

# Tesis de doctorado

Jorge Alejandro Tarango Yong

8 de junio de 2017

---

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

INSTITUTO DE RADIOASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA

“Estudio de la Interacción de Flujos Múltiples de Fuentes Astrofísicas, Aplicada  
a los Proplyds Clásicos de la Nebulosa de Orión”

T E S I S

PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE  
DOCTOR EN CIENCIAS (ASTRONOMÍA)

P R E S E N T A

JORGE ALEJANDRO TARANGO YONG

Director de Tesis: Dr. William J. Henney

Morelia, Michoacán

2017

# Índice general

<b>1. Objetos Astrofísicos Relevantes</b>	<b>9</b>
1.1. La Nebulosa de Orión . . . . .	10
1.2. Estrellas “Errantes” . . . . .	10
1.3. Discos Protoplanetarios . . . . .	10
1.4. Proplyds . . . . .	10
1.4.1. Descubrimiento . . . . .	10
1.4.2. ¿Qué es un proplyd? Breve introducción . . . . .	10
1.4.3. Mecanismos de fotoevaporación (Johnstone et al., 1998) . . . . .	10
1.4.4. Forma del frente de ionización (Johnstone et al., 1998) . . . . .	12
1.5. Objetos LL . . . . .	12
1.5.1. Mapa de Objetos . . . . .	12
<b>2. Marco Teórico</b>	<b>13</b>
2.1. Vientos Estelares . . . . .	14
2.2. Choques . . . . .	14
2.3. Frentes de Ionización . . . . .	14
2.4. Regiones HII . . . . .	14
2.5. Modelo Genérico de los Choques de Proa . . . . .	14
2.5.1. Radios “Característicos” . . . . .	15
2.6. Aproximación Hipersónica . . . . .	15
2.7. Proyección en el Plano del Cielo . . . . .	15
2.7.1. Vectores normal y tangente a la superficie . . . . .	16
2.7.2. Línea tangente . . . . .	17
2.7.3. Radios característicos en el plano del cielo . . . . .	18
2.8. Cuádricas de Revolución . . . . .	19

---

2.8.1. Radios Característicos . . . . .	20
2.8.2. Proyección en el plano del cielo . . . . .	21
<b>3. Herramientas de Programación</b>	<b>25</b>
<b>4. The Work</b>	<b>27</b>
<b>5. Resultados obtenidos</b>	<b>29</b>
<b>6. Conclusiones</b>	<b>31</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>33</b>

## **Agradecimientos**

Esta tesis se realizó para obtener el título de doctorado en ciencias (Astronomía).

Deseo aprovechar esta sección para hacer agradecimientos a personas y/o instituciones que me ayudaron para que pueda completar este trabajo de manera exitosa.

## **Resumen**

Abstract en español

## **Abstract**

Abstract written in english





## **Capítulo 1**

# **Objetos Astrofísicos Relevantes**

## **1.1. La Nebulosa de Orión**

## **1.2. Estrellas “Errantes”**

## **1.3. Discos Protoplanetarios**

## **1.4. Proplyds**

### **1.4.1. Descubrimiento**

Observaciones en óptico de la región del trapecio en filtros de banda angosta de diferentes líneas de emisión tales como  $H\alpha$ ,  $H\beta$ ,  $[OIII]$ ,  $[NII]$ ,  $[SII]$  y continuo, revelaron la existencia de objetos puntuales únicamente visibles en líneas de alta ionización ( $H\alpha$ ,  $H\beta$  y  $[OIII]$ ) que fueron inicialmente denominados como “condensaciones nebulares” (Laques & Vidal, 1979). Hasta el momento no se sabía con certeza si “condensaciones nebulares” eran en realidad condensaciones nebulares (regiones donde la densidad de la nebulosa es inusualmente alta por alguna razón o bien esferas de gas molecular cuya envolvente fue ionizada y que la radiación de la estrella central la está “erosionando”) o si se trataba de protoestrellas de baja masa cuyo disco protoplanetario estaba siendo fotoevaporado por la estrella central (Churchwell et al., 1987). No fue sino hasta que se contó con observaciones de alta resolución con el Telescopio Espacial Hubble (HST) que se pudo determinar la verdadera naturaleza de estos objetos (O’dell et al., 1993) y la razón por la que se les denominó “proplyds” (PROtoPLANetarY DiskS). A su vez se encontraron por primera vez arcos delgados y otras estructuras de gran interés.

