

Tesis de doctorado



Jorge Alejandro Tarango Yong

23 de mayo de 2018



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

INSTITUTO DE RADIOASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA

“Estudio de la Interacción de Flujos Múltiples de Fuentes
Astrofísicas, Aplicada a los Proplyds Clásicos de la Nebulosa de
Orión”

T E S I S

PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE
DOCTOR EN CIENCIAS (ASTRONOMÍA)

P R E S E N T A

JORGE ALEJANDRO TARANGO YONG
Director de Tesis: Dr. William J. Henney

Morelia, Michoacán
2017

Índice general

| | |
|--|-----------|
| 1. Objetos y Fenómenos Astrofísicos Relevantes | 9 |
| 1.1. Nubes Moleculares Gigantes | 9 |
| 1.2. La Nebulosa de Orión | 10 |
| 1.3. Proplyds | 12 |
| 1.3.1. Descubrimiento | 12 |
| 1.3.2. ¿Qué es un proplyd? Breve introducción (Johnstone et al., 1998) | 12 |
| 1.3.3. Mecanismos de fotoevaporación (Johnstone et al., 1998) | 13 |
| 1.4. Objetos LL | 15 |
| 1.4.1. Mapa de Objetos | 15 |
| 1.5. Regiones HII (Stahler & Palla, 2004) | 15 |
| 1.5.1. Esfera de Strömgren | 16 |
| 1.5.2. Primera y Segunda expansión | 17 |
| 1.5.3. Flujos de Champaña | 19 |
| 1.5.4. Características de la emisión | 19 |
| 2. Conceptos fundamentales | 21 |
| 2.1. Parámetros Fundamentales | 23 |
| 2.2. Planitud y “Alatud” | 23 |
| 2.3. Cuádricas de Revolución | 25 |
| 2.4. Proyección en el Plano del Cielo | 28 |
| 2.4.1. Vectores normal y tangente a la superficie | 30 |
| 2.4.2. Línea tangente | 30 |
| 2.4.3. Planiud y Alatud proyectadas: caso general | 32 |

| | |
|--|-----------|
| 2.4.4. Aplicación a las Cuádricas de Revolución | 33 |
| 3. Modelo de Capa Delgada | 41 |
| 3.1. Cantidades conservadas en un flujo hipersónico de capa delgada | 41 |
| 3.2. Problema de Interacción de Dos Vientos | 43 |
| 3.2.1. Interacción con un viento esférico isotrópico | 45 |
| 3.2.2. Interacción de un viento esférico isotrópico con un viento plano-paralelo (Choques Wilkinoides) | 47 |
| 3.3. Forma “verdadera” de los choques cantoides, ancantoides y wilkinoides | 48 |
| 3.4. Obtención de la Forma Aparente | 52 |
| 4. Resultados obtenidos para los proplyds “clásicos” | 63 |
| 4.1. Metodología para la medición de la forma aparente. | 63 |
| 4.1.1. Medición de incertidumbres | 65 |
| 4.2. Resultados | 65 |
| 5. Conclusiones | 71 |
| Bibliografía | 73 |
| A. Choques y Frentes de Ionización | 75 |
| A.1. Choques | 75 |
| A.2. Frentes de Ionización | 79 |
| B. Matrices de Rotación y Proyección en el Plano del Cielo. | 83 |
| C. Derivación Matemática del Radio de Curvatura | 85 |
| C.1. Radio de curvatura para un polinomio de grado $2n$ | 87 |
| D. Derivación paso a paso de los Radios Característicos en la aproximación hipersónica del modelo de interacción de dos vientos | 89 |
| D.1. R_0 | 89 |
| D.2. Alatud de Choques tipo Cantoides y Ancantoides | 90 |
| D.3. Planitud de choques tipo Cantoides y Ancantoides | 91 |

D.4. Radio de Curvatura para choques tipo Wilkinoides 94

Agradecimientos

Esta tesis se realizó para obtener el título de doctorado en ciencias (Astronomía). Deseo aprovechar esta sección para hacer agradecimientos a personas y/o instituciones que me ayudaron para que pueda completar este trabajo de manera exitosa.

Resumen

Abstract en español

Abstract

Abstract written in english

Capítulo 1

Objetos y Fenómenos Astrofísicos Relevantes

1.1. Nubes Moleculares Gigantes

Las grandes “guarderías” de estrellas a lo largo de la Galaxia se localizan en nubes moleculares gigantes, compuestas principalmente por hidrógeno molecular H_2 . Siendo que esta molécula solo emite radiación en ultravioleta, donde el medio interestelar tiene una alta extinción, para detectar la presencia de las nubes moleculares se recurre a otras moléculas llamadas “trazadoras”, principalmente CO , la segunda molécula más abundante en el medio interestelar, que posee líneas espectrales en el rango de las ondas de radio.

Complejos como el de Taurus-Auriga se formaron debido a la convergencia de dos flujos de material neutro (Ballesteros-Paredes et al., 1999) que se enfrió y se volvió más denso debido a inestabilidades térmicas (Hennebelle & Péault, 1999). Muchas de estas nubes moleculares tienen forma filamentaria debido a que se están colapsando gravitacionalmente en caída libre (Ballesteros-Paredes et al., 2011). Dentro de los filamentos puede haber colapsos locales que pueden dar lugar a regiones de formación estelar de baja masa o incluso asociaciones OB como es el caso de la Nebulosa de Orión (Hartmann & Burkert, 2007).

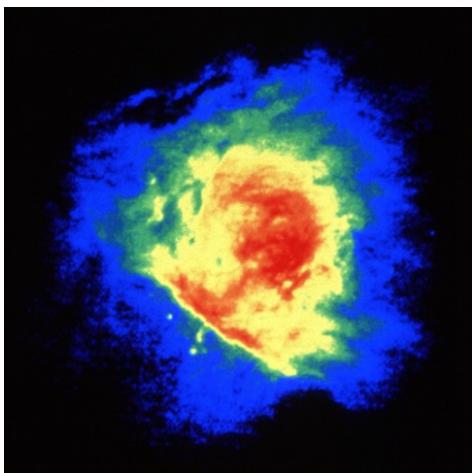


Figura 1.1: La Nebulosa de Orión observada por el VLA en la banda L ($\lambda = 20$ cm, $\nu = 1,4$ GHz, Yusef-Zadeh (1990)).

1.2. La Nebulosa de Orión

La Nebulosa de Orión (ONC por sus siglas en inglés), ubicada a ~ 414 pc (Menten et al., 2007), es probablemente la región HII mejor estudiada del cielo (ver §1.5). Forma parte de la nube molecular gigante de Orión, de donde se distinguen dos sub-unidades, llamadas Orión A y Orión B. ONC forma parte de Orión A. El cúmulo de estrellas que se formó y que es responsable de la región HII se conoce como asociación OB Ori Id, cuyos miembros más prominentes son un grupo de cuatro estrellas conocidas como el “Trapecio”. La más masiva de éstas es θ^1 Ori C, de clasificaciónpectral O6 aproximadamente (ver tabla), tiene una luminosidad de $4 \times 10^5 L_\odot$ y una temperatura de 4×10^4 K. Cuando la región HII se encuentra embebida en el gas molecular, la región HII no puede ser visible en el rango óptico del espectro. En el caso de ONC, que se ubica cerca del borde de la nube molecular Orion A, el gas ionizado caliente, que posee una presión mayor que el gas molecular frío, se escapa hacia el gas adyacente a la nube molecular en forma de “flujo de champaña” (figura 1.2), y de esta manera el gas ionizado puede ser visible por medio de diferentes líneas espectrales, tanto de hidrógeno como de otros elementos.



Figura 1.2: Izquierda: Representación esquemática de la Asociación Ori Id y su ubicación dentro de la nube molecular gigante Orión A. La región BN-KL es una región de formación estelar muy activa donde se observan entre otras cosas, máseres de agua y SiO y flujos moleculares (Stahler & Palla, 2004). Derecha: Línea espectral $H\ 85\ \alpha$ de hidrógeno de ONC. El eje horizontal corresponde a la frecuencia en MHz, mientras que el eje vertical representa la temperatura de antena. El espectro muestra un corrimiento al azul que muestra que el gas se acerca a una velocidad de $\sim 3\ km\ s^{-1}$ (Stahler & Palla, 2004; Gordon & Churchwell, 1970)

1.3. Proplyds

1.3.1. Descubrimiento

Observaciones en óptico de la región del trapecio en filtros de banda angosta de diferentes líneas de emisión tales como $H\alpha$, $H\beta$, [$OIII$], [NII], [SII] y continuo, revelaron la existencia de objetos puntuales únicamente visibles en líneas de alta ionización ($H\alpha$, $H\beta$ y [$OIII$]) que fueron inicialmente denominados como “condensaciones nebulares” (Laques & Vidal, 1979). Hasta el momento no se sabía con certeza si “condensaciones nebulares” eran en realidad condensaciones nebulares (regiones donde la densidad de la nebulosa es inusualmente alta por alguna razón o bien esferas de gas molecular cuya envolvente fue ionizada y que la radiación de la estrella central la está “erosionando”) o si se trataba de protoestrellas de baja masa cuyo disco protoplanetario estaba siendo fotoevaporado por la estrella central (Churchwell et al., 1987). No fue sino hasta que se contó con observaciones de alta resolución con el Telescopio Espacial Hubble (HST) que se pudo determinar la verdadera naturaleza de estos objetos (O’dell et al., 1993) y la razón por la que se les denominó “proplyds” (PROtoPLanetary DiskS). A su vez se encontraron por primera vez arcos delgados y otras estructuras de gran interés.

1.3.2. ¿Qué es un proplyd? Breve introducción (Johnstone et al., 1998)

Las imágenes del HST de la Nebulosa de Orión mostraron imágenes de discos alrededor de estrellas jóvenes de baja masa. Algunos se ven como siluetas oscuras que contrastan con la nebulosa, y otros casos son visibles en líneas de emisión de líneas de alta ionización. Un proplyd típico tiene forma cometaria, con una cabeza brillante que apunta hacia la fuente de radiación ionizante, y una cola que se extiende en dirección contraria a ésta. La explicación a esta forma es que el disco protoplanetario está siendo fotoevaporado por la radiación ionizante de una estrella masiva (θ^1 Ori C en caso de la Nebulosa de Orión), la cabeza es un frente de ionización cuyo radio escala como $R_{IF} \propto D^{2/3}$, donde D es la distancia a la estrella masiva. La forma de la cola se debe a radiación ionizante difusa, producto de dispersión por polvo y por recombinaciones (Figura

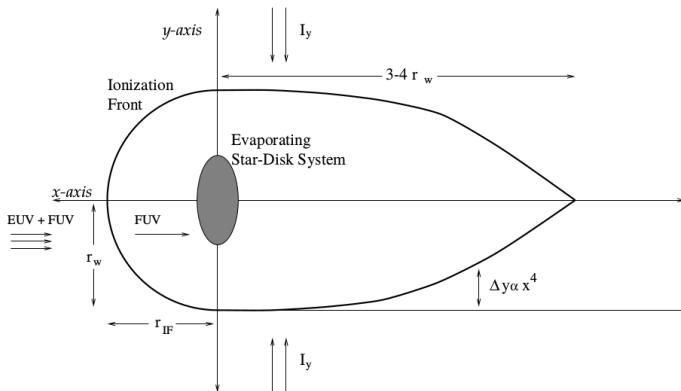


Figura 1.3: Representación esquemática de la formación de un frente de ionización hemisférico y de una cola de gas ionizado detrás del disco en proceso de fotoevaporación. r_{IF} y r_w representan el radio del frente de ionización en las direcciones de los ejes *x* e *y*, respectivamente. I_y representa el campo de radiación difusa. Por detrás del disco, la radiación difusa calienta el gas del disco provocando otro flujo fotoevaporado. Δy es la diferencia entre la forma actual del frente de ionización por detrás del disco y una forma cilíndrica. La forma de la colase explica como que el flujo de radiación I_y es capaz de penetrar más cerca del eje *x* conforme uno se aleja del disco, donde el flujo fotoevaporado es menos denso.

