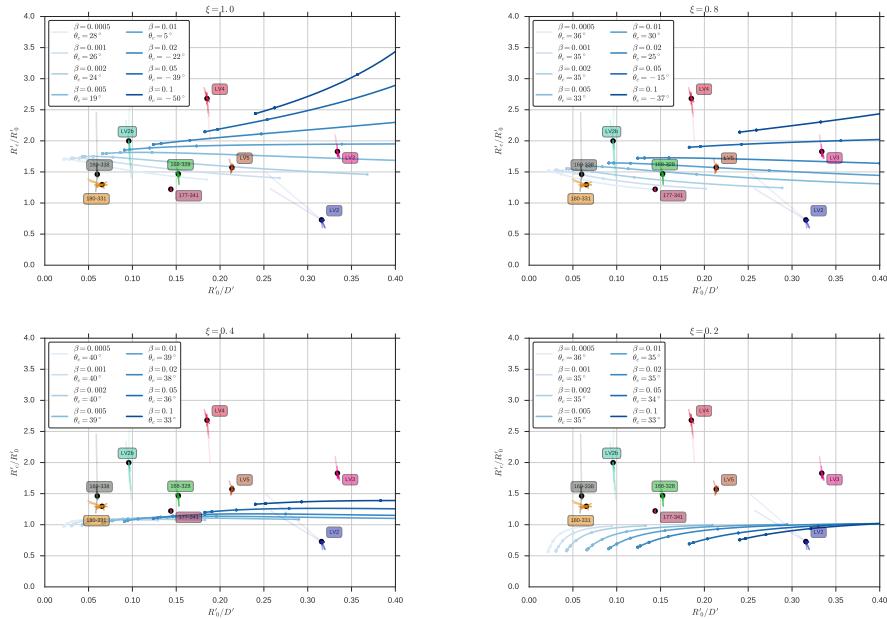


Figura 4.3: Mediciones de los radios característicos de los proplyds  $R_c$  y  $R_0$ . Las curvas representan el ajuste de una cuádratica para un choque de proa con un cociente de momentos  $\beta$  fijo, además se muestra su respectivo valor de  $\theta_c$ . Los puntos a lo largo de cada curva representan una separación en inclinación de  $15^\circ$ . Las mediciones para cada proplyd vienen acompañadas con el set de sub-muestras representadas como líneas radiales de colores. En cada gráfica se utiliza un valor diferente para el parámetro de anisotropía  $\xi$ , iniciando con un viento isotrópico ( $\xi = 1$ ), hasta el viento con mayor anisotropía ( $\xi = 0,2$ ).

Cuadro 4.1: Ajuste a los parámetros de los arcos para los choques de proa de los proplyds

OW (1)	Nombre (2)	$D'$ (3)	$R'_0/D'$ (4)	Obsetvado $(R'_c/R'_0)_{\text{shape}}$ (5)	$(R'_c/R'_0)_{\text{flux}}$ (6)	$\beta$ (7)
168-328		6.8	$0,152 \pm 0,001$	$1,42 \pm 0,09$	$1,45 \pm 0,05$	$0,018 \pm 0,003$
169-338		16.4	$0,059 \pm 0,001$	$1,76 \pm 0,48$	$1,50 \pm 0,05$	$0,002 \pm 0,001$
177-341	HST1	25.6	$0,144 \pm 0,001$	$1,21 \pm 0,02$	$1,25 \pm 0,02$	$0,018 \pm 0,003$
180-331		25.1	$0,061 \pm 0,007$	$1,30 \pm 0,05$	$1,27 \pm 0,05$	$0,003 \pm 0,001$
167-317	LV2	7.8	$0,305 \pm 0,025$	$0,81 \pm 0,28$	$1,50 \pm 0,1$	$0,085 \pm 0,015$
	LV2b	7.2	$0,097 \pm 0,002$	$2,00 \pm 0,62$	$1,63 \pm 0,08$	$0,008 \pm 0,003$
163-317	LV3	6.9	$0,334 \pm 0,002$	$1,81 \pm 0,12$	$1,85 \pm 0,15$	$0,075 \pm 0,025$
161-324	LV4	6.2	$0,186 \pm 0,002$	$2,59 \pm 0,24$	$2,05 \pm 0,07$	$0,040 \pm 0,014$
168-323	LV5	9.6	$0,213 \pm 0,002$	$1,57 \pm 0,07$	$1,60 \pm 0,07$	$0,055 \pm 0,005$

