

Tesis de doctorado



Jorge Alejandro Tarango Yong

5 de junio de 2018



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
**PROGRAMA DE POSGRADO EN ASTROFÍSICA**

Instituto de Radioastronomía y Astrofísica

“Estudio de la Interacción de Flujos Múltiples de Fuentes  
Astrofísicas, Aplicada a los Proplyds Clásicos de la Nebulosa de  
Orión”

**PARA OPTAR POR EL GRADO DE  
DOCTOR EN CIENCIAS (ASTROFÍSICA)**

P R E S E N T A  
JORGE ALEJANDRO TARANGO YONG

Director de Tesis: Dr. William J. Henney

Morelia, Michoacán. 5 de junio de 2018

# Índice general

<b>1. Objetos Relevantes</b>	<b>9</b>
1.1. Nubes Moleculares Gigantes . . . . .	9
1.2. La Nebulosa de Orión . . . . .	10
1.3. Proplyds . . . . .	12
1.3.1. Descubrimiento . . . . .	12
1.3.2. ¿Qué es un proplyd? Breve introducción (Johnstone et al., 1998) . . . . .	12
1.3.3. Mecanismos de fotoevaporación (Johnstone et al., 1998) . . . . .	13
1.4. Objetos LL . . . . .	15
1.4.1. Mapa de Objetos . . . . .	15
1.5. Regiones H II . . . . .	15
1.5.1. Esfera de Strömgren . . . . .	16
1.5.2. Primera y Segunda expansión . . . . .	17
1.5.3. Fluxos de Champaña . . . . .	19
1.5.4. Características de la emisión . . . . .	19
1.6. Choques de Proa en el Medio Interestelar . . . . .	19
<b>2. Conceptos fundamentales</b>	<b>21</b>
2.1. Parámetros Fundamentales . . . . .	22
2.2. Planitud y “Alatud” . . . . .	24
2.3. Cuádricas de Revolución . . . . .	25
2.4. Proyección en el Plano del Cielo . . . . .	29
2.4.1. Vectores normal y tangente a la superficie . . . . .	31
2.4.2. Línea tangente . . . . .	31

2.4.3. Planiud y Alatud proyectadas: caso general . . . . .	33
2.4.4. Aplicación a las Cuádricas de Revolución . . . . .	34
<b>3. Modelo de Capa Delgada</b>	<b>41</b>
3.1. Cantidades conservadas en un flujo hipersónico de capa delgada . . . . .	41
3.2. Interacción de Dos Vientos . . . . .	43
3.2.1. Interacción con un viento esférico isotrópico . . . . .	46
3.2.2. Interacción de un viento esférico isotrópico con un viento plano-paralelo (Choques Wilkinoides) . . . . .	47
3.3. Forma Verdadera . . . . .	48
3.4. Forma Aparente . . . . .	53
<b>4. Resultados Obtenidos</b>	<b>63</b>
4.1. Metodología para la medición de la forma aparente. . . . .	63
4.1.1. Medición de incertidumbres . . . . .	65
4.2. Resultados . . . . .	65
<b>5. Conclusiones</b>	<b>71</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>73</b>
<b>A. Choques y Frentes de Ionización</b>	<b>75</b>
A.1. Choques . . . . .	75
A.2. Frentes de Ionización . . . . .	79
<b>B. Matrices de Rotación</b>	<b>83</b>
<b>C. Derivación Matemática del Radio de Curvatura</b>	<b>85</b>
C.1. Radio de curvatura para un polinomio de grado $2n$ . . . . .	87
<b>D. Derivación de Radios Característicos</b>	<b>89</b>
D.1. $R_0$ . . . . .	89
D.2. Alatud . . . . .	90
D.3. Planitud . . . . .	91
D.4. Planitud Wilkinoides . . . . .	94



## **Agradecimientos**

Esta tesis se realizó para obtener el título de doctorado en ciencias (Astronomía). Deseo aprovechar esta sección para hacer agradecimientos a personas y/o instituciones que me ayudaron para que pueda completar este trabajo de manera exitosa.

## **Resumen**

Abstract en español

## **Abstract**

Abstract written in english

# Capítulo 1

## Objetos y Fenómenos Astrofísicos Relevantes

### 1.1. Nubes Moleculares Gigantes

Las grandes “guarderías” de estrellas a lo largo de la Galaxia se localizan en nubes moleculares gigantes, compuestas principalmente por hidrógeno molecular H<sub>2</sub>. Siendo que esta molécula solo emite radiación en ultravioleta, donde el medio interestelar tiene una alta extinción, para detectar la presencia de las nubes moleculares se recurre a otras moléculas llamadas “trazadoras”, principalmente CO, la segunda molécula más abundante en el medio interestelar, que posee líneas espectrales en el rango de las ondas de radio.

Complejos como el de Taurus-Auriga se formaron debido a la convergencia de dos flujos de material neutro (Ballesteros-Paredes et al., 1999) que se enfrió y se volvió más denso debido a inestabilidades térmicas (Hennebelle & Péault, 1999). Muchas de estas nubes moleculares tienen forma filamentaria debido a que se están colapsando gravitacionalmente en caída libre (Ballesteros-Paredes et al., 2011). Dentro de los filamentos puede haber colapsos locales que pueden dar lugar a regiones de formación estelar de baja masa o incluso asociaciones OB como es el caso de la Nebulosa de Orión (Hartmann & Burkert, 2007).

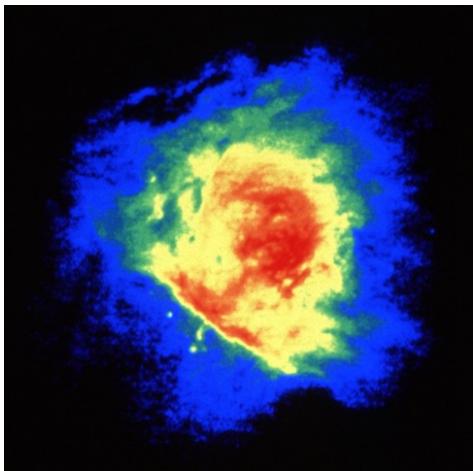


Figura 1.1: La Nebulosa de Orión observada por el VLA en la banda L ( $\lambda = 20$  cm,  $\nu = 1.4$  GHz, Yusef-Zadeh (1990)).

## 1.2. La Nebulosa de Orión

La Nebulosa de Orión (ONC por sus siglas en inglés), ubicada a  $\sim 414$  pc (Menten et al., 2007), es probablemente la región H II mejor estudiada del cielo (ver §1.5). Forma parte de la nube molecular gigante de Orión, de donde se distinguen dos sub-unidades, llamadas Orión A y Orión B. ONC forma parte de Orión A. El cúmulo de estrellas que se formó y que es responsable de la región H II se conoce como asociación OB Ori Id, cuyos miembros más prominentes son un grupo de cuatro estrellas conocidas como el “Trapecio”. La más masiva de éstas es  $\theta^1$  Ori C, de clasificaciónpectral O6 aproximadamente (ver tabla ), tiene una luminosidad de  $4 \times 10^5 L_\odot$  y una temperatura de  $4 \times 10^4$  K. Cuando la región H II se encuentra embebida en el gas molecular, no puede ser visible en el rango óptico del espectro. En el caso de ONC, que se ubica cerca del borde de la nube molecular Orion A, el gas ionizado caliente, que posee una presión mayor que el gas molecular frío, se escapa hacia el gas adyacente a la nube molecular en forma de “flujo de champaña” (figura 1.2), y de esta manera el gas ionizado puede ser visible por medio de diferentes líneas espectrales, tanto de hidrógeno como de otros elementos.

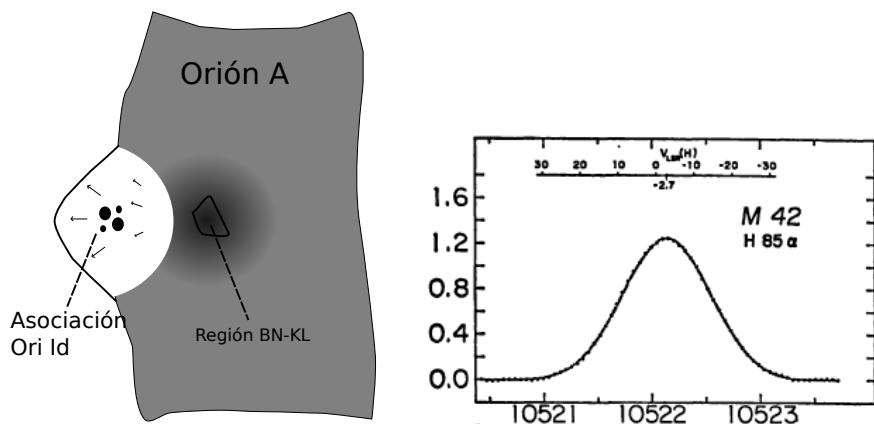


Figura 1.2: Izquierda: Representación esquemática de la Asociación Ori Id y su ubicación dentro de la nube molecular gigante Orión A. La región BN-KL es una región de formación estelar muy activa donde se observan entre otras cosas, máseres de agua y SiO y flujos moleculares (Stahler & Palla, 2004). Derecha: Línea espectral  $H\ 85\ \alpha$  de hidrógeno de ONC. El eje horizontal corresponde a la frecuencia en MHz, mientras que el eje vertical representa la temperatura de antena. El espectro muestra un corrimiento al azul que muesta que el gas se acerca a una velocidad de  $\sim 3\ km\ s^{-1}$  (Stahler & Palla, 2004; Gordon & Churchwell, 1970)

## 1.3. Proplyds

### 1.3.1. Descubrimiento

Observaciones en óptico de la región del trapecio en filtros de banda angosta de diferentes líneas de emisión tales como  $H\alpha$ ,  $H\beta$ , [O III], [N II], [S II] y continuo, revelaron la existencia de objetos puntuales únicamente visibles en líneas de alta ionización ( $H\alpha$ ,  $H\beta$  y [O III]) que fueron inicialmente denominados como “condensaciones nebulares” (Laques & Vidal, 1979). Hasta el momento no se sabía con certeza si “condensaciones nebulares” eran en realidad condensaciones nebulares (regiones donde la densidad de la nebulosa es inusualmente alta por alguna razón o bien esferas de gas molecular cuya envolvente fue ionizada y que la radiación de la estrella central la está “erosionando”) o si se trataba de protoestrellas de baja masa cuyo disco protoplanetario estaba siendo fotoevaporado por la estrella central (Churchwell et al., 1987). No fue sino hasta que se contó con observaciones de alta resolución con el Telescopio Espacial Hubble (HST) que se pudo determinar la verdadera naturaleza de estos objetos (O’dell et al., 1993) y la razón por la que se les denominó “proplyds” (PROtoPLanetary DiskS). A su vez se encontraron por primera vez arcos delgados y otras estructuras de gran interés.

### 1.3.2. ¿Qué es un proplyd? Breve introducción (Johnstone et al., 1998)

Las imágenes del HST de la Nebulosa de Orión mostraron imágenes de discos alrededor de estrellas jóvenes de baja masa. Algunos se ven como siluetas oscuras que contrastan con la nebulosa, y otros casos son visibles en líneas de emisión de líneas de alta ionización. Un proplyd típico tiene forma cometaria, con una cabeza brillante que apunta hacia la fuente de radiación ionizante, y una cola que se extiende en dirección contraria a ésta. La explicación a esta forma es que el disco protoplanetario está siendo fotoevaporado por la radiación ionizante de una estrella masiva ( $\theta^1$  Ori C en caso de la Nebulosa de Orión), la cabeza es un frente de ionización cuyo radio escala como  $R_{IF} \propto D^{2/3}$ , donde  $D$  es la distancia a la estrella masiva. La forma de la cola se debe a radiación ionizante difusa, producto de dispersión por polvo y por recombinationes (Figura

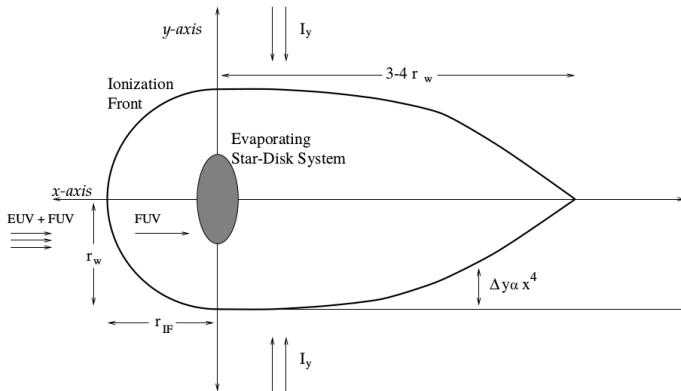


Figura 1.3: Representación esquemática de la formación de un frente de ionización hemisférico y de una cola de gas ionizado detrás del disco en proceso de fotoevaporación.  $r_{IF}$  y  $r_w$  representan el radio del frente de ionización en las direcciones de los ejes  $x$  e  $y$ , respectivamente.  $I_y$  representa el campo de radiación difusa. Por detrás del disco, la radiación difusa calienta el gas del disco provocando otro flujo fotoevaporado.  $\Delta y$  es la diferencia entre la forma actual del frente de ionización por detrás del disco y una forma cilíndrica. La forma de la colase explica como que el flujo de radiación  $I_y$  es capaz de penetrar más cerca del eje  $x$  conforme uno se aleja del disco, donde el flujo fotoevaporado es menos denso.

1.3). Churchwell et al. (1987) ya había notado que la tasa de pérdida de masa observada en el gas ionizado implicaba que la fuente de este gas debía oscurecer a la protoestrella huésped, a menos que proviniera de un disco circumestelar. De la emisión de radio observada, se estima la densidad electrónica en  $n_e \sim 10^6 \text{ cm}^{-3}$  y la tasa de pérdida de masa en  $\dot{M} \sim 10^{-7} M_\odot \text{ yr}^{-1}$ .

### 1.3.3. Mecanismos de fotoevaporación (Johnstone et al., 1998)

El principal mecanismo de fotoevaporación es el campo de radiación de la estrella central, en la parte ultravioleta del espectro electromagnético. Según la masa de la estrella central, podemos tener dos clases de flujo radiativo: Dominado por el ultravioleta lejano (FUV,  $h\nu < 13.6 \text{ eV}$ ) o dominado por el ultravioleta extremo (EUV,  $h\nu \geq 13.6 \text{ eV}$ ). En general, el FUV se encarga de disociar moléculas y de calentar el gas de la región

de fotodisociación (PDR) hasta temperaturas de 100 - 1000 K, mientras que el EUV puede ionizar el gas y elevar su temperatura hasta  $10^4$  K. El EUV no puede atravesar el frente de ionización (IF) pero el FUV sí.

En el caso de que el flujo sea dominado por el EUV, la presión térmica del flujo photoevaporado es determinada por la fotoionización, la PDR producida por el FUV es delgada. El gas calentado por el FUV se mueve de manera subsónica hasta llegar al IF y la tasa de pérdida de masa depende de la tasa de ionización inducida por el EUV.

Si el flujo está dominado por el FUV, la presión térmica depende del calentamiento por el FUV. El gas tibio se expande como un viento que empuja el IF lejos del disco. La tasa de pérdida de masa la determina la temperatura de la PDR, el flujo FUV y la opacidad del polvo a las longitudes de onda del FUV. Inicialmente la forma del disco impone una geometría cilíndrica en el flujo photoevaporado, pero eventualmente los gradientes de presión tornan esta geometría en esférica.

Las ecuaciones de continuidad de la masa y el momento restringen la velocidad del flujo neutro antes de alcanzar el IF. Mas allá de éste, la presión del gas hace que éste se expanda a velocidades del orden de una a dos veces la velocidad del sonido. Para el gas neutro dentro del IF hay dos posibles soluciones: si el gas neutro es supersónico entonces el IF será de baja densidad (Tipo R) con bajo contraste de densidad entre gas neutro y gas ionizado. O si el gas neutro es subsónico se formará un IF tipo D con un gran contraste de densidad entre el gas neutro y el gas ionizado. Sin embargo, sin importar qué tipo de radiación domina la photoevaporación, el gas neutro permanece a velocidades subsónicas al llegar al IF, por lo que dicho frente será tipo D. En el caso de un flujo dominado por el EUV, el gas neutro permanece a velocidad subsónica, su velocidad decrece como  $v_I \propto r^{-2}$  y llega a  $0.5 \text{ km s}^{-1}$  al llegar al frente de ionización. Cuando el flujo es dominado por el FUV, el gas neutro se acelera hasta llegar a velocidades supersónicas, luego atraviesa un choque isotérmico que lo desacelera y llega al frente de ionización a  $0.5 \text{ km s}^{-1}$ .

Sin importar el tipo de mecanismo de photoevaporación dominante, el flujo photoevaporado solo existe si la presión térmica supera a la gravedad de la protoestrella. Entonces, el flujo photoevaporado solo existe a partir de un radio crítico  $r_g$ , donde este radio se estima a partir del balance entre la energía necesaria para escapar de una órbita kepleriana y la energía

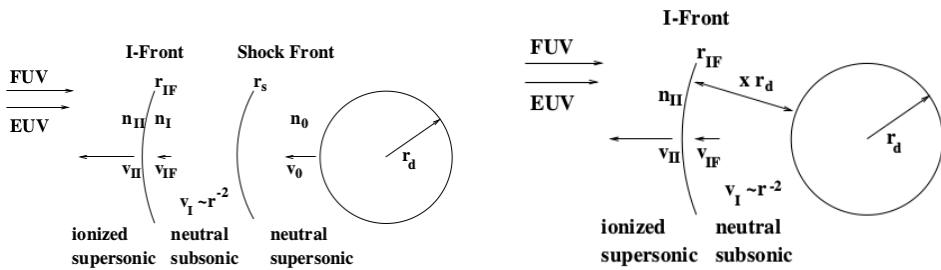


Figura 1.4: Representación esquemática de las regiones del flujo fotoevaporado de un proplyd. Izquierda: Cuando el flujo es dominado por el FUV. Derecha: Flujo dominado por EUV (Johnstone et al., 1998)

térmica:

$$r_g = \frac{GM_*}{a^2} \quad (1.1)$$

Donde  $M_*$  es la masa de la protoestrella y  $a$  es la velocidad del sonido del gas. Para las protoestrellas típicas del trapecio la masa típica es de  $M_* = 0,2 M_\odot$ . Para el gas neutro la velocidad del sonido es de  $a_I \sim 3 \text{ km s}^{-1}$  y para el gas ionizado es de  $a_{II} \sim 10 \text{ km s}^{-1}$ . Por tanto, el radio gravitacional para un flujo dominado por el EUV es de  $r_{gII} \sim 2 \text{ AU}$  y para un flujo dominado por el FUV es de  $r_{gI} \sim 20 \text{ AU}$ .

## 1.4. Objetos LL

### 1.4.1. Mapa de Objetos



## 1.5. Regiones H II (Stahler & Palla, 2004)

Consideremos el caso en que se forma una estrella masiva dentro de una nube molecular, que por simplicidad está compuesta exclusivamente de hidrógeno molecular  $\text{H}_2$ . La estrella masiva emite fotones ultravioleta

Tipo Espectral	Masa ( $M_{\odot}$ )	$\log \mathcal{N}_*$ ( $s^{-1}$ )	$\log \mathcal{N}_{FUV}$ ( $s^{-1}$ )
O4	70	49.9	49.5
O5	60	49.4	49.2
O6	40	48.8	48.8
O7	30	48.5	48.6
O8	23	48.2	48.4
O9	20	47.8	48.2
B0	18	47.1	48.1
B1	13	45.4	47.5
B2	10	44.8	47.1

Cuadro 1.1: Tasa de fotones ionizantes para estrellas masivas (Stahler &amp; Palla, 2004)

que tienen la energía suficiente para disociar el  $H_2$  como para ionizar el hidrógeno atómico resultante. Luego el plasma ionizado se recombina para volver a ser  $H I$  emitiendo líneas espectrales de diversas energías, siendo la más energética la línea de  $Ly\alpha$ . Como al realizar una ionización se pierde un fotón ionizante y el flujo de radiación proveniente de la estrella es finito, entonces la estrella solo puede ionizar la región de la nube más próxima a ésta. Si suponemos que la nube tiene densidad uniforme, entonces esta región tendrá forma esférica, conocida como *esfera de Strömgren*.

### 1.5.1. Esfera de Strömgren

El plasma ionizado dentro de la Esfera de Strömgren se encuentra en balance de ionización, esto es, que la tasas de ionización y la de recombinación son iguales. La tasa de ionizaciones es igual a la cantidad de fotones ionizantes que emite la estrella central por segundo. Esto es, los fotones que poseen una energía mayor al límite de Lyman, que corresponde a  $E = 13.6 \text{ eV}$ , o bien  $\lambda = 912 \text{ \AA}$ . En la tabla 1.1 se muestra la tasa de fotones ionizantes  $\mathcal{N}_*$  para estrellas masivas de tipo espectral O y B temprano.

El radio de esta esfera se denomina *Radio de Strömgren* que viene dado por:

$$R_s = \left[ \frac{3\mathcal{N}_*}{4\pi\alpha'_{rec}(n_H^0)^2} \right]^{1/3} = 0,4 \text{ pc} \left( \frac{\mathcal{N}_*}{10^{49} \text{ s}^{-1}} \right)^{1/3} (n_{H_2})^{-2/3} \quad (1.2)$$

Donde  $\alpha'_{rec}$  es el coeficiente de recombinación a todos los niveles energéticos del hidrógeno excepto el estado base,  $n_H^0$  y  $n_{H_2}$  son la densidad numérica del hidrógeno neutro y del hidrógeno molecular donde está embebida la región *HII*, respectivamente.

En la expresión numérica, se adopta una temperatura de  $10^4$  K que es la temperatura característica de una región *HII* y con la que el coeficiente de recombinación  $\alpha'_{rec}$  adopta un valor de  $2,6 \times 10^{-13} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$ .

Dentro de la región *HII*, la probabilidad por unidad de tiempo de ionizar un átomo de hidrógeno dado es mucho mayor a la probabilidad de una recombinación, por lo que el gas está casi completamente ionizado. Sin embargo, en los bordes de la región *HII*, la densidad de gas neutro aumenta debido a que en dicha región el flujo de fotones ionizantes ha sido atenuado por todo el gas ionizado más próximo a la estrella. La transición de gas ionizado a gas neutro tiene un grosor  $\Delta r$  que corresponde al camino libre medio del gas neutro. Esto es:

$$\Delta R = \frac{1}{\sigma_{\nu_1} n_H^0} \quad (1.3)$$

Donde  $\sigma_{\nu_1}$  es la sección recta de un átomo de hidrógeno en el estado base, evaluada en la longitud de onda del límite de Lyman. Utilizando  $\sigma_{\nu_1} = 6,8 \times 10^{-18} \text{ cm}^2$  y  $n_H^0 = 2 \times 10^3 \text{ cm}^{-3}$  obtenemos que  $\Delta r = 7,4 \times 10^{13} \text{ cm} \sim 5 \times 10^{-5} R_s$ , lo que muestra que las regiones *HII* tienden a tener bordes bien delimitados.

### 1.5.2. Primera y Segunda expansión

Las esferas de Strömgren no son objetos estáticos, sino que se expanden con el tiempo. Este proceso ocurre en dos etapas: en la primera inicialmente no existe ninguna región *HII* pero que la radiación ultravioleta de la estrella hace que se expanda rápidamente al disociar e ionizar el gas

a su alrededor hasta alcanzar el radio de Strömgren. En la segunda expansión la diferencia de presiones entre el gas ionizado de la región *HII*, mucho mayor que la del gas neutro que lo rodea, provoca otra expansión más lenta que la primera hasta que haya equilibrio de presión.

El radio de la región *HII* durante la primera expansión se comporta siguiendo la siguiente expresión:

$$\lambda(\tau) = \left[ 1 - \exp\left(-\frac{2}{3}\tau\right) \right]^{1/3} \quad (1.4)$$

Donde  $\lambda \equiv R/R_s$ ,  $\tau \equiv t/t_{rec}$  y  $t_{rec} \equiv \frac{1}{n_H^0 \alpha'_{rec}}$  que es el tiempo medio de recombinación del hidrógeno.

De la ecuación (1.4) vemos que cuando han pasado una y media veces del tiempo de recombinación, la región *HII* se ha expandido alrededor del 86 % del radio de Strömgren, y aunque la expansión se va descelerando constantemente, ya es de una extensión considerable.

La velocidad del sonido en el gas ionizado con temperatura de  $\sim 10^4$ K es de  $a_{II} \sim 10 \text{ km s}^{-1}$ , si comparamos esta velocidad con la media de la velocidad del frente de ionización, por ejemplo, en el intervalo  $0 < \tau < \frac{3}{2}$ , en el que ya comprobamos que el frente de ionización casi alcanza el radio de Strömgren, encontramos lo siguiente:

$$\bar{v}_{IF} = \frac{R_s}{t_{rec}} \frac{1}{\frac{3}{2} - 0} \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{d\lambda}{d\tau} d\tau = \frac{2R_s}{3t_{rec}} \lambda(3/2) \quad (1.5)$$

Con los valores típicos adoptados en esta sección obtenemos que:

$$\bar{v}_{IF} \simeq 135 \text{ km s}^{-1} \left( \frac{\mathcal{N}_*}{10^{49} \text{ s}^{-1}} \right)^{1/3} (n_{H_2})^{-2/3} \quad (1.6)$$

Para la segunda expansión encontramos lo siguiente:

$$\lambda = \left( 1 + \frac{7\tau'}{4} \right)^{4/7} \quad (1.7)$$

Donde  $\tau' \equiv a_1 \frac{t}{R_s}$  y  $a_1$  es la velocidad del sonido del gas ionizado.

### 1.5.3. Flujos de Champaña

La segunda expansión lleva a que la región H II se expanda dos órdenes de magnitud por encima del radio de Strömgren, pero el tiempo que toma alcanzar dichas dimensiones es tan largo que la estrella central muere antes de se alcance el equilibrio de presiones. Sin embargo, es más probable que el frente de ionización rebase el borde de la nube molecular donde se formó, y en este caso el gas ionizado altamente presurizado escapa directamente hacia el medio interestelar que lo rodea (que tiene una presión aún menor que la de la nube molecular), creando el *Flujo de champaña*.

### 1.5.4. Características de la emisión



## 1.6. Choques de Proa en el Medio Interestelar

Observaciones en mediano infrarrojo y en líneas de emisión de H $\alpha$  y [O III] (Robberto et al., 2005; Bally et al., 1998, 2000) muestran de manera clara la presencia de arcos que rodean varios proplyds y otros objetos en la ONC cerca y lejos e la región del Trapecio. Hayward et al. (1994) abre por primera vez la discusión acerca de la naturaleza de estos arcos (enfocándose en la región del Trapecio), sugiriendo que la presión de radiación y el viento estelar de  $\theta^1$  Ori C interactúan con el flujo de gas proveniente de cada proplyd individual.





Figura 1.5: La región del trapecio en  $10 \mu\text{m}$ .  $\theta^1$  Ori C es la fuente débil al centro de la imagen. Dentro de este campo además se encuentran los proplyds LV1-LV5 con sus respectivos arcos. Al noreste se encuentra una fuente extensa llamada la Nebulosa Ney Allen (NA). El norte es encuentra hacia arriba y el este a la izquierda. El tamaño del campo es de aproximadamente  $1' \times 1'$ .

## Capítulo 2

# Conceptos fundamentales

Para este trabajo consideramos en general tres modelos de interacción de vientos, actualmente publicado (Tarango Yong & Henney, 2018). Sin embargo, solamente la sección 2.1 está basada en Canto et al. (1996). Los modelos considerados en este trabajo se describen brevemente a continuación:

- Una fuente localizada en el origen que emite un viento esférico que puede ser isotrópico o anisotrópico (figura 2.1) no acelerado que interactúa con el viento esférico isotrópico de otra fuente que se encuentra a una distancia  $D$  de la primera (figura 2.2). A los choques de proa resultantes se conocen como “Cantoides” y “Ancantoides”, respectivamente. Ambos términos fueron acuñados en el artículo en el que se basa esta tesis, anexada en el apéndice E.
- Una fuente localizada en el origen que emite un viento esférico isotrópico no acelerado que interactúa con un viento plano paralelo no acelerado y densidad constante (figura 2.2b). Los choques resultantes en este caso se conocen como “Wilkinoides” (Cox et al., 2012).

Para caracterizar al choque de proa utilizaremos coordenadas esféricas, siguiendo la simetría del viento interior. La forma del choque de proa medido a partir del origen es  $R(\theta, \phi)$ , donde  $\theta$  y  $\phi$  son el ángulo polar y

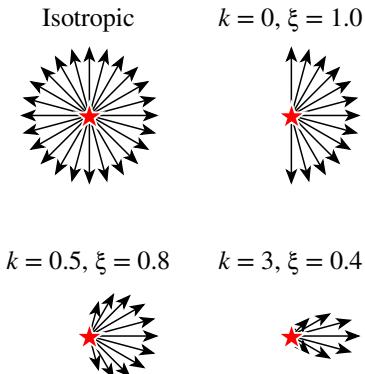


Figura 2.1: Representación esquemática de vientos con diferentes anisotropías: Arriba izquierda: Viento isotrópico esférico. Arriba derecha: viento isotrópico hemisférico. Abajo: Vientos anisotrópicos donde el parámetro  $k$  indica el grado de anisotropía (ver capítulo 3)

azimutal, respectivamente. Asumiendo simetría cilíndrica en el sistema, esta función se simplifica a  $R(\theta)$ .

## 2.1. Parámetros Fundamentales

El valor mínimo de  $R(\theta)$ , bajo las condiciones ya mencionadas, ocurre en el ápex ( $\theta = 0$ ), y lo denotamos como  $R_0$ . Bajo la condición de estado estacionario, la condición de equilibrio de presión ram entre ambos vientos implica que:

$$\frac{R_0}{D} = \frac{\beta^{1/2}}{1 + \beta^{1/2}} \quad (2.1)$$

Donde  $\beta$  es la tasa de momentos entre los vientos en interacción. Si los dos vientos son isotrópicos, donde la tasa de pérdida de masa del viento interior es  $\dot{M}_w$  y su velocidad terminal es  $v_w$  y para el viento exterior estas cantidades son  $\dot{M}_{w1}$  y  $v_{w1}$ , entonces la tasa de momentos es:

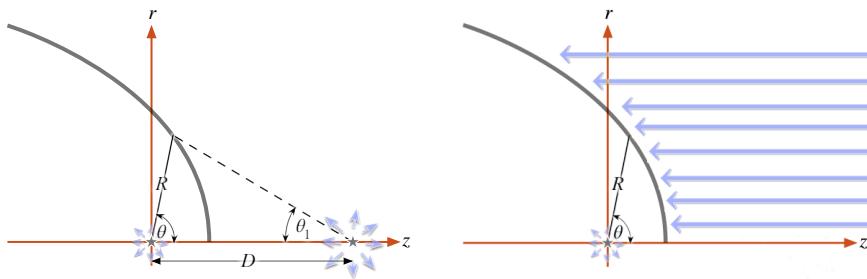


Figura 2.2: Izquierda: Representación esquemática del problema de interacción de dos vientos esféricos: Dos fuentes separadas por una distancia  $D$  emiten un viento radial que forma un choque de proa a una distancia  $R$  del origen. El sistema tiene geometría cilíndrica siendo el eje  $z$  el eje de simetría. La forma del choque es función únicamente del ángulo polar  $\theta$ , medido a partir del origen. Otro ángulo que es de utilidad es  $\theta_1$ , que corresponde al ángulo polar medido a partir de la posición de la otra fuente. Cuando el viento interior tiene densidad constante y es esférico, denominamos al choque resultante como “cantoide”, mientras que si su densidad sigue una ley de potencias de  $\cos \theta$ , siguiendo la ecuación (3.13) del capítulo 3, será un choque “ancantoide”. Derecha: Representación esquemática de la interacción de un choque esférico e isotrópico con una corriente plano-paralela de densidad y velocidad constantes. El choque resultante es en este caso de tipo “wil kinoide”.

$$\beta = \frac{\dot{M}_w v_w}{\dot{M}_{w1} v_{w1}} \quad (2.2)$$

En el caso de que el viento exterior sea una corriente plano-paralela (wilkinoide), correspondería al caso en que  $\beta \rightarrow 0$ , entonces  $D$  deja de ser un parámetro relevante, ya que técnicamente  $D \rightarrow \infty$ .

En el caso de que el viento interior no sea isotrópico es tratado en el capítulo 3.

## 2.2. Planitud y “Alatud”

$R_0$  no indica la escala del choque de proa, pero para caracterizar su forma utilizamos parámetros adicionales, mostrados en la figura 2.3. El radio perpendicular  $R_{90}$  se obtiene evaluando la función  $R(\theta)$  en  $\theta = \pi/2$ , mientras  $R_c$  es el radio de curvatura medido en la posición del ápex, que en coordenadas cilíndricas se calcula como sigue (ver apéndice C):

$$R_c = \frac{R_0^2}{R_0 - R_{\theta\theta,0}} \quad (2.3)$$

donde  $R_{\theta\theta,0} \equiv \frac{d^2 R}{d\theta^2}$  evaluado en  $\theta = 0$ .

Una forma simple de obtener el radio de curvatura es haciendo una expansión Taylor para la función  $R(\theta)$  como sigue:

$$R(\theta) \simeq R_0 + \frac{1}{2} R_{\theta\theta,0} \theta^2 + \mathcal{O}(\theta^4) \quad (2.4)$$

y hacer un ajuste polinomial a  $R(\theta)$  para  $|\theta| < \Delta\theta$  y determinar  $R_0$  y  $R_{\theta\theta,0}$  de los primeros coeficientes del ajuste, y posteriormente  $R_c$  a partir de la ecuación 2.3.  $\Delta\theta$  es el rango del ángulo polar dentro del cual se puede hacer el ajuste.  $\Delta\theta = 30^\circ$  es una buena opción.

Un último parámetro es el ángulo asintótico de apertura de las alas, denotado como  $\theta_\infty$ . Sin embargo, esta medida solo aplica para choques cuyas alas son asintóticamente cónicas, y aún para éstos en la mayoría

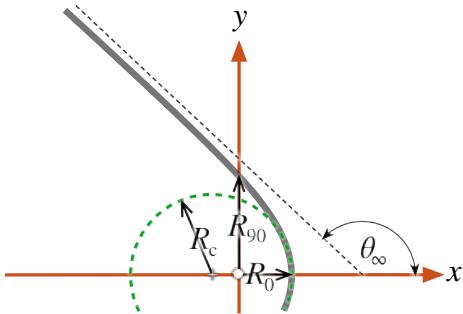


Figura 2.3: Representación esquemática de los radios característicos de un choque de proa

de los casos es difícil de medirlo debido a que el ángulo polar  $\theta$  tiende al valor asintótico muy lentamente y además la emisión de las alas es bastante débil. Por otro lado, los radios característicos ( $R_0, R_c, R_{90}$ ) son medibles observacionalmente en la mayoría de los casos. A partir de éstos, podemos determinar dos parámetros adimensionales llamados “planitud” y “alatud”. El primero de éstos es una medida de qué tan plano es el choque de proa en la nariz o “apex”, y lo denotamos con la letra griega  $\Pi$ , mientras que el segundo es una medida de qué tanto se abren las alas del choque de proa, y lo denotamos con la letra griega  $\Lambda$ . Ambos parámetros se definen a continuación:

$$\Pi \equiv \frac{R_c}{R_0} \quad (2.5)$$

$$\Lambda \equiv \frac{R_{90}}{R_0} \quad (2.6)$$

## 2.3. Cuádricas de Revolución

En el caso general es difícil encontrar la forma aparente para un choque de proa siguiendo el formalismo desarrollado en la sección anterior, por lo que optamos por aproximar la forma éstos con una de las superficies más simples: las *cuádricas de revolución*, que son superficies de revolución de las curvas cónicas. Dado el modelo general descrito en la §2, haremos

algunas restricciones para las superficies cuádricas que utilizaremos en este trabajo:

- El eje focal se encuentra alineado con el eje  $x$
- La posición del foco de la superficie cuádrica no necesariamente coincide con la posición de la fuente
- En el caso de las hipérbolas, solo tomamos una de las ramas de ésta.

Implementando dichas restricciones, utilizamos la representación paramétrica de las curvas cónicas en términos de un parámetro adimensional denotado con la letra  $t$ :

$$x = x_0 + \sigma a \mathcal{C}(t) \quad (2.7)$$

$$y = b \mathcal{S}(t) \quad (2.8)$$

Donde:

$$\mathcal{C}(t), \mathcal{S}(t) = \begin{cases} \cos t, \sin t & \text{elipses} \\ \cosh t, \sinh t & \text{hipérbolas} \end{cases} \quad (2.9)$$

$$\sigma = \begin{cases} +1 & \text{elipses} \\ -1 & \text{hipérbolas} \end{cases} \quad (2.10)$$

$$x_0 = R_0 - \sigma a \quad (2.11)$$

Donde  $a$  y  $b$  representan la longitud de los semi-ejes de la cónica en cuestión (Figura 2.4).  $x_0$  representa la distancia entre el centro de la cónica y el origen.