1.3). Churchwell et al. (1987) ya había notado que la tasa de pérdida de masa observada en el gas ionizado implicaba que la fuente de este gas debía oscurecer a la protoestrella huésped, a menos que proviniera de un disco circumestelar. De la emisión de radio observada, se estima la densidad electrónica en $n_e \sim 10^6 \text{ cm}^{-3}$ y la tasa de pérdida de masa en $\dot{M} \sim 10^{-7} \text{ M}_\odot \text{ yr}^{-1}$.

1.3.3. Mecanismos de fotoevaporación (Johnstone et al., 1998)

El principal mecanismo de fotoevaporación es el campo de radiación de la estrella central, en la parte ultravioleta del espectro electromagnético. Según la masa de la estrella central, podemos tener dos clases de flujo radiativo: Dominado por el ultravioleta lejano (FUV, $h\nu < 13,6 \text{ eV}$) o dominado por el ultravioleta extremo (EUV, $h\nu \geq 13,6 \text{ eV}$). En general, el FUV se encarga de disociar moléculas y de calentar el gas de la región

de fotodisociación (PDR) hasta temperaturas de 100 - 1000 K, mientras que el EUV puede ionizar el gas y elevar su temperatura hasta 10^4 K. El EUV no puede atravesar el frente de ionización (IF) pero el FUV sí.

En el caso de que el flujo sea dominado por el EUV, la presión térmica del flujo fotoevaporado es determinada por la fotoionización, la PDR producida por el FUV es delgada. El gas calentado por el FUV se mueve de manera subsónica hasta llegar al IF y la tasa de pérdida de masa depende de la tasa de ionización inducida por el EUV.

Si el flujo está dominado por el FUV, la presión térmica depende del calentamiento por el FUV. El gas tibio se expande como un viento que empuja el IF lejos del disco. La tasa de pérdida de masa la determina la temperatura de la PDR, el flujo FUV y la opacidad del polvo a las longitudes de onda del FUV. Inicialmente la forma del disco impone una geometría cilíndrica en el flujo fotoevaporado, pero eventualmente los gradientes de presión tornan esta geometría en esférica.

Las ecuaciones de continuidad de la masa y el momento restringen la velocidad del flujo neutro antes de alcanzar el IF. Mas allá de éste, la presión del gas hace que éste se expanda a velocidades del orden de una a dos veces la velocidad del sonido. Para el gas neutro dentro del IF hay dos posibles soluciones: si el gas neutro es supersónico entonces el IF será de baja densidad (Tipo R) con bajo contraste de densidad entre gas neutro y gas ionizado. O si el gas neutro es subsónico se formará un IF tipo D con un gran contraste de densidad entre el gas neutro y el gas ionizado. Sin embargo, sin importar qué tipo de radiación domina la fotoevaporación, el gas neutro permanece a velocidades subsónicas al llegar al IF, por lo que dicho frente será tipo D. En el caso de un flujo dominado por el EUV, el gas neutro permanece a velocidad subsónica, su velocidad decrece como $v_I \propto r^{-2}$ y llega a $0,5 \text{ kms}^{-1}$ al llegar al frente de ionización. Cuando el flujo es dominado por el FUV, el gas neutro se acelera hasta llegar a velocidades supersónicas, luego atraviesa un choque isotérmico que lo desacelera y llega al frente de ionización a $0,5 \text{ kms}^{-1}$.

Sin importar el tipo de mecanismo de fotoevaporación dominante, el flujo fotoevaporado solo si la presión térmica supera a la gravedad de la protoestrella. Entonces, el flujo fotoevaporado solo existe a partir de un radio crítico r_g , donde este radio se estima a partir del balance entre la energía necesaria para escapar de una órbita kepleriana y la energía

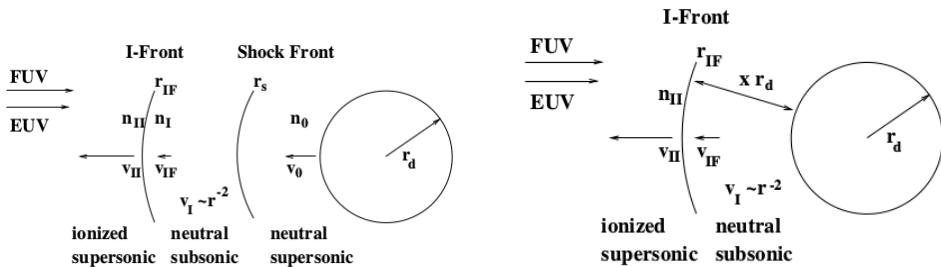


Figura 1.4: Representación esquemática de las regiones del flujo fotoevaporado de un proplyd. Izquierda: Cuando el flujo es dominado por el FUV. Derecha: Flujo dominado por EUV (Johnstone et al., 1998)

térmica:

$$r_g = \frac{GM_*}{a^2} \quad (1.1)$$

Donde M_* es la masa de la protoestrella y a es la velocidad del sonido del gas. Para las protoestrellas típicas del trapecio la masa típica es de $M_* = 0,2 M_\odot$. Para el gas neutro la velocidad del sonido es de $a_I \sim 3 \text{ kms}^{-1}$ y para el gas ionizado es de $a_{II} \sim 10 \text{ kms}^{-1}$. Por tanto, el radio gravitacional para un flujo dominado por el EUV es de $r_{gII} \sim 2 \text{ AU}$ y para un flujo dominado por el FUV es de $r_{gI} \sim 20 \text{ AU}$.

1.4. Objetos LL

1.4.1. Mapa de Objetos



1.5. Regiones HII (Stahler & Palla, 2004)

Consideremos el caso en que se forma una estrella masiva dentro de una nube molecular, que por simplicidad está compuesta exclusivamente de hidrógeno molecular H_2 . La estrella masiva emite fotones ultravioleta

| Tipo Espectral | Masa (M_{\odot}) | $\log \mathcal{N}_*$ (s^{-1}) | $\log \mathcal{N}_{FUV}$ (s^{-1}) |
|----------------|----------------------|-----------------------------------|---------------------------------------|
| O4 | 70 | 49.9 | 49.5 |
| O5 | 60 | 49.4 | 49.2 |
| O6 | 40 | 48.8 | 48.8 |
| O7 | 30 | 48.5 | 48.6 |
| O8 | 23 | 48.2 | 48.4 |
| O9 | 20 | 47.8 | 48.2 |
| B0 | 18 | 47.1 | 48.1 |
| B1 | 13 | 45.4 | 47.5 |
| B2 | 10 | 44.8 | 47.1 |

Cuadro 1.1: Tasa de fotones ionizantes para estrellas masivas (Stahler & Palla, 2004)

que tienen la energía suficiente para disociar el H_2 como para ionizar el hidrógeno atómico resultante. Luego el plasma ionizado se recombina para volver a ser HI emitiendo líneas espectrales de diversas energías, siendo la más energética la línea de Ly α . Como al realizar una ionización se pierde un fotón ionizante y el flujo de radiación proveniente de la estrella es finito, entonces la estrella solo puede ionizar la región de la nube más próxima a ésta. Si suponemos que la nube tiene densidad uniforme, entonces esta región tendrá forma esférica, conocida como *esfera de Strömgren*.

1.5.1. Esfera de Strömgren

El plasma ionizado dentro de la Esfera de Strömgren se encuentra en balance de ionización, esto es, que la tasas de ionización y la de recombinación son iguales. La tasa de ionizaciones es igual a la cantidad de fotones ionizantes que emite la estrella central por segundo. Esto es, los fotones que poseen una energía mayor al límite de Lyman, que corresponde a $E = 13.6$ eV, o bien $\lambda = 912$ Å. En la tabla 1.1 se muestra la tasa de fotones ionizantes \mathcal{N}_* para estrellas masivas de tipo espectral O y B temprano.

El radio de esta esfera se denomina *Radio de Strömgren* que viene dado por:

$$R_s = \left[\frac{3\mathcal{N}_*}{4\pi\alpha'_{rec}(n_H^0)^2} \right]^{1/3} = 0,4 \text{ pc} \left(\frac{\mathcal{N}_*}{10^{49} \text{ s}^{-1}} \right)^{1/3} (n_{H_2})^{-2/3} \quad (1.2)$$

Donde α'_{rec} es el coeficiente de recombinación a todos los niveles energéticos del hidrógeno excepto el estado base, n_H^0 y n_{H_2} son la densidad numérica del hidrógeno neutro y del hidrógeno molecular donde está embebida la región *HII*, respectivamente.

En la expresión numérica, se adopta una temperatura de 10^4 K que es la temperatura característica de una región *HII* y con la que el coeficiente de recombinación α'_{rec} adopta un valor de $2,6 \times 10^{-13} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$.

Dentro de la región *HII*, la probabilidad por unidad de tiempo de ionizar un átomo de hidrógeno dado es mucho mayor a la probabilidad de una recombinación, por lo que el gas está casi completamente ionizado. Sin embargo, en los bordes de la región *HII*, la densidad de gas neutro aumenta debido a que en dicha región el flujo de fotones ionizantes ha sido atenuado por todo el gas ionizado más próximo a la estrella. La transición de gas ionizado a gas neutro tiene un grosor Δr que corresponde al camino libre medio del gas neutro. Esto es:

$$\Delta R = \frac{1}{\sigma_{\nu_1} n_H^0} \quad (1.3)$$

Donde σ_{ν_1} es la sección recta de un átomo de hidrógeno en el estado base, evaluada en la longitud de onda del límite de Lyman. Utilizando $\sigma_{\nu_1} = 6,8 \times 10^{-18} \text{ cm}^2$ y $n_H^0 = 2 \times 10^3 \text{ cm}^{-3}$ obtenemos que $\Delta r = 7,4 \times 10^{13} \text{ cm} \sim 5 \times 10^{-5} R_s$, lo que muestra que las regiones *HII* tienden a tener bordes bien delimitados.

1.5.2. Primera y Segunda expansión

Las esferas de Strömgren no son objetos estáticos, sino que se expanden con el tiempo. Este proceso ocurre en dos etapas: en la primera inicialmente no existe ninguna región *HII* pero que la radiación ultravioleta de la estrella hace que se expanda rápidamente al disociar e ionizar el gas

a su alrededor hasta alcanzar el radio de Strömgren. En la segunda expansión la diferencia de presiones entre el gas ionizado de la región *HII*, mucho mayor que la del gas neutro que lo rodea, provoca otra expansión más lenta que la primera hasta que haya equilibrio de presión.

El radio de la región *HII* durante la primera expansión se comporta siguiendo la siguiente expresión:

$$\lambda(\tau) = \left[1 - \exp\left(-\frac{2}{3}\tau\right) \right]^{1/3} \quad (1.4)$$

Donde $\lambda \equiv R/R_s$, $\tau \equiv t/t_{rec}$ y $t_{rec} \equiv \frac{1}{n_H^0 \alpha'_{rec}}$ que es el tiempo medio de recombinación del hidrógeno.

De la ecuación (1.4) vemos que cuando han pasado una y media veces del tiempo de recombinación, la región *HII* se ha expandido alrededor del 86 % del radio de Strömgren, y aunque la expansión se va descelerando constantemente, ya es de una extensión considerable.