### **1.4.2. ¿Qué es un proplyd? Breve introducción**

### **1.4.3. Mecanismos de fotoevaporación (Johnstone et al., 1998)**

El principal mecanismo de fotoevaporación es el campo de radiación de la estrella central, especialmente en la parte ultravioleta del espectro electromagnético. Según la masa de la estrella central, podemos tener dos clases de flujo radiativo: Dominado por el ultravioleta lejano (FUV,  $h\nu < 13,6 \text{ eV}$ ) o dominado por el ultravioleta extremo (EUV,  $h\nu \geq 13,6 \text{ eV}$ ). En general, el FUV se encarga de disociar moléculas y de calentar el gas de la región de

Figura 1.1: Representación esquemática de las regiones del flujo fotoevaporado de un proplyd. Izquierda: Cuando el flujo es dominado por el FUV. Derecha: Flujo dominado por EUV (Johnstone et al., 1998)

fotodisociación (PDR) hasta temperaturas de 100 - 1000 K, mientras que el EUV puede ionizar el gas y elevar su temperatura hasta  $10^4$  K. El EUV no puede atravesar el frente de ionización (IF) pero el FUV sí.

En el caso de que el flujo sea dominado por el EUV, la presión térmica del flujo fotoevaporado es determinada por la fotoionización, la PDR producida por el FUV es delgada. El gas calentado por el FUV se mueve de manera subsónica hasta llegar al IF y la tasa de pérdida de masa depende de la tasa de ionización inducida por el EUV.

Si el flujo está dominado por el FUV, la presión térmica depende del calentamiento por el FUV. El gas tibio se expande como un viento que empuja el IF lejos del disco. La tasa de pérdida de masa la determina la temperatura de la PDR, el flujo FUV y la opacidad del polvo a las longitudes de onda del FUV.

Inicialmente la forma del disco impone una geometría cilíndrica en el flujo fotoevaporado, pero eventualmente los gradientes de presión tornan esta geometría en esférica.

Las ecuaciones de continuidad de la masa y el momento restringen la velocidad del flujo neutro antes de alcanzar el IF. Mas allá de éste, la presión del gas hace que éste se expanda a velocidades del orden de una a dos veces la velocidad del sonido. Para el gas neutro dentro del IF hay dos posibles soluciones: si el gas neutro es supersónico entonces el IF será de baja densidad (Tipo R) con bajo contraste de densidad entre gas neutro y gas ionizado. O si el gas neutro es subsónico se formará un IF tipo D con un gran contraste de densidad entre el gas neutro y el gas ionizado. Sin embargo, sin importar qué tipo de radiación domina la fotoevaporación, el gas neutro permanece a velocidades subsónicas al llegar al IF, por lo que dicho frente será tipo D. En el caso de un flujo dominado por el EUV, el gas neutro permanece a velocidad subsónica, su velocidad decae como  $v_I r^{-2}$  y llega a  $0,5 \text{ km s}^{-1}$  al llegar al frente de ionización. Cuando el flujo es dominado por el FUV, el gas neutro se acelera hasta llegar a velocidades supersónicas, luego atraviesa un choque isotérmico que lo desacelera y llega al frente de ionización a  $0,5 \text{ km s}^{-1}$ .

Sin importar el tipo de mecanismo de fotoevaporación dominante, el flujo fotoevaporado solo si la presión térmica supera a la gravedad de la protoestrella. Entonces, el flujo fotoevaporado solo existe a partir de un radio crítico  $r_g$ , donde este radio se estima a partir del balance entre la energía necesaria para escapar de una órbita kepleriana y la energía térmica:

$$r_g = \frac{GM_*}{a^2} \quad (1.1)$$

Donde  $M_*$  es la masa de la protoestrella y  $a$  es la velocidad del sonido del gas.

Para las protoestrellas típicas del trapecio la masa típica es de  $M_* = 0,2 M_\odot$ .