La forma polar del choque de proa  $R(\theta)$  viene dada por:

$$\tan \theta = \frac{b \mathcal{S}(t)}{a \mathcal{C}(t) + x_0} \quad (2.12)$$

$$R = \left( (a \mathcal{C}(t) + x_0)^2 + b^2 \mathcal{S}^2(t) \right)^{1/2} \quad (2.13)$$

El tipo de cónica lo podemos caracterizar mediante el parámetro  $\mathcal{Q}$ , donde:

$$\mathcal{Q} \equiv \sigma \frac{b^2}{a^2} \quad (2.14)$$

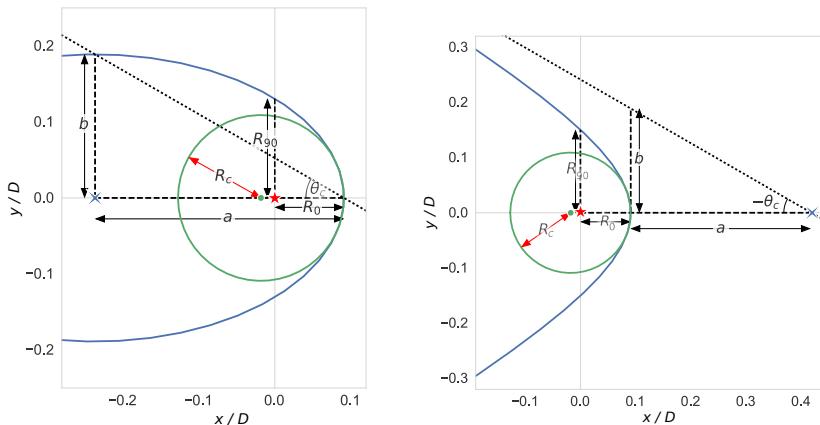


Figura 2.4: Representación esquemática de: Izquierdo: Elipse. Y, derecha: Hipérbola. En ambos casos se ilustran los parámetros relevantes de éstas y los radios característicos

Para las superficies abiertas (hiperboloides) tenemos que  $\mathcal{Q} < 0$ , mientras que para las superficies cerradas tenemos que  $\mathcal{Q} > 0$ . Casos particulares son la esfera  $\mathcal{Q} = 1$  y el paraboloide  $\mathcal{Q} = 0$ . De manera equivalente se puede definir el ángulo  $\theta_Q$  como sigue:

$$\tan \theta_Q = \sigma \frac{b}{a} \quad (2.15)$$

Este ángulo se relaciona con la excentricidad de las cónicas (y que sustituye a esta última en este trabajo) como se muestra a continuación:

$$\tan \theta_Q = \sigma \sqrt{|1 - e^2|} \quad (2.16)$$

El set de parámetros  $(a, x_0, \mathcal{Q})$  es suficiente para caracterizar a nuestras cuádricas de revolución:  $\mathcal{Q}$  nos indica el tipo de cónica,  $a$  establece la escala y  $x_0$  el desplazamiento del centro a lo largo del eje x. Sin embargo, para futuras aplicaciones tanto a modelos de interacción de vientos como a observaciones (capítulos 3 y 4) nos sería útil hacer la caracterización mediante los parámetros  $(R_0, \Pi, \Lambda)$  (ver §2.2). Las equivalencias entre los

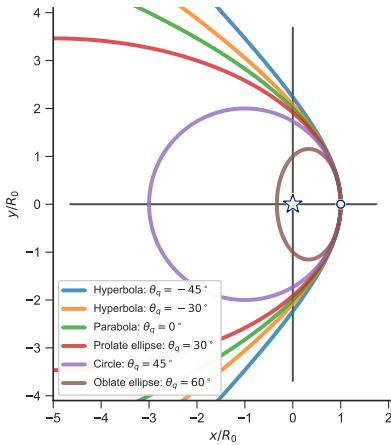


Figura 2.5: Familia de curvas cónicas, donde el valor del parámetro  $\theta_Q$  varía desde  $\theta_Q < 0$  (hipérbolas) hasta  $\theta_Q > 0$  (elipses). Casos especiales son  $\theta_Q = 0$  (parábola) y  $\theta_Q = 45^\circ$  (círculo). Este parámetro sustituye en este trabajo a la excentricidad.

dos sets de parámetros los calculamos a continuación:

$$R_c = \frac{b^2}{a} = a|\mathcal{Q}| \quad (2.17)$$

$$R_{90}^2 = b^2\sigma \left(1 - \frac{x_0^2}{a^2}\right) = \mathcal{Q}(a^2 - x_0^2) \quad (2.18)$$

Combinando las ecuaciones (2.5, 2.6, 2.11, 2.14, 2.17, 2.18), obtenemos lo siguiente:

$$R_0 = x_0 + \sigma a \quad (2.19)$$

$$\Pi = \frac{a|\mathcal{Q}|}{x_0 + \sigma a} = \frac{a\mathcal{Q}}{\sigma(x_0 + \sigma a)} = \frac{a\mathcal{Q}}{(a + \sigma x_0)} \quad (2.20)$$

$$\Lambda = \left(\mathcal{Q} \frac{a - \sigma x_0}{a + \sigma x_0}\right)^{1/2} \quad (2.21)$$

De aquí podemos escribir el parámetro de las cuádricas  $\mathcal{Q}$  en términos de la planitud y la alatud:

$$\mathcal{Q} = 2\Pi - \Lambda^2 \quad (2.22)$$

Por tanto, el signo de  $2\Pi - \Lambda^2$  determina si una cuádrica es esferoidal o hiperboloidal. En la figura 2.5 mostramos como, para planitud constante, podemos tener una familia de cónicas variando únicamente la alatud, y por consiguiente, el parámetro  $\mathcal{Q}$ .

## 2.4. Proyección en el Plano del Cielo

Para un choque de proa que es la vez geométricamente delgado y ópticamente delgado, únicamente se observa el borde de éste por abrillantamiento al limbo, por lo tanto, su orientación respecto a la línea de visión modifica su forma respecto a la forma real del choque. Para ello, rotamos el sistema de referencia del choque de proa en coordenadas cartesianas, denotado por  $(x, y, z)$ , por un ángulo que llamamos *inclinación*, denotado por  $i$ , en el plano  $xz$ . La inclinación está definida de modo que cuando  $i = 0^\circ$  el eje de simetría del choque es perpendicular a la línea de visión, es decir, lo observamos “de canto”. Y cuando  $i = 90^\circ$  el eje desimetría es paralelo a la línea de visión, es decir, que lo observamos “de frente”. De este modo la transformación entre el sistema de referencia del choque y el sistema de referencia del plano del cielo, denotado por  $(x', y', z')$  queda como sigue:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \mathbf{A}_y(i) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos i - z \sin i \\ y' \\ z \cos i + x \sin i \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Donde  $\mathbf{A}_y(i)$  está definida por la ecuación (B.4) en el apéndice B.

Por otro lado, la forma tridimensional del choque de proa viene dado por una rotación alrededor del eje  $x$  de su forma bidimensional en coordenadas polares utilizando la matriz de rotación  $\mathbf{A}_x(\phi)$  definida en (B.5):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{A}_x(\phi) \begin{pmatrix} R(\theta) \cos \theta \\ R(\theta) \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(\theta) \cos \theta \\ R(\theta) \sin \theta \cos \phi \\ R(\theta) \sin \theta \sin \phi \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

La relación entre ambos sistemas de referencia se ilustra en la figura 2.6.

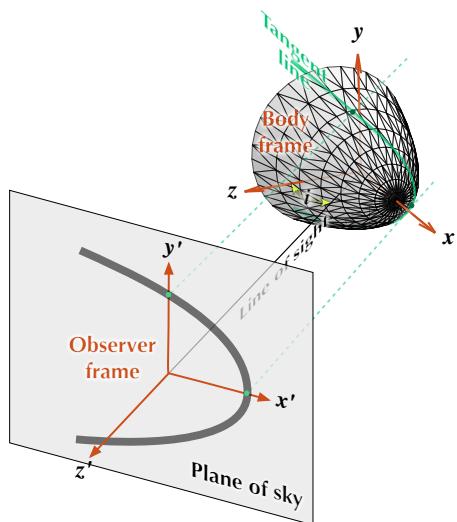


Figura 2.6: Sistema de referencia del choque vs sistema de referencia del plano del cielo. Los ejes  $x'$  y  $y'$  se encuentran en el plano del cielo, mientras el eje  $z'$  es paralelo a la línea de visión. Solo la región del choque cuya tangente sea paralela a la línea de visión será visible por abrillantamiento al limbo.

### 2.4.1. Vectores normal y tangente a la superficie

Si definimos los vectores  $\hat{n}$  y  $\hat{t}$ , como los vectores normal y tangente a la superficie, respectivamente para  $\phi$  constante. En el caso  $\phi = 0$  (figura 2.7), ambos vectores se encuentran en el plano  $xy$  y es fácil mostrar que:

$$\hat{t}_0 = \begin{pmatrix} -\cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \hat{n}_0 = \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

Donde:

$$\tan \alpha = -\frac{dy}{dx} = \frac{1 + \omega \tan \theta}{\tan \theta - \omega} \quad (2.26)$$

y:

$$\omega(\theta) = -\frac{1}{R} \frac{dR}{d\theta} \quad (2.27)$$

Para  $\phi \neq 0$ , basta con hacer una rotación de las ecuaciones (2.25) alrededor del eje  $x$  utilizando la matriz de rotación  $\mathbf{A}_x(\phi)$ :

$$\hat{n} = \mathbf{A}_x(\phi)\hat{n}_0 = \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \cos \phi \\ \cos \alpha \sin \phi \end{pmatrix} \quad \hat{t} = \mathbf{A}_x(\phi)\hat{t}_0 = \begin{pmatrix} -\cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \phi \\ \sin \alpha \sin \phi \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

### 2.4.2. Línea tangente

Debido a que el choque es ópticamente delgado y geométricamente delgado, solo la región del choque cuya tangente sea paralela a la línea de visión será visible. Esto corresponde a una curva que denominamos *línea tangente*, que debe cumplir con la siguiente condición:

$$\hat{n} \cdot \hat{z}' = 0 \quad (2.29)$$

Denotamos como  $\phi_T$  al ángulo azimutal que cumple la condición anterior para una inclinación dada, en función del ángulo polar  $\theta$ :

$$\sin \phi_T = -\tan i \tan \alpha = \tan i \frac{1 + \omega \tan \theta}{\omega - \tan \theta} \quad (2.30)$$

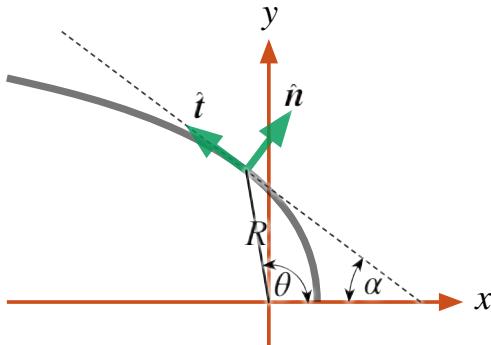


Figura 2.7: Vectores unitarios normal y tangente a la superficie  $R(\theta)$  en un plano de azimuth  $\phi$  constante.

De esta manera, la forma de la línea tangente del choque de proa, a la que llamamos *forma proyectada* viene dada por:

$$\begin{pmatrix} x'_T \\ y'_T \\ z'_T \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} \cos \theta \cos i - \sin \theta \sin \phi_T \sin i \\ \sin \theta (1 - \sin^2 \phi_T)^{1/2} \\ \cos \theta \sin i + \sin \theta \sin \phi_T \cos i \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

En el caso general,  $z'_T$  no es una función lineal de  $x'_T$  y  $y'_T$ , por lo que la línea tangente no se encuentra en un plano. La forma aparente  $(x'_T, y'_T)$  de la línea tangente también puede escribirse en coordenadas polares  $(R', \theta')$ , donde:

$$R'(\theta) = (x'^2_T + y'^2_T)^{1/2} \quad \text{y} \quad \tan \theta' = \frac{y'_T}{x'_T} \quad (2.32)$$

Es de notar a su vez que la ecuación (2.30) no tiene solución para valores arbitrarios de  $\theta$  y de la inclinación, puesto que se requiere que  $|\sin \phi_T| < 1$ . Por tanto, la línea tangente solo existe para valores de  $\theta$  tales que  $\theta < \theta_0$  donde  $\theta_0$  es el valor de  $\theta$  en el eje de simetría de la línea tangente proyectada ( $\theta'(\theta_0) = 0$ ) y que se obtiene resolviendo la siguiente ecuación implícita:

$$\tan \theta_0 = \frac{|\tan i| + \omega(\theta_0)}{1 - \omega(\theta_0)|\tan i|} \quad (2.33)$$

Esto implica que si el choque de proa es suficientemente “abierto” ( $\alpha > \alpha_{min}$ ), entonces para inclinaciones tales que  $|i| > 90^\circ - \alpha_{min}$  no existirá la línea tangente para ningún valor de  $\theta$ , es decir, el choque de proa se encontrará suficientemente “de cara” como para que ya no parezca un choque de proa para el observador.

### 2.4.3. Planiud y Alatud proyectadas: caso general

En orden de comparar la forma  $R(\theta)$  con observaciones, es útil definir los radios característicos  $R'_0$  y  $R'_{90}$ , donde  $R'_0$  es el radio del eje de simetría aparente y  $R'_{90}$  es el radio aparente en la dirección perpendicular a  $R'_0$ . Es decir  $R'_0 = x'_T(y'_t = 0)$  y  $R'_{90} = y'_t(x'_t = 0)$ . Utilizando las ecuaciones (2.30) y (2.31) encontramos que:

$$R'_0 = R(\theta_0) \cos(\theta_0 - |i|)^1 \quad (2.34)$$

Donde  $\theta_0$  es la solución de la ecuación (2.33), y

$$R'_{90} = R(\theta_{90}) \sin \theta_{90} (1 - \sin^2 \phi_T(\theta_{90}))^{1/2} \quad (2.35)$$

donde  $\theta_{90}$  es la solución de la siguiente ecuación implícita:

$$\cot \theta_{90} = \frac{1 - (1 + \omega(\theta_{90})^2 \sin^2 2i)^{1/2}}{2\omega(\theta_{90}) \cos^2 i} \quad (2.36)$$

El radio de curvatura aparente se obtiene a partir de la ecuación (2.3) pero en el sistema de referencia primado:

$$R'_c = \frac{R'^2_0}{R'_0 - R'_{\theta'\theta',0}} \quad (2.37)$$

---

<sup>1</sup>Evaluando la ecuación (2.30) en  $\theta = \theta_0$  con ayuda de la ecuación (2.33) encontramos que  $\sin \phi_T(\theta_0) = -\frac{\tan i}{|\tan i|}$  por lo que al sustituir este resultado en la componente  $x$  de la ecuación (2.31) encontramos que  $R'_0 = R(\theta_0) \left( \cos \theta_0 \cos i + \sin \theta_0 \sin i \frac{\tan i}{|\tan i|} \right)$  que finalmente se reduce al resultado de la ecuación (2.34)

#### 2.4.4. Aplicación a las Cuádricas de Revolución

El objetivo de esta sección es obtener la forma proyectada de las cuádricas de revolución, puesto que son una aproximación buena y mucho más sencilla a la forma real de un choque de proa. Para esto es conveniente utilizar un sistema de referencia donde el origen se ubica en el centro de la sección cónica:

$$(X, Y, Z) = (x - x_0, y, z) \quad (2.38)$$

De esta manera, la forma de la cuádrica de revolución es:

$$X = a\mathcal{C}(t) \quad (2.39)$$

$$Y = b\mathcal{S}(t) \cos \phi \quad (2.40)$$

$$Z = b\mathcal{S}(t) \sin \phi \quad (2.41)$$

Siguiendo el procedimiento mostrado en la §2.4 calculamos el ángulo azimutal  $\phi$  que cumple con el criterio de ser tangente a la línea de visión:

$$\sin \phi_T = \frac{b\mathcal{C}(t)}{a\mathcal{S}(t)} \tan i \quad (2.42)$$

Ahora utilizamos la ecuación (2.23) para obtener la forma aparente de una cuádrica dada:

$$X'_T = \frac{\mathcal{C}(t)}{a \cos i} (a^2 \cos^2 i + \sigma b^2 \sin^2 i) \quad (2.43)$$

$$Y'_T = b\mathcal{S}(t) \left( 1 - \frac{b^2 \mathcal{C}^2(t)}{a^2 \mathcal{S}^2(t)} \tan^2 i \right)^{1/2} \quad (2.44)$$

Podemos mostrar que la forma proyectada de una sección cónica (elipse o hipérbola), es de la misma clase que la sección cónica original. Si ese fuera el caso, entonces podemos escribir las ecuaciones (2.43, 2.44) de la siguiente manera:

$$X'_T = a'\mathcal{C}(t') \quad (2.45)$$

$$Y'_T = b'\mathcal{S}(t') \quad (2.46)$$

Después de un poco de álgebra encontramos que nuestra suposición es consistente, con las siguientes equivalencias:

$$a' = a \cos i f_{\mathcal{Q},i} \quad (2.47)$$

$$b' = b \quad (2.48)$$

$$\mathcal{C}(t') = f_{\mathcal{Q},i} \mathcal{C}(t) \quad (2.49)$$

Donde introducimos el factor de proyección de las cuádricas:

$$f_{\mathcal{Q},i} = (1 + \mathcal{Q} \tan^2 i)^{1/2} \quad (2.50)$$

Como ya demostramos que la forma proyectada de la línea tangente de una superficie cuádrica es una sección cónica del mismo tipo, entonces podemos determinar la forma proyectada reutilizando las ecuaciones (2.19-2.22) sustituyendo las cantidades no primadas por sus equivalentes primados. De esta manera, utilizando las ecuaciones (2.14, 2.47, 2.48) encontramos que el parámetro de las cuádricas para la forma proyectada es:

$$\mathcal{Q}' = \frac{\mathcal{Q}}{f_{\mathcal{Q},i}^2 \cos^2 i} \quad (2.51)$$

Ahora regresamos al sistema de referencia centrado en la estrella:

$$(x'_T, y'_T) = (X'_T + x'_0, Y'_T) \quad (2.52)$$

donde el desplazamiento proyectado  $x'_0$  es:

$$x'_0 = x_0 \cos i \quad (2.53)$$

La proyección de la distancia al ápex viene dada por la versión primada de la ecuación (2.19):

$$R'_0 = x'_0 + \sigma a' \quad (2.54)$$

$$\Rightarrow \frac{R'_0}{R_0} = \cos i \left[ 1 + \frac{\Pi}{\mathcal{Q}} (1 - f_{\mathcal{Q},i}) \right] \quad (2.55)$$

Asimismo la planitud y la alatud proyectada pueden calcularse a partir de las ecuaciones (2.20, 2.22, 2.47, 2.51):

$$\Pi' = \frac{\Pi}{(R'_0/R_0) f_{Q,i} \cos i} \quad (2.56)$$

$$\Lambda' = (2\Pi' - Q')^{1/2} \quad (2.57)$$

En la figura (2.8) mostramos el comportamiento de la planitud y la alatud aparente con la inclinación para distintos valores del parámetro  $Q$  (color) y de la planitud  $\Pi$  (grosor de la curva). Se puede observar que para las superficies elipsoidales ( $Q > 0$ ), la planitud y alatud aparente tienden a  $\Pi' = \Lambda' = 1$  conforme  $i \rightarrow 90^\circ$ . Esto se debe a que en este límite observamos la superficie de frente y vemos su sección transversal circular. En el caso del paraboloide la convergencia se da a  $\Lambda' = \Pi' = 2$ . Por otro lado, la planitud y alatud aparente divergen cuando  $|i| \rightarrow i_{\text{crit}} = 90^\circ - |\theta_Q|$  debido a que cuando  $|i| > i_{\text{crit}}$  ya no existe una línea tangente a la línea de visión y por tanto no se observaría abrillantamiento al limbo. También cabe destacar dos casos particulares: El esferoide confocal con planitud unitaria ( $\Pi = 1$ ) y el paraboloide confocal ( $\Pi = \Lambda = 2$ ). En estos dos casos su forma aparente no se ve afectada por la inclinación.

En la figura 2.9a observamos el diagrama de diagnóstico  $\Pi' - \Lambda'$ . Cada curva representa a una cuádrica de revolución siguiendo la misma convención que en la figura 2.8 para los valores de  $Q$  y  $\Pi$  y variando la inclinación a lo largo de cada una de éstas, donde además el punto donde  $i = 0$  (cuádrica vista de canto) se marca con un punto. Las regiones sombreadas representan a cada clase de cuádrica, la zona superior más clara a los hiperboloides, la zona gris delgada a los elipsoides proláticos, la interfaz entre estas dos últimas a los hiperboloides y la zona gris inferior a los elipsoides obláticos. Se puede observar que en ningún caso las curvas cruzan de una región a otra. También se observa de nuevo que las curvas elipsoidales convergen a  $(\Pi', \Lambda') = (1, 1)$ , las curvas hiperbólicas a  $(\Pi', \Lambda') = (+\infty, +\infty)$  y las parabólicas a  $(\Pi', \Lambda') = (2, 2)$ . Asimismo en la figura 2.9b observamos el comportamiento de la separación aparente estrella–ápex con inclinación. En este caso se observa que para inclinaciones pequeñas ( $|i| < 30^\circ$ ), esta separación depende muy poco del parámetro  $Q$ , siendo más importante la planitud  $\Pi$ . Por otro lado,

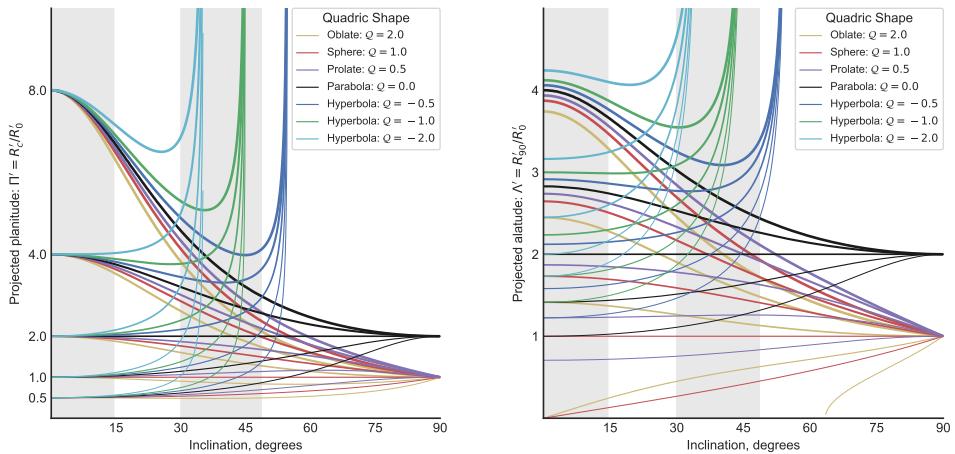


Figura 2.8: Efectos de la proyección sobre las cuádricas de revolución con la inclinación  $|i|$ . Los colores de las curvas representan variaciones en el parámetro  $Q$  de las cuádricas. El grosor de la curva indica el valor de la planitud intrínseca  $\Pi$ . Los rectángulos sombreados muestran cuartiles de  $|\sin i|$  que se encuentran equitativamente poblados para una distribución isotrópica de orientaciones. (a) Planitud aparente  $\Pi'$ . (b) Alatitud aparente  $\Lambda'$

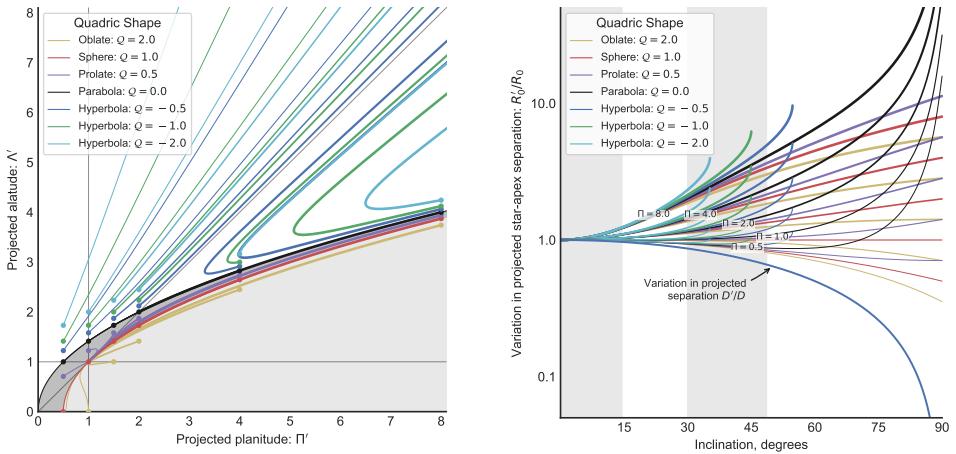


Figura 2.9: (a) Diagrama de diagnóstico  $\Lambda'$  vs  $\Pi'$  para diferentes tipos de cuádricas: esferoides oblatos (amarillo), esferoides (rojo), esferoides prolatos (morado), paraboloides (negro) e hiperboloides (azul, verde y turquesa). Cada punto de una curva representa un valor diferente de la inclinación, y se muestran explícitamente las inclinaciones múltiples de  $15^\circ$ , con la forma de círculos llenos. Las regiones sombreadas representan al tipo de cuádrica que mejor ajusta a los parámetros  $(\Pi', \Lambda')$  cubiertos. La región clara para los hiperboloides, la región gris oscura para los esferoides prolatos y la región gris clara para los hiperboloides oblatos. La interfaz entre la región de hiperboloides y esferoides prolatos corresponde a los paraboloides y la región entre esferoides prolatos y oblatos a los esferoides. (b) Distancia proyectada  $R'_0/R_0$  versus  $|i|$ .

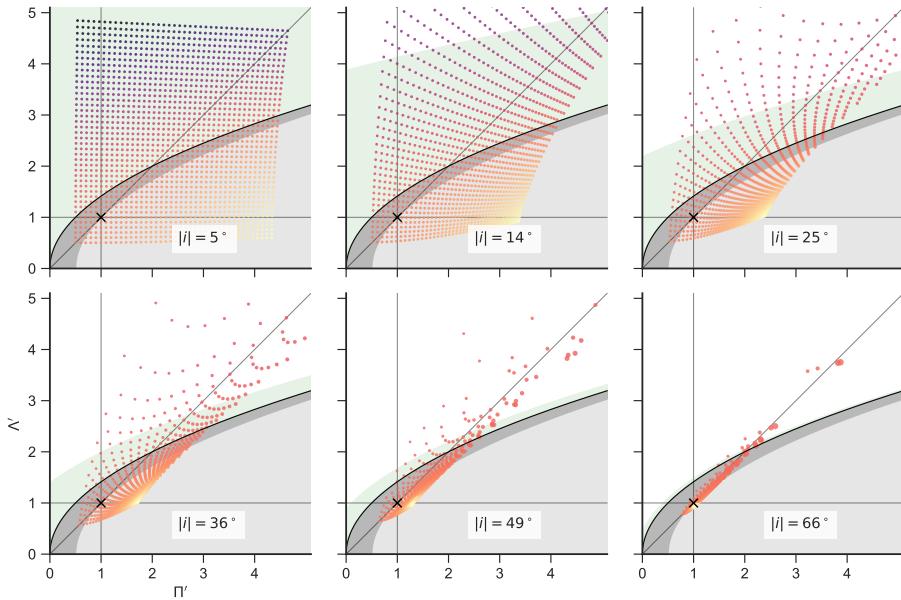


Figura 2.10: Efectos de la inclinación de la forma aparente de arcos cuádricos cuya planitud y alatud están uniformemente distribuidos en los rangos  $\Pi = [0,5,4,5]$ ,  $\Lambda = [0,5,4,5]$ . En cada pánel se muestra la forma aparente incrementando la inclinación en intervalos iguales de  $|\sin i|$ . El color representa el parámetro  $Q$ , desde azul (menor valor de  $Q$ , que representa formas más abiertas), pasando por naranja, hasta amarillo (elipsoides oblato-simétricos). El tamaño representa la distancia aparente estrella-áplex  $R'_0/R_0$ .

para inclinaciones mayores, la separación aparente se incrementa cada vez más rápido para cuádricas abiertas ( $Q \leq 0$ ), mientras que para los elipsoides la separación es cada vez más lenta e incluso puede decrecer con inclinación.

De manera complementaria en la figura 2.10 mostramos una visión complementaria del análisis de la forma aparente con la inclinación. En esta figura se toman “capturas” de  $(\Pi', \Lambda')$  en intervalos regulares de  $\sin i$ . Los valores de la planitud y alatud intrínseca están uniformemente distribuidos en los intervalos  $\Pi = [0,5,4,5]$  y  $\Lambda = [0,5,4,5]$ , lo que nos da un cuadrado uniformemente distribuido de valores cuando  $|i| = 0$ , y que se va distorsionando conforme  $|i|$  se incrementa. La escala de color represen-

ta el parámetro  $Q$ , incrementándose dicho parámetro desde el azul hasta el amarillo, pasando por el naranja, mientras que el tamaño del punto es proporcional a  $R'_0/R_0$ . Se puede observar que todos los puntos tienden a la línea  $\Pi' = \Lambda'$ ) a altas inclinaciones, y que los puntos azules quedan fuera del rango de la gráfica. Esto es porque a altas inclinaciones, para las formas muy abiertas ya no existe la línea tangente a la línea de visión. De hecho, la región verde sombreada es la región para la cual aun existe la línea de visión para cada inclinación y se hace cada vez más pequeña conforme la inclinación aumenta. Esta figura es meramente cualitativa, puesto que no hay razón para esperar una distribución uniforme de planitud y alatud (en el siguiente capítulo encontramos que en el modelo de capa delgada no encontramos formas cuyo parametro  $Q$  sea mayor a 1, por ejemplo).

## Capítulo 3

# Modelo de Capa Delgada

Un ejemplo más realista para la forma de los choques de proa proviene de modelos hidrodinámicos en estado estacionario de la interacción de flujos hipersónicos en el límite de capa delgada. Ejemplos clásicos son la interacción entre dos vientos de Canto et al. (1996) (CRW de aquí en adelante) y la interacción entre un viento con una corriente plano-paralela (Wilkin, 1996).

Debido a la relevancia del artículo de CRW para este trabajo, mucho del material presentado corresponde a dicho artículo, como por ejemplo las secciones §3.1 y §3.2.2, mientras que el resto de las secciones son una extensión a este trabajo, y se encuentra en nuestro artículo anexado en el apéndice E.

### 3.1. Cantidades conservadas en un flujo hipersónico de capa delgada

Consideramos dos flujos hipersónicos, no acelerados que forman una capa estacionaria delgada formada por dos choques radiativos separados por una discontinuidad de contacto. El sistema tiene geometría cilíndrica y los vientos no tienen velocidad azimutal. Bajo estos términos, describimos la posición de la capa delgada como  $R(\theta)$ , donde  $R$  es el radio de la capa medida a partir de la posición del origen del viento con menor momento y  $\theta$  es el ángulo polar. Asumimos que el gas chocado está bien

mezclado, esto implica que tiene una sola velocidad pos–choque dada por:

$$\vec{v} = v_r \hat{r} + v_z \hat{z} \quad (3.1)$$

Donde el eje de simetría del sistema es paralelo a  $\hat{z}$ , y  $\hat{r}$  es el radio cilíndrico. Definimos  $\dot{M}(\theta)$ ,  $\vec{\Pi}(\theta)$  y  $\vec{j}(\theta)$  como la tasa de pérdida de masa, la tasa de momento y la tasa de momento angular, respectivamente, de la capa delgada integradas desde  $\theta = 0$  hasta  $\theta$ . Éstas se calculan de la siguiente manera:

$$\vec{\Pi}(\theta) = \dot{\Pi}_r(\theta) \hat{r} + \dot{\Pi}_z(\theta) \hat{z} = \dot{M} (v_r \hat{r} + v_z \hat{z}) \quad (3.2)$$

$$\vec{j}(\theta) = \vec{R}(\theta) \times \vec{\Pi}(\theta) \quad (3.3)$$

$$\dot{M}(\theta) = \dot{M}_w(\theta) + \dot{M}_{w1} \quad (3.4)$$

Donde  $\vec{R}(\theta) \equiv R(\theta) \sin \theta \hat{r} + R(\theta) \cos \theta \hat{z}$ . Resolviendo el producto cruz y tomando su magnitud encontramos que:

$$\dot{j}(\theta) = \dot{M}(\theta) R(\theta) v_\theta \quad (3.5)$$

$$\text{donde : } v_\theta = v_r \cos \theta - v_z \sin \theta \quad (3.6)$$

Por otro lado, al asumir estado estacionario, necesitamos que la tasa de pérdida de masa, la tasa de momento y la tasa de momento angular de la capa delgada sean iguales a aquellas inyectadas por los dos vientos. Entonces definimos estas cantidades como  $\dot{M}_w$ ,  $\dot{\Pi}_{wr}$ ,  $\dot{\Pi}_{wz}$  y  $\dot{j}_w$  para el viento con menor momento, y para el otro viento se utiliza la misma notación solo que utilizando el subíndice “w1”. De esta forma tenemos que:

$$\dot{\Pi}_r(\theta) \hat{r} + \dot{\Pi}_z(\theta) \hat{z} = \left[ \dot{\Pi}_{wr}(\theta) + \dot{\Pi}_{wr1}(\theta) \right] \hat{r} + \left[ \dot{\Pi}_{wz}(\theta) + \dot{\Pi}_{wz1}(\theta) \right] \hat{z} \quad (3.7)$$

$$\dot{j} = \dot{j}_w(\theta) + \dot{j}_{w1}(\theta) \quad (3.8)$$

$$\dot{M}(\theta) = \dot{M}_w(\theta) + \dot{M}_{w1}(\theta) \quad (3.9)$$

Combinando las ecuaciones (3.2, 3.4, 3.5, 3.7-3.9) encontramos que:

$$\dot{M}(\theta) [v_r \hat{r} + v_z \hat{z}] = (\dot{\Pi}_{wr}(\theta) + \dot{\Pi}_{wr1}(\theta)) \hat{r} + (\dot{\Pi}_{wz}(\theta) + \dot{\Pi}_{wz1}(\theta)) \hat{z} \quad (3.10)$$

$$\dot{M}(\theta) v_\theta R(\theta) = J_w(\theta) + J_{w1}(\theta) \quad (3.11)$$

Y finalmente combinando con la ecuación (3.6) resolvemos para  $R(\theta)$ :

$$R(\theta) = \frac{J_w(\theta) + J_{w1}(\theta)}{(\dot{\Pi}_{wr}(\theta) + \dot{\Pi}_{wr1}(\theta)) \cos \theta - (\dot{\Pi}_{wz}(\theta) + \dot{\Pi}_{wz1}(\theta)) \sin \theta} \quad (3.12)$$

## 3.2. Problema de Interacción de Dos Vientos

Aplicamos el formalismo ya mencionado para la interacción de dos vientos radiales. El viento con menor momento se localiza en el origen, y su densidad a radio fijo varía con el ángulo polar como una ley de potencias (figura 2.1), o bien, un viento interno con densidad constante e isotrópica:

$$n_{An}(\theta) = \begin{cases} n_0 \cos^k \theta & \text{si } \theta \leq 90^\circ \\ 0 & \text{si } \theta > 90^\circ \end{cases} \quad (3.13)$$

$$n_C = n_0 \quad (3.14)$$

Donde el índice  $k$  indica el grado de anisotropía del viento “interno”.

Cuando la densidad del viento está dada por la ecuación (3.14) denominamos a los choques resultantes como “cantoides”, por Canto et al. (1996), mientras que si la densidad está dada por (3.13) entonces los denominamos “Ancantoides”. Un caso particularmente interesantes son el viento para un proplyd (Henney & Arthur, 1998), donde ( $k = 1/2$ ). Por el momento restringimos al viento “externo” como isotrópico. El problema se muestra de manera esquemática en la figura 2.2.

Utilizando las ecuaciones (3.13, 3.14) encontramos que la tasa de pérdida de masa está dada por:

$$\dot{M}_w = \int_0^\theta \int_0^{2\pi} \rho_w v_w r_0^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \quad (3.15)$$

Donde  $v_w$  es la velocidad del viento intenso,  $\rho_w = n\bar{m}$  es su densidad,  $n$  se obtiene de las ecuaciones (3.13),  $\bar{m}$  es la masa promedio de las partículas del viento y  $r_0$  es el radio del viento al cual se alcanza la velocidad terminal  $v_w$ . Para un proplyd consideramos que dicho radio es el del frente de ionización.

Resolviendo (3.15) para vientos con densidades dadas por (3.13, 3.14), encontramos que:

$$\dot{M}_w = \dot{M}_w^0 \begin{cases} \left(1 - \cos^k \theta\right) & \text{Ancantoides} \\ \frac{1}{2} \left(1 - \cos \theta\right) & \text{Cantoides} \end{cases} \quad (3.16)$$

Donde:

$$\dot{M}_w^0 = \begin{cases} \frac{2\pi}{k+1} \bar{m} n_o v_w r_0^2 & \text{Ancantoides} \\ 4\pi \bar{m} n_o v_w r_0^2 & \text{Cantoides} \end{cases} \quad (3.17)$$

Con esto, obtenemos las tasas de momento y momento angular. Para los choques cantoides, los resultados corresponden a las ecuaciones (9-11) de CRW, sin embargo, para los choques ancantoides, las tasas de momento (axial y radial) y momento angular están dados por:

$$\dot{\Pi}_{wz} = \int_0^{\min(\theta, \pi/2)} v_w \cos \theta \, d\dot{M}_w = \frac{v_w \dot{M}_w^0}{2(k+2)} \max\left(1 - \cos^{k+2} \theta, 1\right) \quad (3.18)$$

$$\dot{\Pi}_{wr} = \int_0^{\min(\theta, \pi/2)} v_w \sin \theta \, d\dot{M}_w = \frac{1}{2} \dot{M}_w^0 v_w I_k(\theta) \quad (3.19)$$

$$\dot{J}_w = \int_0^{\min(\theta, \pi/2)} |\vec{R} \times \vec{v}_w| d\dot{M}_w = 0 \quad (3.20)$$

Donde:

$$I_k(\theta) = \int_0^{\min(\theta, \pi/2)} \cos^k \theta \sin^2 \theta \, d\theta \quad (3.21)$$

Esta última integral tiene una solución analítica en términos de una función hipergeométrica de la forma  ${}_2F_1\left(-\frac{1}{2}; \frac{1+k}{2}; \frac{3+k}{2}; \cos^2 \theta\right)$ . En el caso particular  $k = 1/2$ , este resultado se “simplifica” a una integral de segundo tipo de la forma  $E\left(\frac{\theta}{2}|2\right)$ , pero es más sencillo calcular estas integrales

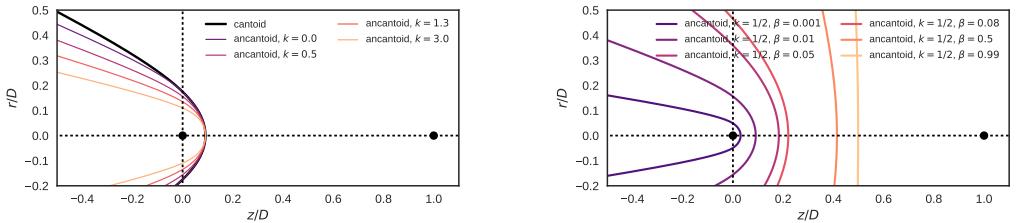


Figura 3.1: Forma de choques de proa de vientos en interacción. Las coordenadas están normalizadas con  $D$ , la distancia entre las fuentes de los vientos. La fuente del viento más débil se localiza en el origen  $(0, 0)$ , mientras que la otra fuente se localiza en  $(1, 0)$ , ambas marcadas con puntos negros. En (a) los choques de proa mostrados tienen un valor del parámetro  $\beta = 0,01$  fijo, mientras que el índice de anisotropía  $k$  varía desde 0 hasta 3, mostrados en escala de colores verdes. El choque cantoide con  $\beta = 0,01$  se muestra en negro. Nótese que el choque ancantoide con  $k = 0$  es más cerrado en las alas que el tipo cantoide, debido a que en los choques ancantoides la densidad del viento cae a cero cuando  $\theta \geq 90^\circ$ , mientras que en los cantooides la densidad del viento es constante para toda  $\theta$ . En (b) el parámetro de anisotropía  $k$  es fijo con valor de  $1/2$ , mientras que el parámetro  $\beta$  varía desde  $10^{-3}$  hasta 0,99. La distancia al ápex  $R_0$  se incrementa conforme  $\beta$  crece, llegando al valor asintótico de  $R_0/D = 0,5$  cuando  $\beta \rightarrow 1$ . Lo mismo sucede con el radio de curvatura y  $R_{90}$ . Algo notable es que en los choques ancantoides aun en el caso límite  $\beta = 1$ , la forma del choque también es curva, debido a que la densidad del viento interior cae con  $\theta$  y fuera del eje de simetría el momento del viento exterior es mayor.

de manera numérica. La tasa de momento angular para el viento interior es cero debido a que éste se mide respecto al origen, donde se localiza la fuente con menor momento. En este punto los vectores de posición y velocidad para un valor de  $\theta$  dado son paralelos.