La velocidad del sonido en el gas ionizado con temperatura de $\sim 10^4$ K es de $a_{II} \sim 10 \text{ km s}^{-1}$, si comparamos esta velocidad con la media de la velocidad del frente de ionización, por ejemplo, en el intervalo $0 < \tau < \frac{3}{2}$, en el que ya comprobamos que el frente de ionización casi alcanza el radio de Strömgren, encontramos lo siguiente:

$$\bar{v}_{IF} = \frac{R_s}{t_{rec}} \frac{1}{\frac{3}{2} - 0} \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{d\lambda}{d\tau} d\tau = \frac{2R_s}{3t_{rec}} \lambda (3/2) \quad (1.5)$$

Con los valores típicos adoptados en esta sección obtenemos que:

$$\bar{v}_{IF} \simeq 135 \text{ km s}^{-1} \left(\frac{\mathcal{N}_*}{10^{49} \text{ s}^{-1}} \right)^{1/3} (n_{H_2})^{-2/3} \quad (1.6)$$

Para la segunda expansión encontramos lo siguiente:

$$\lambda = \left(1 + \frac{7\tau'}{4} \right)^{4/7} \quad (1.7)$$

Donde $\tau' \equiv a_1 \frac{t}{R_s}$ y a_1 es la velocidad del sonido del gas ionizado.

1.5.3. Flujos de Champaña

La segunda expansión lleva a que la región *HII* se expanda dos órdenes de magnitud por encima del radio de Strömgren, pero el tiempo que toma alcanzar dichas dimensiones es tan largo que la estrella central muere antes de que la región *HII* alcance el equilibrio de presiones. Sin embargo, es más probable que el frente de ionización rebase el borde de la nube molecular donde se formó, y en este caso el gas ionizado altamente presurizado escapa directamente hacia el medio interestelar que lo rodea (que tiene una presión aún menor que la de la nube molecular), creando el *Flujo de champaña*.

1.5.4. Características de la emisión



Capítulo 2

Conceptos fundamentales

Para este trabajo consideramos en general dos modelos de interacción de vientos:

- Una fuente localizada en el origen que emite un viento esférico que puede ser isotrópico o anisotrópico (figura 2.1) no acelerado que interactúa con el viento esférico isotrópico de otra fuente que se encuentra a una distancia D de la primera (figura 2.2). A los choques de proa resultantes se conocen como “Cantoides” y “Ancantoides”, respectivamente.
- Una fuente localizada en el origen que emite un viento esférico isotrópico no acelerado que interactúa con un viento plano paralelo no acelerado y densidad constante (figura 2.2b). Los choques resultantes en este caso se conocen como “Wilkinoides”.

Para caracterizar al choque de proa utilizaremos coordenadas esféricas, siguiendo la simetría del viento interior. La forma del choque de proa medido a partir del origen es $R(\theta, \phi)$, donde θ y ϕ son el ángulo polar y azimutal, respectivamente. Asumiendo simetría cilíndrica en el sistema, esta función se simplifica a $R(\theta)$.

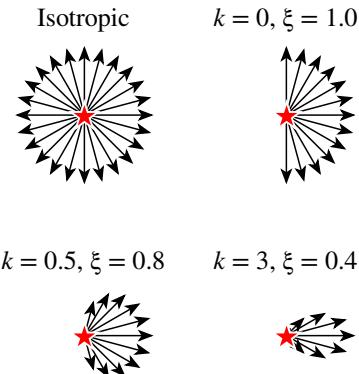


Figura 2.1: Representación esquemática de vientos con diferentes anisotropías: Arriba izquierda: Viento isotrópico esférico. Arriba derecha: viento isotrópico hemisférico. Abajo: Vientos anisotrópicos donde el parámetro k indica el grado de anisotropía (ver capítulo 3)

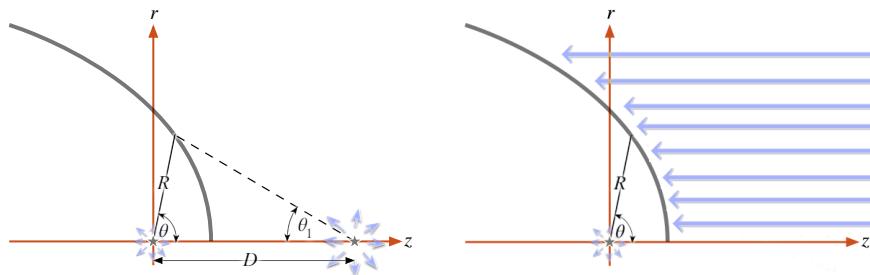


Figura 2.2: Izquierda: Representación esquemática del problema de interacción de dos vientos esféricos: Dos fuentes separadas por una distancia D emiten un viento radial que forma un choque de proa a una distancia R del origen. El sistema tiene geometría cilíndrica siendo el eje z el eje de simetría. La forma del choque es función únicamente del ángulo polar θ , medido a partir del origen. Otro ángulo que es de utilidad es θ_1 , que corresponde al ángulo polar medido a partir de la posición de la otra fuente. Cuando el viento interior tiene densidad constante y es esférico, denominamos al choque resultante como “cantoide”, mientras que si su densidad sigue una ley de potencias de $\cos \theta$, siguiendo la ecuación (3.13) del capítulo 3, será un choque “ancantoide”. Derecha: Representación esquemática de la interacción de un choque esférico e isotrópico con una corriente plano-paralela de densidad y velocidad constantes. El choque resultante es en este caso de tipo “wilkinoido”.

2.1. Parámetros Fundamentales

El valor mínimo de $R(\theta)$, bajo las condiciones ya mencionadas, ocurre en el ápex ($\theta = 0$), y lo denotamos como R_0 . Bajo la condición de estado estacionario, la condición de equilibrio de presión ram entre ambos vientos implica que:

$$\frac{R_0}{D} = \frac{\beta^{1/2}}{1 + \beta^{1/2}} \quad (2.1)$$

Donde β es la tasa de momentos entre los vientos en interacción. Si los dos vientos son isotrópicos, donde la tasa de pérdida de masa del viento interior es \dot{M}_w y su velocidad terminal es v_w y para el viento exterior estas cantidades son \dot{M}_{w1} y v_{w1} , entonces la tasa de momentos es:

$$\beta = \frac{\dot{M}_w v_w}{\dot{M}_{w1} v_{w1}} \quad (2.2)$$

En el caso de que el viento exterior sea una corriente plano-paralela (tipo wilkinoide, siguiendo a Wilkin (1996)), correspondería al caso en que $\beta \rightarrow 0$, entonces D deja de ser un parámetro relevante, ya que técnicamente $D \rightarrow \infty$.

En el caso de que el viento interior no sea isotrópico es tratado en el capítulo 3.

2.2. Planitud y “Alatud”

R_0 no indica la escala del choque de proa, pero para caracterizar su forma utilizamos parámetros adicionales, mostrados en la figura 2.3. El radio perpendicular R_{90} se obtiene evaluando la función $R(\theta)$ en $\theta = \pi/2$, mientras R_c es el radio de curvatura medido en la posición del ápex, que en coordenadas cilíndricas se calcula como sigue (ver apéndice C):

$$R_c = \frac{R_0^2}{R_0 - R_{\theta\theta,0}} \quad (2.3)$$

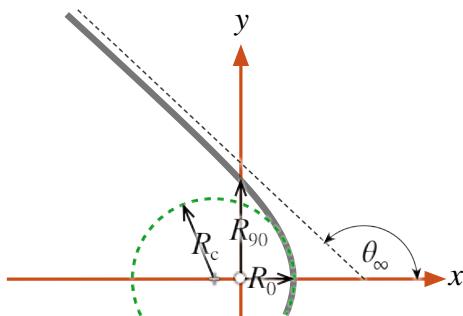


Figura 2.3: Representación esquemática de los radios característicos de un choque de proa

donde $R_{\theta\theta,0} \equiv \frac{d^2R}{d\theta^2}$.

Una forma simple de obtener el radio de curvatura es haciendo una expansión Taylor para la función $R(\theta)$ como sigue:

$$R(\theta) \simeq R_0 + \frac{1}{2}R_{\theta\theta,0}\theta^2 + \mathcal{O}(\theta^4) \quad (2.4)$$

y hacer un ajuste polinomial a $R(\theta)$ para $|\theta| < \Delta\theta$ y determinar R_0 y $R_{\theta\theta,0}$ de los primeros coeficientes del ajuste, y posteriormente R_c a partir de la ecuación 2.3. $\Delta\theta$ es el rango del ángulo polar dentro del cual se puede hacer el ajuste. $\Delta\theta = 30^\circ$ es una buena opción.

Un último parámetro es el ángulo asintótico de apertura de las alas, denotado como θ_∞ . Sin embargo, esta medida solo aplica para choques cuyas alas son asintóticamente cónicas, y aún para éstos en la mayoría de los casos es difícil de medirlo debido a que el ángulo polar θ tiende al valor asintótico muy lentamente y además la emisión de las alas es bastante débil. Por otro lado, los radios característicos (R_0, R_c, R_{90}) son medibles observacionalmente en la mayoría de los casos. A partir de éstos, podemos determinar dos parámetros adimensionales llamados “planitud” y “alatud”. El primero de éstos es una medida de qué tan plano es el choque de proa en la nariz o “apex”, y lo denotamos con la letra griega Π , mientras que el segundo es una medida de qué tanto se abren las alas del choque de proa, y lo denotamos con la letra griega Λ . Ambos parámetros se definen a continuación:

$$\Pi \equiv \frac{R_c}{R_0} \quad (2.5)$$

$$\Lambda \equiv \frac{R_{90}}{R_0} \quad (2.6)$$

2.3. Cuádricas de Revolución

En el caso general es difícil encontrar la forma aparente para un choque de proa siguiendo el formalismo desarrollado en la sección anterior, por lo que optamos por aproximar la forma éstos con una de las superficies más simples: las *cuádricas de revolución*, que son superficies de revolución de las curvas cónicas. Dado el modelo general descrito en la §2, haremos algunas restricciones para las superficies cuádricas que utilizaremos en este trabajo:

- El eje focal se encuentra alineado con el eje x
- La posición del foco de la superficie cuádrica no necesariamente coincide con la posición de la fuente
- En el caso de las hipérbolas, solo tomamos una de las ramas de ésta.

Implementando dichas restricciones, utilizamos la representación paramétrica de las curvas cónicas en términos de un parámetro adimensional denotado con la letra t :

$$x = x_0 + \sigma a \mathcal{C}(t) \quad (2.7)$$

$$y = b \mathcal{S}(t) \quad (2.8)$$

Donde:

$$\mathcal{C}(t), \mathcal{S}(t) = \begin{cases} \cos t, \sin t & \text{elipses} \\ \cosh t, \sinh t & \text{hipérbolas} \end{cases} \quad (2.9)$$

$$\sigma = \begin{cases} +1 & \text{elipses} \\ -1 & \text{hipérbolas} \end{cases} \quad (2.10)$$

$$x_0 = R_0 - \sigma a \quad (2.11)$$

Donde a y b representan la longitud de los semi-ejes de la cónica en cuestión (Figura 2.4). x_0 representa la distancia entre el centro de la cónica y el origen.