Para el gas neutro la velocidad del sonido es de  $a_I \sim 3 \text{ km s}^{-1}$  y para el gas ionizado es de  $a_{II} \sim 10 \text{ km s}^{-1}$ . Por tanto, el radio gravitacional para un flujo dominado por el EUV es de  $r_{gII} \sim 2 \text{ AU}$  y para un flujo dominado por el FUV es de  $r_{gI} \sim 20 \text{ AU}$ . El radio del frente de ionización escala como  $r_{IF} D^{2/3}$

### 1.4.4. Forma del frente de ionización (Johnstone et al., 1998)

## 1.5. Objetos LL

### 1.5.1. Mapa de Objetos

## **Capítulo 2**

# **Marco Teórico**

Figura 2.1: Representación esquemática de vientos con diferentes anisotropías: Arriba izquierda: Viento isotrópico esférico. Arriba derecha: viento isotrópico hemisférico. Abajo: Vientos anisotrópicos donde el parámetro  $k$  indica el grado de anisotropía (ver sección 2.6)

## 2.1. Vientos Estelares

## 2.2. Choques

## 2.3. Frentes de Ionización

## 2.4. Regiones HII

Las regiones HII se forman cuando una estrella masiva, de tipo espectral O ó B temprana, ioniza el gas que se encuentra a su alrededor. El gas ionizado se encuentra en equilibrio térmico, a una temperatura del orden de  $10^4$  K. El principal proceso de calentamiento es la radiación de la estrella central, mientras que el enfriamiento se da principalmente por la recombinación de líneas prohibidas y por emisión libre-libre.

## 2.5. Modelo Genérico de los Choques de Proa

Para este trabajo consideramos en general dos modelos de interacción de vientos:

- Una fuente localizada en el origen que emite un viento esférico que puede ser isotrópico o anisotrópico (figura 2.5) no acelerado que interactúa con el viento esférico isotrópico de otra fuente que se encuentra a una distancia  $D$  de la primera (figura 2.5)
- Una fuente localizada en el origen que emite un viento esférico isotrópico no acelerado que interactúa con un viento plano paralelo no acelerado y densidad constante (figura )

El sistema en su conjunto tiene simetría cilíndrica.

Figura 2.2: Representación esquemática de los radios característicos de un choque de proa

### 2.5.1. Radios “Característicos”

Las cantidades medibles que nos ayudan a caracterizar un choque de proa las llamamos “Radios característicos” (ilustrados en la figura 2.5.1):

- Radio del choque en la dirección del eje de simetría del sistema. Denotado como  $R_0$
- Radio en dirección perpendicular al eje de simetría del sistema. Denotado como  $R_{90}$
- Radio de curvatura en la “nariz” del choque de proa. Denotado como  $R_c$

. Para este trabajo resulta útil hacer una normalización de los radios característicos u otros radios, para que las mediciones que obtengamos sean adimensionales. De esta forma, podemos hacer la normalización con la distancia  $D$ , o bien con  $R_0$ , dependiendo de qué tipo de normalización resulte más conveniente. En el primer caso expresamos explícitamente el cociente (e.g  $\frac{R_0}{D}$ ,  $\frac{R_c}{D}$ ,  $\frac{R_{90}}{D}$ ), y en el segundo caso añadiremos una tilde al radio en cuestión (e.g  $\tilde{R}_c$ ,  $\tilde{R}_{90}$ ).

## 2.6. Aproximación Hipersónica

### 2.7. Proyección en el Plano del Cielo

Para un choque de proa que es la vez geoméricamente delgado y ópticamente delgado, únicamente se observa el borde de éste por abrillantamiento al limbo, por lo tanto, sua orientación respecto a la línea de visión modifica su forma respecto a la forma real del choque. Para ello, rotamos el sistema de referencia del choque de proa en coordenadas cartesianas, denotado por  $(x, y, z)$ , por un ángulo que llamamos *inclinación*, denotado por  $i$ , en el plano  $xz$ , de modo que la transformación entre el sistema de refencia del choque y el sistema de referencia del plano del cielo, denotado por  $(x', y', z')$  queda como sigue:

Figura 2.3: Sistema de referencia del choque vs sistema de referencia del plano del cielo. Los ejes  $x'$  y  $y'$  se encuentran en el plano del cielo, mientras el eje  $z'$  es paralelo a la línea de visión. Solo la región del choque cuya tangente sea paralela a la línea de visión será visible por abrillantamiento al limbo.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos i - z \sin i \\ y' \\ z \cos i + x \sin i \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Por otro lado, la forma tridimensional del choque de proa viene dado por:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

La relación entre ambos sistemas de referencia se ilustra en la figura 2.7.