Para el viento exterior utilizamos las ecuaciones (12-15) y (19-22) de CRW sin cambiar, que corresponden a las ecuaciones (3.32 - 3.35) y (3.22-3.25) respectivamente, pero las incluimos en las siguientes secciones por completez.

### 3.2.1. Interacción con un viento esférico isotrópico

En este caso tomamos como variable independiente al ángulo polar medido a partir de la posición de la fuente del viento externo, denotado por  $\theta_1$ . De esta forma las tasas de pérdida de masa, momento y momento angular quedan como sigue:

$$\dot{M}_{w1} = \frac{M_{w1}^0}{2} (1 - \cos \theta_1) \quad (3.22)$$

$$\dot{\Pi}_{wz1} = -\frac{v_{w1} \dot{M}_{w1}^0}{4} \sin^2 \theta_1 \quad (3.23)$$

$$\dot{\Pi}_{wr1} = \frac{v_{w1} \dot{M}_{w1}^0}{4} (\theta_1 - \sin \theta_1 \cos \theta_1) \quad (3.24)$$

$$\dot{J}_{w1} = \int_0^{\theta_1} R(\theta) v_{w1} \sin(\pi - \theta - \theta_1) d\dot{M}_{w1} \quad (3.25)$$

Utilizando la ley de los senos (ver figura 2.2), la ecuación (3.25) queda como sigue:

$$\dot{J}_{w1} = D v_{w1} \int_0^{\theta_1} \sin \theta_1 d\dot{M}_{w1} = \frac{v_{w1} \dot{M}_{w1}^0}{4} (\theta_1 - \sin \theta_1 \cos \theta_1) D \quad (3.26)$$

Por otro lado, de la figura 2.2, podemos deducir la siguiente relación geométrica entre  $R(\theta)$ ,  $\theta$  y  $\theta_1$ :

$$\frac{R(\theta)}{D} = \frac{\sin \theta_1}{\sin(\theta + \theta_1)} \quad (3.27)$$

Combinando las ecuaciones (3.12, 3.18 - 3.26, 3.27) obtenemos una ecuación implícita que nos indica la dependencia de  $\theta_1$  con  $\theta$ :

$$\theta_1 \cot \theta_1 - 1 = 2\beta I_k(\theta) \cot \theta - \frac{2\beta}{k+2} (1 - \cos^{k+2} \theta) \quad (3.28)$$

Donde en este caso, la condición de equilibrio de presiones RAM implica que la tasa de momentos  $\beta$  ahora está definida como sigue:

$$\beta_A = 2(k+1)\beta \quad (3.29)$$

Donde  $\beta$  está dado por (2.2).

Sin embargo, (3.28) solo aplica en el rango  $0 < \theta \leq \pi/2$ . Cuando  $\theta > \pi/2$  la relación entre  $\theta$  y  $\theta_1$  es:

$$\theta_1 \cot \theta_1 - 1 = 2\beta \left( I_k(\pi/2) \cot \theta - \frac{1}{k+2} \right) \quad (3.30)$$

Donde:

$$I_k(\pi/2) = \frac{\pi}{4} \frac{\Gamma(\frac{1+k}{2})}{\Gamma(\frac{4+k}{2})} \quad (3.31)$$

y  $\Gamma$  es la función Gamma usual.

### 3.2.2. Interacción de un viento esférico isotrópico con un viento plano-paralelo (Choques Wilkinoides)

En este caso las tasas de pérdida de masa, de momento y momento angular del viento plano-paralelo con velocidad  $v_a$  y densidad uniforme  $\rho_a$  quedan como sigue:

$$\dot{M}_{w1} = \pi \rho_a v_a R^2 \sin^2 \theta \quad (3.32)$$

$$\dot{\Pi}_{wz1} = -\pi \rho_a v_a^2 R^2 \sin^2 \theta \quad (3.33)$$

$$\dot{\Pi}_{wr1} = 0 \quad (3.34)$$

$$\dot{J}_{w1} = \int_0^r r' v_a \sin \theta \, d\dot{M}_{w1} = \frac{2}{3} \pi \rho_a v_a^2 R^3 \sin^3 \theta \quad (3.35)$$

Sustituyendo estas ecuaciones en (3.12) junto con (3.16-3.20) para vientos tipo cantoides ( $k = 0$ ) obtenemos lo siguiente:

$$R = \frac{\frac{2}{3} \pi \rho_a v_a R^3 \sin^3 \theta}{\frac{\dot{M}_w^0 v_w}{4} (\theta - \sin \theta \cos \theta) \cos \theta - \left( \frac{\dot{M}_w^0 v_w}{4} \sin^2 \theta - \pi \rho_a v_a^2 R^2 \sin^2 \theta \right) \sin \theta} \quad (3.36)$$

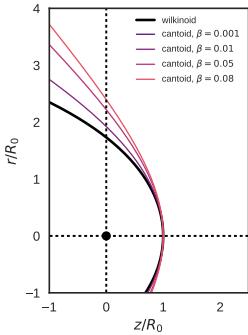


Figura 3.2: Forma de choques cantoides y el choque wilkinoide. Las coordenadas están normalizadas con la distancia al ápex  $R_0$ . El choque wilkinoide se muestra en negro y los choques cantoides en escala de azul, con  $\beta$  variando desde  $10^{-3}$  hasta 0.08. Nótese que el choque wilkinoide se comporta como el caso asintótico de los choques cantoides cuando  $\beta \rightarrow 0$ .

La condición de equilibrio de presión en este caso nos lleva a la siguiente relación:

$$\frac{\dot{M}_w^0 v_w}{4\pi R_0^2} = \rho_a v_a^2 \quad (3.37)$$

Por tanto:

$$R/R_0 = \frac{\frac{2}{3} (R/R_0)^3 \sin^3 \theta}{(\theta - \sin \theta \cos \theta) \cos \theta - \left( \sin^2 \theta - (R/R_0)^2 \sin^2 \theta \right) \sin \theta} \quad (3.38)$$

Resolviendo para  $R/R_0$  encontramos que:

$$R = R_0 [\csc^2 \theta (1 - \theta \cot \theta)]^{1/2} \quad (3.39)$$

### 3.3. Forma “verdadera” de los choques cantoides, ancantoides y wilkinoides

Para los tres tipos de formas de choques de proa que utilizamos en este trabajo (cantoides, ancantoides y wilkinoides), calculamos su correspondiente alatud y planitud. Para los choques ancantoides obtenemos lo

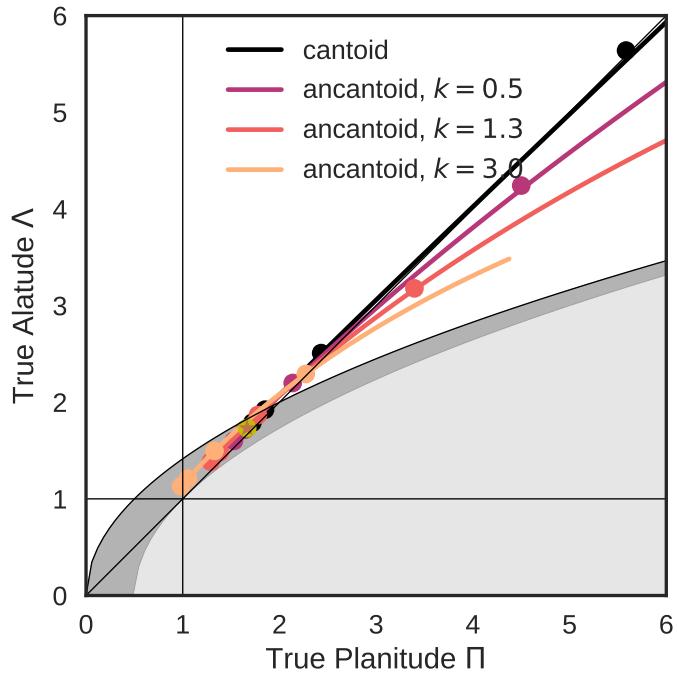


Figura 3.3: Forma verdadera de los choques cantoides, ancantoides y wilkinoides. En cada línea,  $\beta$  varía en el rango  $[0, 1]$ , y los parámetros  $(\Pi, \Lambda)$  fueron calculados de acuerdo a los resultados del apéndice D. Los círculos del color de las líneas representan valores particulares de  $\beta$ :  $10^{-3}$ ,  $10^{-2}$ , 0.1 y 0.5, y con la diferencia de que el coeficiente de segundo orden de la ecuación 3.41 para la planitud  $\Pi$  fue obtenido de manera numérica con el fin de utilizar este método para encontrar la planitud aparente con la ecuación 2.37

siguiente. El procedimiento detallado se puede consultar en el apéndice D:

$$\Lambda = \frac{(3\xi_k)^{1/2} (1 + \beta^{1/2})}{\left(1 + \frac{1}{5}\xi_k\beta\right)^{1/2} (1 - \xi_k\beta)} \quad (3.40)$$

$$\Pi = \left|1 - 2\frac{R_{\theta\theta,0}}{R_0}\right|^{-1} \quad (3.41)$$

$$\text{Donde : } R_{\theta\theta,0} = \frac{C_{k\beta}}{1 + \beta^{1/2}} + \frac{1 + 2\beta^{1/2}}{3} \quad (3.42)$$

Donde  $\xi_k \equiv \frac{2}{k+2}$  y  $C_{k\beta}$  son parámetros que se introduce por conveniencia en el apéndice D.

Para los choques cantoides la planitud y alatud son equivalentes al resultado del choque ancantoide con  $k = 0$ , pero se muestran a continuación por completez:

$$\Pi = \frac{5}{3(1 - \beta^{1/2})} \quad (3.43)$$

$$\Lambda = \frac{\sqrt{3}}{\left(1 + \frac{1}{5}\beta\right)^{1/2} (1 - \beta^{1/2})} \quad (3.44)$$

Por último, el radio en el ápex, la planitud y alatud para los choques wilkinoides es:

$$R_0 = \left(\frac{\dot{M}_w^0 v_w}{4\pi\rho_a v_a^2}\right)^{1/2} \quad (3.45)$$

$$\Lambda = \sqrt{3} \quad (3.46)$$

$$\Pi = \frac{5}{3} \quad (3.47)$$

$R_0$  en este caso se obtiene directamente de la ecuación (3.37), mientras que  $\Pi$  y  $\Lambda$  se obtienen tomando el límite  $\beta \rightarrow 0$  en las ecuaciones (3.43),

[3.44](#)), aunque  $\Lambda$  también puede obtenerse evaluando la ecuación [\(3.39\)](#) en  $\theta = \pi/2$ .

En la figura [3.3](#) se muestran los resultados de las ecuaciones [\(3.40-3.47\)](#) en forma de diagrama  $\Lambda - \Pi$ . Los choques tipo cantoides ocupan en este diagrama una curva, donde cada punto de ésta representa un valor distinto de  $\beta$ , cuyo rango es  $(0, 1)$ , y está representada en color negro. Los choques ancantoides ocupan diferentes curvas, una por cada valor del índice de anisotropía  $k$ , y se representan por curvas con diferente tonalidad de verde, mientras que los choques wilkinoides ocupan un solo punto en este diagrama, representado por el círculo amarillo.

La tendencia general de los choques cantoides y ancantoides es que conforme se incrementan  $\beta$  y  $k$ , también se vuelven más abiertos y más planos en el aex ( $\Pi$  y  $\Lambda$  incrementan), siendo el choque tipo cantoide el más abierto a un valor de  $\beta$  dado. Como ya hemos mencionado, el choque tipo cantoide y el tipo ancantoide con  $k = 0$  son muy similares, excepto que el choque cantoide es más abierto en las alas ( $\theta > 90^\circ$ ) debido al soporte que da hacia atrás el viento interior. Sin embargo, como su comportamiento es igual para  $\theta \leq 90^\circ$ , por tanto, no hay diferencia entre estos dos tipos de choques en este diagrama. Todos los choques se encuentran ya sea en la región de esferoides proláticos (región gris oscura) o hiperboloideos (región clara), ninguno en la región de esferoides oblatos (ver figura [2.9a](#)). Los choques tipo esferoide prolato son los que tienen valores de  $\beta$  pequeños, y la transición hacia hiperboloide se da cuando  $\beta \sim 0,01$  para los choques cantoides y ancantoides con parámetro  $k$  pequeño. Esta transición a los hiperboloideos se recorre para  $\beta$  mayor conforme el parámetro  $k$  se incrementa. Esto contrasta con el caso de las cuádricas puras, que siempre permanecen en la misma región, pero esto se debe a que las formas de los choques de proa son más complejas que una cuádrica de revolución: mientras que la forma de la “cabeza” del choque (la región cercana al ápex) puede aproximarse bien con una variedad de cuádricas, la forma de las alas lejanas siempre es más parecida a un hiperboloide (ver figura [2.9b](#)). El choque wilkinoid se ubica en el límite  $\beta \rightarrow 0$  de la curva de los choques cantoides, como era de esperarse, y se ubica en la región de esferoides proláticos. Otro detalle que puede apreciarse en esta figura es que todas las curvas (al menos para  $\beta$  pequeña) se aglomeran cerca de la diagonal  $\Pi \simeq \Lambda$  con la tendencia de que para anisotropía grande

de,  $\Lambda > \Pi$ , existe una región donde hay una degeneración entre  $\beta$  y  $k$  que se rompe para  $\beta$  grande.

Todo esto funciona para la forma verdadera de los choques de proa, que corresponde a cuando son vistos de canto ( $i = 0$ ). La alatud y planitud verdaderas no toman en cuenta el comportamiento de las alas lejanas ( $\theta > 90^\circ$ ). De hecho, para un choque dado, hay dos formas de calcular el ángulo de las cuádricas  $\theta_Q$ . Una es a partir de los parámetros  $(\Pi, \Lambda)$  utilizando las ecuaciones (2.14, 2.15, 2.22):

$$\theta_Q^{\text{head}} = \operatorname{sgn} (2\Pi - \Lambda^2) \tan^{-1} |2\Pi - \Lambda^2| \quad (3.48)$$

La segunda manera es a partir de estimar el ángulo asintótico  $\theta_\infty$ :

$$\theta_Q^{\text{tail}} = \theta_\infty - \pi \quad (3.49)$$

Donde  $\theta_\infty$  puede obtenerse a partir de la ecuación (28) de CRW para los choques cantoides:

$$\theta_\infty - \tan \theta_\infty = \frac{\pi}{1 - \beta} \quad (3.50)$$

Mientras que para los choques ancantoides utilizamos la ecuación (3.30) utilizando la condición  $\theta_\infty + \theta_{1\infty} = \pi$ :

$$\theta_\infty - \left( \frac{k + 2(1 - \beta)}{k + 2} \right) \tan \theta_\infty = \pi + 2\beta I_k(\pi/2) \quad (3.51)$$

Como las soluciones a la forma de los choques de proa, tanto cantoides como ancantoides solo ajustan parcialmente a una cuádrica de revolución, entonces  $\theta_Q^{\text{head}} \neq \theta_Q^{\text{tail}}$ . Esta discrepancia se vuelve relevante al momento de obtener la forma aparente, ya que en este caso la región del choque que es tangente a la línea de visión se aleja del ápex y se acerca a las alas lejanas conforme se incrementa la inclinación.

### 3.4. Obtención de la Forma Aparente

A continuación aplicamos el formalismo desarrollado en la sección §2.4 a las formas de los choques de proa obtenidos en este capítulo para obtener tanto la forma aparente como la planitud y alatud aparentes.

En la figura 3.4 mostramos la forma aparente de choques tipo cantoides y wilkinoides, y mostramos como referencia un parabolóide confocal cuya forma aparente no cambia con la inclinación (ver §2.4.4), mientras que la figura 3.5 muestra la forma aparente de choques ancantoides.

Se muestra una tendencia general en donde las alas son sistemáticamente más abiertas para altas inclinaciones. Sin embargo, en el caso de los choques Wilkinoides se muestra el comportamiento opuesto, aunque los cambios son muy sutiles. El caso de la figura 3.5a, donde se muestra un choque tipo ancantoide con  $\beta = 0,005$  y  $k = 1/2$  se observa que para inclinaciones menores a  $60^\circ$ , las alas cercanas ( $\theta \sim 90^\circ$ ) se cierran sutilmente, y luego se abren más para inclinaciones mayores.

En las figuras 3.6 y 3.7 mostramos la solución a las ecuaciones (2.33, refeq:R0p) para el modelo de capa delgada, junto con el factor de escalamiento  $R'_0/R_0$  en función de la inclinación. En estas figuras se observa que el radio aparente en el ápex siempre aumenta con la inclinación, mostrando un crecimiento más rápido para choques más abiertos, pero un incremento mayor para choques más cerrados; ésto debido a que en los choques más cerrados la inclinación máxima donde aun existe una línea tangente es mayor.

Las soluciones a las ecuaciones (2.36, 2.35) para el modelo de capa delgada se muestran en las figuras 3.8, 3.9. Se observa que la alatud aparente se incrementa abruptamente cuando la inclinación se aproxima a la inclinación máxima, excepto en el caso wilkinoid, donde la alatud disminuye con inclinación muy lentamente.

La planitud aparente se obtuvo a partir de realizar ajustes polinómicos en  $\theta^2$  a la forma aparente  $R'(\theta')$  para calcular el coeficiente de segundo orden  $R'_{\theta'\theta',0}$  y posteriormente utilizar las ecuaciones (2.37, 2.34).

Su comportamiento con inclinación se muestra en la figura 3.10. Aquí se observa un comportamiento similar al de la alatud aparente; sin embargo, en la figura 3.10b, donde el parámetro de anisotropía es  $k = 1/2$ , se observa una pequeña caída en la planitud justo antes de llegar a la

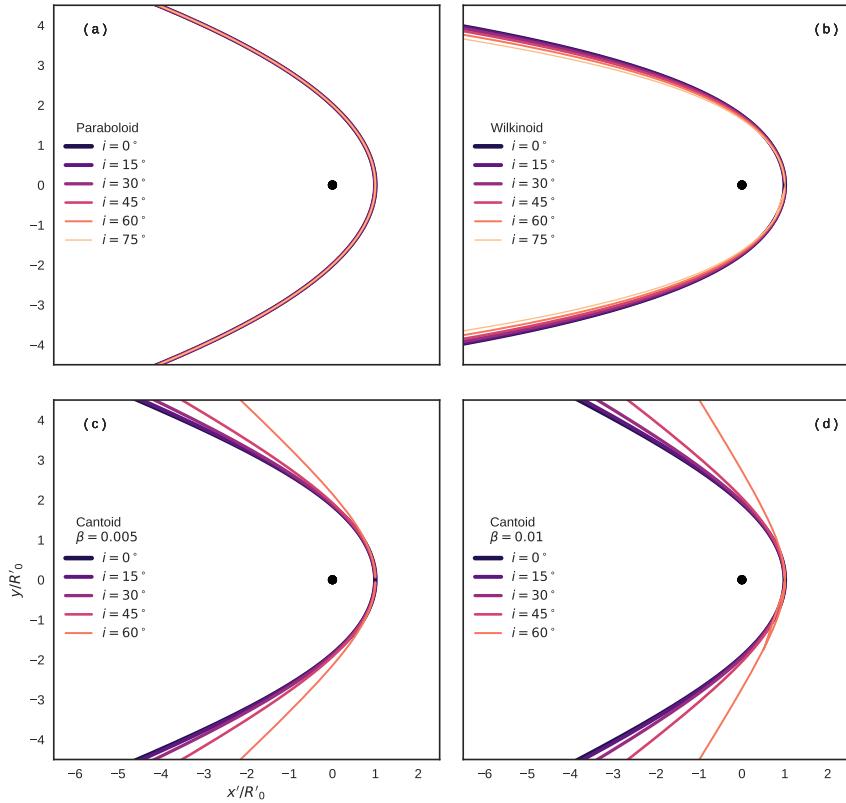


Figura 3.4: Forma aparente de diferentes choques de proa en intervalos de inclinación de  $15^\circ$ : (a) Paraboloid confocal. (b) Wilkinoid. (c) Cantoide  $\beta = 0,005$ . (d) Cantoide  $\beta = 0,01$

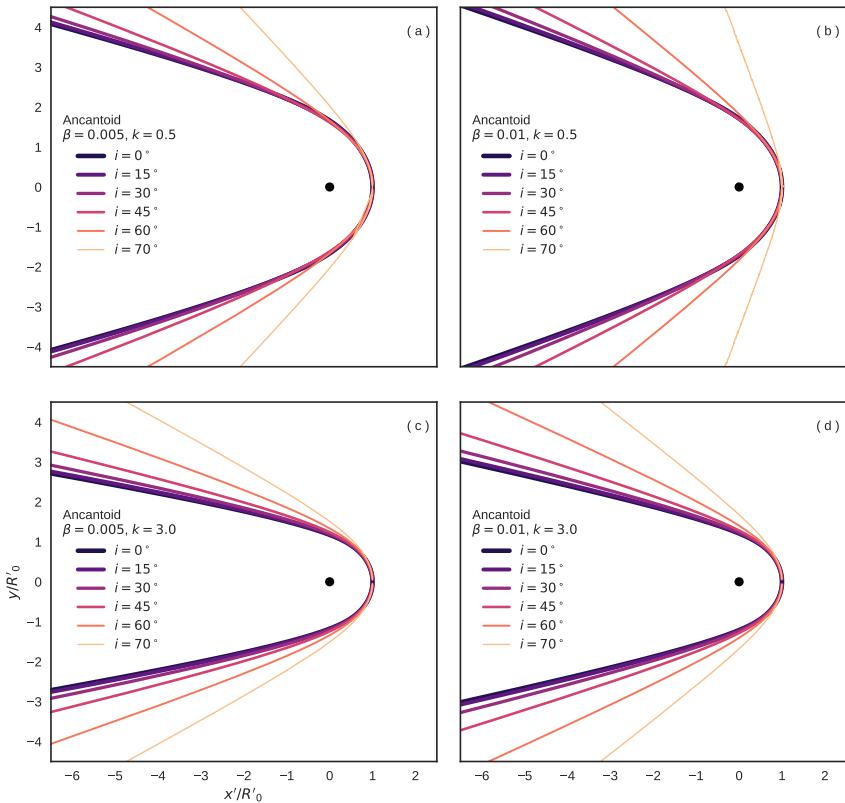


Figura 3.5: Extensión de la figura 3.4 para choques de proa no isotrópicos (ancantoides): (a)  $\beta = 0,005, k = 1/2$ . (b)  $\beta = 0,01, k = 1/2$ . (c)  $\beta = 0,005, k = 3$ . (d)  $\beta = 0,01, k = 3$

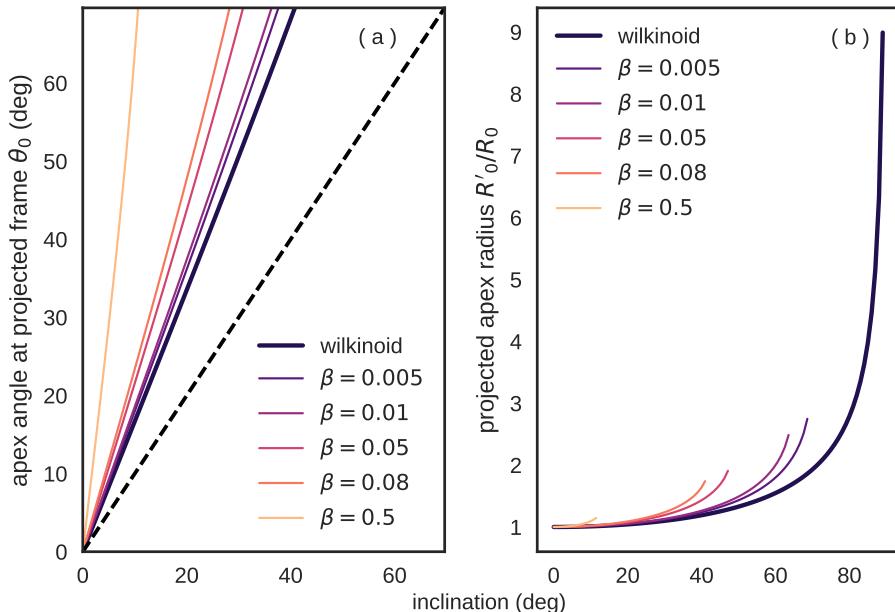


Figura 3.6: (a) Soluciones a la ecuación (2.33) en función de la inclinación para choques de proa del modelo de capa delgada y viento interior isotrópico (cantoides y wilkinoides). (b) Soluciones a la ecuación (2.34) en función de la inclinación normalizadas con  $R_0$ .

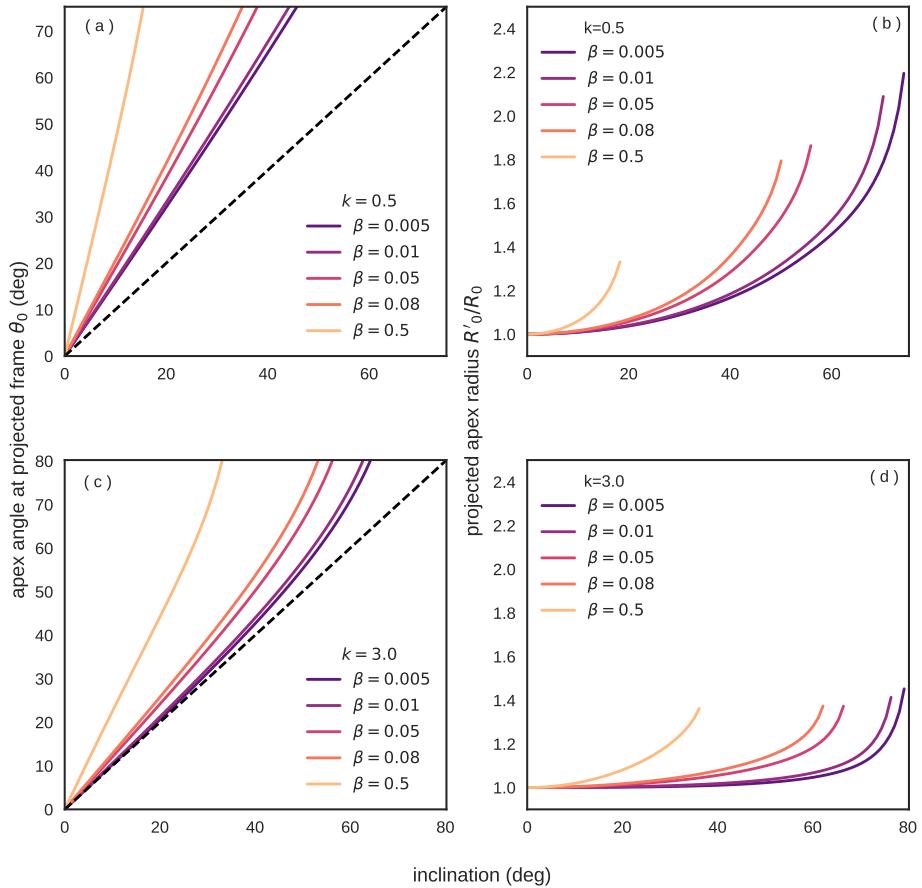


Figura 3.7: (a) Soluciones a la ecuación (2.33) en función de la inclinación para choques de proa del modelo de capa delgada y viento interior anisotrópico (ancantoides) para dos índices de anisotropía:  $k = 1/2$  (arriba) y  $k = 3$  (abajo). (b) Soluciones a la ecuación (2.34) en función de la inclinación normalizadas con  $R_0$ .

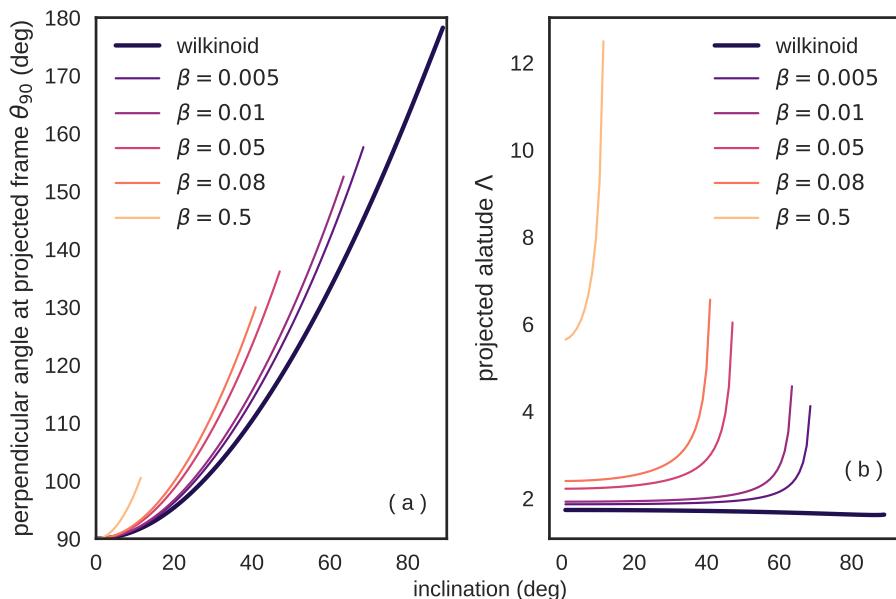


Figura 3.8: (a) Soluciones a la ecuación (2.36) en función de la inclinación para choques de proa del modelo de capa delgada y viento interior isotrópico (cantoídes y wilkinoides). (b) Alatud aparente en función de la inclinación, obtenida a partir del cociente de las soluciones de las ecuaciones (2.35, 2.34)

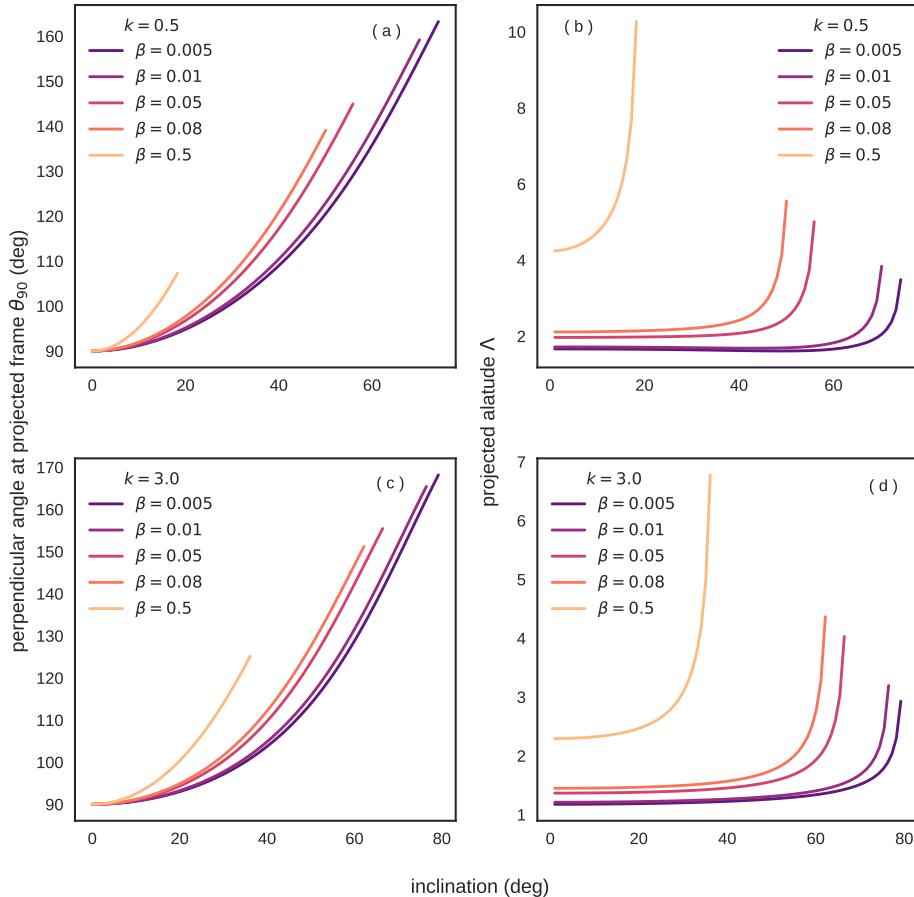


Figura 3.9: (a) Soluciones a la ecuación (2.36) en función de la inclinación para choques de proa del modelo de capa delgada y viento interior anisotrópico (ancantoides) para dos índices de anisotropía:  $k = 1/2$  (arriba) y  $k = 3$  (abajo). (b) Alatud aparente en función de la inclinación, obtenida a partir del cociente de las soluciones de las ecuaciones (2.35, 2.34)

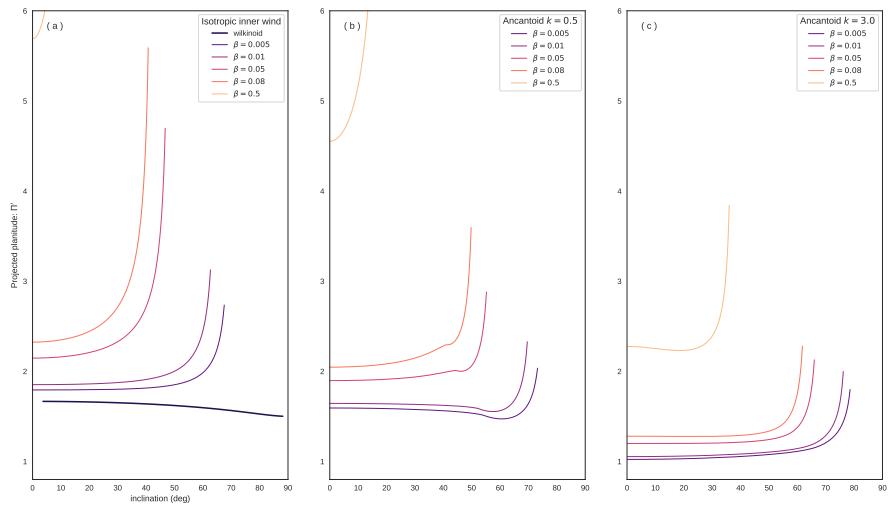


Figura 3.10: Soluciones a la ecuación 2.37 para obtener la planitud aparente en función de la inclinación en el modelo de capa delgada para: (a) viento interno isotrópico (cantoides y wilkinoides) y viento interno anisotrópico (ancantoides) con índice de anisotropía de (b)  $k = 1/2$  y (c)  $k = 3$ .

inclinación máxima.

Por último, mostramos en la figura 3.11 los diagramas  $\Lambda' - \Pi'$  para diferentes tipos de choques de proa. Cada curva representa un choque de proa con parámetros  $(\beta, k)$  fijos donde la inclinación varía de un punto a otro a lo largo de la curva. El comportamiento de estos choques de proa se diferencia del de las cuádricas de revolución, mostrado en la figura 2.9a. En este caso, las curvas no están confinadas a una sola región: para inclinaciones bajas, la mayoría de las curvas ajustan mejor a la forma de elipsoides proláticos, a excepción de las curvas con parámetro  $\beta$  alto ( $\beta \gtrsim 0.01$ ), mientras que para altas inclinaciones la forma ajusta mejor a hiperboloides. Esto se debe a la tensión que existe entre la forma de la cabeza y de la cola (figura ).

La curva del choque wilkinoide se muestra en color blanco, y tiene un comportamiento menos interesante que otras curvas: simplemente se mueve desde  $(5/3, \sqrt{3})$  hasta  $(3/2, \sqrt{8/3})$ . Aunque se ubica en la región de

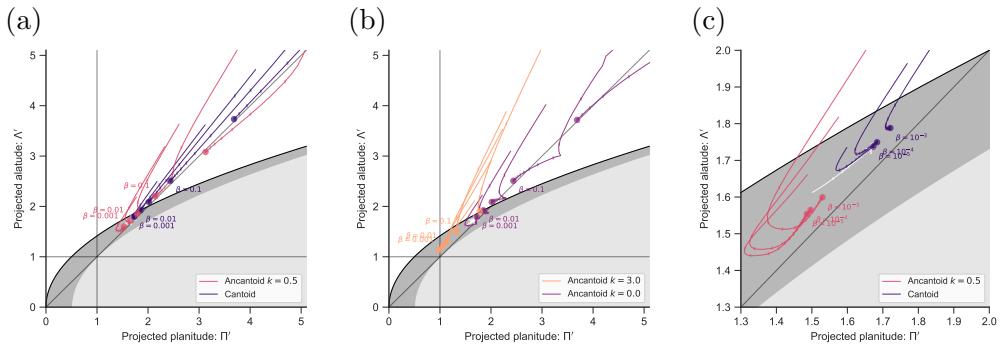


Figura 3.11: Diagramas planitud-ataud para las soluciones del modelo de capa delgada. Los círculos de colores indican la forma intrínseca para cada modelo ( $i = 0^\circ$ ). Las líneas muestran la solución a este mismo modelo en función de la inclinación. Las marcas más pequeñas corresponden a inclinaciones igualmente espaciadas de  $|\sin i|$ . El modelo wilkinoide se muestra en color blanco. (a) Soluciones para los modelos cantoide (azul) y ancantoid  $k = 0,5$  (rojo) para  $\beta = [0,001, 0,003, 0,01, 0,03, 0,1, 0,3]$ . (b) Soluciones para modelos ancantoides  $k = 3$  (naranja) y  $k = 0$  (morado). (c) Igual que (a) pero aumentada para mostrar la convergencia de los modelos cantoideos hacia el modelo wilkinoide conforme  $\beta \rightarrow 0$  utilizando como referencia  $\beta = [10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}]$ .

elipsoide prolato, el hecho de que  $\theta_\infty$  sea de  $180^\circ$  sugiere que la forma de las alas lejanas sea más parecido al de un paraboloide. Pero converge en  $(3/2, \sqrt{8/3})$  en vez de en  $(2, 2)$  porque las alas lejanas son asintóticamente cúbicas en vez de cuadráticas.

La densidad de marcas a lo largo de una curva nos indican la probabilidad de observar dicha porción de ésta, si asumimos una distribución isotrópica de ángulos de visión. Se puede observar que la densidad de marcas usualmente se concentra al inicio de cada curva, cerca de  $i = 0^\circ$ , y este efecto se intensifica cuando  $\beta$  es pequeño.