La forma polar del choque de proa $R(\theta)$ viene dada por:

$$\tan \theta = \frac{b\mathcal{S}(t)}{a\mathcal{C}(t) + x_0} \quad (2.12)$$

$$R = \left((a\mathcal{C}(t) + x_0)^2 + b^2\mathcal{S}^2(t) \right)^{1/2} \quad (2.13)$$

El tipo de cónica lo podemos caracterizar mediante el parámetro \mathcal{Q} , donde:

$$\mathcal{Q} \equiv \sigma \frac{b^2}{a^2} \quad (2.14)$$

Para las superficies abiertas (hiperboloides) tenemos que $\mathcal{Q} < 0$, mientras que para las superficies cerradas tenemos que $\mathcal{Q} > 0$. Casos particulares son la esfera $\mathcal{Q} = 1$ y el paraboloide $\mathcal{Q} = 0$. De manera equivalente se puede definir el ángulo θ_Q como sigue:

$$\tan \theta_Q = \sigma \frac{b}{a} \quad (2.15)$$

Este ángulo se relaciona con la excentricidad de las cónicas (y que sustituye a esta última en este trabajo) como se muestra a continuación:

$$\tan \theta_Q = \sigma \sqrt{|1 - e^2|} \quad (2.16)$$

El set de parámetros (a, x_0, \mathcal{Q}) es suficiente para caracterizar a nuestras cuádricas de revolución: \mathcal{Q} nos indica el tipo de cónica, a establece la escala y x_0 el desplazamiento del centro a lo largo del eje x. Sin embargo, para futuras aplicaciones tanto a modelos de interacción de vientos como a observaciones (capítulos 3 y 4) nos sería útil hacer la caracterización mediante los parámetros (R_0, Π, Λ) (ver §2.2). Las equivalencias entre los dos sets de parámetros los calculamos a continuación:

$$R_c = \frac{b^2}{a} = a|\mathcal{Q}| \quad (2.17)$$

$$R_{90}^2 = b^2\sigma \left(1 - \frac{x_0^2}{a^2} \right) = \mathcal{Q} (a^2 - x_0^2) \quad (2.18)$$

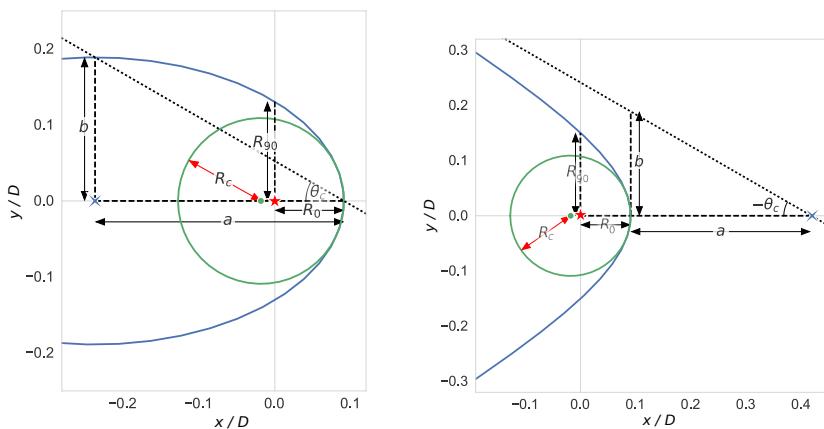


Figura 2.4: Representación esquemática de: Izquierda: Elipse. Y, derecha: Hipérbola. En ambos casos se ilustran los parámetros relevantes de éstas y los radios característicos

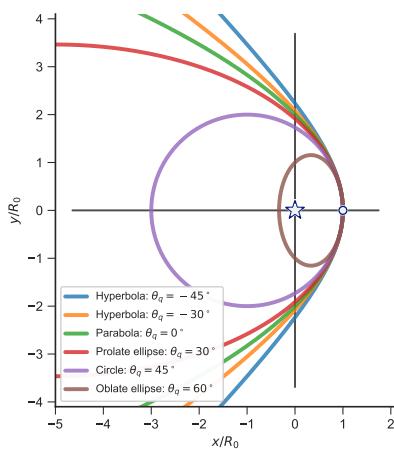


Figura 2.5: Familia de curvas cónicas, donde el valor del parámetro θ_Q varía desde $\theta_Q < 0$ (hipérbolas) hasta $\theta_Q > 0$ (elipses). Casos especiales son $\theta_Q = 0$ (parábola) y $\theta_Q = 45^\circ$ (círculo). Este parámetro sustituye en este trabajo a la excentricidad.

Combinando las ecuaciones (2.5, 2.6, 2.11, 2.14, 2.17, 2.18), obtenemos lo siguiente:

$$R_0 = x_0 + \sigma a \quad (2.19)$$

$$\Pi = \frac{a|\mathcal{Q}|}{x_0 + \sigma a} = \frac{a\mathcal{Q}}{\sigma(x_0 + \sigma a)} = \frac{a\mathcal{Q}}{(a + \sigma x_0)} \quad (2.20)$$

$$\Lambda = \left(\mathcal{Q} \frac{a - \sigma x_0}{a + \sigma x_0} \right)^{1/2} \quad (2.21)$$

De aquí podemos escribir el parámetro de las cuádricas \mathcal{Q} en términos de la planitud y la alatud:

$$\mathcal{Q} = 2\Pi - \Lambda^2 \quad (2.22)$$

Por tanto, el signo de $2\Pi - \Lambda^2$ determina si una cuádrica es esferoidal o hiperboloidal. En la figura 2.5 mostramos como, para planitud constante, podemos tener una familia de cónicas variando únicamente la alatud, y por consiguiente, el parámetro \mathcal{Q} .

2.4. Proyección en el Plano del Cielo

Para un choque de proa que es la vez geométricamente delgado y ópticamente delgado, únicamente se observa el borde de éste por abrillantamiento al limbo, por lo tanto, su orientación respecto a la línea de visión modifica su forma respecto a la forma real del choque. Para ello, rotamos el sistema de referencia del choque de proa en coordenadas cartesianas, denotado por (x, y, z) , por un ángulo que llamamos *inclinación*, denotado por i , en el plano xz . La inclinación está definida de modo que cuando $i = 0^\circ$ el eje de simetría del choque es perpendicular a la línea de visión, es decir, lo observamos “de canto”. Y cuando $i = 90^\circ$ el eje desimetría es paralelo a la línea de visión, es decir, que lo observamos “de frente”. De este modo la transformación entre el sistema de referencia del choque y el sistema de referencia del plano del cielo, denotado por (x', y', z') queda

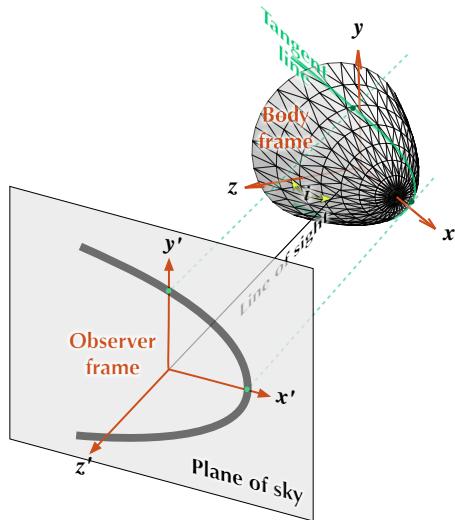


Figura 2.6: Sistema de referencia del choque vs sistema de referencia del plano del cielo. Los ejes x' y y' se encuentran en el plano del cielo, mientras el eje z' es paralelo a la línea de visión. Solo la región del choque cuya tangente sea paralela a la línea de visión será visible por abrillantamiento al limbo.

como sigue:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \mathbf{A}_y(i) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos i - z \sin i \\ y' \\ z \cos i + x \sin i \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Donde $\mathbf{A}_y(i)$ está definida en el apéndice B Por otro lado, la forma tridimensional del choque de proa viene dado por:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

La relación entre ambos sistemas de referencia se ilustra en la figura 2.6.

2.4.1. Vectores normal y tangente a la superficie

Si definimos los vectores \hat{n} y \hat{t} , como los vectores normal y tangente a la superficie, respectivamente para ϕ constante. En el caso $\phi = 0$ (figura 2.7), ambos vectores se encuentran en el plano xy y es fácil mostrar que:

$$\hat{t}_0 = \begin{pmatrix} -\cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \hat{n}_0 = \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

Donde:

$$\tan \alpha = -\frac{dy}{dx} = \frac{1 + \omega \tan \theta}{\tan \theta - \omega} \quad (2.26)$$

y:

$$\omega(\theta) = -\frac{1}{R} \frac{dR}{d\theta} \quad (2.27)$$

Para $\phi \neq 0$, basta con hacer una rotación de las ecuaciones (2.25) alrededor del eje x utilizando la matriz de rotación $\mathbf{A}_x(\phi)$ (ecuación):

$$\hat{n} = \mathbf{A}_x(\phi)\hat{n}_0 = \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \cos \phi \\ \cos \alpha \sin \phi \end{pmatrix} \quad \hat{t} = \mathbf{A}_x(\phi)\hat{t}_0 = \begin{pmatrix} -\cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \phi \\ \sin \alpha \sin \phi \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

2.4.2. Línea tangente

Debido a que el choque es ópticamente delgado y geométricamente delgado, solo la región del choque cuya tangente sea paralela a la línea de visión será visible. Esto corresponde a una curva que denominamos *línea tangente*, que debe cumplir con la siguiente condición:

$$\hat{n} \cdot \hat{z}' = 0 \quad (2.29)$$

Denotamos como ϕ_T al ángulo azimutal que cumple la condición anterior para una inclinación dada, en función del ángulo polar θ :

$$\sin \phi_T = -\tan i \tan \alpha = \tan i \frac{1 + \omega \tan \theta}{\omega - \tan \theta} \quad (2.30)$$

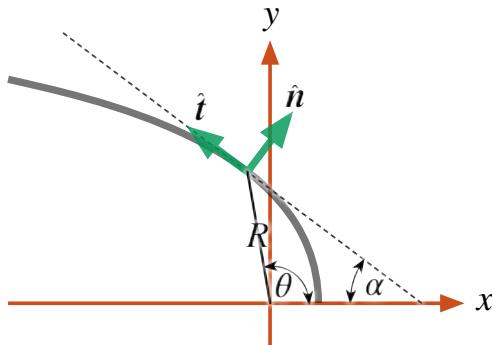


Figura 2.7: Vectores unitarios normal y tangente a la superficie $R(\theta)$ en un plano de azimuth ϕ constante.

De esta manera, la forma de la línea tangente del choque de proa, a la que llamamos *forma proyectada* viene dada por:

$$\begin{pmatrix} x'_T \\ y'_T \\ z'_T \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} \cos \theta \cos i - \sin \theta \sin \phi_T \sin i \\ \sin \theta (1 - \sin^2 \phi_T)^{1/2} \\ \cos \theta \sin i + \sin \theta \sin \phi_T \cos i \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

En el caso general, z'_T no es una función lineal de x'_T y y'_T , por lo que la línea tangente no se encuentra en un plano. La forma aparente (x'_T, y'_T) de la línea tangente también puede escribirse en coordenadas polares (R', θ') , donde:

$$R'(\theta) = (x'^2_T + y'^2_T)^{1/2} \quad \text{y} \quad \tan \theta' = \frac{y'_T}{x'_T} \quad (2.32)$$

Es de notar a su vez que la ecuación (2.30) no tiene solución para valores arbitrarios de θ y de la inclinación, puesto que se requiere que $|\sin \phi_T| < 1$. Por tanto, la línea tangente solo existe para valores de θ tales que $\theta < \theta_0$ donde θ_0 es el valor de θ en el eje de simetría de la línea tangente proyectada ($\theta'(\theta_0) = 0$) y que se obtiene resolviendo la siguiente ecuación implícita:

$$\tan \theta_0 = \frac{|\tan i| + \omega(\theta_0)}{1 - \omega(\theta_0)|\tan i|} \quad (2.33)$$

Esto implica que si el choque de proa es suficientemente “abierto” ($\alpha > \alpha_{min}$), entonces para inclinaciones tales que $|i| > 90^\circ - \alpha_{min}$ no existirá la línea tangente para ningún valor de θ , es decir, el choque de proa se encontrará suficientemente “de cara” como para que ya no parezca un choque de proa para el observador.