Notes – Col. (1): ID de la fuente (O'Dell & Wen, 1994). Col. (2): Nombre alternativo de la fuente. Col. (3): Distancia proyectada desde  $\theta^1$  Ori C, segundos de arco. Col. (4): Radio exterior aparente a lo largo del eje, normalizado con la distancia proyectada, con una incertidumbre de  $\pm 1\sigma$ , determinado con el ajuste circular descrito en § 4.1. Col. (5): Radio de curvatura aparente, normalizado con el radio a lo largo del eje, con incertidumbres de  $\pm 1\sigma$ , determinado con el ajuste circular descrito en § 4.1. Col. (6): Igual que Col. (5) pero aplicando el criterio adicional de que el brillo superficial del proplyd obtenido debe coincidir con la predicción teórica. Col. (7): Cociente de momentos entre el viento del proplyd y la estrella O (ver capítulo 3). Col. (8): Parámetro de anisotropía del viento del proplyd. Col. (9): Inclinación respecto al plano del cielo, en grados. Col. (10): Distancia real desde  $\theta^1$  Ori C, parsecs. Col. (11): Radio real de la cáscara a lo largo del eje, normalizado con distancia.

# **Capítulo 5**

# **Conclusiones**

Write Conclusions, discussions, etc. here

## CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES

---

# Bibliografía

Ballesteros-Paredes J., Hartmann L., Vázquez-Semadeni E., 1999, , 527, 285

Ballesteros-Paredes J., Hartmann L. W., Vázquez-Semadeni E., Heitsch F., Zamora-Avilés M. A., 2011, , 411, 65

Canto J., Raga A. C., Wilkin F. P., 1996, , 469, 729

Churchwell E., Felli M., Wood D. O. S., Massi M., 1987, , 321, 516

Gordon M. A., Churchwell E., 1970, , 9, 307

Hartmann L., Burkert A., 2007, , 654, 988

Hennebelle P., Pérault M., 1999, , 351, 309

Henney W. J., Arthur S. J., 1998, , 116, 322

Johnstone D., Hollenbach D., Bally J., 1998, , 499, 758

Laques P., Vidal J. L., 1979, , 73, 97

Menten K. M., Reid M. J., Forbrich J., Brunthaler A., 2007, , 474, 515

O'Dell C. R., Wen Z., 1994, , 436, 194

O'dell C. R., Wen Z., Hu X., 1993, , 410, 696

Stahler S. W., Palla F., 2004, The Formation of Stars. Wiley-VCH

Yusef-Zadeh F., 1990, , 361, L19



## Apéndice A

# Derivación Matemática del Radio de Curvatura

Tomamos una curva genérica  $\vec{\sigma}(t) \equiv x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y}$  continua y suave para todo valor de  $t$  real y finito. Sus derivadas se denotan como  $\vec{\sigma}'(t)$  y  $\vec{\sigma}''(t)$ . Su longitud de arco está dada por:

$$s(t) = \int_0^t \|\vec{\sigma}'(t')\| dt' \quad (\text{A.1})$$

Reparametrizamos la trayectoria  $\vec{\sigma}(t)$  con la longitud de arco y diferenciando respecto a ésta obtenemos lo siguiente:

$$\frac{d\vec{\sigma}}{ds} = \frac{\vec{\sigma}'(t)}{\|\vec{\sigma}'(t)\|} \equiv \vec{T}(s) \quad (\text{A.2})$$

Esta última expresión se logró diferenciando la ecuación (A.1) y aplicando la regla de la cadena al diferenciar  $\frac{d\vec{\sigma}}{ds}$ .  $\vec{T}(s)$  es el vector tangente a la trayectoria  $\vec{\sigma}(s)$ .