## Capítulo 4

# Resultados obtenidos para los proplyds “clásicos”

Probamos nuestro modelo descrito en los capítulos anteriores en una muestra de proplyds pertenecientes a la Nebulosa de Orión (ONC) que presentan un choque de proa. En la figura 4.1 se muestran los proplyds que pertenecen a nuestra muestra.

En todos los casos no fue posible medir el radio característico  $R_{90}$  debido a que el brillo de la cáscara decae con el ángulo polar  $\theta$  y no es detectable para ángulos del orden de  $60^\circ$ . Sin embargo, a continuación mostraremos la metodología para obtener la inclinación más probable de cada choque, así como los parámetros del modelo de cada uno de éstos que nos indican su forma intrínseca.

### 4.1. Metodología para la medición de la forma aparente.

Se utilizaron imágenes en el filtro de [O III] de la cámara WPC2 del Telescopio Espacial Hubble (HST). Se utilizaron las herramientas del programa DS9 para análisis de imágenes astronómicas para trazar la posición de  $\theta^1$  Ori C y de cada uno de los proplyds de la muestra. La posición y la forma de los choques de proa fue trazada con una serie de marcas a lo largo del choque. Las coordenadas de las marcas fueron guardadas en un

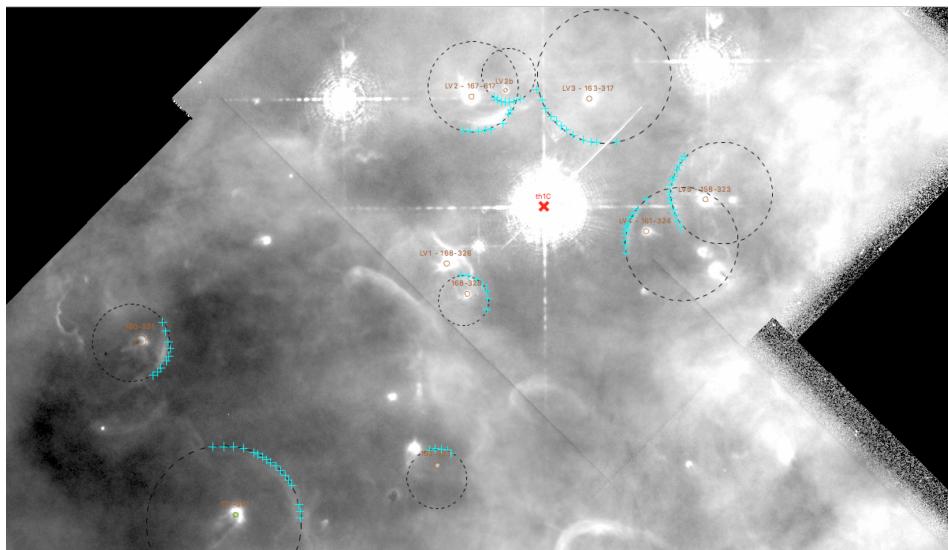


Figura 4.1: Imagen de la parte central de la Nebulosa de Orión donde se ubican los proplyds de nuestra muestra. Las cruces color cyan corresponden a las mediciones de la forma aparente para cada choque de proa. Los círculos amarillos marcan la posición de cada proplyd y la “x” roja corresponde a la posición de la estrella ionizante  $\theta^1$  Ori C. Los círculos negros ilustran de manera esquemática el radio de curvatura de cada choque.

archivo y luego procesadas para tener las coordenadas del choque en el sistema de referencia del proplyd (Figura 4.1). El radio de curvatura aparente se obtiene haciendo un ajuste de mínimos cuadrados de la forma de un círculo de las mediciones obtenidas.  $R_0$  se obtiene como la distancia mínima entre el proplyd y el ajuste circular dentro del rango de las coordenadas de las mediciones.

#### 4.1.1. Medición de incertidumbres

Para saber qué tan confiables son las coordenadas de las mediciones, se realizó el procedimiento siguiente: Del total de mediciones realizadas para cada proplyd, se crearon varias sub-muestras donde se utilizamos aproximadamente las dos terceras partes de las mediciones, pero dejando un mínimo de cuatro puntos, y se procedió a calcular los radios característicos para cada submuestra, y comprobar qué tanto se desvían estas mediciones de la original. En la figura 4.2 se muestran ejemplos de dichas sub-muestras para algunos proplyds.

## 4.2. Resultados

Los radios característicos obtenidos para la muestra original y para las submuestras se muestran en la figura 4.3. En cada pánel se utiliza un valor fijo para el parámetro de anisotropía  $k$ . De esta figura se pueden encontrar algunas observaciones cualitativas: Los proplyds con planitud mayor, LV4 y LV2b ajustan mejor a modelos donde el parámetro de anisotropía es bajo. Para LV2, por otro lado, su medición principal no ajusta a ningún modelo, pero tiene dos variaciones que se desvían mucho de la medición principal que ajustan a modelos con índice de anisotropía alto. Probablemente la presencia de un jet interfiera con la forma del choque (añadir referencia) pero es una hipótesis que va más allá del objetivo de este trabajo. El resto de los proplyds ajusta bien con un parámetro de anisotropía medio ( $k \sim 1/2 - 3$ ). Dependiendo de los parámetros ( $\beta, k$ ), la inclinación que se le puede atribuir a cada proplyd en la mayoría de los casos varía entre  $15^\circ$  y  $40^\circ$ .

Con base a este análisis, se resume en la tabla 4.1 los ajustes a los parámetros de los proplyds: inclinación, distancia a  $\theta^1$  Ori C intrínseca  $D$  y radio

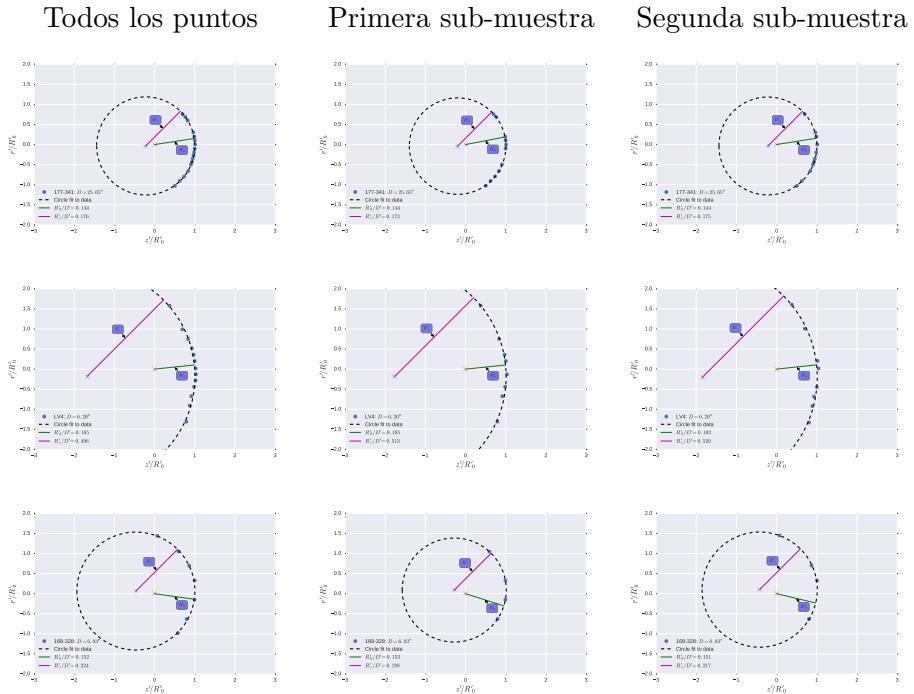


Figura 4.2: Ejemplos de incertidumbres sistemáticas en los ajustes circulares a la forma de los choques para tres fuentes (desde la línea superior hasta la inferior): 177-341, LV4 y 168-328. La columna de la izquierda muestra el ajuste a todos los puntos identificados en el borde de la cáscara, donde el número y el espaciamiento de los puntos es una medida subjetiva de nuestra confianza al trazar el borde de cada cáscara. Las dos columnas restantes muestran ajustes a sub-muestras seleccionadas aleatoriamente que contienen 2/3 partes de los puntos de la muestra original para cada cáscara.

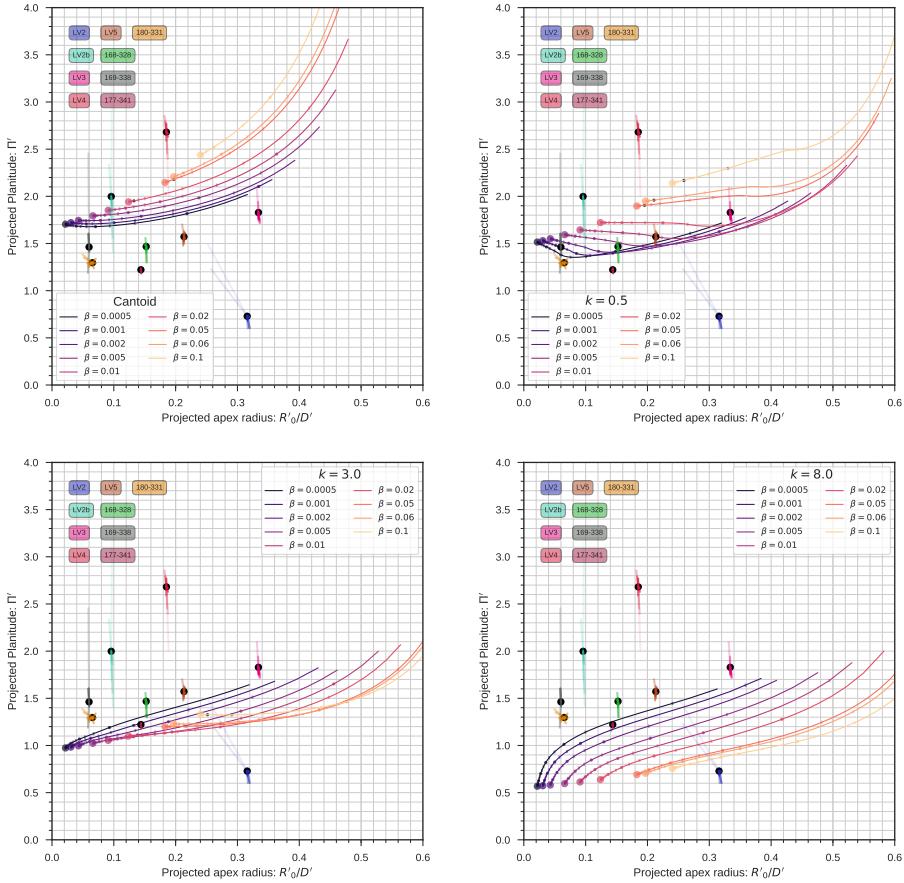


Figura 4.3: Similar a la figura 3.11 pero sustituyendo la alatud aparente por el radio aparente en el ápex  $R'_0/D'$  para diferentes grados de anisotropía  $k$ , donde en cada pánel se asume que este parámetro es fijo. A lo largo de cada curva el valor del parámetro  $\beta$  es fijo, mientras que la inclinación se incrementa a lo largo de la curva, empezando a partir del círculo grande, donde  $i = 0^\circ$ . Las marcas circulares pequeñas representan intervalos de  $15^\circ$ , mientras que las marcas más pequeñas representan intervalos de  $5^\circ$ . Los resultados observacionales de los choques de proa para nuestro set de prolyds se muestran con puntos negros, mientras que las mediciones de las sub muestras se muestran con líneas de colores radiales que parten desde la medición “principal”. La opacidad de la medición de cada sub muestra es mayor cuanto menor sea la desviación respecto a la medición principal.

del choque en el eje de simetría  $R_0/D$ .

Cuadro 4.1: Ajuste a los parámetros de los arcos para los choques de proa de los proplyds

OW (1)	Nombre (2)	$D'$ (3)	$R'_0/D'$ (4)	$(R'_c/R'_0)_{\text{shape}}$ (5)	$(R'_c/R'_0)_{\text{flux}}$ (6)	$\beta$ (7)
168-328		6.8	$0,152 \pm 0,001$	$1,42 \pm 0,09$	$1,45 \pm 0,05$	$0,018 \pm 0,003$
169-338		16.4	$0,059 \pm 0,001$	$1,76 \pm 0,48$	$1,50 \pm 0,05$	$0,002 \pm 0,001$
177-341	HST1	25.6	$0,144 \pm 0,001$	$1,21 \pm 0,02$	$1,25 \pm 0,02$	$0,018 \pm 0,003$
180-331		25.1	$0,061 \pm 0,007$	$1,30 \pm 0,05$	$1,27 \pm 0,05$	$0,003 \pm 0,001$
167-317	LV2	7.8	$0,305 \pm 0,025$	$0,81 \pm 0,28$	$1,50 \pm 0,1$	$0,085 \pm 0,015$
	LV2b	7.2	$0,097 \pm 0,002$	$2,00 \pm 0,62$	$1,63 \pm 0,08$	$0,008 \pm 0,003$
163-317	LV3	6.9	$0,334 \pm 0,002$	$1,81 \pm 0,12$	$1,85 \pm 0,15$	$0,075 \pm 0,025$
161-324	LV4	6.2	$0,186 \pm 0,002$	$2,59 \pm 0,24$	$2,05 \pm 0,07$	$0,040 \pm 0,014$
168-323	LV5	9.6	$0,213 \pm 0,002$	$1,57 \pm 0,07$	$1,60 \pm 0,07$	$0,055 \pm 0,005$

Notes – Col. (1): ID de la fuente (O'Dell & Wen, 1994). Col. (2): Nombre alternativo de la fuente. Col. (3): Distancia proyectada desde  $\theta^1$  Ori C, segundos de arco. Col. (4): Radio exterior aparente a lo largo del eje, normalizado con la distancia proyectada, con una incertidumbre de  $\pm 1\sigma$ , determinado con el ajuste circular descrito en § 4.1. Col. (5): Radio de curvatura aparente, normalizado con el radio a lo largo del eje, con incertidumbres de  $\pm 1\sigma$ , determinado con el ajuste circular descrito en § 4.1. Col. (6): Igual que Col. (5) pero aplicando el criterio adicional de que el brillo superficial del proplyd obtenido debe coincidir con la predicción teórica. Col. (7): Cociente de momentos entre el viento del proplyd y la estrella O (ver capítulo 3). Col. (8): Parámetro de anisotropía del viento del proplyd. Col. (9): Inclinación respecto al plano del cielo, en grados. Col. (10): Distancia real desde  $\theta^1$  Ori C, parsecs. Col. (11): Radio real de la cáscara a lo largo del eje, normalizado con distancia.



# Capítulo 5

# Conclusiones

Write Conclusions, discussions, etc. here





# Bibliografía

- Ballesteros-Paredes J., Hartmann L., Vázquez-Semadeni E., 1999, *ApJ*, 527, 285
- Ballesteros-Paredes J., Hartmann L. W., Vázquez-Semadeni E., Heitsch F., Zamora-Avilés M. A., 2011, *MNRAS*, 411, 65
- Bally J., Sutherland R. S., Devine D., Johnstone D., 1998, *AJ*, 116, 293
- Bally J., O'Dell C. R., McCaughrean M. J., 2000, *AJ*, 119, 2919
- Canto J., Raga A. C., Wilkin F. P., 1996, *ApJ*, 469, 729
- Churchwell E., Felli M., Wood D. O. S., Massi M., 1987, *ApJ*, 321, 516
- Cox N. L. J., et al., 2012, *A&A*, 537, A35
- Gordon M. A., Churchwell E., 1970, *A&A*, 9, 307
- Hartmann L., Burkert A., 2007, *ApJ*, 654, 988
- Hayward T. L., Houck J. R., Miles J. W., 1994, *ApJ*, 433, 157
- Hennebelle P., Péault M., 1999, *A&A*, 351, 309
- Henney W. J., Arthur S. J., 1998, *AJ*, 116, 322
- Johnstone D., Hollenbach D., Bally J., 1998, *ApJ*, 499, 758
- Laques P., Vidal J. L., 1979, *A&A*, 73, 97
- Menten K. M., Reid M. J., Forbrich J., Brunthaler A., 2007, *A&A*, 474, 515

- O'Dell C. R., Wen Z., 1994, *ApJ*, 436, 194
- O'dell C. R., Wen Z., Hu X., 1993, *ApJ*, 410, 696
- Robberto M., et al., 2005, *AJ*, 129, 1534
- Shull J. M., McKee C. F., 1979, *ApJ*, 227, 131
- Stahler S. W., Palla F., 2004, *The Formation of Stars*. Wiley-VCH
- Tarango Yong J. A., Henney W. J., 2018, *MNRAS*, 477, 2431
- Wilkin F. P., 1996, *ApJ*, 459, L31
- Yusef-Zadeh F., 1990, *ApJ*, 361, L19

## Apéndice A

# Choques y Frentes de Ionización

Algunas veces en un medio gaseoso pueden existir discontinuidades importantes en alguna de sus propiedades físicas, cuando estas propiedades son la presión, densidad y temperatura del gas nos estamos refiriendo a un choque, que es producido cuando el gas sufre una perturbación a una velocidad superior a la del sonido, mientras que si la discontinuidad ocurre en el grado de ionización del gas, entonces esta discontinuidad es conocida como frente de ionización. En esta sección analizaremos las condiciones de salto tanto de los choques como de los frentes de ionización para conocer las propiedades del gas en las dos interfaces de la discontinuidad.

### A.1. Choques

Consideremos un fluído que tiene densidad  $\rho_1$ , presión  $P_1$  y se mueve en la dirección de eje  $+x$  con velocidad  $u_1$ . En la posición  $x = s(t)$  existe un choque que se mueve a velocidad  $u_0 \equiv \frac{ds}{dt}$ . Delante del choque el fluido tiene densidad  $\rho_2$ , presión  $P_2$  y se mueve a velocidad  $u_2$ .

Antes y después del choque escogemos dos puntos arbitrarios,  $x_1$  y  $x_2$ , respectivamente que forman una superficie cada uno en el plano  $yz$  que están en co-movimiento con la discontinuidad (ver figura A.1).

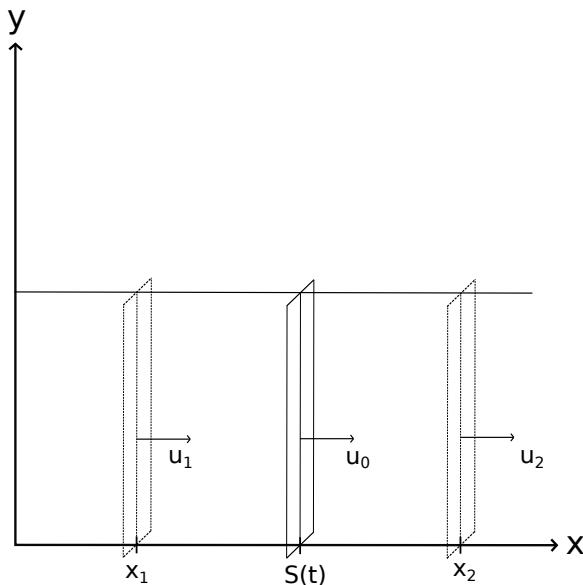


Figura A.1: Representación esquemática de un fluido con una discontinuidad situada en  $x = s(t)$ . Detrás y delante del choque en las posiciones  $x = x_1$  y  $x = x_2$ , respectivamente, situamos dos superficies paralelas al choque y que están en co-movimiento con éste.

La masa encerrada dentro del volumen que forman las dos superficies es constante en el tiempo, esto es, la cantidad que fluido que entra por la superficie 1 (atrás del choque), debe ser igual a la que sale por la superficie 2:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho \, dx = 0 \quad (\text{A.1})$$

Por otro lado, dentro del volumen entre las dos superficies, la presión del fluido en la superficie 1 contribuye a incrementar el momento, mientras que la presión en la superficie 2 tiene el efecto contrario, entonces:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho u \, dx = P_1 - P_2 \quad (\text{A.2})$$

Por último, por completez la potencia mecánica por unidad de área  $P_1 u_1 - P_2 u_2$  incrementa la energía interna del fluido entre las superficies:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho \left( \frac{u^2}{2} + \epsilon \right) \, dx = P_1 u_1 - P_2 u_2 \quad (\text{A.3})$$

Donde  $\epsilon$  es la energía interna por unidad de masa. Nótese que esta ecuación no es válida si el fluido puede perder energía por radiación (este caso se discutirá aparte más adelante).

Las tres ecuaciones anteriores son de la siguiente forma:

$$\frac{dJ}{dt} \equiv \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \Psi(x, t) \, dx \quad (\text{A.4})$$

Donde  $\Psi(x, t)$  presenta una discontinuidad espacial en  $x = s(t)$ . Como la integral implica solo la coordenada espacial y la derivada es respecto al tiempo, entonces podemos intercambiar el orden de éstas:

$$\frac{dJ}{dt} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\Psi}{dt} \, dx = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{dx}{dt} \right) \, dx \quad (\text{A.5})$$

Debido a la discontinuidad separaremos el segundo término de la integral:

$$\begin{aligned}\frac{dJ}{dt} &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \Psi}{\partial t} dx + \int_{x_1}^s \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{dx}{dt} dx + \int_s^{x_2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{dx}{dt} dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \Psi}{\partial t} dx (\Psi_1 u_0 - \Psi_1 u_1 + \Psi_2 u_2 - \Psi_2 u_0)\end{aligned}\quad (\text{A.6})$$

Como  $x_1$  y  $x_2$  son puntos arbitrarios, podemos tomar el límite cuando  $x_1, x_2 \rightarrow s$ . Este límite es de interés ya que los choques en muchos casos son muy delgados en comparación con el tamaño característico del sistema. De esta manera el primer término del lado derecho de la ecuación (A.6) desaparece porque la derivada parcial respecto al tiempo de  $\Psi$  es finita para toda  $x$  (incluida la discontinuidad). Entonces:

$$\lim_{x_1, x_2 \rightarrow s} \frac{dJ}{dt} = \Psi_2 v_2 - \Psi_1 v_1 \quad (\text{A.7})$$

Donde  $v_2 \equiv u_2 - u_0$  y  $v_1 \equiv u_1 - u_0$  son las velocidades del fluido respecto a la velocidad del choque.

Utilizando la ecuación (A.7) en (A.1) obtenemos la primera condición de salto:

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 \quad (\text{A.8})$$

Aplicando a su vez en la ecuación (A.2) con ayuda de la ecuación (A.8) obtenemos la siguiente condición de salto:

$$\rho_1 v_1^2 = \rho_2 v_2^2 \quad (\text{A.9})$$

Por último, la última condición de salto, solo válida para sistemas adiabáticos es, utilizando la ecuación (A.3) es:

$$\frac{1}{2} v_1^2 + \epsilon_1 + \frac{P_1}{\rho_1} = \frac{1}{2} v_2^2 + \epsilon_2 + \frac{P_2}{\rho_2} \quad (\text{A.10})$$

Para el caso en que el fluído pierde energía por radiación, la ecuación (A.2) sufre la siguiente modificación:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_3} \rho \left( \frac{u^2}{2} + \epsilon \right) dx = P_1 u_1 - P_3 u_3 - 2F_{rad} \quad (\text{A.11})$$

Donde  $F_{rad}$  es el flujo de radiado por el fluído y  $x_3$  es un punto localizado más allá de la región de relajamiento del choque (la zona donde el fluído está radiando, como referencia podemos tomar la figura 3 de Shull & McKee (1979)).

De esta forma, la nueva condición de salto en caso de un choque radiativo es:

$$\frac{1}{2}v_3^2 + \epsilon_3 + \frac{P_3}{\rho_3} = \frac{1}{2}v_1^2 + \epsilon_1 + \frac{P_1}{\rho_1} \frac{2F_{rad}}{\rho_1 v_1} \quad (\text{A.12})$$

## A.2. Frentes de Ionización

Para esta sección, utilizaremos el subíndice “0” para las propiedades del gas en la interfaz neutra, mientras que para la interfaz ionizada utilizaremos el subíndice “i” (ver figura A.2). Bajo esta nomenclatura, combinando las ecuaciones (A.8, A.9) para las condiciones de salto en el Frente de ionización y reescribiendo la presión en términos de la velocidad del sonido:

$$P_x = c_x^2 \rho_x \quad (\text{A.13})$$

Donde el subíndice “x” puede hacer referencia tanto al medio neutro o ionizado, encontramos el salto en densidad del frente de ionización:

$$\frac{\rho_i}{\rho_0} = \frac{1}{2c_i^2} \left[ v_0^2 + c_0^2 \pm \left( (v_0^2 + c_0^2)^2 - 4v_0^2 c_i^2 \right)^{1/2} \right] \quad (\text{A.14})$$

O bien, en términos del número de Mach del gas neutro  $\mathcal{M} \equiv v_0/c_0$ :

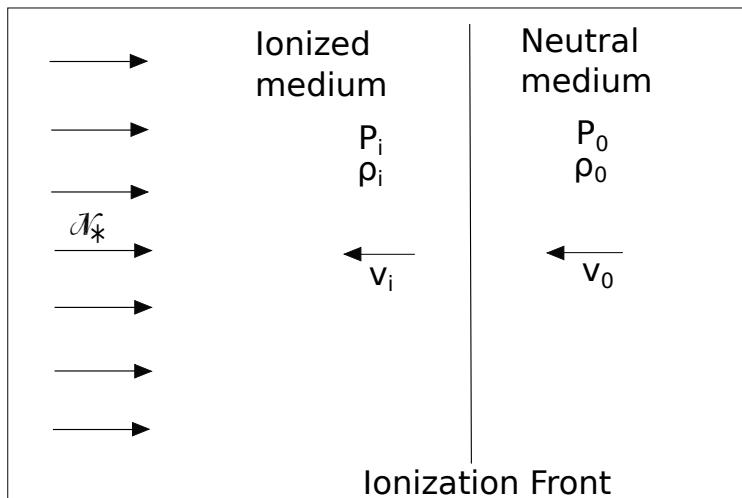


Figura A.2: Representación esquemática de la estructura de un frente de ionización. En un medio gaseoso, con densidad  $\rho_0$ , presión  $P_0$  y que se mueve velocidad  $v_0$  está expuesto a radiación ionizante con flujo  $\mathcal{N}_*$ . El gas ionizado tiene densidad  $\rho_i$ , presión  $P_i$  y se mueve a velocidad  $v_i$ . Las velocidades están medidas en el sistema de referencia del frente de ionización.

$$\frac{\rho_i}{\rho_0} = \frac{1}{2} \frac{c_0^2}{c_i^2} \left[ \mathcal{M}^2 + 1 \pm \left( (\mathcal{M}^2 + 1)^2 - 4\mathcal{M}^2 \frac{c_i^2}{c_0^2} \right)^{1/2} \right] \quad (\text{A.15})$$

En la ecuación (A.15) se requiere que el argumento de la raíz cuadrada sea positivo. Para que esto suceda se debe cumplir la siguiente condición:

$$\mathcal{M}^2 - 2\mathcal{M} \frac{c_i}{c_0} + 1 \geq 0 \quad (\text{A.16})$$

Los casos críticos (donde el discriminante (A.16) es igual a cero) son:

$$\mathcal{M}_R = \frac{c_i}{c_0} \left[ 1 + \left( 1 - \frac{c_0^2}{c_i^2} \right)^{1/2} \right] \quad (\text{A.17})$$

$$\mathcal{M}_D = \frac{c_i}{c_0} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{c_0^2}{c_i^2} \right)^{1/2} \right] \quad (\text{A.18})$$

Como  $c_i^2 \gg c_0^2$ , dado que  $c_i \sim 10 \text{ kms}^{-1}$  y  $c_0 \sim 1 - 3 \text{ kms}^{-1}$  entonces podemos hacer las siguientes aproximaciones:

$$\mathcal{M}_R \simeq 2 \frac{c_i}{c_0} \quad (\text{A.19})$$

$$\mathcal{M}_D \simeq \frac{1}{2} \frac{c_0}{c_i} \quad (\text{A.20})$$

Cuando  $\mathcal{M} \geq \mathcal{M}_R$ , el frente de ionización se denomina tipo R (rarified), y en caso de que  $\mathcal{M} \leq \mathcal{M}_D$  se denominan frentes tipo D (dense). Cuando  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_R$  o  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_D$  los frentes se denominan R crítico y D crítico, respectivamente. En los frentes tipo R el material neutro viaja a velocidad supersónica y el salto de densidad es  $\rho_i/\rho_0 < 0$  (la onda de material que pasa a través del frente de ionización está rarificada respecto al material ionizado, de ahí el nombre). En los frentes tipo D ocurre lo contrario: la onda de material viaja a velocidad subsónica y es densa respecto al material ionizado. En el caso de que  $\mathcal{M}_D < \mathcal{M} < \mathcal{M}_R$  la onda de material que

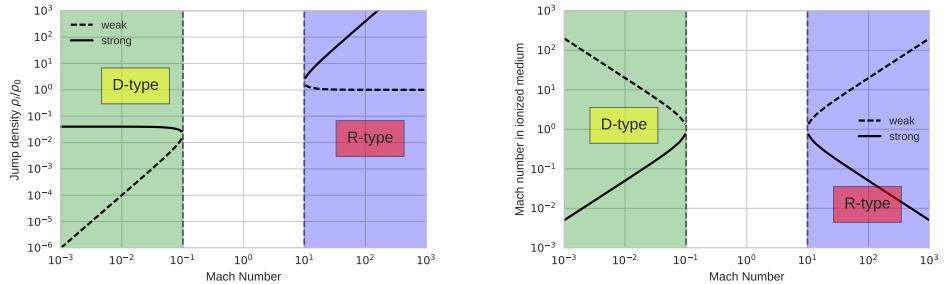


Figura A.3: Soluciones para el salto en (a) densidad y (b) velocidad de un frente de ionización. La línea punteada representa la solución a la ecuación (A.15) cuando se utiliza el signo negativo, mientras que la línea continua a la solución con signo positivo. En la región sombreada en verde se muestran los frentes tipo D y en la región azul los frentes tipo R. Los frentes tipo D crítico y R crítico ocurren donde se intersectan las soluciones con las líneas punteadas verticales.

víaja hacia el frente de ionización se amortigua rápidamente. En la figura A.3a se muestran las soluciones para el salto de densidad para frentes de ionización “fuertes” (signo positivo en la ecuación (A.15)) y “débiles” (signo negativo en (A.15)).

Por otro lado, el salto en velocidad lo podemos derivar combinando las ecuaciones (A.8, A.15). El resultado se muestra en la figura A.3b. En el caso de los frentes R crítico y D crítico, la velocidad del gas en el medio ionizado es igual a la velocidad del sonido.

## Apéndice B

# Matrices de Rotación y Proyección en el Plano del Cielo.

La transformación del sistema de referencia del objeto (no primado) al sistema de referencia del plano del cielo (primado), se realiza mediante una rotación respecto al eje  $y$  por un ángulo  $i$ . Dicha rotación es descrita por la matriz de rotación  $\mathbf{A}_y(i)$ :

$$\mathbf{A}_y(i) = \begin{pmatrix} \cos i & 0 & -\sin i \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin i & 0 & \cos i \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

A su vez se pueden obtener con esta matriz los vectores unitarios del sistema de referencia primado en términos de los vectores unitarios del sistema de referencia no primado:

$$\hat{x}' = \mathbf{A}_y(-i) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

$$\hat{y}' = \mathbf{A}_y(-i) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.3})$$

$$\hat{z}' = \mathbf{A}_y(-i) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.4})$$

Es de notarse que en este caso el signo de  $i$  está invertido debido a que actualmente la matriz de rotación  $\mathbf{A}_y(i)$  realiza una rotación en favor de las manecillas del reloj, mientras que convencionalmente se utiliza el signo positivo del ángulo de rotación para rotaciones en contra de las manecillas del reloj (add reference HERE).

Por otro lado, como estamos considerando choques con geometría cilíndrica, entonces todos los ángulos azimutales  $\phi$  son equivalentes. Entonces, por simplicidad, podemos trabajar con curvas bidimensionales en plano  $xy$  ( $z = 0$ ), donde su forma tridimensional es una superficie de revolución de éstas alrededor del eje  $x$  y se puede encontrar mediante la matriz de rotación:

$$\mathbf{A}_x(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (\text{B.5})$$

Donde  $\phi$  toma valores en el intervalo  $[0, 2\pi]$

## Apéndice C

# Derivación Matemática del Radio de Curvatura

Tomamos una curva genérica  $\vec{\sigma}(t) \equiv x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y}$  continua y suave para todo valor de  $t$  real y finito. Sus derivadas se denotan como  $\vec{\sigma}'(t)$  y  $\vec{\sigma}''(t)$ . Su longitud de arco está dada por:

$$s(t) = \int_0^t \|\vec{\sigma}'(t')\| dt' \quad (\text{C.1})$$

Reparametrizamos la trayectoria  $\vec{\sigma}(t)$  con la longitud de arco y diferenciando respecto a ésta obtenemos lo siguiente:

$$\frac{d\vec{\sigma}}{ds} = \frac{\vec{\sigma}'(t)}{\|\vec{\sigma}'(t)\|} \equiv \vec{T}(s) \quad (\text{C.2})$$

Esta última expresión se logró diferenciando la ecuación (C.1) y aplicando la regla de la cadena al diferenciar  $\frac{d\vec{\sigma}}{ds}$ .  $\vec{T}(s)$  es el vector tangente a la trayectoria  $\vec{\sigma}(s)$ .

La curvatura  $\kappa$  se define como la magnitud de la derivada del vector tangente respecto a la longitud de arco, o bien, como la segunda derivada de la trayectoria  $\vec{\sigma}(s)$ :

$$\kappa \equiv \|\vec{T}'(s)\| = \|\vec{\sigma}''(s)\| \quad (\text{C.3})$$

El radio de curvatura se define como el radio de un círculo que ajusta localmente a la trayectoria, y se calcula como el inverso multiplicativo de la curvatura:

$$R_c = \frac{1}{\kappa} \quad (\text{C.4})$$

Aplicando la regla de la cadena encontramos la siguiente expresión para la curvatura:

$$\kappa = \left\| \frac{\vec{\sigma}''(t)}{\|\vec{\sigma}'(t)\|^2} - \frac{\vec{\sigma}'(t)}{\|\vec{\sigma}'(t)\|^4} \vec{\sigma}'(t) \cdot \vec{\sigma}''(t) \right\| \quad (\text{C.5})$$

Escribimos las componentes de las derivadas de  $\vec{\sigma}(t)$  para calcular los factores que intervienen en la ecuación (C.5):

$$\vec{\sigma}'(t) = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} \quad (\text{C.6})$$

$$\vec{\sigma}''(t) = \ddot{x}\hat{x} + \ddot{y}\hat{y} \quad (\text{C.7})$$

$$\implies \vec{\sigma}'(t) \cdot \vec{\sigma}''(t) = \dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} \quad (\text{C.8})$$

De esta forma, calculamos la curvatura como sigue:

$$\kappa = \left[ \left( \frac{\ddot{x}}{\|\vec{\sigma}'\|^2} - \frac{\dot{x}(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y})}{\|\vec{\sigma}'\|^4} \right)^2 + \left( \frac{\ddot{y}}{\|\vec{\sigma}'\|^2} - \frac{\dot{y}(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y})}{\|\vec{\sigma}'\|^4} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (\text{C.9})$$

$$\begin{aligned} \kappa &= \|\vec{\sigma}'\|^{-2} \left[ (\ddot{x}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \dot{x}(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}))^2 \right. \\ &\quad \left. + (\ddot{y}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \dot{y}(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}))^2 \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

$$\kappa = \|\vec{\sigma}'\|^{-2} \left[ (\ddot{x}\dot{y}^2 - \dot{x}\dot{y}\ddot{y})^2 + (\ddot{y}\dot{x}^2 - \dot{y}\dot{x}\ddot{x})^2 \right]^{1/2} \quad (\text{C.11})$$

$$\kappa = \|\vec{\sigma}'\|^{-3} [\dot{x}^2\dot{y}^2 + \dot{y}^2\dot{x}^2 - 2\dot{x}\dot{y}\dot{x}\dot{y}]^{1/2} \quad (\text{C.12})$$

$$\kappa = \frac{|\dot{x}\dot{y} - \dot{y}\dot{x}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} \quad (\text{C.13})$$

Utilizando coordenadas polares, y utilizando el ángulo polar  $\theta$  como parámetro, la expresión para el radio de curvatura queda como sigue:

$$R_c = \frac{(R^2 + R_\theta^2)^{3/2}}{|R^2 + 2R_\theta - RR_{\theta\theta}|} \quad (\text{C.14})$$

Donde  $R_\theta \equiv \frac{dR}{d\theta}$  y  $R_{\theta\theta} \equiv \frac{d^2R}{d\theta^2}$ .

Evaluando (C.14) en el ápex ( $\theta = 0$ ) encontramos que  $R_{\theta,0} = 0$  por ser el mínimo de  $R(\theta)$  y podemos quitar las barras de valor absoluto porque el denominador resultante siempre es positivo por la misma razón. Por tanto recuperamos la ecuación (2.3):

$$R_c = \frac{R_0^2}{R - R_{\theta\theta,0}} \quad (\text{C.15})$$

## C.1. Radio de curvatura para un polinomio de grado $2n$

Dado que es de nuestro interés calcular el radio de curvatura del choque en el eje de simetría ( $\theta = 0$ ), debido a que es analíticamente más fácil de calcular, y a su vez es medible observationalmente ajustando un círculo a una serie de mediciones de la posición del choque (sección ). Entonces, hacemos una aproximación para la función  $R(\theta)$  que nos da la forma del choque mediante un polinomio par de grado  $2n$  de la siguiente forma:

$$R(\theta) \simeq R_0 (1 + R_{\theta\theta,0}\theta^2 + \mathcal{O}(\theta^4)) \quad (\text{C.16})$$

De esta forma calculamos las derivadas de  $R(\theta)$ :

$$\dot{R}(\theta) \simeq R_0\theta (2R_{\theta\theta,0} + \mathcal{O}(\theta^2)) \quad (\text{C.17})$$

$$\ddot{R}(\theta) \simeq R_0 (2R_{\theta\theta,0} + \mathcal{O}(\theta^2)) \quad (\text{C.18})$$

Evaluando en  $\theta = 0$  obtenemos los siguientes:

$$R(0) = R_0 \quad (\text{C.19})$$

$$\dot{R}(0) = 0 \quad (\text{C.20})$$

$$\ddot{R}(0) = 2R_{\theta\theta,0}R_0 \quad (\text{C.21})$$

$$\implies \omega(0) = 0 \quad (\text{C.22})$$

$$\dot{\omega}(0) \equiv \frac{\ddot{R}(0)}{R(0)} - \left( \frac{\dot{R}(0)}{R(0)} \right)^2 = 2R_{\theta\theta,0} \quad (\text{C.23})$$

Sustituyendo en la ecuación (C.14) obtenemos la planitud en el ápex:

$$\Pi = \frac{1}{|1 - 2R_{\theta\theta,0}|} \quad (\text{C.24})$$

Por esto en el apéndice D para encontrar el radio de curvatura nos enfocamos en encontrar el coeficiente de segundo orden en la expansión en serie de  $R(\theta)$ .