### 2.7.1. Vectores normal y tangente a la superficie

Si definimos los vectores  $\hat{n}$  y  $\hat{t}$ , como los vectores normal y tangente a la superficie, respectivamente para  $\phi$  constante. En el caso  $\phi = 0$  (figura 2.7.1), ambos vectores se encuentran en el plano  $xy$  y es fácil mostrar que:

$$\hat{t}_0 = \begin{pmatrix} -\cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \hat{n}_0 = \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Donde:

$$\tan \alpha = -\frac{dy}{dx} = \frac{1 + \omega \tan \theta}{\tan \theta - \omega} \quad (2.4)$$

y:

$$\omega(\theta) = -\frac{1}{R} \frac{dR}{d\theta} \quad (2.5)$$



Figura 2.4: Vectores unitarios normal y tangente a la superficie  $R(\theta)$  en un plano de azimuth  $\phi$  constante.

Para otros valores de  $\phi$ , basta con hacer una rotación de las ecuaciones (2.3) alrededor del eje  $x$ . Para la conversión al sistema de referencia del plano del cielo se utiliza la ecuación (2.1):

$$\hat{n}' = \frac{1}{(1 + \omega^2)^{1/2}} \quad (2.6)$$

$$\times \begin{pmatrix} (\cos \theta + \omega \sin \theta) \cos i - (\sin \theta - \omega \cos \theta) \sin i \sin \phi \\ (\sin \theta - \omega \cos \theta) \cos \phi \\ (\cos \theta + \omega \sin \theta) \sin i + (\sin \theta - \omega \cos \theta) \sin \phi \cos i \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

$$\hat{t}' = \frac{1}{(1 + \omega^2)^{1/2}} \quad (2.8)$$

$$\times \begin{pmatrix} -(\sin \theta - \omega \cos \theta) \cos i - (\cos \theta + \omega \sin \theta) \sin i \sin \phi \\ (\cos \theta + \omega \sin \theta) \cos \phi \\ -(\cos \theta + \omega \sin \theta) \sin i + (\sin \theta - \omega \cos \theta) \sin \phi \cos i \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

### 2.7.2. Línea tangente

Debido a que el choque es ópticamente delgado y geoméricamente delgado, solo la región del choque cuya tangente sea paralela a la línea de visión será visible. Esto corresponde a una curva que denominamos *línea tangente*, que debe cumplir con la siguiente condición:

$$\hat{n}' \cdot \hat{z}' = 0 \quad (2.10)$$

Denotamos como  $\phi_T$  al ángulo azimutal que cumple la condición anterior para una inclinación dada, en función del ángulo polar  $\theta$ :

$$\sin \phi_T = \tan i \tan \alpha = \tan i \frac{1 + \omega \tan \theta}{\omega - \tan \theta} \quad (2.11)$$

De esta manera, la forma de la línea tangente del choque de proa, a la que llamamos *forma proyectada* viene dada por:

$$\begin{pmatrix} x'_T \\ y'_T \\ z'_T \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} \cos \theta \cos i - \sin \theta \sin \phi_T \sin i \\ \sin \theta (1 - \sin^2 \phi_T)^{1/2} \\ \cos \theta \sin i + \sin \theta \sin \phi_T \cos i \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

En el caso general,  $z'_T$  no es una función lineal de  $x'_t$  y  $y'_T$ , por lo que la línea tangente no se encuentra en un plano.