La curvatura  $\kappa$  se define como la magnitud de la derivada del vector tangente respecto a la longitud de arco, o bien, como la segunda derivada de la trayectoria  $\vec{\sigma}(s)$ :

$$\kappa \equiv \|\vec{T}'(s)\| = \|\vec{\sigma}''(s)\| \quad (\text{A.3})$$

El radio de curvatura se define como el radio de un círculo que ajusta localmente a la trayectoria, y se calcula como el inverso multiplicativo de la curvatura:

$$R_c = \frac{1}{\kappa} \quad (\text{A.4})$$

Aplicando la regla de la cadena encontramos la siguiente expresión para la curvatura:

$$\kappa = \left\| \frac{\vec{\sigma}''(t)}{\|\vec{\sigma}'(t)\|^2} - \frac{\vec{\sigma}'(t)}{\|\vec{\sigma}'(t)\|^4} \vec{\sigma}'(t) \cdot \vec{\sigma}''(t) \right\| \quad (\text{A.5})$$

Escribimos las componentes de las derivadas de  $\vec{\sigma}(t)$  para calcular los factores que intervienen en la ecuación (A.5):

$$\vec{\sigma}'(t) = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} \quad (\text{A.6})$$

$$\vec{\sigma}''(t) = \ddot{x}\hat{x} + \ddot{y}\hat{y} \quad (\text{A.7})$$

$$\implies \vec{\sigma}'(t) \cdot \vec{\sigma}''(t) = \dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} \quad (\text{A.8})$$

De esta forma, calculamos la curvatura como sigue:

$$\kappa = \left[ \left( \frac{\ddot{x}}{\|\vec{\sigma}'\|^2} - \frac{\dot{x}(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y})}{\|\vec{\sigma}'\|^4} \right)^2 + \left( \frac{\ddot{y}}{\|\vec{\sigma}'\|^2} - \frac{\dot{y}(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y})}{\|\vec{\sigma}'\|^4} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{aligned} \kappa &= \|\vec{\sigma}'\|^{-2} \left[ (\ddot{x}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \dot{x}(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}))^2 \right. \\ &\quad \left. + (\ddot{y}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \dot{y}(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}))^2 \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

$$\kappa = \|\vec{\sigma}'\|^{-2} \left[ (\ddot{x}\dot{y}^2 - \dot{x}\dot{y}\ddot{y})^2 + (\ddot{y}\dot{x}^2 - \dot{y}\dot{x}\ddot{x})^2 \right]^{1/2} \quad (\text{A.11})$$

$$\kappa = \|\vec{\sigma}'\|^{-3} [\ddot{x}^2\dot{y}^2 + \dot{y}^2\dot{x}^2 - 2\ddot{x}\dot{y}\dot{x}\dot{y}]^{1/2} \quad (\text{A.12})$$

$$\kappa = \frac{|\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} \quad (\text{A.13})$$

Utilizando coordenadas polares, la expresión para el radio de curvatura queda como sigue:

$$R_c = R \frac{(1 + \omega^2)^{3/2}}{|1 + \omega^2 - \dot{\omega}|} \quad (\text{A.14})$$

Donde  $\omega \equiv \frac{1}{R} \frac{dR}{d\theta}$  (ver sección 2.3)