## Apéndice D

# Derivación paso a paso de los Radios Característicos en el Modelo de Capa Delgada

### D.1. $R_0$

Podemos determinar el radio característico  $R_0$  a partir de la condición de que el choque es estacionario. En este caso, los momentos de los dos vientos son iguales en la posición del choque. Por tanto, utilizando la ecuación de momento en  $\theta = 0$  obtenemos lo siguiente:

$$\rho_{ws}v_w^2 = \rho_{ws1}v_{w1}^2 \quad (\text{D.1})$$

Donde  $\rho_{ws}$  y  $\rho_{ws1}$  son las densidades de los dos vientos en la posición del choque. Por otro lado, como la tasa de pérdida de masa es constante para un ángulo  $\theta$  dado, entonces podemos hacer lo siguiente:

$$\frac{\dot{M}_w^0}{4\pi R_0^2 v_w} v_w^2 = \frac{\dot{M}_{w1}^0}{4\pi (D - R_0)^2 v_{w1}} v_{w1}^2 \quad (\text{D.2})$$

En esta última ecuación hemos sustituído  $\dot{M}_w^0 = 4\pi R_0^2 v_w \rho_{ws}$  y  $\dot{M}_{w1}^0 = 4\pi (D - R_0)^2 v_{w1} \rho_{ws1}$ .

Reduciendo la ecuación (D.2) encontramos una expresión para  $R_0$ :

$$\frac{R_0}{D} = \frac{\beta^{1/2}}{1 + \beta^{1/2}} \quad (\text{D.3})$$

## D.2. Alatud de Choques tipo Cantoides y An-cantoides

$R_{90}$  puede determinarse a partir de evaluar las ecuaciones (3.27) y (3.28) en  $\theta = \frac{\pi}{2}$  como sigue:

$$\frac{R_{90}}{D} = \tan \theta_{1,90} \quad (\text{D.4})$$

$$\theta_{1,90} \cot \theta_{1,90} - 1 = -\frac{2\beta}{k+2} \quad (\text{D.5})$$

Donde  $\theta_{1,90} = \theta_1(\frac{\pi}{2})$ . Introducimos un nuevo parámetro  $\xi \equiv \frac{2}{k+2}$  de modo que combinando las dos ecuaciones anteriores obtenemos lo siguiente:

$$\frac{R_{90}}{D} = \tan \theta_{1,90} = \frac{\theta_{1,90}}{1 - \xi\beta} \quad (\text{D.6})$$

Hacemos una expansión en serie para el lado izquierdo de la ecuación y reducimos:

$$\theta_{1,90}^2 \left( 1 + \frac{\theta_{1,90}^2}{15} \right) \simeq 3\beta\xi \quad (\text{D.7})$$

Tomamos la solución a primer orden  $\theta_{1,90} = 3\beta\xi$ , sustituímos este valor en el término correctivo y resolvemos para  $\theta_{1,90}$ :

$$\theta_{1,90} = \left( \frac{3\xi\beta}{1 + \frac{1}{5}\xi\beta} \right)^{1/2} \quad (\text{D.8})$$

Finalmente sustituímos (D.8) en (D.6) para obtener  $R_{90}$ :

$$\frac{R_{90}}{D} = \frac{(3\xi\beta)^{1/2}}{\left(1 + \frac{1}{5}\xi\beta\right)^{1/2}(1 - \xi\beta)} \quad (\text{D.9})$$

$$\Lambda = \frac{(3\xi)^{1/2}(1 + \beta^{1/2})}{\left(1 + \frac{1}{5}\xi\beta\right)^{1/2}(1 - \xi\beta)} \quad (\text{D.10})$$

### D.3. Planitud de choques tipo Cantoides y Anti-cantoides

Siendo que el choque de proa en nuestro modelo genérico es simétrico, entonces la forma  $R(\theta)$  debe ser una función par, por tanto podemos hacer la siguiente expansión en serie:

$$R(\theta) \simeq R_0 + \frac{1}{2}R_{\theta\theta,0}\theta^2 + \mathcal{O}(\theta^4) \quad (\text{D.11})$$

De esta forma la planitud del choque en el ápex queda como sigue (ver apéndice C):

$$\Pi = \left(1 - 2\frac{R_{\theta\theta,0}}{R_0}\right)^{-1} \quad (\text{D.12})$$

Para encontrar el coeficiente de segundo orden  $R_{\theta\theta,0}$  hacemos una expansión en serie de las ecuaciones (3.28) y (3.27) para ángulos pequeños, mostrando a continuación la expansión de cada término para al final hacer la reducción algebraica:

$$\theta_1 \cot \theta_1 - 1 \simeq -\frac{\theta_1^2}{3} \left( 1 + \frac{\theta_1^2}{15} \right) \quad (\text{D.13})$$

$$\cos^k \theta \simeq \left( 1 - \frac{\theta^2}{2} \right)^k \simeq \left( 1 - \frac{k\theta^2}{2} \right) \quad (\text{D.14})$$

$$\sin^2 \theta \simeq \theta^2 \left( 1 - \frac{\theta^2}{6} \right)^2 \simeq \theta^2 \left( 1 - \frac{\theta^2}{3} \right) \quad (\text{D.15})$$

$$\implies \cos^k \theta \sin^2 \theta \simeq \theta^2 \left[ 1 - \left( \frac{1}{3} + \frac{k}{2} \right) \theta^2 \right] \quad (\text{D.16})$$

$$\implies I_k(\theta) \simeq \frac{\theta^3}{3} \left[ 1 - \frac{1}{10} (3k+2) \theta^2 \right] \quad (\text{D.17})$$

$$\cot \theta \simeq \theta^{-1} \left( 1 - \frac{\theta^2}{3} \right) \quad (\text{D.18})$$

$$\implies 2\beta I_k(\theta) \cot \theta \simeq \frac{2}{3} \beta \theta^2 \left[ 1 - \frac{1}{30} (9k+16) \theta^2 \right] \quad (\text{D.19})$$

$$-\frac{2\beta}{k+2} (1 - \cos^{k+2} \theta) \simeq \beta \theta^2 \left[ 1 - \frac{1}{12} (3k+4) \right] \quad (\text{D.20})$$

Sustituyendo las expansiones anteriores en (3.28) obtenemos lo siguiente:

$$\theta_1^2 \left( 1 + \frac{\theta_1^2}{15} \right) \simeq \beta \theta^2 \left[ 1 + \frac{1}{60} (4 - 9k) \theta^2 \right] \quad (\text{D.21})$$

La solución a primer orden (ignorando el término cuártico) es  $\theta_1^2 \simeq \beta \theta^2$ . Sustituímos esta solución en el término correctivo y resolvemos para  $\theta_1^2$ :

$$\theta_1^2 \simeq \beta \theta^2 \left[ 1 + \frac{1}{60} (4 - 9k) \theta^2 \right] \left( 1 + \frac{\beta \theta^2}{15} \right)^{-1} \quad (\text{D.22})$$

$$\theta_1^2 \simeq \beta \theta^2 \left[ 1 + \frac{1}{60} (4 - 9k) \theta^2 \right] \left( 1 - \frac{\beta \theta^2}{15} \right) \quad (\text{D.23})$$

$$\implies \theta_1^2 \simeq \beta \theta^2 (1 + C_{k\beta} \theta^2) \quad (\text{D.24})$$

$$\text{Donde : } C_{k\beta} = \left( \frac{1}{15} - \frac{3k}{20} - \frac{\beta}{15} \right) \quad (\text{D.25})$$

Utilizamos esta solución para  $\theta_1$  en la ecuación (3.27), ignorando términos de orden superior al cuártico dentro de los corchetes:

$$\theta_1 \simeq \beta^{1/2} \theta (1 + C_{k\beta} \theta^2)^{1/2} \quad (\text{D.26})$$

$$\implies \theta + \theta_1 \simeq \theta \left[ 1 + \beta^{1/2} \left( 1 + \frac{C_{k\beta}}{2} \theta^2 \right) \right] \quad (\text{D.27})$$

$$\sin \theta_1 \simeq \theta_1 \left( 1 - \frac{\theta_1^2}{6} \right) \quad (\text{D.28})$$

$$\simeq \beta^{1/2} \theta \left( 1 + \frac{C_{k\beta}}{2} \theta^2 \right) \left[ 1 - \frac{\beta \theta^2 (1 + C_{k\beta} \theta^2)}{6} \right] \quad (\text{D.29})$$

$$\implies \sin \theta_1 \simeq \beta^{1/2} \theta \left[ 1 + \left( \frac{C_{k\beta}}{2} - \frac{\beta}{6} \right) \theta^2 \right] \quad (\text{D.30})$$

$$\sin(\theta + \theta_1) \simeq (\theta + \theta_1) \left[ 1 - \frac{(\theta + \theta_1)^2}{6} \right] \quad (\text{D.31})$$

$$\simeq \theta \left[ 1 + \beta^{1/2} \left( 1 + \frac{C_{k\beta}}{2} \theta^2 \right) \right] \left[ 1 - \frac{\theta^2 \left( 1 + \beta^{1/2} \left( 1 + \frac{C_{k\beta}}{2} \theta^2 \right) \right)^2}{6} \right] \quad (\text{D.32})$$

$$\simeq \theta \left( 1 + \beta^{1/2} \right) \left[ 1 + \left( \frac{\beta^{1/2} C_{k\beta}}{2(1 + \beta^{1/2})} - \frac{1}{6} (1 + \beta^{1/2})^2 \theta^2 \right) \right] \quad (\text{D.33})$$

$$\implies \frac{R}{D} \simeq \frac{\beta^{1/2}}{1 + \beta^{1/2}} \left[ 1 + \left( \frac{C_{k\beta}}{2} - \frac{\beta}{6} \right) \theta^2 \right] \quad (\text{D.34})$$

$$\left[ 1 + \left( \frac{\beta^{1/2} C_{k\beta}}{2(1 + \beta^{1/2})} - \frac{(1 + \beta^{1/2})^2}{6} \right) \theta^2 \right]^{-1}$$

$$\simeq R_0 \left[ 1 + \left( \frac{C_{k\beta}}{2(1 + \beta^{1/2})} + \frac{1 + 2\beta^{1/2}}{6} \right) \theta^2 \right] \quad (\text{D.35})$$

De esta mostramos que el término de segundo orden que necesitamos en la ecuación (3.41) está dado por:

$$\frac{R_{\theta\theta,0}}{2} = \frac{C_{k\beta}}{2(1+\beta^{1/2})} + \frac{1+2\beta^{1/2}}{6} \quad (\text{D.36})$$

que es el resultado mostrado en la ecuación (3.42)

## D.4. Planitud para choques tipo Wilkinoides

Hacemos expansión Taylor hasta cuarto orden de cada uno de los términos de la ecuación (3.39)

$$\csc^2 \theta \simeq \theta^{-2} \left( 1 - \frac{\theta^2}{6} + \mathcal{O}(\theta^4) \right)^{-2} \simeq \theta^{-2} \left( 1 + \frac{\theta^2}{3} + \mathcal{O}(\theta^4) \right) \quad (\text{D.37})$$

$$\theta \cot \theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{3} \left( 1 + \frac{\theta^2}{15} + \mathcal{O}(\theta^4) \right) \quad (\text{D.38})$$

$$\implies 1 - \theta \cot \theta \simeq \frac{\theta^2}{3} \left( 1 + \frac{\theta^2}{15} + \mathcal{O}(\theta^4) \right) \quad (\text{D.39})$$

Sustituímos en la ecuación (3.39):

$$R(\theta) \simeq R_0 \left[ 3\theta^{-2} \left( 1 + \frac{\theta^2}{3} + \mathcal{O}(\theta^4) \right) \frac{\theta^2}{15} \left( 1 + \frac{\theta^2}{15} \right) \right]^{1/2} \quad (\text{D.40})$$

$$\implies R(\theta) \simeq R_0 \left[ 1 + \frac{2\theta^2}{5} + \mathcal{O}(\theta^4) \right]^{1/2} \quad (\text{D.41})$$

$$\implies R(\theta) \simeq R_0 \left[ 1 + \frac{\theta^2}{5} + \mathcal{O}(\theta^4) \right] \quad (\text{D.42})$$

De esta forma mostramos que el coeficiente de segundo orden en este caso es  $R_{\theta\theta,0} = \frac{1}{5}$ . Por lo tanto, sustituyendo este valor en la ecuación (C.24) encontramos que

$$\Pi = \frac{5}{3} \quad (\text{D.43})$$

## **Apéndice E**

# **True Versus Apparent Shapes of Bowshocks**

Este artículo contiene gran parte de esta Tesis, actualmente publicado en la revista Monthly Notices of the Royal Astronomical Society (MNRAS) en Marzo de 2018 (Tarango Yong & Henney, 2018).

# True versus apparent shapes of bow shocks

Jorge A. Tarango-Yong<sup>\*</sup> & William J. Henney<sup>†</sup>

*Instituto de Radioastronomía y Astrofísica, Universidad Nacional Autónoma de México, Apartado Postal 3-72, 58090 Morelia, Michoacán, México*

Accepted XXX. Received YYY; in original form ZZZ

## ABSTRACT

Astrophysical bow shocks are a common result of the interaction between two supersonic plasma flows, such as winds or jets from stars or active galaxies, or streams due to the relative motion between a star and the interstellar medium. For cylindrically symmetric bow shocks, we develop a general theory for the effects of inclination angle on the apparent shape. We propose a new two-dimensional classification scheme for bow shapes, which is based on dimensionless geometric ratios that can be estimated from observational images. The two ratios are related to the flatness of the bow's apex, which we term *planitude* and the openness of its wings, which we term *alatitude*. We calculate the expected distribution in the planitude–alatitude plane for a variety of simple geometrical and physical models: quadrics of revolution, wilkinoids, cantoids, and ancantoids. We further test our methods against numerical magnetohydrodynamical simulations of stellar bow shocks and find that the apparent planitude and alatitude measured from infrared dust continuum maps serve as accurate diagnostics of the shape of the contact discontinuity, which can be used to discriminate between different physical models. We present an algorithm that can determine the planitude and alatitude from observed bow shock emission maps with a precision of 10 to 20%.

**Key words:** circumstellar matter – hydrodynamics – stars: winds, outflows

## 1 INTRODUCTION

The archetypal bow shock is formed when a solid body moves supersonically through a compressible fluid. Terrestrial examples include the atmospheric re-entry of a space capsule, or the sonic boom produced by a supersonic jet (van Dyke 1982). In astrophysics the term bow shock is employed more widely, to refer to many different types of curved shocks that have approximate cylindrical symmetry. Instead of a solid body, astrophysical examples usually involve the interaction of *two* supersonic flows, such as the situation of a stellar wind emitted by a star that moves supersonically through the interstellar medium (van Buren & McCray 1988; Kobulnicky et al. 2010; van Marle et al. 2011; Mackey et al. 2012, 2015). In such cases, two shocks are generally produced, one in each flow. Sometimes, especially in heliospheric studies (Zank 1999; Scherer & Fichtner 2014), the term “bow shock” is reserved for the shock in the ambient medium, with the other being called the “wind shock” or “termination shock”. However, in other contexts such as colliding wind binaries (Stevens et al. 1992; Gayley 2009) such a distinction is not so useful.

A further class of astrophysical bow shock is driven by highly collimated, supersonic jets of material, such as the Herbig Haro objects (Schwartz 1978; Hartigan et al. 1987) that are powered by jets from young stars or protostars. Additional examples are seen in planetary nebulae (Phillips et al. 2010; Meaburn et al. 2013),

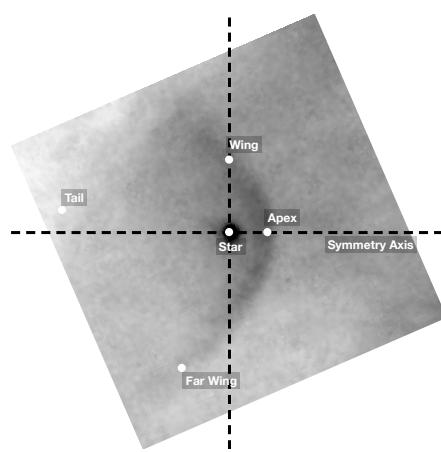
active galaxies (Wilson & Ulvestad 1987), and in galaxy clusters (Markevitch et al. 2002). In the jet-driven case, the term “working surface” is often applied to the entire structure comprising the two shocks plus the shocked gas in between them, separated by a *contact discontinuity*. The working surface may be due to the interaction of the jet with a relatively quiescent medium, or may be an “internal working surface” within the jet that is due to supersonic temporal variations in the flow velocity (Raga et al. 1990).

In empirical studies the relationship between these theoretical constructs and the observed emission structures is not always clear. In such cases the term “bow shock” is often used in a more general sense to refer to the entire arc of emission. In this paper, we will concentrate on *stellar bow shocks*, in which the position of the star can serve as a useful reference point for describing the bow shape. The empirical terminology that we will employ is illustrated in Figure 1. The *apex* is the point of closest approach of the bow to the star, which lies on the approximate symmetry axis, and the region around the apex is sometimes referred to as the *head* of the bow. The *wings* are the swept-back sides of the bow, which lie in a direction from the star that is orthogonal to the axis, with the *far wings* being the wing region farthest from the apex. Finally, the *tail* is the region near the axis but in the opposite direction from the apex.

Figure 2 shows an idealized schematic of how a double bow-shock shell is formed from the interaction of two supersonic streams: an *inner wind* and an *outer wind*, with the inner wind being the weaker of the two (in terms of momentum), so that the shell curves back around the inner source. The outer wind may be from another star, or may be a larger scale flow of the interstellar medium, such

\* E-mail: j.tarango@irya.unam.mx

† E-mail: w.henney@irya.unam.mx



**Figure 1.** Descriptive terminology for a stellar bow shock. The apex is the closest approach of the bow to the star, while the wings are the parts of the bow that curve back past the star.

as the *champagne flow* produced by the expansion of an H II region away from a molecular cloud (Tenorio-Tagle 1979; Shu et al. 2002; Medina et al. 2014). Alternatively, it may be due to the supersonic motion of the inner source through a relatively static medium, in which case the outer wind will not be divergent as shown in the figure but rather plane-parallel. The thickness of the shocked shells at the apex depends on the Mach number,  $M$ , of the flows and the efficiency of the post-shock cooling. For sufficiently strong cooling, the post-shock cooling zone thickness is negligible and the shock can be considered isothermal. In this case, the shell thickness is of order  $M^{-2}$  times the source-apex separation (Henney 2002), which can become very small for high Mach numbers. The shell thickness will tend to increase towards the wings, due to the increasing shock obliqueness, which reduces the perpendicular Mach number.

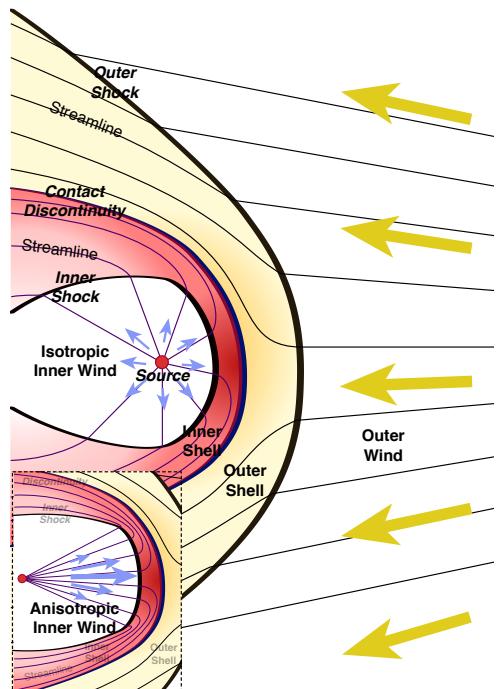
In the extreme thin-shell limit, the entire bow structure can be treated as a surface. The bow radius measured from the inner source (star) is  $R(\theta, \phi)$ , where  $\theta$  is the polar angle, measured from the star-apex axis, and  $\phi$  is the azimuthal angle, measured around that axis. Assuming cylindrical symmetry about the axis, this reduces to  $R(\theta)$ , which is illustrated in Figure 3, following Canto et al. (1996). The separation between the two sources is  $D$  and the complementary angle, as measured at the position of the outer source, is  $\theta_1$ . The minimum value of  $R(\theta)$  is the stagnation radius,  $R_0$ , which occurs at the apex ( $\theta = 0$ ). In a steady state, ram-pressure balance on the axis implies that

$$\frac{R_0}{D} = \frac{\beta^{1/2}}{1 + \beta^{1/2}}, \quad (1)$$

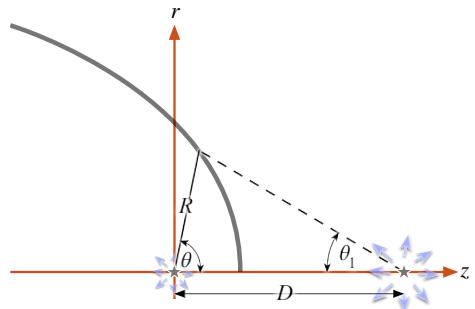
where  $\beta$  is the momentum ratio between the two winds. If the winds are isotropic, with inner wind mass-loss rate  $\dot{M}_w$  and terminal velocity  $V_w$ , while the outer wind has corresponding values  $\dot{M}_{w1}$  and  $V_{w1}$ , then the momentum ratio is

$$\beta = \frac{\dot{M}_w V_w}{\dot{M}_{w1} V_{w1}}. \quad (2)$$

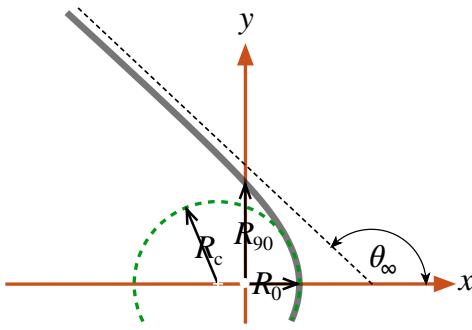
The case where the outer wind is a parallel stream (Wilkin 1996)



**Figure 2.** Quasi-stationary bow shock structure formed by the interaction of two supersonic winds. Lower-left inset box shows the case where the inner wind is anisotropic. The streamlines (thin lines) are drawn to be qualitatively realistic: they are straight in regions of hypersonic flow, but curved in subsonic regions, responding to pressure gradients in the shocked shells. Streamline slopes are discontinuous across oblique shocks.



**Figure 3.** Schematic diagram of cylindrically symmetric two-wind interaction problem in the thin-shell limit, following Canto et al. (1996).



**Figure 4.** Parameters for characterizing a bow shape. Bow radius from the star, measured parallel ( $R_0$ ) and perpendicular ( $R_{90}$ ) to the symmetry axis, together with radius of curvature ( $R_c$ ) at apex and asymptotic opening angle ( $\theta_\infty$ ) of the far wings.

corresponds to the limit  $\beta \rightarrow 0$ , in which case  $D$  is no longer a meaningful parameter.

The paper is organized as follows. In § 2 we outline the geometric parameters that are necessary for describing bow shapes and introduce two dimensionless ratios: planitude and alatitude. In § 3 we derive general results for the projection of bow shapes on to the plane of the sky. In § 4 we apply the results to the simplest possible class of geometric bow models: the quadrics of revolution, which comprise spheroids, paraboloids, and hyperboloids, each of which occupies a distinct region of the planitude–alatitude plane. In § 5 we consider thin-shell hydrodynamic models for the parallel-stream case (wilkinoids) and wind-wind case (cantoids), including extension to an anisotropic inner wind (ancantoids). We calculate the location of the models in the planitude–alatitude plane as a function of the inclination of the bow shock axis to the plane of the sky. In § 6 we test our methods against the results of more realistic numerical simulations of bow shocks, including the derivation of the shape parameters from maps of infrared dust emission. In § 7 we apply our methods to example observations of proplyd bow shocks in the Orion Nebula, paying close attention to the systematic uncertainties that arise when our algorithms are applied to real data. In § 8 we summarise our results and outline how following papers will apply these ideas to a more extensive set of observations, models and numerical simulations.

## 2 PLANITUDE AND ALATITUDE OF BOW SHAPES

The stagnation radius  $R_0$  describes the linear scale of the bow shock, but in order to characterize its shape more parameters are required. To efficiently capture the diversity of bow shapes, we propose the parameters shown in Figure 4. The perpendicular radius  $R_{90}$  is the value of  $R(\theta)$  at  $\theta = 90^\circ$ , whereas  $R_c$  is the radius of curvature of the bow at the apex ( $\theta = 0$ ). For a cylindrically symmetric bow, we show in Appendix A that this is given by

$$R_c = \frac{R_0^2}{R_0 - R_{\theta\theta,0}}, \quad (3)$$

where  $R_{\theta\theta,0}$  is  $d^2R/d\theta^2$  evaluated at  $\theta = 0$ .

A fourth parameter is the asymptotic opening angle of the far wings,  $\theta_\infty$ , which is useful in the case that the wings are asymptotically conical. However, in many bow shocks the wings tend towards the asymptotic angle only slowly, making  $\theta_\infty$  difficult to measure, especially since the emission from the far wings is often weak at best. In contrast, the three radii,  $R_0$ ,  $R_{90}$ , and  $R_c$ , are straightforward to determine from observations. One simple method to estimate the radius of curvature is to make use of the Taylor expansion<sup>1</sup> of  $R(\theta)$  about the apex (with  $\theta$  in radians):

$$R(\theta) = R_0 + \frac{1}{2}R_{\theta\theta,0}\theta^2 + O(\theta^4), \quad (4)$$

so that fitting a polynomial in  $\theta^2$  to  $R(\theta)$  for  $|\theta| < \Delta\theta$  yields  $R_0$  and  $R_{\theta\theta,0}$  from the first two coefficients, and hence  $R_c$  from equation (3). Experience has shown that  $\Delta\theta = 30^\circ$  and three terms in the polynomial are good choices, where the third term is used only as a monitor (if the co-efficient of  $\theta^4$  is not small compared with  $R_0$ , then it may indicate a problem with the fit).

Since we have three radii, we can construct two independent dimensionless parameters:

$$\text{Planitude } \Pi \equiv \frac{R_c}{R_0} \quad (5)$$

$$\text{Alatitude } \Lambda \equiv \frac{R_{90}}{R_0} \quad (6)$$

and these will be the principal shape parameters that we will use in the remainder of the paper. The *planitude*,  $\Pi$ , is a measure of the flatness of the head of the bow around the apex, while the *alatitude*,  $\Lambda$ , is a measure of the openness of the bow wings. Although “planitude” can be found in English dictionaries, “alatitude” is a new word that we introduce here, derived from the latin *ala* for “wing”.

Several previous studies have discussed the relation between  $R_0$  and  $R_c$  as a diagnostic of bow shape (for example Robberto et al. 2005; Cox et al. 2012; Meyer et al. 2016), but as far as we know, we are the first to include  $R_c$ . Robberto et al. (2005) § 4.2 use the ratios  $R_0/D$  and  $R_{90}/D$  in analyzing proplyd bow shapes in the Trapezium cluster in the center of the Orion Nebula (Hayward et al. 1994; Garcia-Arredondo et al. 2001; Smith et al. 2005). In that case, the source of the outer wind is known, and so  $D$  is well-determined (at least, in projection), but for many bow shocks  $D$  is not known, and is not even defined for the moving-star or parallel-stream case. Cox et al. (2012) § 4.1 compare the observed shapes of bow shocks around cool giant stars with an analytic model, and use  $A$  and  $B$  for the projected values of  $R_0$  and  $R_{90}$ , respectively (see next section for discussion of projection effects). Meyer et al. (2016) § 3.2 analyze the distribution of  $R_0/R_{90}$  (the reciprocal of our  $\Lambda$ ) for hydrodynamic simulations of bow shocks around runaway OB stars.

## 3 PROJECTION ONTO THE PLANE OF THE SKY

In this section we calculate the apparent shape on the plane of the sky of the limb-brightened border of a shock or shell that is idealized as an arbitrary cylindrically symmetric surface.

<sup>1</sup> This method assumes both that  $R(\theta)$  is even (true for a cylindrically symmetric bow) and that the orientation of the axis is already known. Generalization to cases where these assumptions do not hold is discussed in Appendix E.

### 3.1 Frames of reference

Consider body-frame cartesian coordinates  $(x, y, z)$ , where  $x$  is the symmetry axis, and spherical polar coordinates  $(R, \theta, \phi)$ , where  $\theta$  is the polar angle and  $\phi$  the azimuthal angle. Since the surface is cylindrically symmetric, it can be specified as  $R = R(\theta)$ , so that cartesian coordinates on the surface are:

$$\mathbf{r} \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(\theta) \cos \theta \\ R(\theta) \sin \theta \cos \phi \\ R(\theta) \sin \theta \sin \phi \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Suppose that the viewing direction makes an angle  $i$  with the  $z$  axis, so that we can define observer-frame coordinates  $(x', y', z')$ , which are found by rotating the body-frame coordinates about the  $y$  axis. The same vector,  $\mathbf{r}$ , expressed in the observer frame is then

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \mathbf{A}_y(i) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos i - z \sin i \\ y \\ z \cos i + x \sin i \end{pmatrix}, \quad (8)$$

where the rotation matrix  $\mathbf{A}_y(i)$  is given in Appendix B. The inclination angle  $i$  is defined so that  $i = 0^\circ$  when the surface is viewed perpendicular to its axis (*side on*) and  $i = \pm 90^\circ$  when it is viewed along its axis (*end on*), with positive  $i$  when the apex points towards the observer.

The relationship between the two frames is illustrated in Figure 5. All quantities in the observer's frame are denoted by attaching a prime to the equivalent quantity in the body frame. There are two ways of interpreting the primed coordinates. On the one hand, the 3-vector  $(x', y', z')$  specifies a point in Euclidean space,  $\mathbb{R}^3$ , but an alternative interpretation is to take the 2-vector  $(x', y')$  as specifying a point in a *projective space*,  $\mathbb{P}^2$  (see, for example, § 15.6 of Penrose 2004). Each “point” in  $\mathbb{P}^2$  is equivalent to a line in  $\mathbb{R}^3$ , specifically: a line of sight that passes through the observer. Thus,  $(x', y')$  gives the celestial coordinates on the *plane of the sky*, with  $x'$  being the projected symmetry axis of the surface. We assume that the observer is located at a very large distance, relative to the size of the bow, so that all lines of sight are effectively parallel to the  $z'$  axis, with the observer at  $z' = -\infty$ . But, from the point of view of the plane of the sky, the  $z'$  coordinate is strictly irrelevant since it is a projective plane, and not a Euclidean plane. In the following, we will switch between the  $\mathbb{R}^3$  and  $\mathbb{P}^2$  interpretations as convenient, resolving ambiguity where necessary via the adjectives “Euclidean” for  $\mathbb{R}^3$  and “plane-of-sky” or “projected” for  $\mathbb{P}^2$ .

### 3.2 Unit vectors normal and tangential to the surface

We define unit vectors  $\hat{\mathbf{n}}$ ,  $\hat{\mathbf{t}}$ , such that  $\hat{\mathbf{n}}$  is normal to the surface, while  $\hat{\mathbf{t}}$  is tangent to the surface in a plane of constant  $\phi$ . For  $\phi = 0$  the surface lies in the  $xy$  plane and it is straightforward to show (Fig. 6) that in this case the unit vectors are given by

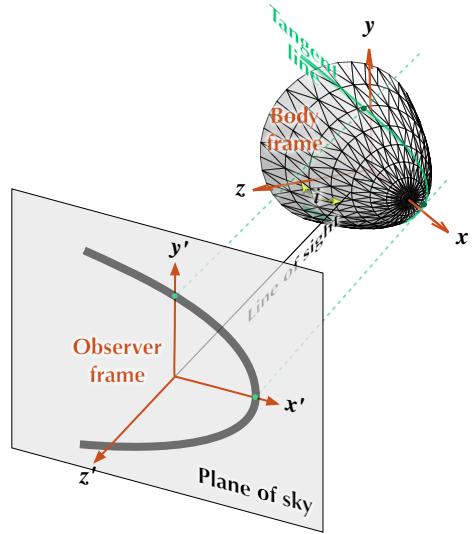
$$\hat{\mathbf{t}}_0 = \begin{pmatrix} -\cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \hat{\mathbf{n}}_0 = \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

where  $\alpha$  is the *slope angle*, given by

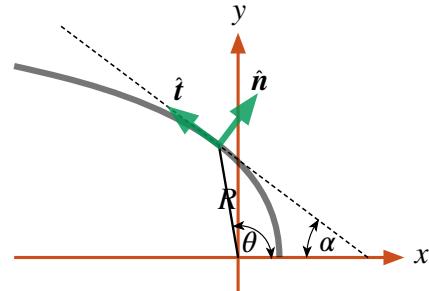
$$\tan \alpha = -\left. \frac{dy}{dx} \right|_{R(\theta)} = \frac{1 + \omega \tan \theta}{\tan \theta - \omega} \quad (10)$$

and  $\omega$  is a dimensionless *local growth factor*:

$$\omega(\theta) = \frac{1}{R} \frac{dR}{d\theta}. \quad (11)$$



**Figure 5.** Relationship between body frame (unprimed coordinates) and observer frame (primed coordinates). Note that the plane of the sky is a projective plane, not a geometric plane in Euclidean 3-space, see discussion in text.



**Figure 6.** Unit vectors in the body frame that are normal and tangential to the surface  $R(\theta)$  in a plane of constant azimuth,  $\phi$ .

For general  $\phi \neq 0$ , we find  $\hat{\mathbf{n}}$  and  $\hat{\mathbf{t}}$  by rotating equations (9) around the  $x$ -axis with the matrix  $\mathbf{A}_x(\phi)$  (eq. [B5]):

$$\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{A}_x(\phi) \hat{\mathbf{n}}_0 = \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \cos \phi \\ \cos \alpha \sin \phi \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$\hat{\mathbf{t}} = \mathbf{A}_x(\phi) \hat{\mathbf{t}}_0 = \begin{pmatrix} -\cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \phi \\ \sin \alpha \sin \phi \end{pmatrix}. \quad (13)$$

### 3.3 Tangent line

The boundary on the plane of the sky of the projected surface is the locus of those lines of sight that graze the surface tangentially. This corresponds to a curved line on the surface itself, which we denote the *tangent line*, and which is defined by the condition

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{z}}' = 0. \quad (14)$$

We denote by  $\phi_T$  that value of  $\phi$  that satisfies this relation for a given inclination,  $i$ , and polar angle,  $\theta$ . From equations (12, 14, B4, 10) this is

$$\sin \phi_T = -\tan i \tan \alpha = \tan i \frac{1 + \omega \tan \theta}{\omega - \tan \theta}. \quad (15)$$

From equations (7, 8) it follows that the observer-frame coordinates of the tangent line are given by

$$\begin{pmatrix} x'_T \\ y'_T \\ z'_T \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} \cos \theta \cos i - \sin \theta \sin \phi_T \sin i \\ \sin \theta (1 - \sin^2 \phi_T)^{1/2} \\ \cos \theta \sin i + \sin \theta \sin \phi_T \cos i \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Note that, in general,  $z'_T$  is not a linear function of  $x'_T$  and  $y'_T$ , so that the tangent line  $(x'_T, y'_T, z'_T)$  is not a plane curve in 3-dimensional Euclidean space,  $\mathbb{R}^3$ . However, for the projected shape  $(x'_T, y'_T)$  of the tangent line on the plane of the sky,  $\mathbb{P}^2$ , the value of  $z'_T$  does not matter (see above). The projected shape can also be described in polar form as  $R'(\theta')$ , where

$$R' = (x_T'^2 + y_T'^2)^{1/2} \quad \text{and} \quad \tan \theta' = y'_T / x'_T. \quad (17)$$

Equation (15) will not have a solution for arbitrary values of  $\theta$  and  $i$ , but only when  $|\tan i \tan \alpha| < 1$ . In particular, if  $i \neq 0$ , then the tangent line only exists for  $\theta > \theta_0$  where  $\theta_0$  is the value of  $\theta$  on the tangent line's projected symmetry axis ( $\theta' = 0$ ). From equations (16, 17) it follows that  $\sin^2 \phi_T = 1$  at  $\theta = \theta_0$ , which yields the implicit equation

$$\tan \theta_0 = \frac{|\tan i| + \omega(\theta_0)}{1 - \omega(\theta_0)|\tan i|}. \quad (18)$$

In addition, if the surface is sufficiently “open” ( $\alpha \geq \alpha_{\min} > 0$  for all  $\theta$ ), then for those inclinations with  $|i| > (90^\circ - \alpha_{\min})$  the tangent line does not exist for any value of  $\theta$ . In other words, when the viewing angle is sufficiently close to face-on, the projected surface has no “edge” and will no longer look like a bow shock to the observer.

After completing this work, it was brought to our attention that the principal results of this section had already been derived in Appendix B of the PhD thesis Wilkin (1997). For instance, Wilkin’s equation (8) is equivalent (apart from differences in notation) to our equation (15).

### 3.4 Characteristic radii on the plane of the sky

In order to compare the shell shape given by  $R(\theta)$  with observations, it is convenient to define the following apparent radii in the observer frame:  $R'_0$  and  $R'_{90}$ . These are projected distances of the shell tangent line from the origin. The first is measured in the direction of the symmetry axis, and the second in a perpendicular direction. More concretely  $R'_0 = x'_T(y'_T = 0)$  and  $R'_{90} = y'_T(x'_T = 0)$ . From equations (15) and (16) we find that:

$$R'_0 = R(\theta_0) \cos(\theta_0 + i) \quad (19)$$

Where  $\theta_0$  is the solution of equation (18), and

$$R'_{90} = R(\theta_0) \sin \theta_0 \left(1 - \sin^2(\phi_T(\theta_0))\right)^{1/2} \quad (20)$$

Where  $\theta_0$  is the solution of the implicit equation:

$$\cot \theta_0 = \frac{1 - (1 + \omega(\theta_0)^2 \sin^2 2i)^{1/2}}{2\omega(\theta_0) \cos^2 i} \quad (21)$$

The projected alatitude (see § 2) is then given by  $\Lambda' = R'_{90}/R'_0$ .

Similarly, the projected planitude is  $\Pi' = R'_c/R'_0$ , where  $R'_c$  is found by applying the equivalent of equation (3) for primed quantities:

$$R'_c = \frac{(R'_0)^2}{R'_0 - R'_{\theta'\theta',0}}. \quad (22)$$

### 3.5 Line-of-sight velocities on the tangent line

Motions in a thin shocked shell will be predominantly tangential to the shell surface. In addition, for the particular case of wind-wind bowshocks, the flow in each azimuthal slice can be shown to be independent (Wilkin 2000), which implies that the shell velocity is parallel to  $\hat{\mathbf{i}}$ . The projected line-of-sight shell velocity is therefore

$$v_{\text{los}} = (\hat{\mathbf{i}}' \cdot -\hat{\mathbf{z}}') v_{\parallel}(\theta) = \frac{v_{\parallel}(\theta)(1 + \omega^2)^{1/2} \sin i}{\sin \theta - \omega \cos \theta}, \quad (23)$$

where  $v_{\parallel}(\theta)$  is the gas velocity along the shell and the standard sign convention has been adopted such that velocities away from the observer are deemed positive.