La forma aparente  $(x'_t, y'_T)$  de la línea tangente también puede escribirse en coordenadas polares  $(R', \theta')$ , donde:

$$R'(\theta) = \left( x'^2_t + y'^2_T \right)^{1/2} \quad \text{y} \quad \tan \theta' = \frac{y'_T}{x'_T} \quad (2.13)$$

Es de notar a su vez que la ecuación (2.11) no tiene solución para valores arbitrarios de  $\theta$  y de la inclinación, puesto que se requiere que  $|\sin \phi_T| < 1$ . Por tanto, la línea tangente solo existe para valores de  $\theta$  tales que  $\theta < \theta_0$  donde  $\theta_0$  es el valor de  $\theta$  en el eje de simetría de la línea tangente proyectada ( $\theta'(\theta_0) = 0$ ) y que se obtiene de la siguiente ecuación implícita:

$$\tan \theta_0 = \frac{|\tan i| + \omega(\theta_0)}{1 - \omega(\theta_0)|\tan i|} \quad (2.14)$$

Esto implica que si el choque de proa es suficientemente “abierto” ( $\alpha > \alpha_{min}$ ), entonces para inclinaciones tales que  $|i| > 90^\circ - \alpha_{min}$  no existirá la línea tangente para ningún valor de  $\theta$ , es decir, el choque de proa se encontrará suficientemente “de cara” como para que ya no parezca un choque de proa para el observador.

### 2.7.3. Radios característicos en el plano del cielo

En orden de comparar la forma  $R(\theta)$  con observaciones, es útil definir los radios característicos  $R'_0$  y  $R'_{90}$ , donde  $R'_0$  es el radio del eje de simetría aparente y  $R'_{90}$  es el radio aparente en la dirección perpendicular a  $R'_0$ . Es decir  $R'_0 = x'_T(y'_t = 0)$  y  $R'_{90} = y'_T(x'_t = 0)$ . Utilizando las ecuaciones (2.11) y (2.12) encontramos que:

$$R'_0 = R(\theta_0) \cos(\theta_0 + i) \quad (2.15)$$

Donde  $\theta_0$  es la solución de la ecuación (2.14), y

$$R'_{90} = R(\theta_{90}) \sin \theta_{90} \left(1 - \sin^2 \phi_T(\theta_{90})\right)^{1/2} \quad (2.16)$$

donde  $\theta_{90}$  es la solución de la siguiente ecuación implícita:

$$\cot \theta_{90} = \frac{1 - \left(1 + \omega(\theta_{90})^2 \sin^2 2i\right)^{1/2}}{2\omega(\theta_{90}) \cos^2 i} \quad (2.17)$$

## 2.8. Cuádricas de Revolución

En el caso general es difícil encontrar la forma aparente para un choque de proa siguiendo el formalismo desarrollado en la sección anterior, por lo que optamos por aproximar la forma éstos con una de las superficies más simples: las *cuádricas de revolución*, que son superficies de revolución de las curvas cónicas.

Dado el modelo general descrito en la sección 2.5, haremos algunas restricciones para las superficies cuádricas que utilizaremos en este trabajo:

- El eje focal se encuentra alineado con el eje  $x$
- La posición del foco de la superficie cuádrlica no necesariamente coincide con la posición de la fuente
- En el caso de las hipérbolas, solo tomamos una de las ramas de ésta.

Implementando dichas restricciones, utilizamos la representación paramétrica de las curvas cónicas en términos de un parámetro adimensional denotado con la letra  $t$  de manera general:

$$x = aC(t) + x_0 \quad (2.18)$$

$$y = bS(t) \quad (2.19)$$

Donde:

$$C(t) = \begin{cases} \cos t & \theta_c > 0 \\ -\cosh t & \theta_c < 0 \end{cases} \quad (2.20)$$

$$S(t) = \begin{cases} \sin t & \theta_c > 0 \\ \sinh t & \theta_c < 0 \end{cases} \quad (2.21)$$

$$x_0 = R_0 \mp a \quad (2.22)$$

Figura 2.5: Representación esquemática de: Izquierda: Elipse. Y, derecha: Hipérbola. En ambos casos se ilustran los parámetros relevantes de éstas y los radios característicos

Figura 2.6: Familia de curvas cónicas, donde el valor del parámetro  $\theta_c$  varía desde  $\theta_c < 0$  (hipérbolas) hasta  $\theta_c > 0$  (elipses). Casos especiales son  $\theta_c = 0$  (parábola) y  $\theta_c = 45^\circ$  (círculo). Este parámetro sustituye en este trabajo a la excentricidad.