## A.1. Radio de curvatura para un polinomio de grado $2n$

Dado que es de nuestro interés calcular el radio de curvatura del choque en el eje de simetría ( $\theta = 0$ ), debido a que es analíticamente más fácil de calcular, y a su vez es medible observacionalmente ajustando un círculo a una serie de mediciones de la posición del choque (sección ). Entonces, hacemos una aproximación para la función  $R(\theta)$  que nos da la forma del choque mediante un polinomio par de grado  $2n$  de la siguiente forma:

$$R(\theta) \simeq R_0 (1 + R_{\theta\theta,0} \theta^2 + \mathcal{O}(\theta^4)) \quad (\text{A.15})$$

De esta forma calculamos las derivadas de  $R(\theta)$ :

$$\dot{R}(\theta) \simeq R_0 \theta (2R_{\theta\theta,0} + \mathcal{O}(\theta^2)) \quad (\text{A.16})$$

$$\ddot{R}(\theta) \simeq R_0 (2R_{\theta\theta,0} + \mathcal{O}(\theta^2)) \quad (\text{A.17})$$

Evaluando en  $\theta = 0$  obtenemos los siguientes:

$$R(0) = R_0 \quad (\text{A.18})$$

$$\dot{R}(0) = 0 \quad (\text{A.19})$$

$$\ddot{R}(0) = 2R_{\theta\theta,0}R_0 \quad (\text{A.20})$$

$$\implies \omega(0) = 0 \quad (\text{A.21})$$

$$\dot{\omega}(0) \equiv \frac{\ddot{R}(0)}{R(0)} - \left( \frac{\dot{R}(0)}{R(0)} \right)^2 = 2R_{\theta\theta,0} \quad (\text{A.22})$$

Sustituyendo en la ecuación (A.14) obtenemos la planitud en el ápex:

$$\Pi = \frac{1}{|1 - 2R_{\theta\theta,0}|} \quad (\text{A.23})$$

Por esto en el apéndice B para encontrar el radio de curvatura nos enfocamos en encontrar el coeficiente de segundo orden en la expansión en serie de  $R(\theta)$ .

## Apéndice B

# Derivación paso a paso de los Radios Característicos en la aproximación hipersónica del modelo de interacción de dos vientos

### B.1. $R_0$

Podemos determinar el radio característico  $R_0$  a partir de la condición de que el choque es estacionario. En este caso, los momentos de los dos vientos son iguales en la posición del choque. Por tanto, utilizando la ecuación de momento en  $\theta = 0$  obtenemos lo siguiente:

$$\rho_{ws}v_w^2 = \rho_{ws1}v_{w1}^2 \quad (\text{B.1})$$

Donde  $\rho_{ws}$  y  $\rho_{ws1}$  son las densidades de los dos vientos en la posición del choque. Por otro lado, como la tasa de pérdida de masa es constante para un ángulo  $\theta$  dado, entonces podemos hacer lo siguiente:

$$\frac{\dot{M}_w^0}{4\pi R_0^2 v_w} v_w^2 = \frac{\dot{M}_{w1}^0}{4\pi (D - R_0)^2 v_{w1}} v_{w1}^2 \quad (\text{B.2})$$

En esta última ecuación hemos sustituído  $\dot{M}_w^0 = 4\pi R_0^2 v_w \rho_{ws}$  y  $\dot{M}_{w1}^0 = 4\pi (D - R_0)^2 v_{w1} \rho_{ws1}$ .

Reduciendo la ecuación (B.2) encontramos una expresión para  $R_0$ :

$$\frac{R_0}{D} = \frac{\beta^{1/2}}{1 + \beta^{1/2}} \quad (\text{B.3})$$

## B.2. Alatud de Choques tipo Cantoides y An-cantoides

$R_{90}$  puede determinarse a partir de evaluar las ecuaciones (3.23) y (3.24) en  $\theta = \frac{\pi}{2}$  como sigue:

$$\frac{R_{90}}{D} = \tan \theta_{1,90} \quad (\text{B.4})$$

$$\theta_{1,90} \cot \theta_{1,90} - 1 = -\frac{2\beta}{k+2} \quad (\text{B.5})$$