## 4 QUADRICS OF REVOLUTION

For an arbitrary surface of revolution, application of equations (15, 16) to determine the projected shape of the tangent line is not straightforward and in general requires numerical techniques. However, analytical results can be found for the important class of surfaces known as *quadratics of revolution* (Goldman 1983; Gfrerrer & Zsombor-Murray 2009), which are formed by rotating a conic section plane curve about its symmetry axis. Examples are the sphere, spheroids (oblate and prolate), and right circular paraboloids and hyperboloids.<sup>2</sup> We ignore the degenerate cases of cylinders, cones, and pairs of parallel planes. While mathematically simple, these quadratics are sufficiently flexible that they can provide a useful approximation to more complex bow shock shapes.

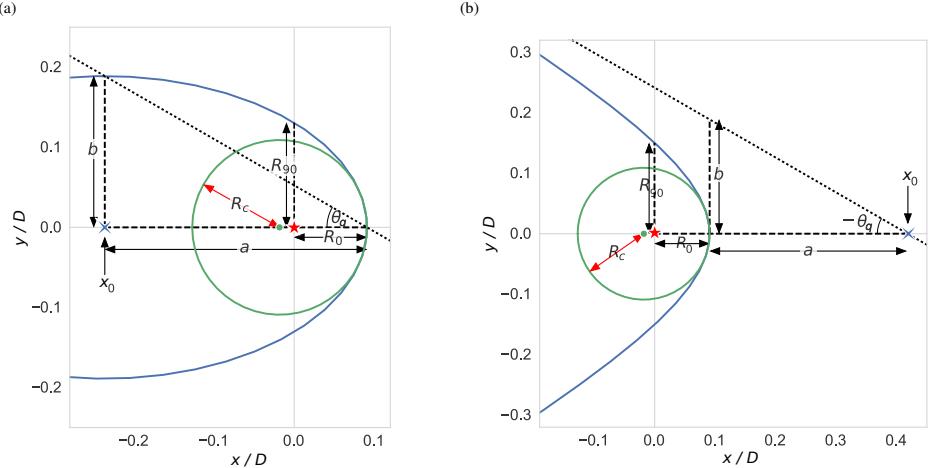
The shape of the quadric curves in the  $xy$  plane ( $\phi = 0$ ) are shown in Figure 7(a) and (b) for the ellipse and hyperbola case, respectively. The conic section itself is fully described by two lengths,  $a$  and  $b$ , which are the semi-axes.<sup>3</sup> However, the curve can be translated along the  $x$  axis to an arbitrary point with respect to the star, so that the apex distance  $R_0$  has no necessary relation to  $a$  or  $b$  and therefore the star/bow combination requires three independent lengths for its specification. The displacement  $x_0$  from the star to the “center” of the conic section is

$$x_0 = R_0 - \sigma a \quad \text{with} \quad \sigma = \begin{cases} +1 & \text{ellipse} \\ -1 & \text{hyperbola} \end{cases}. \quad (24)$$

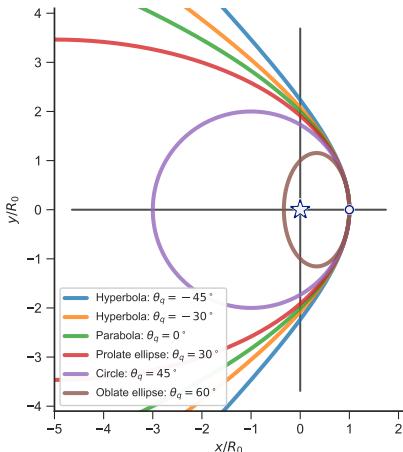
For hyperbolas the center is “outside” of the bow and  $x_0$  is always

<sup>2</sup> We consider only the case of a single sheet of a 2-sheet hyperboloid or paraboloid, since these are the versions that resemble a bow, whereas the 1-sheet versions resemble the waist of an hourglass.

<sup>3</sup> Note that we do not require that  $a > b$ , so either  $a$  or  $b$  may be the semi-major axis.



**Figure 7.** Example off-center conic sections that can form quadrics of revolution: (a) ellipse, (b) hyperbola. The relationship is shown between the conic section parameters  $a$ ,  $b$ ,  $\theta_0$  and the bowshock characteristic radii  $R_0$ ,  $R_{90}$ ,  $R_c$ , as defined in Fig. 4. The origin (center of the weaker flow) is indicated by a red star, the center of curvature of the apex of the bow shock is indicated by a green dot, and the geometric center of the conic section is indicated by a blue cross, which is offset by  $x_0$  from the origin. Note that  $R_0$ ,  $R_{90}$ ,  $R_c$ ,  $a$ , and  $b$  are all lengths and are always positive, whereas  $x_0$  is a displacement and may be positive or negative.



**Figure 8.** Example of a family of conic sections, all with the same planitude (flatness at apex, marked by white dot):  $\Pi = R_c/R_0 = 2$ . The quadric angle,  $\theta_Q$ , varies over the family (see text), with lower values of  $\theta_Q$  giving larger values of the alatitude,  $\Lambda = R_{90}/R_0$ , meaning more open wings. Different values of  $\Pi$  can be achieved for the exact same quadrics by sliding them along the  $x$ -axis, which will also change the axis scales since these are normalized by  $R_0$ .

positive, whereas for ellipses the center is “inside” the bow and  $x_0$  is usually negative, except when  $a < R_0$  (see Figure 7).

A general parametric form<sup>4</sup> for the  $xy$  coordinates of the quadrics (in the  $\phi = 0$  plane, and with the star at the origin) as a function of  $t = [0, \pi]$  is then

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \sigma a C(t) \\ y &= b S(t) \end{aligned} \quad (25)$$

where

$$S, C = \begin{cases} \sin, \cos & \text{ellipse} \\ \sinh, \cosh & \text{hyperbola} \end{cases} \quad (26)$$

Except for the circle case ( $\sigma = +1$ ,  $a = b$ ), the parametric variable  $t$  is not actually an angle in physical space. Instead, the polar form of the bow shape  $R(\theta)$  must be found by substituting equations (25) into  $\theta = \tan^{-1} y/x$  and  $R = (x^2 + y^2)^{1/2}$ .

The type of quadric surface can be characterized by the *quadric parameter*:

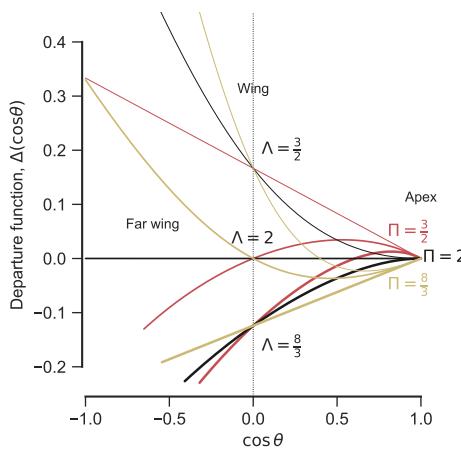
$$Q \equiv \sigma \frac{b^2}{a^2}, \quad (27)$$

where  $Q < 0$  corresponds to open surfaces (hyperboloids) and  $Q > 0$  corresponds to closed surfaces (oblate spheroids with  $Q > 1$  and prolate spheroids with  $Q < 1$ ). Special cases are the sphere ( $Q = 1$ ) and the paraboloid ( $Q = 0$ ). Alternatively, one can define a *quadric angle*:

$$\theta_Q = \sigma \tan^{-1}(b/a), \quad (28)$$

which is marked in Figure 7. In the case of hyperboloids, the

<sup>4</sup> The special case of the parabola needs to be treated differently, see Appendix C.



**Figure 9.** Parabolic departure function,  $\Delta(\cos \theta)$ , for conic sections with different planitude and alatitude, centered on that of the confocal parabola,  $(\Pi, \Lambda) = (2, 2)$ , which has  $\Delta(\cos \theta) = 0$ . Planitude (shown by different line colors) determines the slope of  $\Delta$  at the apex,  $\cos \theta = 1$ . Alatitude (shown by different line widths) determines the value of  $\Delta$  at  $\cos \theta = 0$ . All conics with  $\Pi = \Lambda$  have departure functions that are straight lines.

asymptotic opening angle of the wings (§ 2 and Fig. 4) is  $\theta_\infty = \pi + \theta_Q$  (note that  $\theta_Q < 0$  in this case), and the minimum slope angle is  $\alpha_{\min} = |\theta_Q|$ , see discussion following equation (18).

The set of parameters  $(Q, a, x_0)$  are then sufficient to characterize the star/bow combination, where  $a$  is the quadric scale and  $x_0$  is its center displacement from the star. However, we can also characterize the star/bow by  $(R_0, \Pi, \Lambda)$ , where  $R_0$  is the star-apex distance, and  $\Pi$  and  $\Lambda$  are the planitude and alatitude, see § 2. We now derive the equivalences between these two descriptions. The apex radius of curvature for a conic section is

$$R_c = \frac{b^2}{a} = a|Q|, \quad (29)$$

whereas the perpendicular radius,  $R_{90}$ , is the value of  $y$  when  $x = 0$ , which can be found from equations (24, 25) as

$$R_{90}^2 = Q(a^2 - x_0^2). \quad (30)$$

Combining equations (5, 6, 24, 27–30) yields

$$R_0 = x_0 + \sigma a \quad (31)$$

$$\Pi = \frac{aQ}{a + \sigma x_0} \quad (32)$$

$$\Lambda = \left( Q \frac{a - \sigma x_0}{a + \sigma x_0} \right)^{1/2} \quad (33)$$

with  $\sigma = \text{sgn } Q$ . It also follows that the quadric parameter in terms of the planitude and alatitude is

$$Q = 2\Pi - \Lambda^2 \quad (34)$$

Hence, it is the sign of  $2\Pi - \Lambda^2$  that determines  $\sigma$  and whether a quadric is a spheroid or a hyperboloid. For example, for a constant

planitude,  $\Pi$ , we can have a family of different quadric types, with varying alatitude,  $\Lambda$ , that increases from oblate, through prolate and paraboloid, to hyperboloid, as illustrated in Figure 8.

#### 4.1 Parabolic departure function

The special case of confocal conic sections ( $\Lambda = \Pi$ ) can be written in polar form as

$$R(\theta) = R_0 \frac{1+e}{1+e \cos \theta} \quad (35)$$

where  $e = (1-Q)^{1/2}$  is the *conic eccentricity*. For the confocal parabola ( $e = 1$ ), the dimensionless reciprocal radius is therefore  $R_0/R(\theta) = \frac{1}{2}(1+\cos \theta)$ , which suggests the following form for a *departure function* that measures the difference between a given shape  $R(\theta)$  and the parabola:

$$\Delta(\cos \theta) = \frac{R_0}{R(\theta)} - \frac{1}{2}(1+\cos \theta). \quad (36)$$

From equations (35) and (36) it is clear that  $\Delta$  is a linear function of  $\cos \theta$  for other confocal conics, being positive for ellipses ( $e < 1$ ) and negative for hyperbolae ( $e > 1$ ). Examples are shown in Figure 9 for a grid of 9 conics centered on the confocal parabola, with  $(\Pi, \Lambda)$  ranging from  $3/4$  to  $4/3$  of  $(2, 2)$ . The hyperbolae have negative values of  $\Delta$  in the far wings, with tracks that end at  $\cos \theta_\infty$ .

Strictly speaking, the departure function is redundant if one is interested in only conic sections, since they are fully determined by  $\Pi$  and  $\Lambda$ . Nonetheless, as we will show in following sections, it is a useful tool for studying general  $R(\theta)$ , being very sensitive to small variations in the shape.

#### 4.2 Plane-of-sky projection of quadric surfaces

We now apply the machinery of § 3 to find the projected shape of a quadric bow on the plane of the sky. The intrinsic 3D shape of the shell is given by rotating equations (25) about the  $x$ -axis, but it is more convenient to first transform to a reference frame where the origin is at the center of the conic section:

$$(X, Y, Z) = (x - x_0, y, z). \quad (37)$$

In this new frame, the quadric shape is

$$\begin{aligned} X &= a C(t) \\ Y &= b S(t) \cos \phi \\ Z &= b S(t) \sin \phi \end{aligned} \quad (38)$$

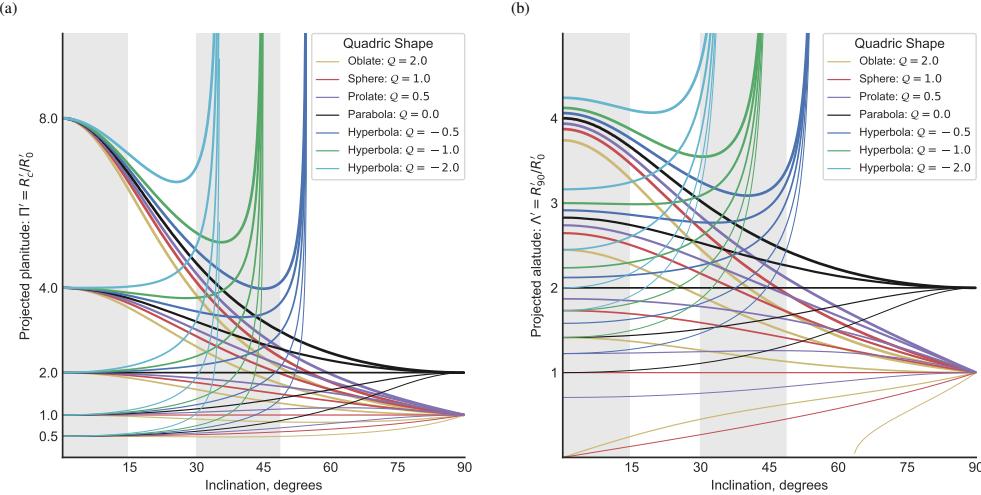
The azimuth of the tangent line as a function of inclination and parametric variable is then found from equations (10, 15) to be

$$\sin \phi_T = \frac{b C(t)}{a S(t)} \tan i. \quad (39)$$

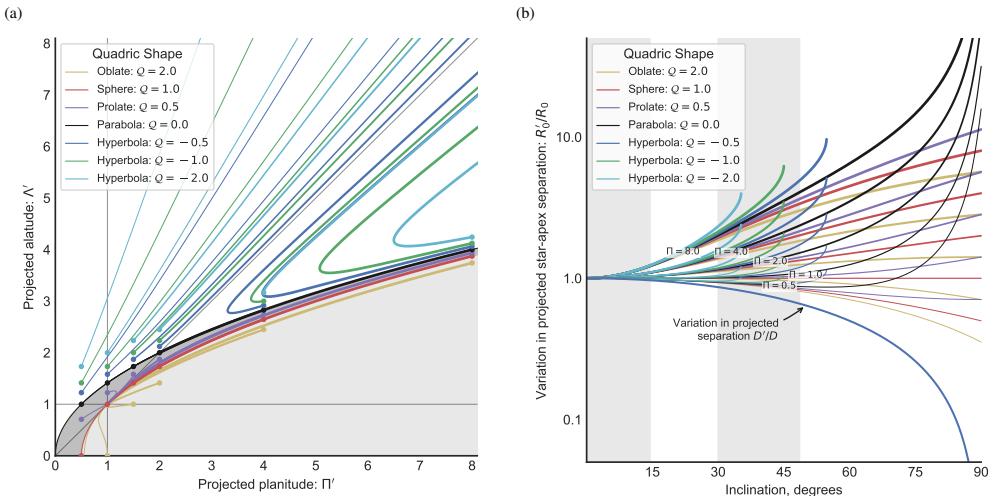
Combining equations (8, 38, 39) gives the observer-frame cartesian plane-of-sky coordinates of the tangent line:

$$\begin{aligned} X'_T &= \frac{C(t)}{a \cos i} (a^2 \cos^2 i + \sigma b^2 \sin^2 i) \\ Y'_T &= b S(t) \left( 1 - \frac{b^2 C^2(t)}{a^2 S^2(t)} \tan^2 i \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (40)$$

We wish to show that this projected shape is a conic section of the same variety (ellipse or hyperbola) as the one that generated the



**Figure 10.** Effects of projection on quadrics of revolution: variation with inclination,  $|i|$ , of bow size and shape. Different line colors correspond to varying quadric parameter,  $Q$ , (see key), while variation in line width corresponds to variation in the “true” planitude,  $\Pi$ , or apex radius of curvature. Vertical gray rectangles show quartiles of  $|\sin i|$ , which will be equally populated for an isotropic distribution of orientations. (a) Projected planitude:  $\Pi'$ . (b) Projected alatitude,  $\Lambda'$ .



**Figure 11.** As Figure 10, but (a) diagnostic planitude–alatitude diagram:  $\Lambda'$  versus  $\Pi'$ , and (b) projected/true star-apex distance:  $R'_0/R_0$  versus  $|i|$ . In (a), shading indicates different classes of quadrics: hyperboloids (white), prolate spheroids (dark gray), and oblate spheroids (light gray), with the limiting case of paraboloids shown by the thin black line.

original quadric. If this were true, then it would be possible to write the plane-of-sky coordinates as

$$\begin{aligned} X'_T &= a' C(t') \\ Y'_T &= b' S(t'). \end{aligned} \quad (41)$$

Comparing equations (40) and (41), we find after some algebra that the two forms for  $(X'_T, Y'_T)$  are indeed consistent, with the equivalences:

$$a' = af_{Q,i} \cos i \quad (42)$$

$$b' = b \quad (43)$$

$$t' = C^{-1} [f_{Q,i} C(t)] , \quad (44)$$

where for convenience we define the quadric projection factor:

$$f_{Q,i} = (1 + Q \tan^2 i)^{1/2} . \quad (45)$$

This demonstrates the original claim that the projected shape is also a conic section, which means that we can re-use the previous equations (31–34) with primed quantities substituted for unprimed ones. From equations (27, 42, 43) it follows that the quadric parameter of the projected shape is

$$Q' = \frac{Q}{f_{Q,i}^2 \cos^2 i} . \quad (46)$$

Finally, we transform the projected reference frame back to be centered on the star again:

$$(x'_T, y'_T) = (X'_T + x'_0, Y'_T) , \quad (47)$$

where the projected quadric displacement  $x'_0$  follows from simple foreshortening:

$$x'_0 = x_0 \cos i . \quad (48)$$

The projection of the apex distance then follows from the primed version of equation (31) as

$$\frac{R'_0}{R_0} = \cos i \left[ 1 + \frac{\Pi}{Q} (f_{Q,i} - 1) \right] \quad (49)$$

and the projected planitude and alatitude can be calculated from equations (32, 34, 42, 46) as

$$\Pi' = \frac{\Pi}{(R'_0/R_0) f_{Q,i} \cos i} \quad (50)$$

$$\Lambda' = (2\Pi' - Q')^{1/2} . \quad (51)$$

These are all shown in Figures 10 and 11 for a variety of quadric parameter  $Q$  (line color) and true planitude  $\Pi$  (line thickness). The projected planitude and alatitude (Fig. 10) behave in a qualitatively similar fashion. Whatever the true values of  $\Pi$  and  $\Lambda$ , all spheroids ( $Q > 0$ ) tend towards  $\Pi' = 1$  and  $\Lambda' = 1$  as the inclination increases towards  $90^\circ$ . This is because when the spheroid is oriented edge-on, we see its circular cross-section. Hyperboloids behave differently: although  $\Pi'$  and  $\Lambda'$  initially decrease with increasing inclination (for true  $\Pi > 2$ ), they turn around and increase again as  $|i|$  approaches the critical value  $i_{\text{crit}} = 90^\circ - |\theta_Q|$ . For  $|i| > i_{\text{crit}}$  the tangent line does not exist (see § 3.3) because the line of sight is “inside” the asymptotic cone of the far wings (with opening half angle  $\alpha_{\min} = |\theta_Q|$ ), and so no limb-brightened shell would be visible.<sup>5</sup> For paraboloids and

<sup>5</sup> As illustrated in Figure 8 of Graham et al. (2002), the isophotal emission contours are elliptical in such a case (assuming cylindrical symmetry) and no curved bow shape is apparent. Deviations from cylindrical symmetry can result in a curved emission arc, even for this non-tangent case (Graham et al.’s Fig. 9), but that is beyond the scope of this paper.

spheroids,  $\alpha_{\min} = 0$ , which means that the tangent line exists for all viewing angles.

In Figure 11a, we show the inclination-dependent tracks of the quadrics in the diagnostic  $\Pi' - \Lambda'$  plane of projected alatitude versus projected planitude. The true planitude and alatitude, which are seen for an edge-on viewing angle  $i = 0^\circ$ , are marked by filled circles. The zones corresponding to each class of quadric (oblate spheroid, prolate spheroid, or hyperboloid) are marked by gray shading, and it can be seen that the tracks never cross from one zone to another. The convergence of all the spheroid tracks on the point  $(\Pi', \Lambda') = (1, 1)$  is apparent, as is the divergence of the hyperboloid tracks towards  $(\Pi', \Lambda') = (+\infty, +\infty)$ , whereas the paraboloids, by contrast, converge on the point  $(\Pi', \Lambda') = (2, 2)$ . Two special cases are the confocal paraboloid and the concentric sphere,<sup>6</sup> with true planitude and alatitude  $(\Pi, \Lambda) = (2, 2)$  and  $(1, 1)$ , respectively, which are the only quadrics whose apparent shape remains identical for all inclination angles.

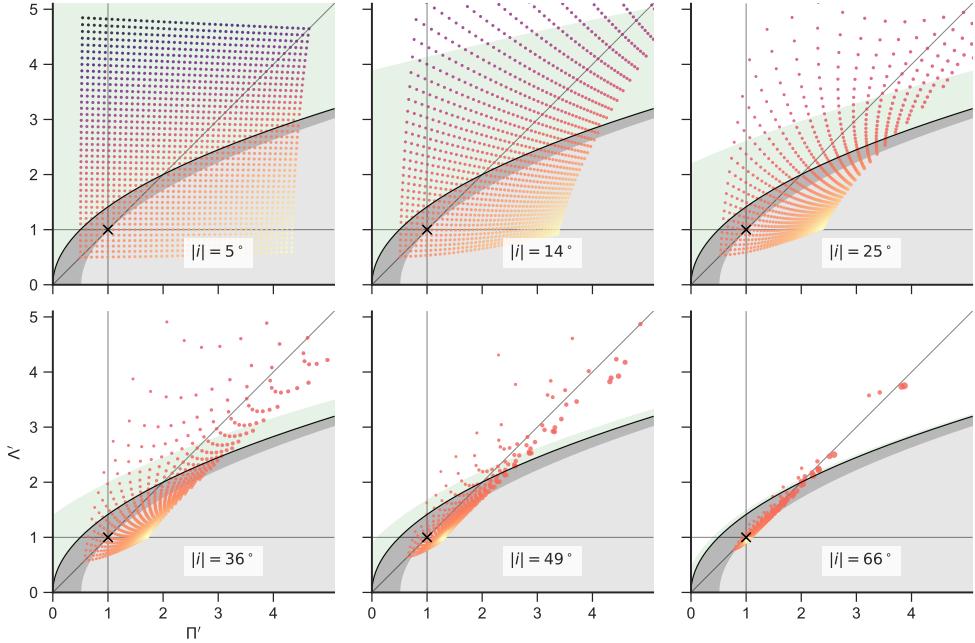
Figure 11b shows how the apparent star-apex separation varies with inclination. For moderate inclinations,  $|i| < 30^\circ$ , this depends primarily on the true planitude  $\Pi$ , with very little influence of the quadric parameter  $Q$ . For  $\Pi > 1$ , the separation increases with  $|i|$ , whereas for  $\Pi < 1$  it decreases slightly. Note, however, that for cases where the projected distance to the source of the external flow,  $D'$ , can be measured, then  $R'_0/D'$  is always an increasing function of  $|i|$ . For larger inclinations,  $|i| > 30^\circ$ , the strands for different  $Q$  begin to separate, with hyperbolae showing the strongest increase of  $R'_0$  with  $|i|$ .

A complementary view of the effects of projection is shown in Figure 12, which shows “snapshots” of  $(\Pi', \Lambda')$  for a sequence of 6 values of the inclination, equally spaced in  $|\sin i|$ , so that each panel is equally likely for an isotropic distribution of orientations. The distribution of the true  $\Pi$  and  $\Lambda$  are each assumed to be uniform on the range  $[0.5, 4.5]$ , giving a uniformly filled square of values for  $|i| = 0$ , which becomes increasingly distorted as  $|i|$  increases. The color scale represents  $Q$  and the symbol size is proportional to  $R'_0/R_0$ . It can be seen that the points tend to cluster closer and closer to the diagonal,  $\Lambda' = \Pi'$ , as the inclination increases, and that the points just below this line tend to have the largest values of  $R'_0/R_0$ . The green shaded region shows the zone of true  $\Lambda, \Pi$  for hyperboloids where the tangent lines still exists for that value of  $|i|$ . This becomes smaller and smaller as  $|i|$  increases, which explains why the hyperboloid zone becomes increasingly depopulated: all quadrics that lay above this region when  $i = 0^\circ$  will no longer be visible as a bow for this value of  $|i|$ . Note that this figure is merely illustrative of the qualitative effects of projection, since in reality there is no particular reason to expect a uniform distribution in true  $\Pi$  and  $\Lambda$ .

## 5 THIN-SHELL BOW SHOCK MODELS

More physically realistic examples of bow shapes are provided by steady-state hydrodynamic models for the interaction of hypersonic flows in the thin-shell limit. The classic examples are the solutions for the wind-parallel stream and wind-wind problems (see § 1) of Canto et al. (1996, hereafter CRW), where it is assumed that the two shocks are highly radiative and that the post-shock flows are perfectly mixed to form a single shell of negligible thickness. In this

<sup>6</sup> So named because the star is at the focus of the parabola, or the center of the sphere.



**Figure 12.** Variation with inclination angle of the apparent shape of quadric bows with true planitude and alatitude that are uniformly distributed over the ranges  $\Pi = [0.5, 4.5]$ ,  $\Lambda = [0.5, 4.5]$ . Panels show the apparent  $(\Pi', \Lambda')$  as the inclination is increased through uniform intervals in  $|sin i|$ . Symbol color represents the quadric parameter,  $Q$ , increasing from dark blue, through orange, to yellow. Symbol size is proportional to the increase in apparent star-apex distance,  $R'_0/R_0$ .

approximation, the shape of the shell is found algebraically by CRW from conservation of linear and angular momentum, following an approach first outlined in Wilkin (1996). For the wind–stream case, the resulting bow shape was dubbed *wilkinoid* by Cox et al. (2012) and has the form:

$$R(\theta) = R_0 \csc \theta (3(1 - \theta \cot \theta))^{1/2}. \quad (52)$$

For the wind–wind case, a family of solutions are found that depend on the value of  $\beta$ , the wind momentum ratio,<sup>7</sup> see Figure 3, equations (1, 2), and surrounding discussion in § 1. We propose that these shapes be called *cantoids*. The exact solution for the cantoid shapes (eqs. [23, 24] of CRW) is only obtainable in implicit form, but an approximate explicit solution (eq. [26] of CRW) is very accurate for  $\beta \leq 0.1$ . The wilkinoid shape corresponds to the  $\beta \rightarrow 0$  limit of the cantoids. Note that CRW employ cylindrical polar coordinates,  $z$  and  $r$ , see our Figure 3, and we follow this usage for the thin-shell models discussed in this section. CRW’s  $z$  axis corresponds to the cartesian  $x$  axis used in sections 3 and 4 of the current paper, while the  $r$  axis corresponds to  $y$  when  $\phi = 0$ .

A generalization of the cantoids to the case of an anisotropic<sup>8</sup>

inner wind is developed next, giving rise to what we call *ancantoids*, which depend on an anisotropy index,  $k$ , in addition to  $\beta$ .

### 5.1 Bow shocks from anisotropic wind–wind interactions

We wish to generalize the results of Canto et al. (1996, CRW) to the case where the inner wind is no longer isotropic, but instead has a density that falls off with angle,  $\theta$ , away from the symmetry axis. Specifically, at some fiducial spherical radius,  $R_0$ , from the origin, the wind mass density is given by

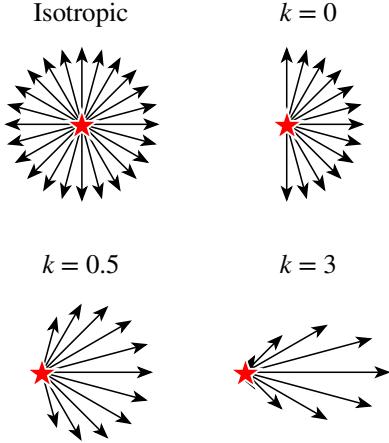
$$\rho(R_0, \theta) = \begin{cases} \rho_0 \cos^k \theta & \text{for } \theta \leq 90^\circ \\ 0 & \text{for } \theta > 90^\circ \end{cases}, \quad (53)$$

where  $\rho_0$  is the density on the symmetry axis and  $k \geq 0$  is an *anisotropy index*. The wind velocity is still assumed to be constant and the wind streamlines to be radial, so the radial variation of density at each angle is  $\rho(R, \theta) = \rho(R_0, \theta) (R/R_0)^{-2}$  and the wind mass loss rate and momentum loss rate per solid angle both have the same  $\cos^k \theta$  dependence as the density. Examples are shown in Figure 13 for a variety of different values of  $k$ . As  $k$  increases, the wind becomes increasingly jet-like.

Our primary motivation for considering such an anisotropic wind is the case of the Orion Nebula proplyds and their interaction with the stellar wind of the massive star  $\theta^1$  Ori C (Garcia-Arredondo

<sup>7</sup> By always placing the weaker of the two winds at the origin, it is only necessary to consider  $\beta \leq 1$ .

<sup>8</sup> Note that the wind anisotropy axis must be aligned with the star–star axis to maintain cylindrical symmetry.



**Figure 13.** Schematic diagram of wind flow patterns in isotropic and non-isotropic cases for different values of the anisotropy index,  $k$ . Arrow length represents the wind momentum loss rate per solid angle.

et al. 2001). The inner “wind” in this case is the transonic photoevaporation flow away from a roughly hemispherical ionization front, where photoionization equilibrium, together with monodirectional illumination of the front, implies that the ionized hydrogen density,  $n$ , satisfies  $n^2 \propto \cos \theta$ , which is equivalent to  $k = 0.5$  in equation (53). Since the primary source of ionizing photons is the same star that is the source of the outer wind, it is natural that the inner wind’s axis should be aligned with the star-star axis in this case. For other potential causes of wind anisotropy (for instance, bipolar flow from an accretion disk), there is no particular reason for the axes to be aligned, so cylindrical symmetry would be broken. Nevertheless, we calculate results for general  $k$  with aligned axes, so as to provide a richer variety of cylindrically symmetric bow shock shapes than are seen in the cantoids.

The general solution for the bow shock shape,  $R(\theta)$ , in the CRW formalism is

$$R(\theta) = \frac{j_w + j_{w1}}{(\dot{\Pi}_{wr} + \dot{\Pi}_{wr1}) \cos \theta - (\dot{\Pi}_{wz} + \dot{\Pi}_{wz1}) \sin \theta} \quad (54)$$

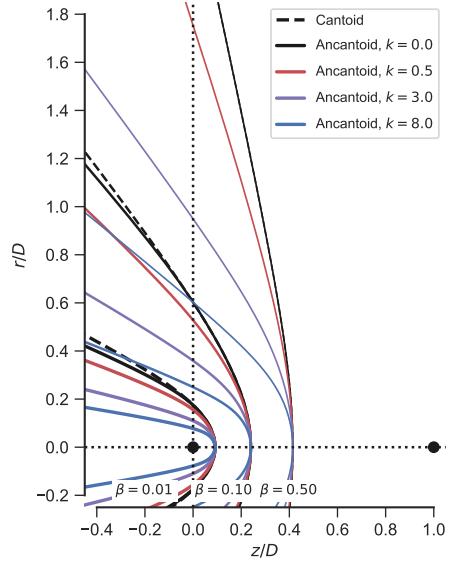
where  $\dot{\Pi}_{wr}$ ,  $\dot{\Pi}_{wz}$ ,  $j_w$  are the accumulated linear radial momentum, linear axial momentum, and angular momentum, respectively, due to the inner wind emitted between the axis and  $\theta$ . The equivalent quantities for the outer wind have subscripts appended with “1”. The inner wind momenta for our anisotropic case (replacing CRW’s eqs. [9, 10]) are:

$$\dot{\Pi}_{wz} = \frac{k+1}{2(k+2)} \dot{M}_w^0 V_w \max \left[ (1 - \cos^{k+2} \theta), 1 \right] \quad (55)$$

$$\dot{\Pi}_{wr} = (k+1) \dot{M}_w^0 V_w I_k(\theta)$$

where

$$\dot{M}_w^0 = \frac{2\pi}{k+1} r_0^2 \rho_0 V_w \quad (56)$$



**Figure 14.** Bow shock shapes for interacting winds in the thin-shell approximation: cantoids and ancantoids. Coordinates are normalized by  $D$ , the distance between the two wind sources, which are indicated by black dots on the axis. The weaker source is at  $(0,0,0)$  and the stronger source is at  $(1.0,0,0)$ . Results are shown for different values of the wind momentum ratio,  $\beta$  (different line widths), and for the case where the weaker wind is isotropic (black lines) or anisotropic (colored lines).

is the total mass-loss rate of the inner wind. The integral

$$I_k(\theta) = \int_0^{\max(\theta, \pi/2)} \cos^k \theta \sin^2 \theta d\theta \quad (57)$$

has an analytic solution in terms of the hypergeometric function,  ${}_2F_1(-\frac{1}{2}; \frac{1+k}{2}; \frac{3+k}{2}; \cos^2 \theta)$ , but is more straightforwardly calculated by numerical quadrature. The angular momentum of the inner wind about the origin is  $\dot{J}_w = 0$  because it is purely radial. The outer wind momenta are unchanged from the CRW case, but are given here for completeness:

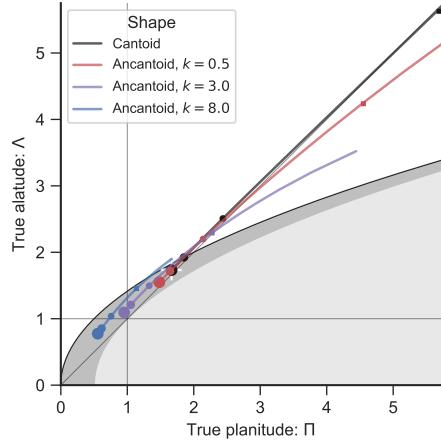
$$\begin{aligned} \dot{\Pi}_{wz1} &= -\frac{\dot{M}_{w1}^0 V_{w1}}{4} \sin^2 \theta_1 \\ \dot{\Pi}_{wr1} &= \frac{\dot{M}_{w1}^0 V_{w1}}{4} (\theta_1 - \sin \theta_1 \cos \theta_1) \\ j_{w1} &= \frac{\dot{M}_{w1}^0 V_{w1}}{4} (\theta_1 - \sin \theta_1 \cos \theta_1) D. \end{aligned} \quad (58)$$

We define  $\beta$  in this case as the momentum ratio *on the symmetry axis*, which means that

$$\dot{M}_{w1}^0 V_{w1} = 2(k+1)\beta \dot{M}_w^0 V_w. \quad (59)$$

Substituting equations (55–59) into equation (54) and making use of the geometric relation between the interior angles of the triangle shown in Figure 3:

$$R \sin(\theta + \theta_1) = D \sin \theta_1, \quad (60)$$



**Figure 15.** True shapes of cantoids and ancantoids in the  $\Pi-\Lambda$  plane, calculated according to results of App. D. For each line,  $\beta$  varies over the range  $[0, 1]$  from lower left to upper right (although the black and red lines are truncated on the upper right), and line colors correspond to different anisotropy indices, matching those used in Fig. 14. Circle symbols mark particular  $\beta$  values: 0, 0.01, 0.1, from largest to smallest circle. Square symbols mark  $\beta = 0.5$ , but with  $\Lambda$  calculated exactly, instead of using the approximation of equation (D14). The white plus symbol marks the result for the wilkinoid:  $(\Pi, \Lambda) = (\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3})$ . Background shading indicates the domains of different quadric classes: hyperboloids (white), prolate spheroids (dark gray), and oblate spheroids (light gray).

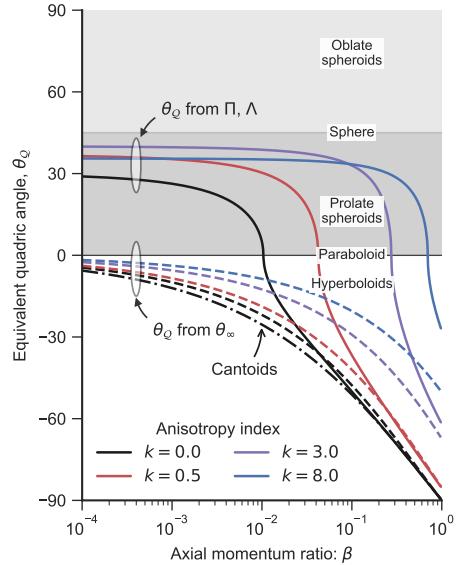
yields

$$\theta_1 \cot \theta_1 = 1 + 2B \left( I_k(\theta) \cot \theta - \frac{1 - \cos^{k+2} \theta}{k+2} \right), \quad (61)$$

which is the generalization of CRW's equation (24) to the anisotropic case. Equation (61) is solved numerically to give  $\theta_1(\theta)$ , which is then combined with equations (60) and (1) to give the dimensionless bow shape,  $R(\theta; \beta, k)/R_0$ , where we now explicitly indicate the dependence of the solution on two parameters: axial momentum ratio,  $\beta$ , and anisotropy index,  $k$ . We refer to the resultant bow shapes as *ancantoids*.

## 5.2 True shapes of cantoids and ancantoids

The shapes of the ancantoid bow shocks are shown in Figure 14 for three different values of  $\beta$ , and are compared with the CRW results for cantoids (dashed curves). The location of these shapes in the planitude-alatitude plane is shown in Figure 15, where the gray background shading indicates the zones of different quadric classes, as in § 4, Figures 11 and 12. Values of  $\Pi$  and  $\Lambda$  are calculated via the analytic expressions derived in Appendix D1 and D2, respectively, which are only approximate in the case of  $\Lambda$ . However, the filled square symbols show the exact results for  $\beta = 0.5$ , which can be seen to lie extremely close to the approximate results, even for the worst case of  $k = 0$ . The leading term in the relative error of equation (D14) scales as  $(\beta/(k+2))^2$ , so the approximation is even better for smaller  $\beta$  and larger  $k$ .