Donde  $a$  y  $b$  representan la longitud del semi-eje mayor y menor, respectivamente (Figura 2.8).  $x_0$  representa la distancia entre el centro de la cónica y el origen.  $\theta_c$  es un parámetro que está relacionado con la excentricidad y que en este trabajo sustituye a ésta y que están relacionadas por la siguiente expresión:

$$\tan \theta_c = \pm \sqrt{|1 - e^2|} \quad (2.23)$$

Tomamos el signo positivo cuando la cantidad dentro de las barras de valor absoluto es positiva y viceversa (Figura 2.8). También podemos definirlo en términos de los parámetros de las cónicas:

$$\tan \theta_c = \pm \frac{b}{a} \quad (2.24)$$

Siguiendo la convención de que el signo positivo corresponde a elipses, negativo a hipérbolas y cero para las parábolas.

### 2.8.1. Radios Característicos

Para que las curvas cónicas den una buena aproximación a la forma de un choque de proa dado, necesitamos saber calcular los radios característicos para éstas. A partir de la descripción de estos en la sección 2.5.1 podemos encontrar expresiones para cada uno de éstos en términos de los parámetros de las cónicas:

$$R_c = \frac{b^2}{a} \quad (2.25)$$

$$R_{90} = b \left[ \pm \left( 1 - \frac{(R_0 - a)^2}{a^2} \right) \right]^{1/2} \quad (2.26)$$

$R_0$  es independiente de los parámetros de las cónicas, por tanto, en esta sección nos será útil normalizar con este radio. De esta forma, podemos invertir las siguientes ecuaciones:

$$\tilde{a} = \pm \frac{\tilde{R}_c}{2\tilde{R}_c - \tilde{R}_{90}^2} \quad (2.27)$$

$$\tilde{b} = \frac{\tilde{R}_c}{|2\tilde{R}_c - \tilde{R}_{90}^2|^{1/2}} \quad (2.28)$$

$$\tan \theta_c = \pm |2\tilde{R}_c - \tilde{R}_{90}^2|^{1/2} \quad (2.29)$$

Nótese que la cantidad  $T_c \equiv 2\tilde{R}_c - \tilde{R}_{90}^2$  nos sirve como discriminante para distinguir el tipo de curva cónica que mejor ajusta a un choque de proa dado.

### 2.8.2. Proyección en el plano del cielo

El objetivo de esta sección es obtener la forma proyectada de las cuádricas de revolución, puesto que son una aproximación buena y mucho más sencilla a la forma real de un choque de proa. La forma tridimensional de las cuádricas de revolución viene dada por:

$$x = aC(t) - x_0 \quad (2.30)$$

$$y = bS(t) \cos \phi \quad (2.31)$$

$$z = bS(t) \sin \phi \quad (2.32)$$

Siguiendo el procedimiento mostrado en la sección 2.7 calculamos el ángulo azimutal  $\phi$  que cumple con el criterio de ser tangente a la línea de visión:

$$\sin \phi_T = \frac{b}{a} \tan i \mathcal{T}(t) \quad (2.33)$$

Donde:

$$\mathcal{T}(t) = \begin{cases} \cot t & \text{if } \theta_c > 0 \\ \coth t & \text{if } \theta_c < 0 \end{cases} \quad (2.34)$$

Podemos movernos a otro sistema de referencia  $(X, Y)$  centrado en el origen, donde  $X = x - x_0$  y  $Y = y$ . En este sistema, utilizamos la ecuación (2.1) para obtener la forma aparente de una cuádrica dada:

$$X'_T = \frac{C(t)}{a \cos i} (a^2 \cos^2 i \pm b^2 \sin^2 i) \quad (2.35)$$

$$Y'_T = b \mathcal{S}(t) \left( 1 - \frac{b^2}{a^2} \tan^2 i \mathcal{T}^2(t) \right)^{1/2} \quad (2.36)$$