Donde  $\theta_{1,90} = \theta_1(\frac{\pi}{2})$ . Introducimos un nuevo parámetro  $\xi \equiv \frac{2}{k+2}$  de modo que combinando las dos ecuaciones anteriores obtenemos lo siguiente:

$$\frac{R_{90}}{D} = \tan \theta_{1,90} = \frac{\theta_{1,90}}{1 - \xi \beta} \quad (\text{B.6})$$

Hacemos una expansión en serie para el lado izquierdo de la ecuación y reducimos:

$$\theta_{1,90}^2 \left( 1 + \frac{\theta_{1,90}^2}{15} \right) \simeq 3\beta\xi \quad (\text{B.7})$$

Tomamos la solución a primer orden  $\theta_{1,90} = 3\beta\xi$ , sustituímos este valor en el término correctivo y resolvemos para  $\theta_{1,90}$ :

$$\theta_{1,90} = \left( \frac{3\xi\beta}{1 + \frac{1}{5}\xi\beta} \right)^{1/2} \quad (\text{B.8})$$

Finalmente sustituímos (B.8) en (B.6) para obtener  $R_{90}$ :

$$\frac{R_{90}}{D} = \frac{(3\xi\beta)^{1/2}}{\left(1 + \frac{1}{5}\xi\beta\right)^{1/2}(1 - \xi\beta)} \quad (\text{B.9})$$

$$\Lambda = \frac{(3\xi)^{1/2}(1 + \beta^{1/2})}{\left(1 + \frac{1}{5}\xi\beta\right)^{1/2}(1 - \xi\beta)} \quad (\text{B.10})$$

### B.3. Planitud de choques tipo Cantoides y An-cantoides

Siendo que el choque de proa en nuestro modelo genérico es simétrico, entonces la forma  $R(\theta)$  debe ser una función par, por tanto podemos hacer la siguiente expansión en serie:

$$R(\theta) \simeq R_0 + R_{\theta,\theta,0}\theta^2 + \mathcal{O}(\theta^4) \quad (\text{B.11})$$

De esta forma la planitud del choque en el ápex queda como sigue (ver apéndice A):

$$\Pi = (1 - 2R_{\theta\theta,0})^{-1} \quad (\text{B.12})$$

Para encontrar el coeficiente de segundo orden  $R_{\theta\theta,0}$  hacemos una expansión en serie de las ecuaciones (3.24) y (3.23) para ángulos pequeños, mostrando a continuación la expansión de cada término para al final hacer la reducción algebraica:

$$\theta_1 \cot \theta_1 - 1 \simeq -\frac{\theta_1^2}{3} \left( 1 + \frac{\theta_1^2}{15} \right) \quad (\text{B.13})$$

$$\cos^k \theta \simeq \left( 1 - \frac{\theta^2}{2} \right)^k \simeq \left( 1 - \frac{k\theta^2}{2} \right) \quad (\text{B.14})$$

$$\sin^2 \theta \simeq \theta^2 \left( 1 - \frac{\theta^2}{6} \right)^2 \simeq \theta^2 \left( 1 - \frac{\theta^2}{3} \right) \quad (\text{B.15})$$

$$\implies \cos^k \theta \sin^2 \theta \simeq \theta^2 \left[ 1 - \left( \frac{1}{3} + \frac{k}{2} \right) \theta^2 \right] \quad (\text{B.16})$$

$$\implies I_k(\theta) \simeq \frac{\theta^3}{3} \left[ 1 - \frac{1}{10} (3k+2) \theta^2 \right] \quad (\text{B.17})$$

$$\cot \theta \simeq \theta^{-1} \left( 1 - \frac{\theta^2}{3} \right) \quad (\text{B.18})$$

$$\implies 2\beta I_k(\theta) \cot \theta \simeq \frac{2}{3} \beta \theta^2 \left[ 1 - \frac{1}{30} (9k+16) \theta^2 \right] \quad (\text{B.19})$$

$$-\frac{2\beta}{k+2} \left( 1 - \cos^{k+2} \theta \right) \simeq \beta \theta^2 \left[ 1 - \frac{1}{12} (3k+4) \right] \quad (\text{B.20})$$