2.4.3. Planiud y Alatud proyectadas: caso general

En orden de comparar la forma $R(\theta)$ con observaciones, es útil definir los radios característicos R'_0 y R'_{90} , donde R'_0 es el radio del eje de simetría aparente y R'_{90} es el radio aparente en la dirección perpendicular a R'_0 . Es decir $R'_0 = x'_T(y'_t = 0)$ y $R'_{90} = y'_t(x'_t = 0)$. Utilizando las ecuaciones (2.30) y (2.31) encontramos que:

$$R'_0 = R(\theta_0) \cos(\theta_0 - |i|)^1 \quad (2.34)$$

Donde θ_0 es la solución de la ecuación (2.33), y

$$R'_{90} = R(\theta_{90}) \sin \theta_{90} (1 - \sin^2 \phi_T(\theta_{90}))^{1/2} \quad (2.35)$$

donde θ_{90} es la solución de la siguiente ecuación implícita:

$$\cot \theta_{90} = \frac{1 - (1 + \omega(\theta_{90})^2 \sin^2 2i)^{1/2}}{2\omega(\theta_{90}) \cos^2 i} \quad (2.36)$$

El radio de curvatura aparente se obtiene a partir de la ecuación (2.3) pero en el sistema de referencia primado:

$$R'_c = \frac{R'^2_0}{R'_0 - R'_{\theta'\theta',0}} \quad (2.37)$$

¹Evaluando la ecuación (2.30) en $\theta = \theta_0$ con ayuda de la ecuación (2.33) encontramos que $\sin \phi_T(\theta_0) = -\frac{\tan i}{|\tan i|}$ por lo que al sustituir este resultado en la componente x de la ecuación (2.31) encontramos que $R'_0 = R(\theta_0) \left(\cos \theta_0 \cos i + \sin \theta_0 \sin i \frac{\tan i}{|\tan i|} \right)$ que finalmente se reduce al resultado de la ecuación (2.34)

2.4.4. Aplicación a las Cuádricas de Revolución

El objetivo de esta sección es obtener la forma proyectada de las cuádricas de revolución, puesto que son una aproximación buena y mucho más sencilla a la forma real de un choque de proa. Para esto es conveniente utilizar un sistema de referencia donde el origen se ubica en el centro de la sección cónica:

$$(X, Y, Z) = (x - x_0, y, z) \quad (2.38)$$

De esta manera, la forma de la cuádrica de revolución es:

$$X = a\mathcal{C}(t) \quad (2.39)$$

$$Y = b\mathcal{S}(t) \cos \phi \quad (2.40)$$

$$Z = b\mathcal{S}(t) \sin \phi \quad (2.41)$$

Siguiendo el procedimiento mostrado en la §2.4 calculamos el ángulo azimutal ϕ que cumple con el criterio de ser tangente a la línea de visión:

$$\sin \phi_T = \frac{b\mathcal{C}(t)}{a\mathcal{S}(t)} \tan i \quad (2.42)$$

Ahora utilizamos la ecuación (2.23) para obtener la forma aparente de una cuádrica dada:

$$X'_T = \frac{\mathcal{C}(t)}{a \cos i} (a^2 \cos^2 i + \sigma b^2 \sin^2 i) \quad (2.43)$$

$$Y'_T = b\mathcal{S}(t) \left(1 - \frac{b^2 \mathcal{C}^2(t)}{a^2 \mathcal{S}^2(t)} \tan^2 i \right)^{1/2} \quad (2.44)$$

Podemos mostrar que la forma proyectada de una sección cónica (elipse o hipérbola), es de la misma clase que la sección cónica original. Si ese fuera el caso, entonces podemos escribir las ecuaciones (2.43, 2.44) de la siguiente manera:

$$X'_T = a'\mathcal{C}(t') \quad (2.45)$$

$$Y'_T = b'\mathcal{S}(t') \quad (2.46)$$

Después de un poco de álgebra encontramos que nuestra suposición es consistente, con las siguientes equivalencias:

$$a' = a \cos i f_{Q,i} \quad (2.47)$$

$$b' = b \quad (2.48)$$

$$\mathcal{C}(t') = f_{Q,i} \mathcal{C}(t) \quad (2.49)$$

Donde introducimos el factor de proyección de las cuádricas:

$$f_{Q,i} = (1 + Q \tan^2 i)^{1/2} \quad (2.50)$$

Como ya demostramos que la forma proyectada de la línea tangente de una superficie cónica es una sección cónica del mismo tipo, entonces podemos determinar la forma proyectada reutilizando las ecuaciones (2.19-2.22) sustituyendo las cantidades no primadas por sus equivalentes primados. De esta manera, utilizando las ecuaciones (2.14, 2.47, 2.48) encontramos que el parámetro de las cuádricas para la forma proyectada es:

$$Q' = \frac{Q}{f_{Q,i}^2 \cos^2 i} \quad (2.51)$$

Ahora regresamos al sistema de referencia centrado en la estrella:

$$(x'_T, y'_T) = (X'_T + x'_0, Y'_T) \quad (2.52)$$

donde el desplazamiento proyectado x'_0 es:

$$x'_0 = x_0 \cos i \quad (2.53)$$

La proyección de la distancia al ápex viene dada por la versión primada de la ecuación (2.19):

$$R'_0 = x'_0 + \sigma a' \quad (2.54)$$

$$\implies \frac{R'_0}{R_0} = \cos i \left[1 + \frac{\Pi}{Q} (1 - f_{Q,i}) \right] \quad (2.55)$$

Asimismo la planitud y la alatud proyectada pueden calcularse a partir de las ecuaciones (2.20, 2.22, 2.47, 2.51):

$$\Pi' = \frac{\Pi}{(R'_0/R_0) f_{Q,i} \cos i} \quad (2.56)$$

$$\Lambda' = (2\Pi' - Q')^{1/2} \quad (2.57)$$

En la figura (2.8) mostramos el comportamiento de la planitud y la alatud aparente con la inclinación para distintos valores del parámetro Q (color) y de la planitud Π (grosor de la curva). Se puede observar que para las superficies elipsoidales ($Q > 0$), la planitud y alatud aparente tienden a $\Pi' = \Lambda' = 1$ conforme $i \rightarrow 90^\circ$. Esto se debe a que en este límite observamos la superficie de frente y vemos su sección transversal circular. En el caso del paraboloide la convergencia se da a $\Lambda' = \Pi' = 2$. Por otro lado, la planitud y alatud aparente divergen cuando $|i| \rightarrow i_{\text{crit}} = 90^\circ - |\theta_Q|$ debido a que cuando $|i| > i_{\text{crit}}$ ya no existe una línea tangente a la línea de visión y por tanto no se observaría abrillantamiento al limbo. También cabe destacar dos casos particulares: El esferoide confocal con planitud unitaria ($\Pi = 1$) y el paraboloide confocal ($\Pi = \Lambda = 2$). En estos dos casos su forma aparente no se ve afectada por la inclinación.

En la figura 2.9a observamos el diagrama de diagnóstico $\Pi' - \Lambda'$. Cada curva representa a una cuádrica de revolución siguiendo la misma convención que en la figura 2.8 para los valores de Q y Π y variando la inclinación a lo largo de cada una de éstas, donde además el punto donde $i = 0$ (cuádrica vista de canto) se marca con un punto. Las regiones sombreadas representan a cada clase de cuádrica, la zona superior más clara a los hiperboloides, la zona gris delgada a los elipsoides proláticos, la interfaz entre estas dos últimas a los hiperboloides y la zona gris inferior a los elipsoides obláticos. Se puede observar que en ningún caso las curvas cruzan de una región a otra. También se observa de nuevo que las curvas elipsoidales convergen a $(\Pi', \Lambda') = (1, 1)$, las curvas hiperbólicas a $(\Pi', \Lambda') = (+\infty, +\infty)$ y las parabólicas a $(\Pi', \Lambda') = (2, 2)$. Asimismo en la figura 2.9b observamos el comportamiento de la separación aparente estrella–ápex con inclinación. En este caso se observa que para inclinaciones pequeñas ($|i| < 30^\circ$), esta separación depende muy poco del parámetro Q , siendo más importante la planitud Π . Por otro lado,

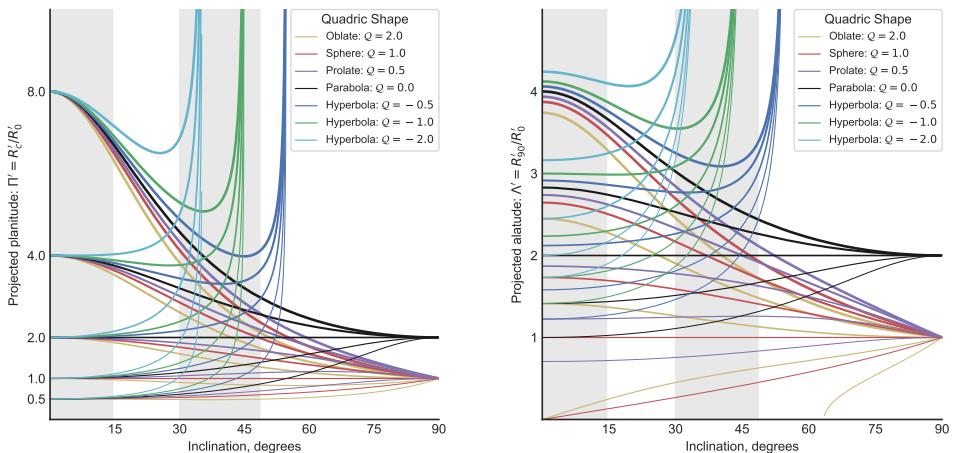


Figura 2.8: Efectos de la proyección sobre las cuádricas de revolución con la inclinación $|i|$. Los colores de las curvas representan variaciones en el parámetro Q de las cuádricas. El grosor de la curva indica el valor de la planitud intrínseca Π . Los rectángulos sombreados muestran cuartiles de $|\sin i|$ que se encuentran equitativamente poblados para una distribución isotrópica de orientaciones. (a) Planitud aparente Π' . (b) Alatud aparente Λ'

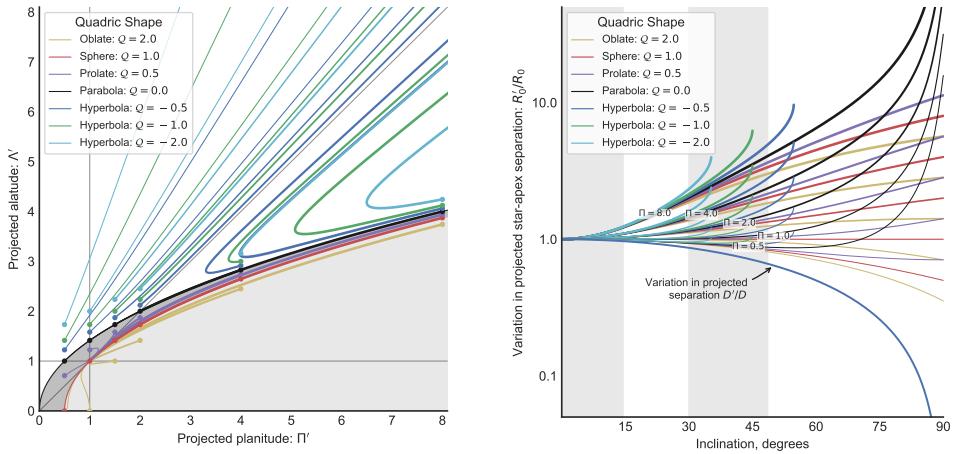


Figura 2.9: (a) Diagrama de diagnóstico Λ' vs Π' para diferentes tipos de cuádricas: esferoides oblatos (amarillo), esferoides (rojo), esferoides prolatos (morado), paraboloides (negro) e hiperboloides (azul, verde y turquesa). Cada punto de una curva representa un valor diferente de la inclinación, y se muestran explícitamente las inclinaciones múltiples de 15° , con la forma de círculos rellenos. Las regiones sombreadas representan al tipo de cuádrica que mejor ajusta a los parámetros (Π', Λ') cubiertos. La región clara para los hiperboloides, la región gris oscura para los esferoides prolatos y la región gris clara para los hiperboloides oblatos. La interfaz entre la región de hiperboloides y esferoides prolatos corresponde a los paraboloides y la región entre esferoides prolatos y oblatos a los esferoides. (b) Distancia proyectada R'_0/R_0 versus $|i|$.