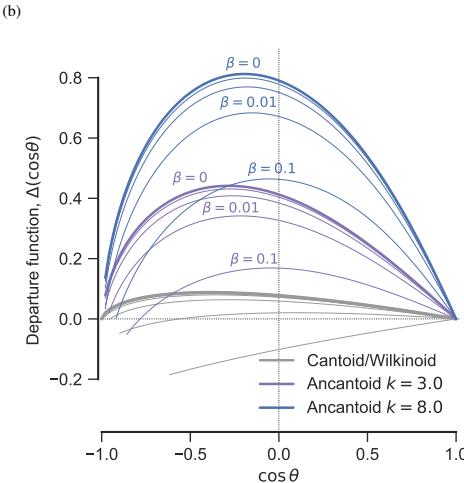
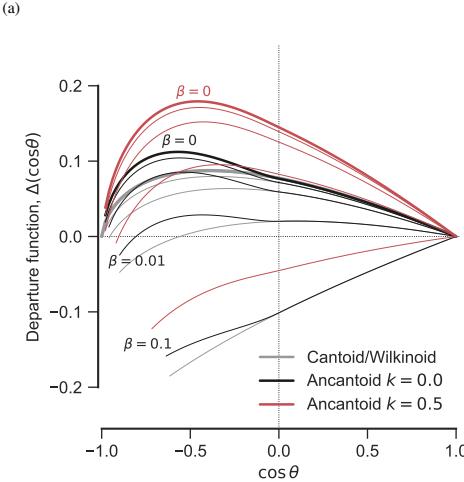


**Figure 16.** Equivalent quadric angles,  $\theta_Q$ , for ancantoids and cantoids. Solid lines show values of  $\theta_Q$  calculated from  $(\Pi, \Lambda)$ , which is representative of the shape of the head, while dashed lines show  $\theta_Q$  calculated from  $\theta_\infty$ , which is representative of the tail. Dot-dashed line shows the result for cantoids, which differ from the  $k = 0$  ancantoids in  $\theta_\infty$ , but not in  $(\Pi, \Lambda)$ . Gray shading and line colors have the same meaning as in Fig. 15.

It is apparent from Figure 14 that the  $k = 0$  ancantoid is identical to the cantoid for  $\theta \leqslant 90^\circ$  ( $z > 0$ , to the right of vertical dotted line in Fig. 14), but is slightly more swept back in the far wings.<sup>9</sup> Since the true planitude and alatitude depend on  $R(\theta)$  only in the range  $\theta = [0, 90^\circ]$ , the cantoid and the  $k = 0$  ancantoid behave identically in Figure 15. There is a general tendency for the bows to be flatter and more open with increasing  $\beta$  and decreasing  $k$ , with the cantoid being most open at a given  $\beta$ . All the models cluster close to the diagonal  $\Lambda \approx \Pi$  in the planitude-alatitude plane, but with a tendency for  $\Lambda > \Pi$  at higher anisotropy. There is therefore a degeneracy between  $\beta$  and  $k$  for higher values of  $\beta$ . The wilkinoid shape, which corresponds to the  $\beta \rightarrow 0$  limit of the cantoids, is marked by a white plus symbol in Figure 15, and lies in the prolate spheroid region of the plane. Cantoids lie either in the prolate spheroid or hyperboloid regions, according to whether  $\beta$  is less than or greater than about 0.01. For ancantoids of increasing  $k$ , this dividing point moves to higher values of  $\beta$ , until almost the entire range of models with  $k = 8$  are within the prolate spheroid zone.

However, the true planitude and alatitude, which are what would be observed for a side-on viewing angle ( $i = 0$ ), are not at all sensitive to the behavior of the far wings of the bow shock, which has a rather different implication as to which variety of quadric

<sup>9</sup> Due to the discontinuity in the inner wind density at  $\theta = 90^\circ$  (see Fig. 13), there is a discontinuity in the second derivative of the bow shape.

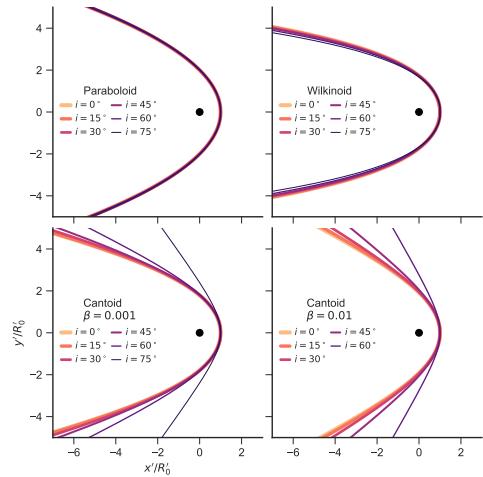


**Figure 17.** Parabolic departure function,  $\Delta(\cos \theta)$ , for ancantoids and cantoids. Heavy lines show the  $\beta = 0$  parallel stream case (Wilkinoid in the isotropic case). Light lines show increasing values of  $\beta = 10^{-4}, 0.001, 0.01, 0.1$ , as marked. (a) Cantoids (gray) and moderately anisotropic ancantoids: hemispheric,  $k = 0$  (black), and prophyd-like,  $k = 0.5$  (red). (b) Cantoids (gray) and extremely anisotropic, jet-like ancantoids:  $k = 3$  (purple) and  $k = 8$  (blue).

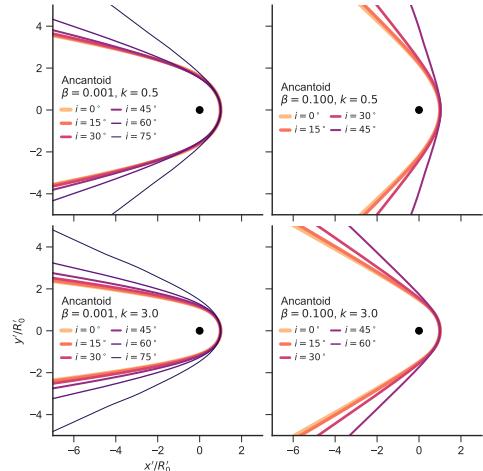
best approximates each shape. We illustrate this in Figure 16, which shows two different ways of estimating the quadric angle,  $\theta_Q$  (see § 4). The first is from  $(\Pi, \Lambda)$ , as in Figure 15:

$$\theta_Q^{\text{head}} = \text{sgn}(2\Pi - \Lambda^2) \tan^{-1} |2\Pi - \Lambda^2|^{1/2}, \quad (62)$$

which follows from equations (27), (28), and (34). The second is



**Figure 18.** Apparent bow shapes as a function of inclination angle for isotropic thin shell models. (a) Confocal paraboloid for comparison (shape independent of inclination). (b) Wilkinoid. (c) Cantoid,  $\beta = 0.001$ . (d) Cantoid,  $\beta = 0.01$ .



**Figure 19.** Further apparent bow shapes as a function of inclination angle for anisotropic thin shell models (ancantoids). (a)  $\beta = 0.001$ ,  $k = 0.5$ ; (b) (a)  $\beta = 0.1$ ,  $k = 0.5$ ; (c)  $\beta = 0.001$ ,  $k = 3$ ; (d)  $\beta = 0.1$ ,  $k = 3$ .

from the asymptotic opening angle of the wings,  $\theta_\infty$  (Fig. 4):

$$\theta_Q^{\text{tail}} = \theta_\infty - 180^\circ, \quad (63)$$

where  $\theta_\infty$  is calculated from equation (D17) for ancantoids, or (D19) for cantoids. If the bow shock shape were truly a quadric, then these two definitions would agree. However, as seen in Figure 16, this is

not the case for the cantoids and ancantoids. While  $\theta_Q^{\text{head}}$  generally corresponds to a prolate spheroid (except for the largest values of  $\beta$ ),  $\theta_Q^{\text{tail}}$  always corresponds to a hyperbola. This tension between the shape of the head and the shape of the far wings has important implications for the projected shapes (as we will see in the next section), since the far wings influence the projected planitude and alatitude when the inclination is large.

Figure 17 shows the parabolic departure function (see § 4.1) for the thin-shell models. This provides an alternative perspective on the resultant bow shapes, with two different types of behavior being apparent. Models with high  $\beta$  and low anisotropy behave similarly to the hyperboloids, such as the  $(\Pi, \Lambda) = (3/2, 8/3)$ ,  $(2, 8/3)$ ,  $(8/3, 8/3)$ , and  $(3/2, 2)$  cases from Figure 9. This is the case for the  $\beta \geq 0.01$  models in Figure 17a, which all show departure functions that become negative in the far wings (more open than parabola) and terminate at a  $\theta_{\infty} < 180^\circ$ . The second type of behavior is shown by models with low  $\beta$  or high anisotropy, which behave like spheroids for positive and mildly negative values of  $\cos \theta$ , but, unlike the spheroids, all tend towards  $\Delta = 0$  in the far tail as  $\cos \theta \rightarrow -1$ .

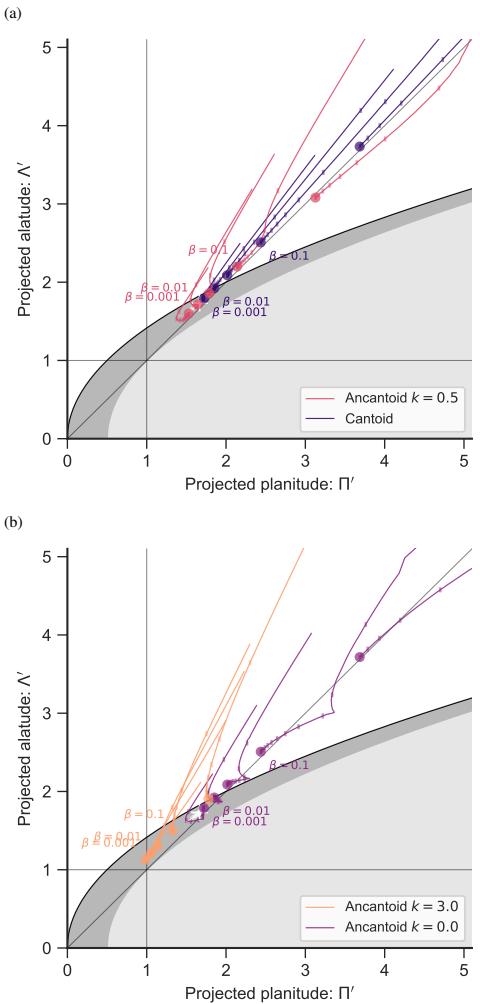
### 5.3 Apparent shapes of projected cantoids and ancantoids

Figures 18 and 19 show the apparent bow shapes of various thin shell models (wilkinoid, cantoids, ancantoids)<sup>10</sup> for different inclination angles  $|i|$ . For comparison, Figure 18a shows the confocal paraboloid, whose apparent shape is independent of inclination (see Appendix C). The wilkinoid (Fig. 18b) shows only subtle changes, with the wings becoming slightly more swept back as the inclination increases. The cantoids (Fig. 18c and d) behave in the opposite way, with the wings becoming markedly more open once  $|i|$  exceeds  $60^\circ$  (for  $\beta = 0.001$ ), or  $45^\circ$  (for  $\beta = 0.01$ ). The ancantoids (Fig. 19) can show more complex behavior. For instance, in the  $k = 0.5$ ,  $\beta = 0.001$  ancantoid (Fig. 19a) the near wings begin to become more closed with increasing inclination up to  $|i| = 60^\circ$ , at which point they open up again, whereas the opening angle of the far wings increases monotonically with  $|i|$ .

The inclination-dependent tracks that are traced by the thin-shell models in the projected planitude–alatitude plane are shown in Figure 20. The behavior is qualitatively different from the quadric shapes shown in Figure 11a in that the tracks are no longer confined within the borders of the region of a single type of quadric (hyperboloid or spheroid). At low inclinations, many of the models behave like the prolate spheroids, but then transition to a hyperboloid behavior at higher inclinations, which is due to the tension between the shape of the head and the shape of the far wings, as discussed in the previous section. This can be seen most clearly in the  $\beta = 0.001$ ,  $k = 0.5$  ancantoid (lowest red line in Fig. 20a, see also zoomed version in Fig. 21). The track begins heading towards  $(\Pi', \Lambda') = (1, 1)$ , as expected for a spheroid, but then turns around and crosses the paraboloid line to head out on a hyperboloid-like track.

Ancantoids with different degrees of inner-wind anisotropy are shown in Figure 20b. In all cases, the tracks follow hyperboloid-like behavior at high inclinations, tending to populate the region just above the diagonal  $\Lambda' = \Pi'$ . The  $k = 0$  ancantoids show a kink in their tracks at the point where the projected apex passes through  $\theta = 90^\circ$ , due to the discontinuity in the second derivative of  $R(\theta)$  there (see footnote 9). The wilkinoid has a much less interesting track, most clearly seen in the zoomed Figure 21, simply moving

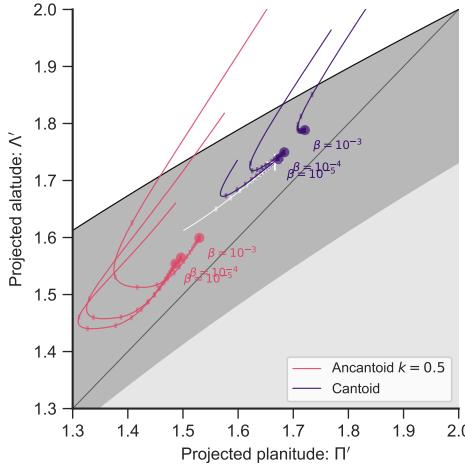
<sup>10</sup> See also previous studies of the projected shape of the wilkinoid (Wilkin 1997; Cox et al. 2012; Ng et al. 2017) and the cantoids (Roberto et al. 2005).



**Figure 20.** Apparent projected shapes of wilkinoid, cantoids and ancantoids in the  $\Pi' - \Lambda'$  plane. Colored symbols indicate  $|i| = 0$  position for  $\beta = 0.001$ ,  $0.003$ ,  $0.01$ ,  $0.03$ ,  $0.1$ ,  $0.3$ . Thin lines show the inclination-dependent tracks of each model, with tick marks along each track for 20 equal-spaced values of  $|\sin i|$ . Gray shaded regions are as in Fig. 11a. The wilkinoid track is shown in white. (a) Isotropic wind model (cantoid) and proplyd-like model (ancantoid,  $k = 0.5$ ). (b) Hemispheric wind model (ancantoid,  $k = 0$ ) and jet-like model (ancantoid,  $k = 3$ ).

short distance from  $(5/3, \sqrt{3})$  to  $(3/2, \sqrt{8/3})$ . Despite its location in the ellipsoid region of the plane, the fact that it has  $\theta_{\infty} = 180^\circ$  means that it behaves more like a parabola at high inclination, but converges on  $(3/2, \sqrt{8/3})$  instead of  $(2, 2)$  since the far wings are asymptotically cubic, rather than quadratic.

The local density of tick marks gives an indication of how



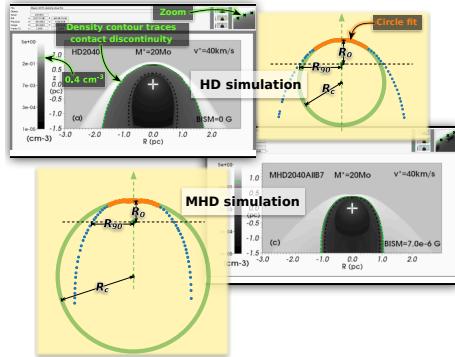
**Figure 21.** As Fig. 20a but zoomed in to show the wilkinoid track (white) and the convergence of the cantoid tracks (purple) to the wilkinoid as  $\beta \rightarrow 0$ .

likely it would be to observe each portion of the track, assuming an isotropic distribution of viewing angles. It can be seen that the ticks tend to be concentrated towards the beginning of each track, near the  $|i| = 0$  point, so the hyperboloid-like portions of the tracks would be observed for only a relatively narrow range of inclinations. This concentration becomes more marked as  $\beta$  becomes smaller, which helps to resolve the apparent paradox that the wilkinoid corresponds to the  $\beta \rightarrow 0$  limit of the cantoids, and yet follows a qualitatively different track. The detailed behavior of the small- $\beta$  cantoid models is shown in Figure 21, which zooms in on the region around the wilkinoid track. It can be seen that for  $\beta < 0.001$  the cantoid tracks begin to develop a downward hook, similar to the  $k = 0.5$  ancantoids discussed above. For  $\beta < 10^{-4}$  this begins to approach the wilkinoid track and the high inclination, upward portion of the track becomes less and less important as  $\beta$  decreases.

## 6 MORE REALISTIC BOW SHOCK MODELS

The assumptions underlying the models of the previous section may break down in various ways. To test whether the planitude-altitude analysis is still useful in less “ideal” situations, we here apply it to more realistic simulations of stellar bow shocks. We choose a pair of hydromagnetic (HD) and magnetohydrodynamic (MHD) moving-star simulations from Meyer et al. (2017), in which the only difference is the presence (MHD case) or absence (HD case) of an ambient magnetic field with strength  $B = 7\,\mu\text{G}$ , oriented parallel to the stellar velocity. In each case, the inner wind comes from a  $20\,M_\odot$  main-sequence star, with mass loss rate and terminal velocity that are roughly constant with time at  $\dot{M}_W \approx 4 \times 10^{-7}\,M_\odot\,\text{yr}^{-1}$  and  $V_W \approx 1200\,\text{km s}^{-1}$ , while the outer wind is a parallel stream due to the star’s own motion at  $40\,\text{km s}^{-1}$  through a uniform medium of density  $0.57\,\text{cm}^{-3}$ .

For these parameters, the radiative cooling distance for shocked ambient gas in the bow is a significant fraction ( $\approx 10\%$ ) of the



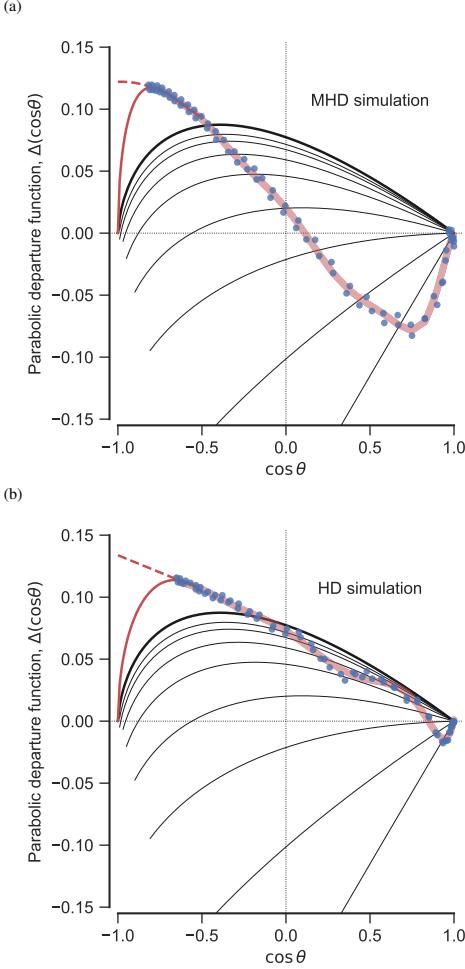
**Figure 22.** Procedure for tracing the contact discontinuity from the Meyer et al. (2017) simulations. The density maps from Meyer et al.’s Fig. 3 are converted to FITS format and displayed using the software SAOImage DS9 (Joye & Mandel 2003). The density contour at  $0.4\,\text{cm}^{-3}$  is displayed (shown in green in the figure) and this is traced by hand by placing “point regions” on the image (shown by black “x” shapes in the figure). The zoom facility of the software allows the points to be placed with any required accuracy. The points are saved to a file in the DS9 region file format, which is then read by Python programs for further processing. For example, the yellow boxes show circle fits and determination of the parameters  $R_0$ ,  $R_c$ , and  $R_{90}$ . In this example, only the points shown in orange (within  $60^\circ$  of axis) are used in the fits.

bow shock size,  $R_0$ , tending to increase towards the wings, and the radiative cooling in the shocked stellar wind is even less efficient. This represents a significant violation of the assumptions behind the thin-shell models, since the total shocked shell thickness is of the same order as  $R_0$ . Nevertheless, the emissivity of several observationally important emission processes, such as mid-infrared thermal dust emission and the optical H $\alpha$  emission line, is concentrated near the contact discontinuity,<sup>11</sup> so it is reasonable to use this surface as a first approximation for the shape of the bow.

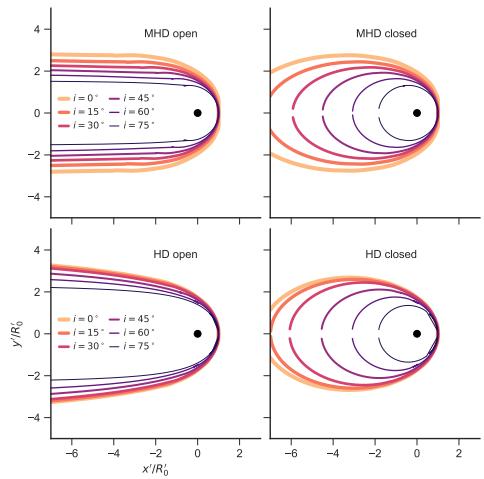
We have traced the contact discontinuity in the two models, using the procedure outlined in Figure 22, and show results for the parabolic departure function (see § 4.1) as blue symbols in Figure 23. The MHD simulation shows a strongly negative dip in the departure function close to the apex ( $\cos \theta = 1$ ), indicating a very flat shape.<sup>12</sup> The HD simulation shows only a small negative dip in the departure function at the apex, but otherwise approximately follows the wilkinoid curve in the forward hemisphere. In both

<sup>11</sup> Note that, in the non-magnetic HD models, efficient thermal conduction leads to a thick layer of hot, thermally evaporated ambient material that separates the shocked stellar wind from the cool, dense shell of shocked ambient gas (see § 3.3 of Meyer et al. 2014). In this case, the contact discontinuity is taken to be the boundary between hot and cold ambient gas, as opposed to the *material discontinuity* between shocked ambient gas and shocked wind gas. In the MHD models, the thermal conduction is almost completely suppressed, so that the material and contact discontinuities coincide.

<sup>12</sup> Meyer et al. (2017) speculate that this flatness may be the signature of the formation of a complex multiple-shock topology at the apex (de Sterck & Poedts 1999). For our purposes, the reason does not matter, merely that the magnetic and non-magnetic models predict markedly different shapes.



**Figure 23.** Departure function for the shape of the contact discontinuity, measured from two numerical simulations of a  $20 M_{\odot}$  main-sequence star, moving at  $40 \text{ km s}^{-1}$  through a uniform medium of density  $0.57 \text{ cm}^{-3}$  (Meyer et al. 2017). (a) Magnetohydrodynamic simulation with ambient magnetic field of strength  $7 \mu\text{G}$ , oriented parallel to the stellar velocity. (b) Hydrodynamic simulation with zero magnetic field. Blue dots show the measured shape, while the thick, pale-red line shows a 12th-order Chebyshev polynomial fit. The published shapes only extend to  $\theta \approx 130\text{--}150^\circ$ , so we extrapolate the shapes out to  $\theta = 180^\circ$ . Two different extrapolations are shown, corresponding to bows that are asymptotically closed (dashed red line) or open (solid red line). For comparison, black lines show the departure function for wilkinoid (thick line) and cantoids (thin lines).



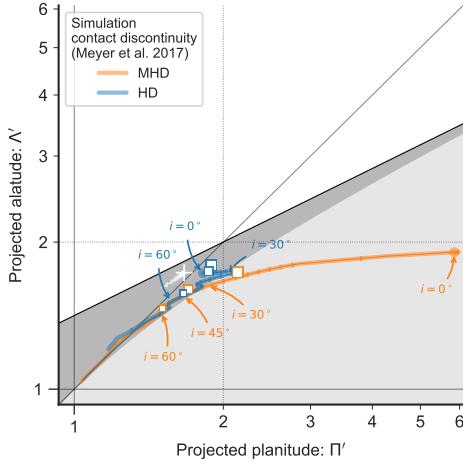
**Figure 24.** Projected shapes of contact discontinuity from simulations at different inclinations  $|i|$  (varying line color and thickness, see key). Top row shows magnetized simulation of Fig. 23a, bottom row shows non-magnetized simulation of Fig. 23b. Left column shows asymptotically open extrapolation, right column shows asymptotically closed extrapolation. All shapes are normalized to the projected apex distance,  $R'_0$

cases the departure function is more positive than the wilkinoid in the far wings ( $\cos \theta < -0.5$ ), but we do not have data for the full range of  $\theta$ , and so two different extrapolations for  $\theta \rightarrow 180^\circ$  are shown. In the first (dashed red line in figure), we fit a low-order polynomial of  $\cos \theta$  to the points with  $\cos \theta < -0.5$  and extend it to  $\cos \theta = -1$ , which gives an asymptotically closed shape. In the second extrapolation (solid red line in figure), we fit a polynomial that is multiplied by  $(1 + \cos \theta)^{1/2}$ , which forces the departure function to zero at  $\cos \theta = -1$ , giving an asymptotically open shape, as with the wilkinoid. In a true steady state, the far wings should be asymptotically open, but as  $\theta \rightarrow 180^\circ$  the flow times become longer and longer, so that a bow shock with a finite age will be closed.

Using a 12th-order Chebyshev fit to the traced shapes, we show the apparent shape of the contact discontinuity at a series of inclination angles,  $|i|$ , in Figure 24. The four panels show the two simulations for each of the two far-wing extrapolations. Comparison with Figures 18 and 19 shows the general tendency is the same as with the wilkinoid: that the apex becomes less flat and the wings less open as the inclination angle is increased. There is no sign of the sudden increase in openness at high inclination, as seen in the cantoids and ancantoids that are asymptotically hyperbolic. On the other hand, the projected shapes of both simulations vary much more strongly with  $|i|$  than the wilkinoid does. For the HD simulation, this is mainly apparent for  $|i| > 30^\circ$ , but for the MHD simulation it occurs at all inclinations.

The resultant inclination-dependent tracks in the planitude–latitude plane are shown in Figure 25. These are compared with measurements<sup>13</sup> from post-processed infrared dust continuum maps

<sup>13</sup> The shape measurements were performed by converting to contours the  $60 \mu\text{m}$  images in Meyer et al. (2017)'s Fig. 10 and then tracing the ridge of



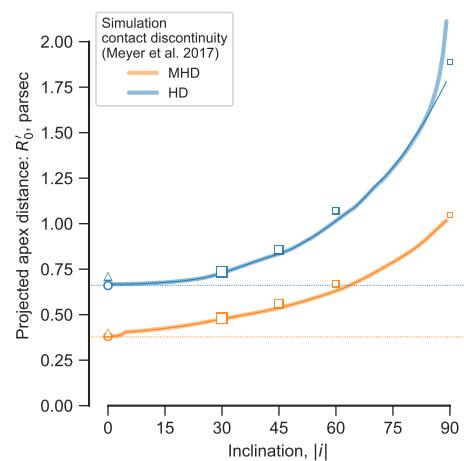
**Figure 25.** Apparent projected shapes of simulations in the  $\Pi'$ – $\Lambda'$  plane. Thick solid lines show the predicted inclination-dependent tracks of the traced contact discontinuity shape for the asymptotically open extrapolation, with tick marks indicating 20 equal intervals in  $|\sin i|$ . Thin solid lines show the same for the asymptotically closed extrapolation, which only deviates from the open case at the high- $|i|$  end of the HD tracks. The true planitude and alatitude are marked by filled circle symbols. Open square symbols show the shapes traced from the dust emission maps at 60  $\mu\text{m}$  for inclinations of (largest to smallest) 30°, 45°, and 60°. For comparison, the wilkinoid track is shown in white. Note that the scales of both axes are logarithmic in this case.

at 60  $\mu\text{m}$  (§ 4.3 of Meyer et al. 2017), shown by open square symbols for  $i = 30^\circ$ ,  $45^\circ$ , and  $60^\circ$ . The agreement between the two is good. In particular, the 60  $\mu\text{m}$ -derived shapes are always very close to the tracks derived from the contact discontinuity shape. Also, the ordering of the three inclinations along the tracks corresponds to what is predicted, although quantitatively there are some slight deviations. This close agreement stems from the fact, emphasized by Meyer et al. (2014), that the long-wavelength dust emission from hot-star bow shocks tends to be dominated by material just outside the contact discontinuity. Note that there is almost no difference in the planitude–alatitude tracks between the closed and open extrapolations. This is because  $\Pi'$  and  $\Lambda'$  only depend on the portion of  $R(\theta)$  between  $\theta_0$  (eq. [18]) and  $\theta_{90}$  (eq. [21]), and these are both smaller than the  $\theta$  range where extrapolation is necessary, except for in the HD case at the highest inclinations.

Figure 26 shows the inclination dependence of the projected apex distance,  $R'_0$ . As in the previous figure, the lines show the prediction based on the shape of the contact discontinuity, while the square symbols show the results from the 60  $\mu\text{m}$  dust continuum maps.<sup>14</sup> In addition, triangle symbols show results from H $\alpha$  optical

minimum radius of curvature of the contours. Identical results are found from using the 100  $\mu\text{m}$  maps instead. For the 25  $\mu\text{m}$  maps, although the same results are found for low inclinations, in the maps with  $|i| \geq 45^\circ$  in the HD case it becomes impossible to trace the limb-brightened rim because it becomes fainter than the emission from the true apex of the bow.

<sup>14</sup> There is an apparent error in the spatial scales for the HD simulations in Figs. 10 and 11 of Meyer et al. (2017), with the dust emission peaks occurring



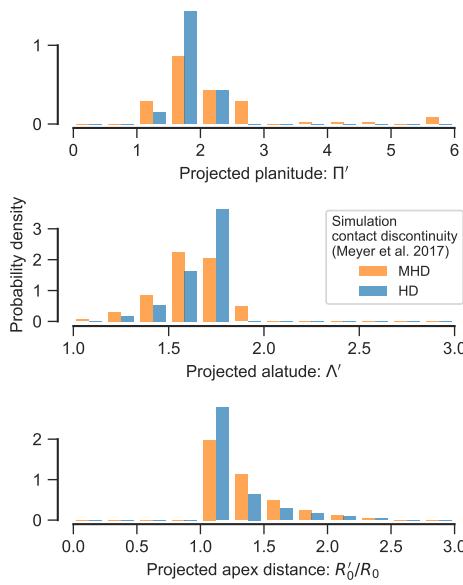
**Figure 26.** Apparent projected apex distance of simulations. Line and symbol meanings are as in Figure 25. In addition, triangle symbols at  $|i| = 0^\circ$  denote radius measured on H $\alpha$  optical emission maps. Note that the distances for the blue square symbols have been adjusted according to the correction factor discussed in footnote 14.

emission line maps, which are given for  $i = 0$  in Fig. 7 of Meyer et al. (2017). Again, the agreement is good between the values derived from the shape of the contact discontinuity and those derived from the surface brightness maps. The greatest discrepancy is seen with the H $\alpha$  maps and the intermediate inclination dust maps, with  $R'_0$  being overestimated by a few percent in both cases. The differences in behavior between the two simulations are much larger than this. The larger true planitude of the MHD simulation means that the relative increase of  $R'_0$  with  $|i|$  is much stronger than in the HD simulation for  $|i| < 45^\circ$ , as expected from Figure 10b.

The probability densities<sup>15</sup> of the apparent shape and size of the simulation bows (measured at the contact discontinuity) are shown in Figure 27, assuming that the viewing direction is uniformly distributed in solid angle. The modal value of the projected planitude is similar at  $\Pi' \approx 1.8$  for both simulations, but the distribution is much broader in the MHD case, which has a low-level wing extending out to  $\Pi' \approx 6$ . The projected alatitude distributions are both

at radii that are clearly too large. The stated apex distance for the contact discontinuity in this simulation is 0.69 pc from Table 2 of Meyer et al. (2014), and the position of the peak in dust column density is 0.70 pc from Fig. 17a of Meyer et al. (2014). These are consistent with Figs. 3, 4, and 7 of Meyer et al. (2017), but not with Figs. 10 and 11. Luckily, the position of the true apex is clearly visible in the 25  $\mu\text{m}$  maps of Fig. 10 at inclinations of 45° and 60°. The projected separation of the true apex is  $R_0 \cos i$ , independent of the bow shape, which allows a correction factor of 0.65 to be found, assuming that the on-axis peak in the 25  $\mu\text{m}$  emission coincides with the peak in dust column density. This correction has been applied to the blue square symbols shown in our Fig. 26.

<sup>15</sup> The probability density is defined so that its integral over the full range of the histogrammed variable is unity, making it independent of the histogram bin widths. This means that the characteristic width of an approximately unimodal distribution is one over the maximum probability density.



**Figure 27.** Histograms of (top to bottom) projected planitude, alatitude, and bow shock size for the shape of the contact discontinuity in the Meyer et al. (2017) simulations. The y axis gives the probability density (per unit x-axis quantity), assuming a uniform distribution of viewing directions.

**Table 1.** Fitted planitude and alatitude for M42 bows

Source	Bow	$\Pi'$	$\langle \Lambda' \rangle$	$\Delta \Lambda'$
000-400	Inner	$2.87 \pm 0.19$	$2.40 \pm 0.04$	$0.35 \pm 0.08$
	Ridge	$3.62 \pm 0.38$	$2.73 \pm 0.02$	$0.51 \pm 0.10$
	Outer	$2.51 \pm 0.24$	$2.46 \pm 0.02$	$-0.06 \pm 0.02$
	All	$3.00 \pm 0.54$	$2.53 \pm 0.15$	$0.16 \pm 0.16$
069-601	Inner	$3.81 \pm 0.23$	$2.90 \pm 0.01$	$0.44 \pm 0.05$
	Ridge	$2.43 \pm 0.13$	$2.17 \pm 0.01$	$0.07 \pm 0.02$
	Outer	$2.22 \pm 0.15$	$2.11 \pm 0.01$	$0.01 \pm 0.01$
	All	$2.82 \pm 0.75$	$2.39 \pm 0.37$	$0.17 \pm 0.20$

narrower than the planitude (note the different scale of the histogram axis), with the MHD case again being the broader of the two and peaking at a slightly lower value ( $\Lambda' \approx 1.7$  as opposed to  $\approx 1.8$  for the HD case). Finally, the distribution of projected-over-true apex distance is also broader for the MHD case.

## 7 EXAMPLE APPLICATION TO OBSERVATIONS

As an example of measuring the projected planitude and alatitude of real bow shocks, we present an analysis of M42 000-400 and M42 069-601, which are two H $\alpha$  emission arcs (Bally et al. 2000;

Gutiérrez-Soto 2015) associated with proplyds<sup>16</sup> in the west of the Orion Nebula (M42) at a distance of roughly 0.5 pc from the high-mass Trapezium stars that ionize the nebula. An image of one of these arcs (M42 069-601) was used in the illustration of bow shock terminology in Figure 1.

### 7.1 Empirical determination of bow shock shape

We consider three different tracings of the bow shape (see Fig. 28): the peak of the emission arc (“ridge”), and its inner and outer edges. In all three cases, we placed by eye the points that define the bow, using SAOImage DS9 (Joye & Mandel 2003) in a similar fashion to in Figure 22, and guided by the image contours.<sup>17</sup>

We determine the planitude and alatitude by fitting a circle to the traced points within  $\pm \Delta\theta = 75^\circ$  of the bow axis, using the iterative algorithm described in Appendix E. The fitted circle, when combined with the position of the central source, yields the orientation of the bow axis, together with the apex distance,  $R_0$ , radius of curvature,  $R_c$ , and two perpendicular radii (one for each wing),  $R_{90+}$  and  $R_{90-}$ . These are all indicated on the panels of Figure 28 by light-colored lines.<sup>18</sup> The projected planitude and alatitude then follow as  $\Pi' = R_c/R_0$ ,  $\Lambda'_+ = R_{90+}/R_0$ ,  $\Lambda'_- = R_{90-}/R_0$ , which are shown in Figure 29.

### 7.2 Analysis of sources of systematic uncertainty

The planitude is found to have a moderate dependence on the choice of  $\Delta\theta$ , as shown in Figure 30, where it can be seen that, although the values of  $\Pi'$  are relatively stable for  $\Delta\theta \geq 60^\circ$  (light gray shaded region), they can show much larger variations for  $\Delta\theta < 60^\circ$ . The fact that the radius of curvature is defined at a point (the projected apex) might seem to argue for making  $\Delta\theta$  as small as possible, but that would lead to circle fits that were extremely sensitive to the exact positions of the few points included in the fit. A reliable fit requires 4 or more points, ideally spanning a total separation that is a substantial fraction of  $R_c$ , which would argue for  $\Delta\theta$  larger than about  $\Pi'/2$  radians, or  $60^\circ$  to  $90^\circ$ . On the other hand, if  $\Delta\theta \geq 90^\circ$  then the planitude and alatitude would no longer be independent since the bow would be forced to lie on the “sphere” line,  $\Lambda' = (2\Pi' - 1)^{1/2}$  (see § 4). Balancing these two concerns suggests an optimal  $\Delta\theta = 75^\circ$ , which is shown in Figure 28, whereas in Figure 29 we show results for both  $75^\circ$  (thick lines) and  $60^\circ$  (thin lines).