Sustituyendo las expansiones anteriores en (3.24) obtenemos lo siguiente:

$$\theta_1^2 \left( 1 + \frac{\theta_1^2}{15} \right) \simeq \beta \theta^2 \left[ 1 + \frac{1}{60} (4 - 9k) \theta^2 \right] \quad (\text{B.21})$$

La solución a primer orden (ignorando el término cuártico) es  $\theta_1^2 \simeq \beta \theta^2$ . Sustituímos esta solución en el término correctivo y resolvemos para  $\theta_1^2$ :

$$\theta_1^2 \simeq \beta\theta^2 \left[ 1 + \frac{1}{60} (4 - 9k) \theta^2 \right] \left( 1 + \frac{\beta\theta^2}{15} \right)^{-1} \quad (\text{B.22})$$

$$\theta_1^2 \simeq \beta\theta^2 \left[ 1 + \frac{1}{60} (4 - 9k) \theta^2 \right] \left( 1 - \frac{\beta\theta^2}{15} \right) \quad (\text{B.23})$$

$$\implies \theta_1^2 \simeq \beta\theta^2 (1 + 2C_{k\beta}\theta^2) \quad (\text{B.24})$$

$$\text{Donde : } C_{k\beta} = \frac{1}{2} \left( A_k - \frac{\beta}{15} \right) \quad (\text{B.25})$$

$$A_k = \frac{1}{15} - \frac{3k}{20} \quad (\text{B.26})$$

Utilizamos esta solución para  $\theta_1$  en la ecuación (3.23), ignorando términos de orden superior al cuártico dentro de los corchetes:

$$\theta_1 \simeq \beta^{1/2}\theta (1 + 2C_{k\beta}\theta^2)^{1/2} \quad (\text{B.27})$$

$$\implies \theta + \theta_1 \simeq \theta \left[ 1 + \beta^{1/2} (1 + C_{k\beta}\theta^2) \right] \quad (\text{B.28})$$

$$\sin \theta_1 \simeq \theta_1 \left( 1 - \frac{\theta_1^2}{6} \right) \quad (\text{B.29})$$

$$\simeq \beta^{1/2}\theta (1 + C_{k\beta}\theta^2) \left[ 1 - \frac{\beta\theta^2 (1 + 2C_{k\beta}\theta^2)}{6} \right] \quad (\text{B.30})$$

$$\implies \sin \theta_1 \simeq \beta^{1/2}\theta \left[ 1 + \left( C_{k\beta} - \frac{\beta}{6} \right) \theta^2 \right] \quad (\text{B.31})$$

$$\sin(\theta + \theta_1) \simeq (\theta + \theta_1) \left[ 1 - \frac{(\theta + \theta_1)^2}{6} \right] \quad (B.32)$$

$$\simeq \theta \left[ 1 + \beta^{1/2} (1 + C_{k\beta} \theta^2) \right] \left[ 1 - \frac{\theta^2 (1 + \beta^{1/2} (1 + C_{k\beta} \theta^2))^2}{6} \right] \quad (B.33)$$

$$\simeq \theta \left( 1 + \beta^{1/2} \right) \left[ 1 + \left( \frac{\beta^{1/2} C_{k\beta}}{1 + \beta^{1/2}} - \frac{1}{6} (1 + \beta^{1/2})^2 \theta^2 \right) \right] \quad (B.34)$$

$$\implies \frac{R}{D} \simeq \frac{\beta^{1/2}}{1 + \beta^{1/2}} \left[ 1 + \left( C_{k\beta} - \frac{\beta}{6} \right) \theta^2 \right] \\ \left[ 1 + \left( \frac{\beta^{1/2} C_{k\beta}}{1 + \beta^{1/2}} - \frac{(1 + \beta^{1/2})^2}{6} \right) \right]^{-1} \quad (B.35)$$

$$\simeq R_0 \left[ 1 + \left( \frac{C_{k\beta}}{1 + \beta^{1/2}} + \frac{1 + 2\beta^{1/2}}{6} \right) \theta^2 \right] \quad (B.36)$$