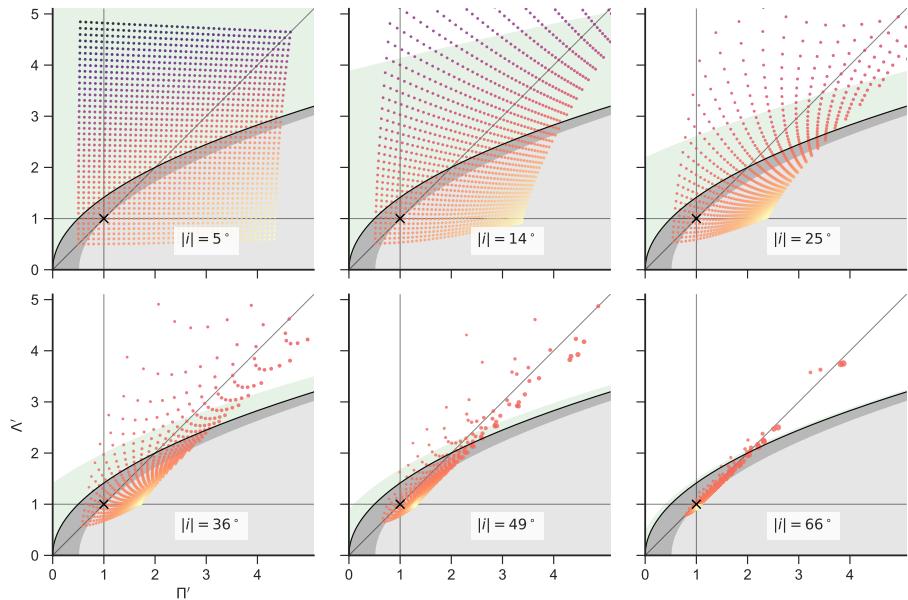


Figura 2.10: Efectos de la inclinación de la forma aparente de arcos cuádricos cuya planitud y alatud están uniformemente distribuidos en los rangos $\Pi = [0,5,4,5]$, $\Lambda = [0,5,4,5]$. En cada pánel se muestra la forma aparente incrementando la inclinación en intervalos iguales de $|\sin i|$. El collar representa el parámetro Q , desde azul (menor valor de Q , que representa formas más abiertas), pasando por naranja, hasta amarillo (elipsoides oblatos). El tamaño representa la distancia aparente estrella–ápex R'_0/R_0 .

para inclinaciones mayores, la separación aparente se incrementa cada vez más rápido para cuádricas abiertas ($Q \leq 0$), mientras que para los elipsoides la separación es cada vez más lenta e incluso puede decrecer con inclinación.

De manera complementaria en la figura 2.10 mostramos una visión complementaria del análisis de la forma aparente con la inclinación. En esta figura se toman “capturas” de (Π', Λ') en intervalos regulares de $\sin i$. Los valores de la planitud y alatud intrínseca están uniformemente distribuidos en los intervalos $\Pi = [0,5,4,5]$ y $\Lambda = [0,5,4,5]$, lo que nos da un cuadrado uniformemente distribuido de valores cuando $|i| = 0$, y que se va distorsionando conforme $|i|$ se incrementa. La escala de color represen-

ta el parámetro Q , incrementándose dicho parámetro desde el azul hasta el amarillo, pasando por el naranja, mientras que el tamaño del punto es proporcional a R'_0/R_0 . Se puede observar que todos los puntos tienden a la línea $\Pi' = \Lambda'$ a altas inclinaciones, y que los puntos azules quedan fuera del rango de la gráfica. Esto es porque a altas inclinaciones, para las formas muy abiertas ya no existe la línea tangente a la línea de visión. De hecho, la región verde sombreada es la región para la cual aun existe la línea de visión para cada inclinación y se hace cada vez más pequeña conforme la inclinación aumenta. Esta figura es meramente cualitativa, puesto que no hay razón para esperar una distribución uniforme de planitud y alatud (en el siguiente capítulo encontramos que en el modelo de capa delgada no encontramos formas cuyo parámetro Q sea mayor a 1, por ejemplo).

Capítulo 3

Modelo de Capa Delgada

Un ejemplo más realista para la forma de los choques de proa proviene de modelos hidrodinámicos en estado estacionario de la interacción de flujos hipersónicos en el límite de capa delgada. Ejemplos clásicos son la interacción entre dos vientos de Canto et al. (1996) (CRW de aquí en adelante) y la interacción entre un viento con una corriente plano-paralela (Wilkin, 1996).

3.1. Cantidades conservadas en un flujo hipersónico de capa delgada

Consideramos dos flujos hipersónicos, no acelerados que forman una capa estacionaria delgada formada por dos choques radiativos separados por una discontinuidad de contacto. El sistema tiene geometría cilíndrica y los vientos no tienen velocidad azimutal. Bajo estos términos, describimos la posición de la capa delgada como $R(\theta)$, donde R es el radio de la capa medida a partir de la posición del origen del viento con menor momento y θ es el ángulo polar. Asumimos que el gas chocado está bien mezclado, esto implica que tiene una sola velocidad pos-choque dada por:

$$\vec{v} = v_r \hat{r} + v_z \hat{z} \quad (3.1)$$

Donde el eje de simetría del sistema es paralelo a \hat{z} , y \hat{r} es el radio cilíndrico. Definimos $\dot{M}(\theta)$, $\vec{\Pi}(\theta)$ y $\vec{J}(\theta)$ como la tasa de pérdida de masa, la tasa de momento y la tasa de momento angular, respectivamente, de la capa delgada integradas desde $\theta = 0$ hasta θ . Éstas se calculan de la siguiente manera:

$$\vec{\Pi}(\theta) = \dot{\Pi}_r(\theta)\hat{r} + \dot{\Pi}_z(\theta)\hat{z} = \dot{M}(v_r\hat{r} + v_z\hat{z}) \quad (3.2)$$

$$\vec{J}(\theta) = \vec{R}(\theta) \times \vec{\Pi}(\theta) \quad (3.3)$$

$$\dot{M}(\theta) = \dot{M}_w(\theta) + \dot{M}_{w1} \quad (3.4)$$

Donde $\vec{R}(\theta) \equiv R(\theta) \sin \theta \hat{r} + R(\theta) \cos \theta \hat{z}$. Resolviendo el producto cruz y tomando su magnitud encontramos que:

$$\vec{J}(\theta) = \dot{M}(\theta)R(\theta)v_\theta \quad (3.5)$$

$$\text{donde : } v_\theta = v_r \cos \theta - v_z \sin \theta \quad (3.6)$$

Por otro lado, al asumir estado estacionario, necesitamos que la tasa de pérdida de masa, la tasa de momento y la tasa de momento angular de la capa delgada sean iguales a aquellas inyectadas por los dos vientos. Entonces definimos estas cantidades como \dot{M}_w , $\dot{\Pi}_{wr}$, $\dot{\Pi}_{wz}$ y \dot{J}_w para el viento con menor momento, y para el otro viento se utiliza la misma notación solo que utilizando el subíndice “w1”. De esta forma tenemos que:

$$\dot{\Pi}_r(\theta)\hat{r} + \dot{\Pi}_z(\theta)\hat{z} = [\dot{\Pi}_{wr}(\theta) + \dot{\Pi}_{wr1}(\theta)]\hat{r} + [\dot{\Pi}_{wz}(\theta) + \dot{\Pi}_{wz1}(\theta)]\hat{z} \quad (3.7)$$

$$\vec{J} = \dot{J}_w(\theta) + \dot{J}_{w1}(\theta) \quad (3.8)$$

$$\dot{M}(\theta) = \dot{M}_w(\theta) + \dot{M}_{w1}(\theta) \quad (3.9)$$

Combinando las ecuaciones (3.2, 3.4, 3.5, 3.7-3.9) encontramos que:

$$\dot{M}(\theta)[v_r\hat{r} + v_z\hat{z}] = (\dot{\Pi}_{wr}(\theta) + \dot{\Pi}_{wr1}(\theta))\hat{r} + (\dot{\Pi}_{wz}(\theta) + \dot{\Pi}_{wz1}(\theta))\hat{z} \quad (3.10)$$

$$\dot{M}(\theta)v_\theta R(\theta) = \dot{J}_w(\theta) + \dot{J}_{w1}(\theta) \quad (3.11)$$

Y finalmente combinando con la ecuación (3.6) resolvemos para $R(\theta)$:

$$R(\theta) = \frac{J_w(\theta) + J_{w1}(\theta)}{\left(\dot{\Pi}_{wr}(\theta) + \dot{\Pi}_{wr1}(\theta)\right) \cos \theta - \left(\dot{\Pi}_{wz}(\theta) + \dot{\Pi}_{wz1}(\theta)\right) \sin \theta} \quad (3.12)$$

3.2. Problema de Interacción de Dos Vientos

Aplicamos el formalismo ya mencionado para la interacción de dos vientos radiales. El viento con menor momento se localiza en el origen, y su densidad a radio fijo varía con el ángulo polar como una ley de potencias (figura 2.1), o bien, un viento interno con densidad constante e isotrópica:

$$n_{An}(\theta) = \begin{cases} n_0 \cos^k \theta & \text{si } \theta \leq 90^\circ \\ 0 & \text{si } \theta > 90^\circ \end{cases} \quad (3.13)$$

$$n_C = n_0 \quad (3.14)$$

Donde el índice k indica el grado de anisotropía del viento “interno”.

Cuando la densidad del viento está dada por la ecuación (3.14) denominamos a los choques resultantes como “cantoides”, por Canto et al. (1996), mientras que si la densidad está dada por (3.13) entonces los denominamos “Ancantoides”. Un caso particularmente interesantes son el viento para un prolyd (Henney & Arthur, 1998), donde ($k = 1/2$). Por el momento restringimos al viento “externo” como isotrópico. El problema se muestra de manera esquemática en la figura 2.2.

Utilizando las ecuaciones (3.13, 3.14) encontramos que la tasa de pérdida de masa está dada por:

$$\dot{M}_w = \int_0^\theta \int_0^{2\pi} \rho_w v_w r_0^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \quad (3.15)$$

Donde v_w es la velocidad del viento intenso, $\rho_w = n\bar{m}$ es su densidad, n se obtiene de las ecuaciones (3.13), \bar{m} es la masa promedio de las partículas del viento y r_0 es el radio del viento al cual se alcanza la velocidad terminal v_w . Para un prolyd consideramos que dicho radio es el del frente de ionización.