Se espera que la forma proyectada de una cuádrica dada sea otra cuádrica del mismo tipo, por lo que es posible escribir las ecuaciones (2.35) y (2.36) de la siguiente manera:

$$X'_T = a' C(t') \quad (2.37)$$

$$Y'_T = b' \mathcal{S}(t') \quad (2.38)$$

Donde:

$$a' = (a^2 \cos^2 i \pm b^2 \sin^2 i)^{1/2} \quad (2.39)$$

$$b' = b \quad (2.40)$$

$$C(t') = \frac{a' C(t)}{a \cos i} \quad (2.41)$$

$$\mathcal{S}(t') = (1 - C^2(t'))^{1/2} \quad (2.42)$$

También implica que para encontrar los radios característicos en el sistema de referencia del observador solamente tenemos que sustituir  $a$  y  $b$  por  $a'$  y  $b'$  en las ecuaciones (2.22), (2.25), (2.26) y (2.24):

Figura 2.7: Diagrama de diagnóstico  $\tilde{R}'_{90}$  vs  $\tilde{R}'_c$  para las cuádricas de revolución. En la región sin sombrear se representan las superficies abiertas (hiperboloides,  $\theta_c < 0$ ), mientras que la región más oscura representa a elipsoides prolatos ( $0 < \theta_c < 45^\circ$ ) y la región poco sombreada a elipsoides oblatos ( $\theta_c > 45^\circ$ )

$$R'_0 = \pm a' + x_0 \cos i \quad (2.43)$$

$$R'_c = \frac{b'^2}{a'} \quad (2.44)$$

$$\tan \theta'_c = \frac{b'}{a'} \quad (2.45)$$

$$R'_{90} = \left( 2R'_c \mp \tan^2 \theta'_c \right)^{1/2} \quad (2.46)$$

Utilizando las ecuaciones (2.22), (2.39) y (2.40), utilizando la definición  $D' = D \cos i$  e introduciendo la función  $f(i; \theta_c) \equiv \left( 1 \pm \tan^2 \theta_c \tan^2 i \right)^{1/2}$  obtenemos ecuaciones explícitas para los radios característicos en el sistema de referencia del plano del cielo en términos de la inclinación:

$$\frac{q'}{q} = 1 \pm \tilde{R}_c \cot^2 \theta_c (f(i; \theta_c) - 1) \quad (2.47)$$

$$\tilde{R}'_c = \frac{\tilde{R}_c}{\cos^2 i f(i; \theta_c) \frac{q'}{q}} \quad (2.48)$$

$$\tan \theta'_c = \frac{\tan \theta_c}{\cos i f(i; \theta_c)} \quad (2.49)$$

$$\tilde{R}'_{90} = \left( \frac{2\tilde{R}_c f(i; \theta_c) \mp \tan^2 \theta_c \frac{q'}{q}}{q'/q} \right)^{1/2} \frac{\sec i}{f(i; \theta_c)} \quad (2.50)$$

Cuando  $\tilde{R}'_{90}$  es medible, entonces es posible hacer diagramas de diagnóstico como el de la figura 2.8.2 para comparar con observaciones, independientemente de cualquier modelo de choques de proa.

Buscamos adjuntar el paper “quadrics bowshock”





## **Capítulo 3**

# **Herramientas de Programación**

## CAPÍTULO 3. HERRAMIENTAS DE PROGRAMACIÓN

---

This is chapter 3

## **Capítulo 4**

# **The Work**

## CAPÍTULO 4. THE WORK

---

This is chapter 4

## **Capítulo 5**

# **Resultados obtenidos**

## CAPÍTULO 5. RESULTADOS OBTENIDOS

---

This is chapter 5

## **Capítulo 6**

# **Conclusiones**

## CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES

---

This is chapter 6



# Bibliografía

Churchwell E., Felli M., Wood D. O. S., Massi M., 1987, , [321](#), [516](#)

Johnstone D., Hollenbach D., Bally J., 1998, , [499](#), [758](#)

Laques P., Vidal J. L., 1979, , [73](#), [97](#)

O'dell C. R., Wen Z., Hu X., 1993, , [410](#), [696](#)