Unlike all the models considered in § 5 and § 6, the observed bows are not necessarily symmetrical and so the alatitude for the two wings,  $\Lambda'_+$  and  $\Lambda'_-$ , may be different. We therefore calculate an average alatitude,  $\langle \Lambda' \rangle$ , and an alatitude asymmetry,  $\Delta \Lambda'$ :

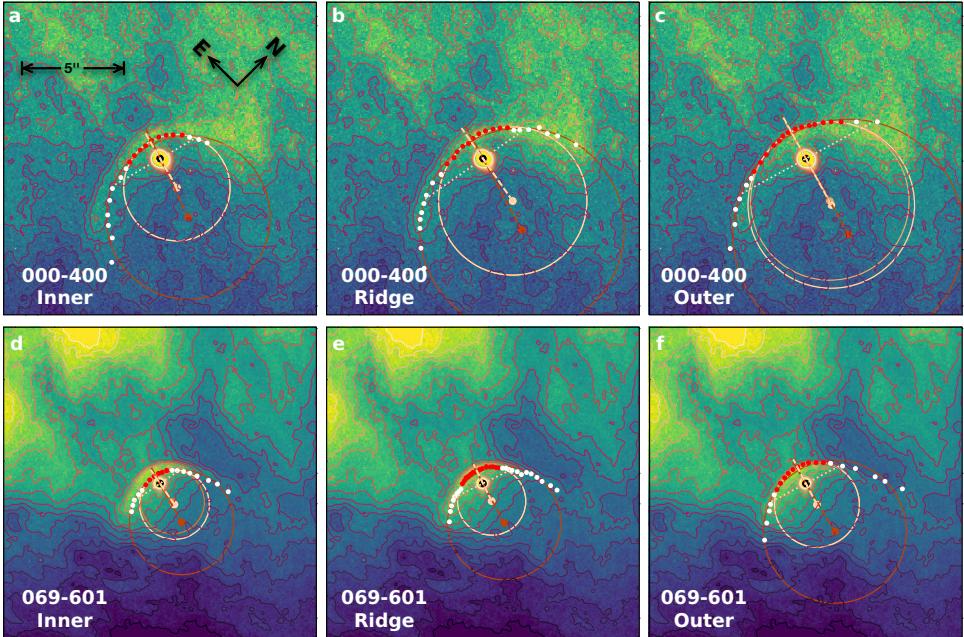
$$\langle \Lambda' \rangle = \frac{1}{2} (\Lambda'_+ + \Lambda'_-) \quad \Delta \Lambda' = \frac{1}{2} (\Lambda'_+ - \Lambda'_-) \quad (64)$$

The results for these two quantities, together with the planitude, are shown in Table 1. For each object and for each tracing (inner, ridge, outer, see Fig. 28), the mean  $\pm$  standard deviation is listed for circle

<sup>16</sup> The coordinate designation (see O’Dell & Wen 1994 for an explanation of the nomenclature) of 000-400 is very imprecise in right ascension, but we use it here for consistency with previous papers. The associated proplyd is listed with the more correct designation 4596-400 in catalogs such as Ricci et al. (2008).

<sup>17</sup> In the case of the “ridge” method at least, it is possible to automate this step, which we will discuss in detail in a following paper.

<sup>18</sup> For conciseness, we drop the prime symbol from the radii, both in this section and in Appendix E, even though they are all projected quantities.



**Figure 28.** Example empirical determination of planitude and alatitude for observed bow shocks associated with proplyds in the outer Orion Nebula (M42). Color scale and contours show an *HST H $\alpha$*  image (ACS F658N filter, Bally et al. 2006) of M42 000-400 (panels *a–c*) and M42 069-601 (panels *d–f*). The image scale and orientation are indicated on panel *a* and are the same for all panels. Three different bows have been traced by eye on each object (red and white filled symbols): (*a, d*) inner edge, (*b, e*) ridge of maximum emission, and (*c, f*) outer edge. For each panel, the dark-colored circle shows the initial fit to the full set of points (white and red), using the algorithm described in Appendix E. The center of curvature and derived axis are shown by a small filled circle and dashed line in the same color. Lighter colored circles show three subsequent iterations where the fit is restricted to points within  $\pm\Delta\theta = 75^\circ$  of the axis. The subset of points used in the final iteration is marked in red. The perpendicular radii for the final iteration are shown by dotted lines. In panels *a, b, d–f* the iterations converge immediately, but in panel *c* the iterations stably oscillate between two slightly different solutions.

fits using  $\Delta\theta = 60^\circ$  to  $80^\circ$  (see Fig. 30). Additionally, the row ‘All’ for each object gives the global mean and standard deviation over all three tracings.

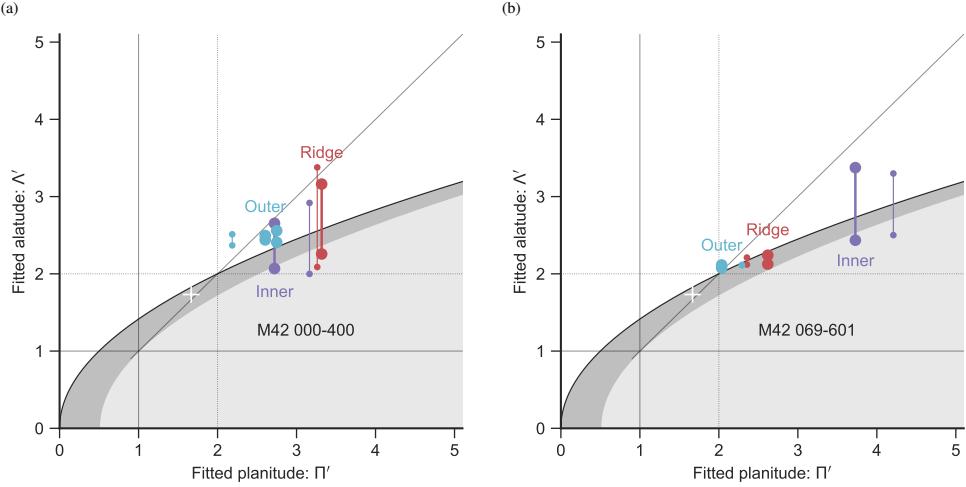
It can be seen from Table 1 that the uncertainty in the fitted parameters is dominated by the variations between the different traced shapes. For example, the one-sigma relative variation of planitude,  $\Pi'$ , is  $< 10\%$  within the individual tracings, but  $\approx 20\%$  between tracings. For the mean alatitude,  $\langle \Lambda' \rangle$ , the variation within individual tracings is extremely small<sup>19</sup> at  $\approx 1\%$ , but is  $\approx 10\%$  between tracings. The alatitude asymmetry,  $\Delta\Lambda'$ , is best interpreted as a difference between the symmetry axis of the apex region and the symmetry axis of the wings. In relative terms, this is 0–20%, but with large systematic variations between tracings (for instance, in both objects it is very small for the outer arcs).

It could be argued that much of the between-tracing variations

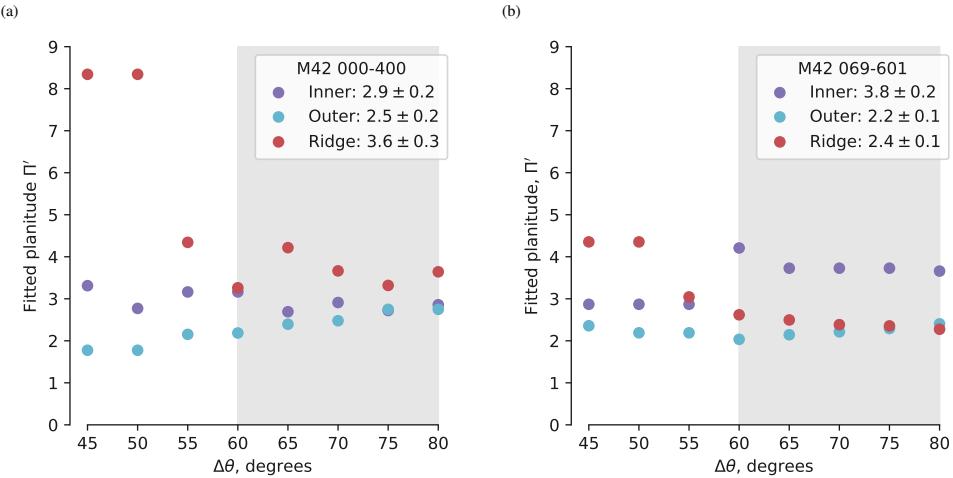
in  $\Pi'$  and  $\langle \Lambda' \rangle$  are due to real differences between the shapes of the inner and outer boundaries of the emission arc. Although this may be true, in the absence of a robust theory as to exactly what feature of the observed images constitutes the bow shock, such variations nevertheless serve to limit the precision with which the bow shock shape can be measured. We therefore conclude that conservative estimates of 20% precision for  $\Pi'$  and 10% precision for  $\Lambda'$  are appropriate when analyzing observations of a similar or better quality<sup>20</sup> to those presented in Figure 28. This will be an important limitation when comparing the statistics of the shapes of different bow shock populations, as we will present in a following paper.

<sup>19</sup> This is because the only way that variation in the circle fit parameters affect the alatitudes is through the axis orientation vector, and changing the orientation induces roughly opposite effects on  $\Lambda'_+$  and  $\Lambda'_-$ , which approximately cancel out in  $\langle \Lambda' \rangle$ .

<sup>20</sup> Since the uncertainties are systematic and due to unavoidably subjective decisions, it is unlikely that better quality observations would improve the situation, although poorer quality observations could make things worse.



**Figure 29.** Location in the projected planitude–alatitude plane of the converged circle fits to the M42 bows: (a) 000-400, (b) 069-601. For each solution, the two values of the projected alatitude,  $\Lambda'_+$  and  $\Lambda'_-$ , corresponding to  $R_{90+}$  and  $R_{90-}$ , are joined by a vertical line. Large symbols show the results from the fits shown in Figure 28, while small symbols show results for fits using  $\Delta\theta = 60^\circ$  instead of  $75^\circ$ . In panel a, two slightly different  $\Pi'$  values are shown for the outer bow, since the fit does not converge to a single value (see Fig. 28c and App. E).



**Figure 30.** Variation of fitted planitude,  $\Pi'$ , as a function of the parameter  $\Delta\theta$ , which controls how close a point must be to the axis in order to be included in the circle fit. (a) M42 000-400, (b) M42 069-601. For the three traced bows (inner, outer, and ridge) of each object, the symbol key lists the mean and standard deviation of  $\Pi'$ , calculated over the “stable” range  $\Delta\theta = 60^\circ$  to  $80^\circ$ , which is indicated by light gray shading.

### 7.3 Derived shape of the M42 arcs

From a casual inspection of Figure 28, it is apparent that the shapes of the two M42 arcs are closely similar, and this is confirmed by the numbers in Table 1. Both 000-400 and 069-601 are consistent with  $(\Pi', \Lambda') \approx (3.0, 2.5)$ , and if we take the absolute minimum

over all the different tracings and reasonable variations in the  $\Delta\theta$  fit parameter, we find unassailable lower limits of  $(\Pi', \Lambda') > (2.1, 2.1)$ . In the rest of this section, we consider only these lower limits, since they are already sufficient for drawing interesting conclusions.

Comparison with Figure 25 shows that both the MHD and HD simulations of Meyer et al. (2016) are inconsistent with the

observations. Although  $\Pi' > 2.1$  can be satisfied,<sup>21</sup> the simulations' projected alatitude is  $\Lambda' < 1.9$  for all inclinations, which is significantly less than the observed lower limit of 2.1. This is not particularly surprising since the simulations were not tailored to the situation of these proplyd bow shocks in M42, in which the mildly supersonic photoevaporation flow from an externally irradiated protoplanetary disk interacts with the mildly supersonic champagne flow from the core of the Orion Nebula. The proplyd case has at least four important differences from the runaway O-star case modeled by Meyer et al. (2016): (1) The velocity of the outer wind is  $\leq 20 \text{ km s}^{-1}$  instead of  $40 \text{ km s}^{-1}$ ; (2) The outer wind is slightly divergent, rather than plane-parallel; (3) Both inner and outer shocks are strongly radiative, so both shells (see Fig. 2) contribute to the observed emission; (4) The inner wind is not isotropic, but instead corresponds to the  $k = 0.5$  case of equation (53). The ways in which these differences may account for the discrepancy with the observations will be explored in detail in a subsequent paper.

## 8 SUMMARY AND DISCUSSION

We have shown that the shapes of stellar bow shocks can be usefully characterized by two dimensionless numbers: the *planitude*,  $\Pi$ , or flatness of the bow's apex, and the *alatitude*,  $\Lambda$ , or openness of the bow's wings (§ 2). The planitude and alatitude can be estimated from ratios of lengths that can be straightforwardly measured from observations or theoretical models. We develop a general method (§ 3) for finding the projected shape,  $(\Pi', \Lambda')$ , of a bow shock's limb-brightened edge, or *tangent line*, as a function of inclination angle,  $i$ , where the emission shell is idealized as a cylindrically symmetric surface.

We first apply this method to find inclination-dependent tracks on the projected planitude–alatitude plane for the special case of *quadric* surfaces (§ 4), such as hyperboloids, paraboloids, and spheroids, where the tangent line is a conic section. The spheroids and hyperboloids occupy distinct regions of the plane, with the paraboloids defining the boundary between the two. As the inclination is increased from  $|i| = 0$  (side-on) to  $|i| = 90^\circ$  (end-on), the tracks first tend to approach the diagonal  $\Lambda' = \Pi'$ , corresponding to confocal conics, always remaining within their own region. At the highest inclinations, the spheroids all converge at  $|i| = 90^\circ$  on the point  $(\Pi', \Lambda') = (1, 1)$  and the paraboloids on the point  $(\Pi', \Lambda') = (2, 2)$ . The hyperboloids, on the other hand diverge as  $(\Pi', \Lambda') \rightarrow (\infty, \infty)$  for a finite  $i_{\text{crit}}$ , which depends on the asymptotic opening angle of the tail. For  $|i| > i_{\text{crit}}$ , the tangent line no longer exists for the hyperboloid, and it would no longer appear to be a curved bow shock. We introduce the parabolic departure function (§ 4.1) as tool for visualizing differences in bow shapes,  $R(\theta)$ , over the full range,  $\theta = [0^\circ, 180^\circ]$ .

We then apply the projection method to a set of thin-shell hydrodynamic models of bow shocks (§ 5): the *wilkinoid* from a wind-parallel stream interaction and the *cantoids* from wind-wind interactions. We generalize the latter to the *ancantoids*, where one of the winds is anisotropic. We find that the wilkinoid is confined to a small region of the  $\Pi'-\Lambda'$  plane, with projected planitude and alatitude varying with inclination by  $< 15\%$ . The cantoids and ancantoids with sufficiently small values of  $\beta$ , the wind momentum ratio, have more interesting behavior, with tracks that pass from the

<sup>21</sup> Either by the MHD simulations at low inclinations ( $|i| = 0^\circ\text{--}20^\circ$ ) or by the HD simulation at intermediate inclinations ( $|i| = 30^\circ\text{--}40^\circ$ ).

spheroid region at low inclinations to the hyperboloid region at high inclinations.

In the following section (§ 6), we test the projected shape analysis methods against the results of computational fluid dynamic simulations of magnetized and non-magnetized bow shocks from Meyer et al. (2017) of a runaway OB main-sequence star. We find that measurements made on maps of infrared dust emission can be accurate diagnostics of the projected shape of the contact discontinuity for this type of bow shock (Fig. 25). The distributions of projected planitude and alatitude for a population of randomly oriented bow shocks shows systematic differences between the different simulations.

Finally (§ 7), we give an example of the application of our methods to observed emission maps of bow shocks, describing a robust algorithm for empirically determining the projected planitude and alatitude from imperfect real data. We investigate the sensitivity of the results to systematic errors due to both observational uncertainties and subjective choices in the application of the algorithm. We find that the projected planitude and alatitude can be determined with precisions of 20% and 10%, respectively. For our illustrative observations, we show that this is more than sufficient to rule out certain models.

This paper is the first of a series that will apply our shape analysis to a wide variety of models and observations of stellar bow shocks. In a second paper, we consider the alternative model of dusty radiation-driven bow wave (Ochsendorf et al. 2014), instead of a hydrodynamic bow shock, and also calculate the signature in the planitude–alatitude plane of oscillations in the bow shape, which may be due to instabilities or a time-varying source. In a third paper, we apply our techniques to observational datasets for three different classes of stellar bow shocks: OB stars (Kobulnicky et al. 2016), cool giants/supergiants (Cox et al. 2012), and young stars in the extended Orion Nebula (Henney et al. 2013). In a fourth paper, we analyze the proplyd bow shocks in the core of the Orion Nebula (García-Arredondo et al. 2001).

## ACKNOWLEDGEMENTS

We are grateful for financial support provided by Dirección General de Asuntos del Personal Académico, Universidad Nacional Autónoma de México, through grant Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica IN111215. JATY acknowledges support via a research studentship from Consejo Nacional de Ciencias y Tecnología, Mexico. This work has made extensive use of Python language libraries from the SciPy (Jones et al. 2018) and AstroPy (Astropy Collaboration et al. 2013, 2018) projects. We appreciate the thoughtful comments of the anonymous referee, which led us to clarify the presentation of our results and prompted the addition of § 7 and Appendices A and B.

## REFERENCES

- Astropy Collaboration et al., 2013, A&A, 558, A33
- Astropy Collaboration et al., 2018, preprint, ([arXiv:1801.02634](https://arxiv.org/abs/1801.02634))
- Bally J., O'Dell C. R., McCaughrean M. J., 2000, AJ, 119, 2919
- Bally J., Licht D., Smith N., Walawender J., 2006, AJ, 131, 473
- Canto J., Raga A. C., Wilkin F. P., 1996, ApJ, 469, 729
- Cox N. L. J., et al., 2012, A&A, 537, A35
- García-Arredondo F., Henney W. J., Arthur S. J., 2001, ApJ, 561, 830
- Gayley K. G., 2009, ApJ, 703, 89
- Gfrerer A., Zsombor-Murray P., 2009, Journal for Geometry and Graphics, 13, 131

- Goldman R., 1983, *IEEE Computer Graphics and Applications*, 3, 68
- Graham M. F., Meaburn J., Garrington S. T., O'Brien T. J., Henney W. J., O'Dell C. R., 2002, *ApJ*, 570, 222
- Guggenheimer H., 2012, *Differential Geometry*. Dover Books on Mathematics, Dover Publications
- Gutiérrez-Soto L. Á., 2015, Master's thesis, Universidad Nacional Autónoma de México
- Hartigan P., Raymond J., Hartmann L., 1987, *ApJ*, 316, 323
- Hayward T. L., Houck J. R., Miles J. W., 1994, *ApJ*, 433, 157
- Henney W. J., 2002, *Revista Mexicana de Astronomía y Astrofísica*, 38, 71
- Henney W. J., García-Díaz M. T., O'Dell C. R., Rubin R. H., 2013, *MNRAS*, 428, 691
- Jones E., Oliphant T., Peterson P., et al., 2001–2018, SciPy: Open source scientific tools for Python, <http://www.scipy.org/>
- Joye W. A., Mandel E., 2003, in Payne H. E., Jedrzejewski R. I., Hook R. N., eds, *Astronomical Society of the Pacific Conference Series* Vol. 295, *Astronomical Data Analysis Software and Systems XII*, p. 489
- Kobulnicky H. A., Gilbert I. J., Kiminki D. C., 2010, *ApJ*, 710, 549
- Kobulnicky H. A., et al., 2016, *ApJS*, 227, 18
- Mackey J., Mohamed S., Neilson H. R., Langer N., Meyer D. M.-A., 2012, *ApJ*, 751, L10
- Mackey J., Gvaramadze V. V., Mohamed S., Langer N., 2015, *A&A*, 573, A10
- Markevitch M., Gonzalez A. H., David L., Vikhlinin A., Murray S., Forman W., Jones C., Tucker W., 2002, *ApJ*, 567, L27
- Meaburn J., Boumis P., Akras S., 2013, *MNRAS*, 435, 3462
- Medina S.-N. X., Arthur S. J., Henney W. J., Mellemo G., Gazol A., 2014, *MNRAS*, 445, 1797
- Meyer D. M.-A., Mackey J., Langer N., Gvaramadze V. V., Mignone A., Izzard R. G., Kaper L., 2014, *MNRAS*, 444, 2754
- Meyer D. M.-A., van Marle A.-J., Kuiper R., Kley W., 2016, *MNRAS*, 459, 1146
- Meyer D. M.-A., Mignone A., Kuiper R., Raga A. C., Kley W., 2017, *MNRAS*, 464, 3229
- Mohr P. J., Phillips W. D., 2015, *Metrologia*, 52, 40
- Ng C.-Y., Bandiera R., Hunstead R. W., Johnston S., 2017, *ApJ*, 842, 100
- O'Dell C. R., Wen Z., 1994, *ApJ*, 436, 194
- Ochsendorf B. B., Verdolini S., Cox N. L. J., Berné O., Kaper L., Tielen A. G. M., 2014, *A&A*, 566, A75
- Penrose R., 2004, *The road to reality : a complete guide to the laws of the universe*. Jonathan Cape, London
- Phillips J. P., Cuesta L. C., Ramos-Larios G., 2010, *MNRAS*, 409, 881
- Quincey P., Brown R. J. C., 2017, *Metrologia*, 54, 454
- Raga A. C., Binette L., Canto J., Calvet N., 1990, *ApJ*, 364, 601
- Ricci L., Roberto M., Soderblom D. R., 2008, *AJ*, 136, 2136
- Roberto M., et al., 2005, *AJ*, 129, 1534
- Scherer K., Fichtner H., 2014, *ApJ*, 782, 25
- Schwartz R. D., 1978, *ApJ*, 223, 884
- Shu F. H., Lizano S., Galli D., Cantó J., Laughlin G., 2002, *ApJ*, 580, 969
- Smith N., Bally J., Shuping R. Y., Morris M., Kassis M., 2005, *AJ*, 130, 1763
- Stevens I. R., Blondin J. M., Pollock A. M. T., 1992, *ApJ*, 386, 265
- Tenorio-Tagle G., 1979, *A&A*, 71, 59
- Weisstein E. W., 1999–2018, *Radius of Curvature*, From MathWorld – A Wolfram Web Resource, <http://mathworld.wolfram.com/RadiusofCurvature.html>
- Wilkin F. P., 1996, *ApJ*, 459, L31
- Wilkin F. P., 1997, PhD thesis, University of California, Berkeley
- Wilkin F. P., 2000, *ApJ*, 532, 400
- Wilson A. S., Ulvestad J. S., 1987, *ApJ*, 319, 105
- Zank G. P., 1999, *Space Sci. Rev.*, 89, 413
- de Sterck H., Poedts S., 1999, *A&A*, 343, 641
- van Buren D., McCray R., 1988, *ApJ*, 329, L93
- van Dyke M., 1982, *An album of fluid motion*. Parabolic Press, Stanford, CA
- van Marle A. J., Meliani Z., Keppens R., Decin L., 2011, *ApJ*, 734, L26

## APPENDIX A: RADIUS OF CURVATURE

The radius of curvature of a general curve can be written (e.g., eq. [2-5] of Guggenheimer 2012):

$$R_c \equiv \frac{1}{|\kappa|} = \left| \frac{ds}{d\alpha} \right|, \quad (\text{A1})$$

where  $\kappa$  is the *curvature*,  $s$  is the path length along the curve and  $\alpha$  is the tangent angle (see Fig. 6). In spherical polar coordinates, this becomes (Weisstein 2018):

$$R_c = \frac{\left( R^2 + R_\theta^2 \right)^{3/2}}{\left| R^2 + 2R_\theta^2 - RR_{\theta\theta} \right|}, \quad (\text{A2})$$

where  $R_\theta = dR/d\theta$  and  $R_{\theta\theta} = d^2R/d\theta^2$ . At the apex,  $R_\theta = 0$  by symmetry, which yields equation (3) of § 2. Note that  $\theta$  is dimensionless and should be measured in radians (Mohr & Phillips 2015; Quincey & Brown 2017).

## APPENDIX B: ROTATION MATRICES AND PLANE OF SKY PROJECTION

The transformation from the body frame (unprimed) to observer-frame (primed) coordinates is a rotation about the  $y$  axis by an angle  $i$ , which is described by the rotation matrix:

$$\mathbf{A}_y(i) = \begin{pmatrix} \cos i & 0 & -\sin i \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin i & 0 & \cos i \end{pmatrix}. \quad (\text{B1})$$

This is used in equation (8). A further application is to express the observer-frame Cartesian basis vectors in terms of the body-frame basis:

$$\hat{x}' = \mathbf{A}_y(-i) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos i \\ 0 \\ -\sin i \end{pmatrix}, \quad (\text{B2})$$

$$\hat{y}' = \mathbf{A}_y(-i) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B3})$$

$$\hat{z}' = \mathbf{A}_y(-i) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin i \\ 0 \\ \cos i \end{pmatrix}. \quad (\text{B4})$$

Note that in this case the sign of  $i$  is reversed because it is the inverse operation to that in equation (8)

Since we are considering cylindrically symmetric bows, all azimuths  $\phi$  are equivalent, so it is sufficient to work with two-dimensional curves in the plane  $z = 0$  (which is also  $\phi = 0$ ) and then find the three-dimensional surface by rotating about the  $x$ -axis via the rotation matrix:

$$\mathbf{A}_x(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}, \quad (\text{B5})$$

where  $\phi$  takes all values in the interval  $[0, 2\pi]$ .

## APPENDIX C: PARABOLOIDS AND THEIR PLANE-OF-SKY PROJECTION

Equation (25) for the  $xy$  coordinates of a quadric in the  $\phi = 0$  plane cannot be used in the case of a paraboloid ( $Q = 0$ ). Instead, a

convenient parametrization is

$$\begin{aligned} x &= R_0 \left(1 - \frac{1}{2} \Pi t^2\right) \\ y &= R_0 \Pi t, \end{aligned} \quad (\text{C1})$$

where we have “baked in” knowledge of the planitude,  $\Pi = R_c/R_0$  (see § 2). The projected plane-of-sky coordinates of the tangent line follow from equation (8) as

$$\begin{aligned} x'_T/R_0 &= \left(1 - \frac{1}{2} \Pi t^2\right) \cos i + \Pi t \sin \phi_T \sin i \\ y'_T/R_0 &= \Pi t \cos \phi_T, \end{aligned} \quad (\text{C2})$$

The azimuth of the tangent line is found from equations (10, 15) as  $\sin \phi_T = -t^{-1} \tan i$ , so that

$$\begin{aligned} x'_T/R_0 &= \cos i \left[1 + \frac{1}{2} \Pi \tan^2 i - \frac{1}{2} \Pi \left(t^2 - \tan^2 i\right)\right] \\ y'_T/R_0 &= \Pi \left(t^2 - \tan^2 i\right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (\text{C3})$$

The projected star-apex distance,  $R'_0$ , is the value of  $x'_T$  when  $y'_T = 0$ , yielding

$$R'_0/R_0 = \cos i \left(1 + \frac{1}{2} \Pi \tan^2 i\right). \quad (\text{C4})$$

Note that this same result can be obtained from a Taylor expansion of equation (45) substituted into (49) in the limit  $Q \rightarrow 0$ .

Equation (C3) can be rewritten in the form

$$\begin{aligned} x'_T &= R'_0 \left(1 - \frac{1}{2} \Pi' t'^2\right) \\ y'_T &= R'_0 \Pi' t', \end{aligned} \quad (\text{C5})$$

where

$$\Pi' = \frac{2\Pi}{2 \cos^2 i + \Pi \sin^2 i} \quad (\text{C6})$$

$$t' = \cos i \left(t^2 - \tan^2 i\right)^{1/2}, \quad (\text{C7})$$

which demonstrates that the projected shape is also a parabola. It is apparent from (C6) that the projected planitude obeys

$$\lim_{i \rightarrow 90^\circ} \Pi' = 2,$$

for all values of the true planitude  $\Pi$ , as is shown by the black lines in Figure 10a. The projected alatitude can be found as

$$\Lambda' = (2\Pi')^{1/2}. \quad (\text{C8})$$

For the special case of the confocal paraboloid,  $\Pi = \Lambda = 2$ , we have  $\Pi' = \Pi$  and  $\Lambda' = \Lambda$  by equations (C6) and (C8) for all inclinations, so its shape is unaffected by projection.

## APPENDIX D: ANALYTIC DERIVATION OF THIN-SHELL BOW SHAPE PARAMETERS

In this appendix, we provide analytic calculations of the planitude, alatitude, and asymptotic opening angle for the wilkinoid, cantoids, and ancantoids. We first consider the most general case of the ancantoids, and then show how results for cantoids and the wilkinoid follow as special cases.

### D1 Planitude of ancantoids

From equations (3) and (5), the planitude depends on the apex second derivative,  $R_{\theta\theta,0}$ , as

$$\Pi = (1 - R_{\theta\theta,0}/R_0)^{-1}. \quad (\text{D1})$$

From equation (4), the second derivative can be found from the coefficient of  $\theta^2$  in the Taylor expansion of  $R(\theta)$ . Since we do not have  $R(\theta)$  in explicit analytic form, we proceed via a Taylor expansion of the implicit equations (60) and (61), retaining terms up to  $\theta^4$  to obtain from equation (61):

$$\theta_1^2 = \beta \theta^2 \left(1 + C_{k\beta} \theta^2\right) + O(\theta^6), \quad (\text{D2})$$

with the coefficient  $C_{k\beta}$  given by

$$C_{k\beta} = \frac{1}{15} - \frac{3k}{20} - \frac{\beta}{15}. \quad (\text{D3})$$

Note that it is necessary to include the  $\theta^4$  term in the expansion of  $\theta_1^2$  so that  $\theta_1/\theta$  is accurate to order  $\theta^2$ . Then, from equation (60) we find

$$\begin{aligned} \frac{R}{D} &= \frac{\sin \theta_1}{\sin(\theta + \theta_1)} \\ &= \frac{\beta^{1/2}}{1 + \beta^{1/2}} \left\{1 + \theta^2 \left[\frac{C_{k\beta}}{2(1 + \beta^{1/2})} + \frac{1}{6} (1 + 2\beta^{1/2})\right]\right\} + O(\theta^4), \end{aligned} \quad (\text{D4})$$

where in the second line we have carried out a Taylor expansion of the two sin terms and substituted (D2). Comparing coefficients of unity and  $\theta^2$  between equations (4) and (D4) we find

$$\frac{R_0}{D} = \frac{\beta^{1/2}}{1 + \beta^{1/2}} \quad (\text{D5})$$

$$\frac{R_{\theta\theta,0}}{R_0} = \frac{C_{k\beta}}{1 + \beta^{1/2}} + \frac{1}{3} (1 + 2\beta^{1/2}), \quad (\text{D6})$$

so that the final result for the planitude, from (D1), is

$$\text{ancantoid } \Pi = \left[1 - \frac{C_{k\beta}}{1 + \beta^{1/2}} - \frac{1}{3} (1 + 2\beta^{1/2})\right]^{-1}. \quad (\text{D7})$$

### D2 Alatitude of ancantoids

To find the alatitude,  $\Lambda = R_{90}/R_0$ , we use equation (60) at  $\theta = 90^\circ$  to write

$$\Lambda = \frac{D}{R_0} \tan \theta_{1,90}, \quad (\text{D8})$$

where  $\theta_{1,90} = \theta_1(\theta = 90^\circ)$ , which, following equation (61), must satisfy

$$\theta_{1,90} \cot \theta_{1,90} = 1 - \frac{2\beta}{k+2}. \quad (\text{D9})$$

Combining (D8) and (D9) with (D5) yields

$$\Lambda = \frac{\left(1 + \beta^{1/2}\right) \theta_{1,90}}{\beta^{1/2} (1 - \xi_k \beta)}, \quad (\text{D10})$$

where

$$\xi_k = \frac{2}{k+2}. \quad (\text{D11})$$

We now take the Taylor expansion of equation (D9) to find

$$\theta_{1,90}^2 + \frac{1}{15} \theta_{1,90}^4 + O(\theta_{1,90}^6) = 3\xi_k \beta, \quad (\text{D12})$$

which, if  $\theta_{1,90}$  is small, has the approximate solution

$$\theta_{1,90} \approx \left( \frac{3\xi_k \beta}{1 + \frac{1}{5}\xi_k \beta} \right)^{1/2}. \quad (\text{D13})$$

Substituting back into equation (D8) yields an approximate value for the alatitude of

$$\text{ancantoid } \Lambda \approx \frac{(3\xi_k)^{1/2} (1 + \beta^{1/2})}{\left(1 + \frac{1}{5}\xi_k \beta\right)^{1/2} (1 - \xi_k \beta)}. \quad (\text{D14})$$

This approximation is surprisingly accurate, with a relative error of order 1% even for  $\beta$  as large as 0.5 with  $k = 0$ .

### D3 Planitude and alatitude of cantoids and wilkinoid

Since  $\Pi$  and  $\Lambda$  depend on only that portion of the inner wind emitted in the forward hemisphere,  $\theta \leq 90^\circ$ , the results for the cantoids can be found by taking  $k = 0$ , in which case equations (D3, D7, D11, D14) yield

$$\text{cantoid } \begin{cases} \Pi = \frac{5}{3(1 - \beta^{1/2})} \\ \Lambda = \frac{\sqrt{3}}{\left(1 + \frac{1}{5}\beta\right)^{1/2} (1 - \beta^{1/2})}. \end{cases} \quad (\text{D15})$$

The wilkinoid shape is equal to the  $\beta \rightarrow 0$  limit of the cantoid, so its planitude and alatitude are given by:

$$\text{wilkinoid } \begin{cases} \Pi = \frac{5}{3} \\ \Lambda = \sqrt{3}. \end{cases} \quad (\text{D16})$$

The wilkinoid results can also be obtained directly from equation (52), and in the case of  $\Lambda$  this has already been noted by several authors (Cox et al. 2012; Meyer et al. 2016).

### D4 Asymptotic opening angle

The asymptotic opening angle of the far wings,  $\theta_\infty$ , can be found from equation (61) for the ancantoids, together with the condition that  $\theta_\infty + \theta_{1\infty} = \pi$ . These yield the implicit equation

$$\theta_\infty - \left( \frac{k+2(1-\beta)}{k+2} \right) \tan \theta_\infty = \pi + 2\beta I_k(\pi/2), \quad (\text{D17})$$

where

$$I_k(\pi/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+4}{2}\right)} \quad (\text{D18})$$

and  $\Gamma$  is the usual Gamma function. This can be compared with the equivalent result obtained by CRW for the cantoids:

$$\theta_\infty - \tan \theta_\infty = \frac{\pi}{1 - \beta}. \quad (\text{D19})$$

Note that, unlike in the cases of  $\Pi$  and  $\Lambda$ , equation (D17) does not reduce to equation (D19) in the limit  $k \rightarrow 0$ . This is because, for  $\theta > 90^\circ$ , the  $k = 0$  ancantoid differs from the cantoid since the former has no wind in the backward hemisphere (see Figure 13). Therefore there is less inner support for the far wings of the bow, and so  $\theta_\infty$  is smaller than in the cantoid case. The wilkinoid result again follows from  $\beta \rightarrow 0$ , implying that  $\theta_\infty = \pi$ , or, in other words, that

the far wings are asymptotically parallel to the symmetry axis, as is the case for the paraboloid (App. C). In the case of the wilkinoid, however, the behavior is cubic in the wings,  $z \sim r^3$ , as opposed to quadratic as in the paraboloid.

### APPENDIX E: EMPIRICAL DETERMINATION OF RADIUS OF CURVATURE FOR A BOW SHOCK OF UNKNOWN ORIENTATION

Consider a set of  $N$  points on the plane of the sky,<sup>22</sup> with Cartesian coordinates  $\mathbf{r}_k = (x_k, y_k)$  for  $k = 1 \dots N$ . We wish to estimate the radius of curvature of the smooth curve that the set of points is presumed to be sampled from. To do this, we fit a circle to the points as follows. The circle is defined by its center,  $\mathbf{r}_c = (x_c, y_c)$ , and radius,  $R_c$ . For a given circle, we define a mean radius of the set of points from the circle center:

$$\bar{R}_c(x_c, y_c) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_c|. \quad (\text{E1})$$

We then optimize to find best-fit values  $(x_c^*, y_c^*)$ , which minimize the objective function

$$f(x_c, y_c) = \sum_{k=1}^N (|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_c| - \bar{R}_c(x_c, y_c))^2. \quad (\text{E2})$$

The best-fit radius of curvature is then given by  $R_c^* = \bar{R}_c(x_c^*, y_c^*)$ .

If we also know the position,  $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0)$ , of the bow's central source, then we can find the unit vector in the direction of the bow's projected axis as

$$\hat{\xi} = \frac{\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_c^*}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_c^*|}, \quad (\text{E3})$$

and the apex distance from the source as<sup>23</sup>

$$R_0 = |\mathbf{r}_c^* + R_c^* \hat{\xi} - \mathbf{r}_0|. \quad (\text{E4})$$

A refinement of the method is then to iteratively repeat the circle fit after restricting the set of points to those lying within a certain angle  $\Delta\theta$  of the bow axis, where we find that best results are obtained with  $\Delta\theta \approx 60^\circ$  to  $75^\circ$ . That is,

$$|\theta_k| < \Delta\theta, \quad (\text{E5})$$

where the signed angle  $\theta_k$  of each point from the axis,<sup>24</sup> measured at the source position  $\mathbf{r}_0$ , can be calculated as

$$\theta_k = \arctan \left[ \frac{(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_0) \cdot \hat{\xi}^\perp}{(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_0) \cdot \hat{\xi}} \right]. \quad (\text{E6})$$

In the preceding equation, the “perpendicular” operator ( $\perp$ ) rotates its vector argument counter-clockwise by  $90^\circ$ , so that  $(x, y)^\perp = (-y, x)$ .

Two or three iterations are sufficient for convergence in most cases, although in some cases it is possible that the process will converge to a stable flip-flop oscillation between two different solutions. This is due to the dependence of the  $\theta_k$ , via  $\hat{\xi}$ , on the  $\mathbf{r}_c^*$  of

<sup>22</sup> In the main body of the paper, the prime symbol ('') is used to distinguish projected from “true” quantities. In this Appendix, for simplicity, we omit the primes since all quantities are projected.

<sup>23</sup> This is only valid if the resultant  $R_0 < R_c^*$ , otherwise the opposite sign of  $\hat{\xi}$  must be taken.

<sup>24</sup> Although the sign of  $\theta_k$  is not relevant to equation (E5), it is used below in calculating the perpendicular radii.

the previous iteration, which can lead to points entering and leaving the fitted set. We have not found this to be a serious problem in practice, since the two solutions tend to be very close to one another. It could be mitigated by averaging  $r_c^*$  over two previous iterations. The alternative of measuring the angle with respect to the center of curvature,  $r_c^*$ , instead of the source,  $r_0$ , is found to be much less stable.

If quantitative estimates exist for the uncertainties,  $\epsilon_k$ , in the measurements of  $r_k$ , then it is appropriate to incorporate weights of  $\epsilon_k^{-2}$  in the objective function. However, it is rare for the  $\epsilon_k$  to be objectively quantifiable, since the uncertainties are often systematic and/or subjective. In cases where the bow shape is traced by eye, based on real or synthetic observations, a more practical approach is to maintain uniform weighting but to place a greater density of points  $r_k$  in regions where the shape is well-determined and to place them more sparsely in regions where the shape is less certain.

Since there is no guarantee of symmetry about the axis  $\hat{\xi}$ , the perpendicular radius will in general be different in the two wings of the bow, with values  $R_{90+}$  and  $R_{90-}$ . These can be estimated by defining

$$R_k = |r_k - r_0| \quad (\text{E7})$$

and linearly interpolating between the points  $(\theta_k, R_k)$  at  $\theta = \pm 90^\circ$ .

Our Python language implementation of this algorithm is freely available at <https://github.com/div-B-equals-0/circle-fit>. An example application to real data is given in § 7 and Figure 28. Note that this method is not necessary if the orientation of the bow axis is known a priori, in which case the Taylor series method described in § 2 is more efficient and accurate.

This paper has been typeset from a  $\text{\TeX}/\text{\LaTeX}$  file prepared by the author.