Resolviendo (3.15) para vientos con densidades dadas por (3.13, 3.14), encontramos que:

$$\dot{M}_w = \dot{M}_w^0 \begin{cases} \left(1 - \cos^k \theta\right) & \text{Ancantoides} \\ \frac{1}{2} (1 - \cos \theta) & \text{Cantoides} \end{cases} \quad (3.16)$$

Donde:

$$\dot{M}_w^0 = \begin{cases} \frac{2\pi}{k+1} \bar{m} n_o v_w r_0^2 & \text{Ancantoides} \\ 4\pi \bar{m} n_o v_w r_0^2 & \text{Cantoides} \end{cases} \quad (3.17)$$

Con esto, obtenemos las tasas de momento y momento angular. Para los choques cantoides, los resultados corresponden a las ecuaciones (9-11) de CRW, sin embargo, para los choques ancantoides, las tasas de momento (axial y radial) y momento angular están dados por:

$$\dot{\Pi}_{wz} = \int_0^{\min(\theta, \pi/2)} v_w \cos \theta \, d\dot{M}_w = \frac{v_w \dot{M}_w^0}{2(k+2)} \max\left(1 - \cos^{k+2} \theta, 1\right) \quad (3.18)$$

$$\dot{\Pi}_{wr} = \int_0^{\min(\theta, \pi/2)} v_w \sin \theta \, d\dot{M}_w = \frac{1}{2} \dot{M}_w^0 v_w I_k(\theta) \quad (3.19)$$

$$\dot{J}_w = \int_0^{\min(\theta, \pi/2)} |\vec{R} \times \vec{v}_w| d\dot{M}_w = 0 \quad (3.20)$$

Donde:

$$I_k(\theta) = \int_0^{\min(\theta, \pi/2)} \cos^k \theta \sin^2 \theta \, d\theta \quad (3.21)$$

Esta última integral tiene una solución analítica en términos de una función hipergeométrica de la forma ${}_2F_1\left(-\frac{1}{2}; \frac{1+k}{2}; \frac{3+k}{2}; \cos^2 \theta\right)$. En el caso particular $k = 1/2$, este resultado se “simplifica” a una integral de segundo tipo de la forma $E\left(\frac{\theta}{2}|2\right)$, pero es más sencillo calcularla de manera numérica. La tasa de momento angular para el viento interior es cero debido a que éste se mide respecto al origen, donde se localiza la fuente con menor momento. En este punto los vectores de posición y velocidad para un valor de θ dado son paralelos.

Para el viento exterior utilizamos las ecuaciones (12-15) y (19-22) de CRW sin cambiar, pero las incluimos en las siguientes secciones por completez.

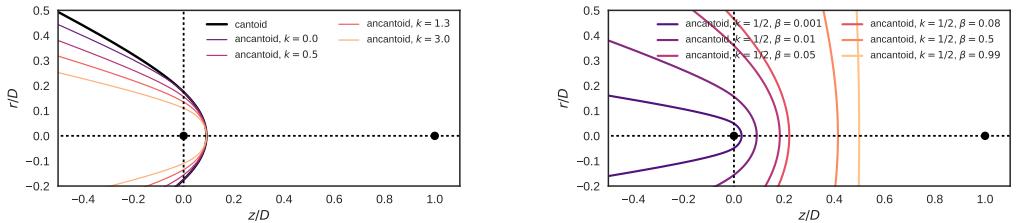


Figura 3.1: Forma de choques de proa de vientos en interacción. Las coordenadas están normalizadas con D , la distancia entre las fuentes de los vientos. La fuente del viento más débil se localiza en el origen $(0, 0)$, mientras que la otra fuente se localiza en $(1, 0)$, ambas marcadas con puntos negros. En (a) los choques de proa mostrados tienen un valor del parámetro $\beta = 0,01$ fijo, mientras que el índice de anisotropía k varía desde 0 hasta 3, mostrados en escala de colores verdes. El choque cantoide con $\beta = 0,01$ se muestra en negro. Nótese que el choque ancantóide con $k = 0$ es más cerrado en las alas que el tipo cantoide, debido a que en los choques ancantoides la densidad del viento cae a cero cuando $\theta \geq 90^\circ$, mientras que en los cantooides la densidad del viento es constante para toda θ . En (b) el parámetro de anisotropía k es fijo con valor de $1/2$, mientras que el parámetro β varía desde 10^{-3} hasta $0,99$. La distancia al ápex R_0 se incrementa conforme β crece, llegando al valor asintótico de $R_0/D = 0,5$ cuando $\beta \rightarrow 1$. Lo mismo sucede con el radio de curvatura y R_{90} . Algo notable es que en los choques ancantoides aun en el caso límite $\beta = 1$, la forma del choque también es curva, debido a que la densidad del viento interior cae con θ y fuera del eje de simetría el momento del viento exterior es mayor.

3.2.1. Interacción con un viento esférico isotrópico

En este caso tomamos como variable independiente al ángulo polar medido a partir de la posición de la fuente del viento externo, denotado por θ_1 . De esta forma las tasas de pérdida de masa, momento y momento angular quedan como sigue:

$$\dot{M}_{w1} = \frac{M_{w1}^0}{2} (1 - \cos \theta_1) \quad (3.22)$$

$$\dot{\Pi}_{wz1} = -\frac{v_{w1} \dot{M}_{w1}^0}{4} \sin^2 \theta_1 \quad (3.23)$$

$$\dot{\Pi}_{wr1} = \frac{v_{w1} \dot{M}_{w1}^0}{4} (\theta_1 - \sin \theta_1 \cos \theta_1) \quad (3.24)$$

$$\dot{J}_{w1} = \int_0^{\theta_1} R(\theta) v_{w1} \sin(\pi - \theta - \theta_1) d\dot{M}_{w1} \quad (3.25)$$

Utilizando la ley de los senos (ver figura 2.2), la ecuación (3.25) queda como sigue:

$$\dot{J}_{w1} = D v_{w1} \int_0^{\theta_1} \sin \theta_1 d\dot{M}_{w1} = \frac{v_{w1} \dot{M}_{w1}^0}{4} (\theta_1 - \sin \theta_1 \cos \theta_1) D \quad (3.26)$$

Por otro lado, de la figura 2.2, podemos deducir la siguiente relación geométrica entre $R(\theta)$, θ y θ_1 :

$$\frac{R(\theta)}{D} = \frac{\sin \theta_1}{\sin(\theta + \theta_1)} \quad (3.27)$$

Combinando las ecuaciones (3.12, 3.18 - 3.26, 3.27) obtenemos una ecuación implícita que nos indica la dependencia de θ_1 con θ :

$$\theta_1 \cot \theta_1 - 1 = 2\beta I_k(\theta) \cot \theta - \frac{2\beta}{k+2} (1 - \cos^{k+2} \theta) \quad (3.28)$$

Donde en este caso, la condición de equilibrio de presiones RAM implica que la tasa de momentos β ahora está definida como sigue:

$$\beta \dot{M}_{w1}^0 v_{w1} = 2(k+1) \dot{M}_w^0 v_w \quad (3.29)$$

Sin embargo, (3.28) solo aplica en el rango $0 < \theta \leq \pi/2$. Cuando $\theta > \pi/2$ la relación entre θ y θ_1 es:

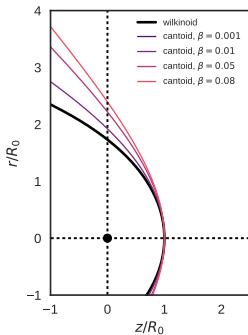


Figura 3.2: Forma de choques cantoides y el choque wilkinoide. Las coordenadas están normalizadas con la distancia al ápex R_0 . El choque wilkinoide se muestra en negro y los choques cantoides en escala de azul, con β variando desde 10^{-3} hasta 0.08. Nótese que el choque wilkinoide se comporta como el caso asintótico de los choques cantoides cuando $\beta \rightarrow 0$.

$$\theta_1 \cot \theta_1 - 1 = 2\beta \left(I_k(\pi/2) \cot \theta - \frac{1}{k+2} \right) \quad (3.30)$$

Donde:

$$I_k(\pi/2) = \frac{\pi}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{1+k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{4+k}{2}\right)} \quad (3.31)$$

y Γ es la función Gamma usual.

3.2.2. Interacción de un viento esférico isotrópico con un viento plano-paralelo (Choques Wilkinoides)

En este caso las tasas de pérdida de masa, de momento y momento angular del viento plano-paralelo con velocidad v_a y densidad uniforme ρ_a

quedan como sigue:

$$\dot{M}_{w1} = \pi \rho_a v_a R^2 \sin^2 \theta \quad (3.32)$$

$$\dot{\Pi}_{wz1} = -\pi \rho_a v_a^2 R^2 \sin^2 \theta \quad (3.33)$$

$$\dot{\Pi}_{wr1} = 0 \quad (3.34)$$

$$\dot{J}_{w1} = \int_0^r r' v_a \sin \theta \, d\dot{M}_{w1} = \frac{2}{3} \pi \rho_a v_a^2 R^3 \sin^3 \theta \quad (3.35)$$

Sustituyendo estas ecuaciones en (3.12) junto con (3.16-3.20) para vientos tipo cantoides ($k = 0$) obtenemos lo siguiente:

$$R = \frac{\frac{2}{3} \pi \rho_a v_a R^3 \sin^3 \theta}{\frac{\dot{M}_w^0 v_w}{4} (\theta - \sin \theta \cos \theta) \cos \theta - \left(\frac{\dot{M}_w^0 v_w}{4} \sin^2 \theta - \pi \rho_a v_a^2 R^2 \sin^2 \theta \right) \sin \theta} \quad (3.36)$$

La condición de equilibrio de presión en este caso nos lleva a la siguiente relación:

$$\frac{\dot{M}_w^0 v_w}{4 \pi R_0^2} = \rho_a v_a^2 \quad (3.37)$$

Por tanto:

$$R/R_0 = \frac{\frac{2}{3} (R/R_0)^3 \sin^3 \theta}{(\theta - \sin \theta \cos \theta) \cos \theta - \left(\sin^2 \theta - (R/R_0)^2 \sin^2 \theta \right) \sin \theta} \quad (3.38)$$

Resolviendo para R/R_0 encontramos que:

$$R = R_0 [\csc^2 \theta (1 - \theta \cot \theta)]^{1/2} \quad (3.39)$$

3.3. Forma “verdadera” de los choques cantoides, ancantoides y wilkinoides

Para los tres tipos de formas de choques de proa que utilizamos en este trabajo (cantoides, ancantoides y wilkinoides), calculamos su correspondiente alatud y planitud. Para los choques ancantoides obtenemos lo siguiente. El procedimiento detallado se puede consultar en el apéndice D:

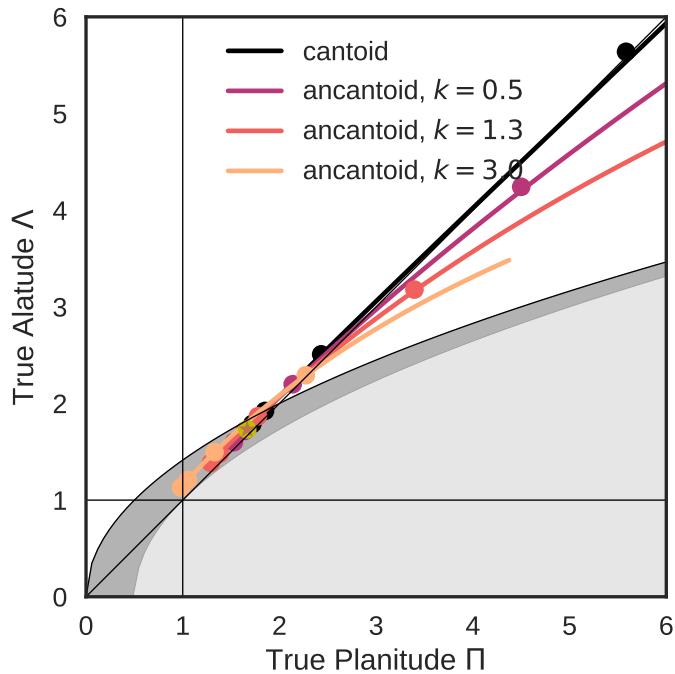


Figura 3.3: Forma verdadera de los choques cantoides, ancantoides y wilkinoides. En cada línea, β varía en el rango $[0, 1]$, y los parámetros (Π, Λ) fueron calculados de acuerdo a los resultados del apéndice D. Los círculos del color de las líneas representan valores particulares de β : 10^{-3} , 10^{-2} , 0.1 y 0.5, y con la diferencia de que el coeficiente de segundo orden de la ecuación 3.41 para la planitud Π fue obtenido de manera numérica con el fin de utilizar este método para encontrar la planitud aparente con la ecuación 2.37

$$\Lambda = \frac{(3\xi_k)^{1/2} (1 + \beta^{1/2})}{(1 + \frac{1}{5}\xi_k\beta)^{1/2} (1 - \xi_k\beta)} \quad (3.40)$$

$$\Pi = \left| 1 - 2 \frac{R_{\theta\theta,0}}{R_0} \right|^{-1} \quad (3.41)$$

$$\text{Donde : } R_{\theta\theta,0} = \frac{C_{k\beta}}{1 + \beta^{1/2}} + \frac{1 + 2\beta^{1/2}}{3} \quad (3.42)$$

Donde $\xi_k \equiv \frac{2}{k+2}$ y $C_{k\beta}$ son parámetros que se introduce por conveniencia en el apéndice D.