De esta mostramos que el término de segundo orden que necesitamos en la ecuación (3.27) está dado por (3.28)

## B.4. Radio de Curvatura para choques tipo Wilkinoides

Hacemos expansión Taylor hasta cuarto orden de cada uno de los términos de la ecuación (3.36)

$$\csc^2 \theta \simeq \theta^{-2} \left( 1 - \frac{\theta^2}{6} + \mathcal{O}(\theta^4) \right)^{-2} \simeq \theta^{-2} \left( 1 + \frac{\theta^2}{3} + \mathcal{O}(\theta^4) \right) \quad (B.37)$$

$$\theta \cot \theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{3} \left( 1 + \frac{\theta^2}{15} + \mathcal{O}(\theta^4) \right) \quad (B.38)$$

$$\implies 1 - \theta \cot \theta \simeq \frac{\theta^2}{3} \left( 1 + \frac{\theta^2}{15} + \mathcal{O}(\theta^4) \right) \quad (B.39)$$

Sustituímos en la ecuación (3.36):

$$R(\theta) \simeq R_0 \left[ 3\theta^{-2} \left( 1 + \frac{\theta^2}{3} + \mathcal{O}(\theta^4) \right) \frac{\theta^2}{15} \left( 1 + \frac{\theta^2}{15} \right) \right]^{1/2} \quad (\text{B.40})$$

$$\implies R(\theta) \simeq R_0 \left[ 1 + \frac{2\theta^2}{5} + \mathcal{O}(\theta^4) \right]^{1/2} \quad (\text{B.41})$$

$$\implies R(\theta) \simeq R_0 \left[ 1 + \frac{\theta^2}{5} + \mathcal{O}(\theta^4) \right] \quad (\text{B.42})$$

De esta forma mostramos que el coeficiente de segundo orden en este caso es  $R_{\theta\theta,0} = \frac{1}{5}$ . Por lo tanto, sustituyendo este valor en la ecuación (A.23) encontramos que

$$\Pi = \frac{5}{3} \quad (\text{B.43})$$



## Apéndice C

# Coeficientes de los parámetros de la hipérbola para el ajuste de la cola

Como ya se mencionó en la §3.5, se hizo un ajuste numérico a la cola de un set de choques de proa con parámetros dentro de una malla pequeña para los parámetros del choque  $(\beta, \xi)$ , que se encuentran dentro de los rangos  $-4,3 < \log \beta < -1$  y  $0,2 < \xi < 1$ , de modo que los coeficientes encontrados solo son válidos en este rango, pero es lo suficientemente amplio como para abarcar el espectro de choques de proa observados en ONC.

El ajuste nos permitió encontrar una tabla de valores para los parámetros de la hipérbola  $(x_{0,t}, x_{0,t} - a_t)$ . En particular, para  $x_{0,t}$  se observó que la dependencia con  $\beta$  tenía un comportamiento que tendía a ser de una ley de potencias, con un índice de  $\sim -0,55$ , y cuyo residuo ajustó a un polinomio de tercer grado del logaritmo de  $\beta$ . Para  $x_{0,t} - a_t$  se ajustó un polinomio de segundo grado para el logaritmo de  $\beta$ . En la figura C.1 se muestra el residuo de  $x_0$  y  $x_{0,t} - a_t$  como función de  $\beta$  para diferentes valores de  $\xi$ , mientras que en la figura C.2 se muestra el ajuste de los coeficientes  $C_k$  y  $D_k$  en función de  $\xi$ , que resultó ser un polinomio de segundo grado. Los parámetros del ajuste para todos los coeficientes se muestran en la tabla 3.1.

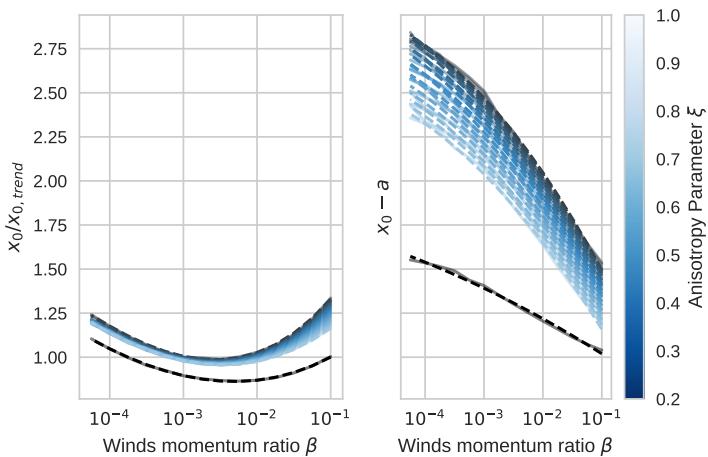


Figura C.1: Ajuste de los parámetros  $x_{0,t}$  (normalizado con la tendencia) y  $x_{0,t} - a_t$ . En cada curva se utiliza un valor diferente del parámetro de anisotropía  $\xi$ , indicado por la barra de colores. La curva negra representa el ajuste del caso “isotrópico”. En el caso del residuo del coeficiente  $x_{0,t}$  se ajustó a un polinomio de tercer grado en función del logaritmo de  $\beta$ , y se obtuvieron los coeficientes  $(C_k(\xi))$ , donde  $k = [0, 1, 2, 3]$  mientras que para  $x_{0,t} - a_t$  el ajustó un polinomio de segundo grado, y se obtuvieron los coeficientes  $D_k(\xi)$ , donde  $k = [0, 1, 2]$ .

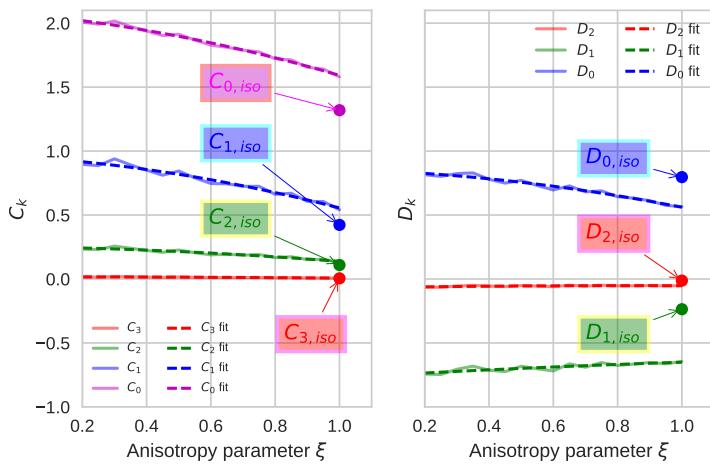


Figura C.2: Ajuste de los coeficientes  $C_k$  y  $D_k$  de los ajustes de los parámetros  $x_{0,t}$  y  $x_{0,t} - a_t$ . En ambos casos se ajustó un polinomio de segundo grado de donde se obtuvieron los coeficientes  $c_k$  y  $d_k$ , donde  $k = [0, 1, 2]$ . Para el caso isotrópico se obtuvo un valor único de los coeficientes  $C_k$  y  $D_k$ . Los valores numéricos de todos estos coeficientes se encuentran en la tabla 3.1