Para los choques cantoides la planitud y alatud son equivalentes al resultado del choque ancantoide con $k = 0$, pero se muestran a continuación por completez:

$$\Pi = \frac{5}{3(1 - \beta^{1/2})} \quad (3.43)$$

$$\Lambda = \frac{\sqrt{3}}{(1 + \frac{1}{5}\beta)^{1/2} (1 - \beta^{1/2})} \quad (3.44)$$

Por último, el radio en el ápex, la planitud y alatud para los choques wilkiniodes es:

$$R_0 = \left(\frac{\dot{M}_w^0 v_w}{4\pi\rho_a v_a^2} \right)^{1/2} \quad (3.45)$$

$$\Lambda = \sqrt{3} \quad (3.46)$$

$$\Pi = \frac{5}{3} \quad (3.47)$$

R_0 en este caso se obtiene directamente de la ecuación (3.37), mientras que Π y Λ se obtienen tomando el límite $\beta \rightarrow 0$ en las ecuaciones (3.43, 3.44), aunque Λ también puede obtenerse evaluando la ecuación (3.39) en $\theta = \pi/2$.

En la figura 3.3 se muestran los resultados de las ecuaciones (3.40-3.47) en forma de diagrama $\Lambda - \Pi$. Los choques tipo cantoides ocupan en este diagrama una curva, donde cada punto de ésta representa un valor distinto de β , cuyo rango es $(0, 1)$, y está representada en color negro. Los choques ancantoides ocupan diferentes curvas, una por cada valor del índice de anisotropía k , y se representan por curvas con diferente tonalidad de verde, mientras que los choques wilkinoides ocupan un solo punto en este diagrama, representado por el círculo amarillo.

La tendencia general de los choques cantoides y ancantoides es que conforme se incrementan β y k , también se vuelven más abiertos y más planos en el aex (Π y Λ incrementan), siendo el choque tipo cantoide el más abierto a un valor de β dado. Como ya hemos mencionado, el choque tipo cantoide y el tipo ancantoide con $k = 0$ son muy similares, excepto que el choque cantoide es más abierto en las alas ($\theta > 90^\circ$) debido al soporte que da hacia atrás el viento interior. Sin embargo, como su comportamiento es igual para $\theta \leq 90^\circ$, por tanto, no hay diferencia entre estos dos tipos de choques en este diagrama. Todos los choques se encuentran ya sea en la región de esferoides prolatos (región gris oscura) o hiperboloides (región clara), ninguno en la región de esferoides oblatos (ver figura 2.9a). Los choques tipo esferoide prolato son los que tienen valores de β pequeños, y la transición hacia hiperboloide se da cunado $\beta \sim 0,01$ para los choques cantoides y ancantoides con parámetro k pequeño. Esta transición a los hiperboloides se recorre para β mayor conforme el parámetro k se incrementa. Esto contrasta con el caso de las cuádricas puras, que siempre permanecen en la misma región, pero esto se debe a que las formas de los choques de proa son más complejas que una cuádrica de revolución: mientras que la forma de la “cabeza” del choque (la región cercana al ápex) puede aproximarse bien con una variedad de cuádricas, la forma de las alas lejanas siempre es más parecida a un hiperboloide (ver figura). El choque wilkinode se ubica en el límite $\beta \rightarrow 0$ de la curva de los choques cantoides, como era de esperarse, y se ubica en la región de esferoides prolatos. Otro detalle que puede apreciarse en esta figura es que todas las curvas (al menos para β pequeña) se aglomeran cerca de la diagonal $\Pi \simeq \Lambda$ con la tendencia de que para anisotropía grande, $\Lambda > \Pi$, existe ena región donde hay una degeneración entre β y k que se rompe para β grande.

Todo esto funciona para la forma verdadera de los choques de proa, que corresponde a cuando son vistos de canto ($i = 0$). La alatud y planitud verdaderas no toman en cuenta el comportamiento de las alas lejanas ($\theta > 90^\circ$). De hecho, para un choque dado, hay dos formas de calcular el ángulo de las cuádricas θ_Q . Una es a partir de los parámetros (Π, Λ) utilizando las ecuaciones (2.14, 2.15, 2.22):

$$\theta_Q^{\text{head}} = \operatorname{sgn}(2\Pi - \Lambda^2) \tan^{-1} |2\Pi - \Lambda^2| \quad (3.48)$$

La segunda manera es a partir de estimar el ángulo asintótico θ_∞ :

$$\theta_Q^{\text{tail}} = \theta_\infty - \pi \quad (3.49)$$

Donde θ_∞ puede obtenerse a partir de la ecuación (28) de CRW para los choques cantoides:

$$\theta_\infty - \tan \theta_\infty = \frac{\pi}{1 - \beta} \quad (3.50)$$

Mientras que para los choques ancantoides utilizamos la ecuación (??) utilizando la condición $\theta_\infty + \theta_{1\infty} = \pi$:

$$\theta_\infty - \left(\frac{k + 2(1 - \beta)}{k + 2} \right) \tan \theta_\infty = \pi + 2\beta I_k(\pi/2) \quad (3.51)$$

Como las soluciones a la forma de los choques de proa, tanto cantoides como ancantoides solo ajustan parcialmente a una cuádrica de revolución, entonces $\theta_Q^{\text{head}} \neq \theta_Q^{\text{tail}}$. Esta discrepancia se vuelve relevante al momento de obtener la forma aparente, ya que en este caso la región del choque que es tangente a la línea de visión se aleja del ápex y se acerca a las alas lejanas conforme se incrementa la inclinación.

3.4. Obtención de la Forma Aparente

A continuación aplicamos el formalismo desarrollado en la sección §2.4 a las formas de los choques de proa obtenidos en este capítulo para obtener tanto la forma aparente como la planitud y alatud aparentes.

En la figura 3.4 mostramos la forma aparente de choques tipo cantoídes y wilkinoides, y mostramos como referencia un parabolóide confocal cuya forma aparente no cambia con la inclinación (ver §2.4.4), mientras que la figura 3.5 muestra la forma aparente de choques ancantoídes.

Se muestra una tendencia general en donde las alas son sistemáticamente más abiertas para altas inclinaciones. Sin embargo, en el caso de los choques Wilkinoides se muestra el comportamiento opuesto, aunque los cambios son muy sutiles. El caso de la figura 3.5a, donde se muestra un choque tipo ancantoíde con $\beta = 0,005$ y $k = 1/2$ se observa que para inclinaciones menores a 60° , las alas cercanas ($\theta \sim 90^\circ$) se cierran sutilmente, y luego se abren más para inclinaciones mayores.

En las figuras 3.6 y 3.7 mostramos la solución a las ecuaciones (2.33, refeq:R0p) para el modelo de capa delgada, junto con el factor de escalamiento R'_0/R_0 en función de la inclinación. En estas figuras se observa que el radio aparente en el ápex siempre aumenta con la inclinación, mostrando un crecimiento más rápido para choques más abiertos, pero un incremento mayor para choques más cerrados; ésto debido a que en los choques más cerrados la inclinación máxima donde aun existe una línea tangente es mayor.

Las soluciones a las ecuaciones (2.36, 2.35) para el modelo de capa delgada se muestran en las figuras 3.8, 3.9. Se observa que la alatud aparente se incrementa abruptamente cuando la inclinación se aproxima a la inclinación máxima, excepto en el caso wilkinoid, donde la alatud disminuye con inclinación muy lentamente.

La planitud aparente se obtuvo a partir de realizar ajustes polinómicos en θ^2 a la forma aparente $R'(\theta')$ para calcular el coeficiente de segundo orden $R'_{\theta'\theta',0}$ y posteriormente utilizar las ecuaciones (2.37, 2.34).

Su comportamiento con inclinación se muestra en la figura 3.10. Aquí se observa un comportamiento similar al de la alatud aparente; sin embargo, en la figura 3.10b, donde el parámetro de anisotropía es $k = 1/2$, se observa una pequeña caída en la planitud justo antes de llegar a la inclinación máxima.

Por último, mostramos en la figura 3.11 los diagramas $\Lambda' - \Pi'$ para diferentes tipos de choques de proa. Cada curva representa un choque de proa con parámetros (β, k) fijos donde la inclinación varía de un punto a otro a lo largo de la curva. El comportamiento de estos choques de proa

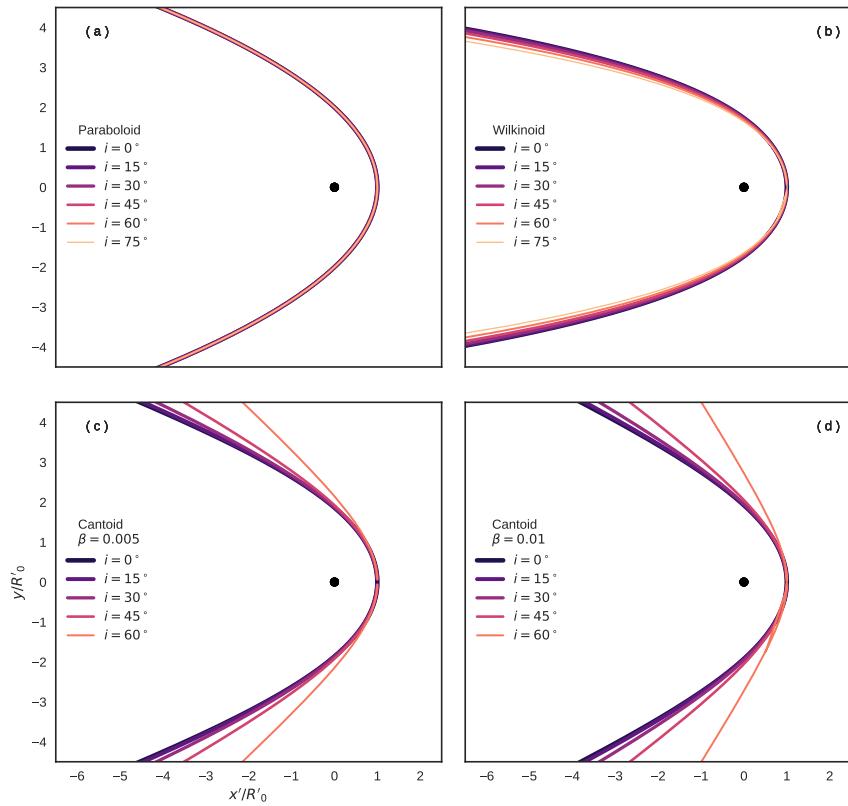


Figura 3.4: Forma aparente de diferentes choques de proa en intervalos de inclinación de 15° : (a) Paraboloid confocal. (b) Wilkinoide. (c) Cantoide $\beta = 0,005$. (d) Cantoide $\beta = 0,01$

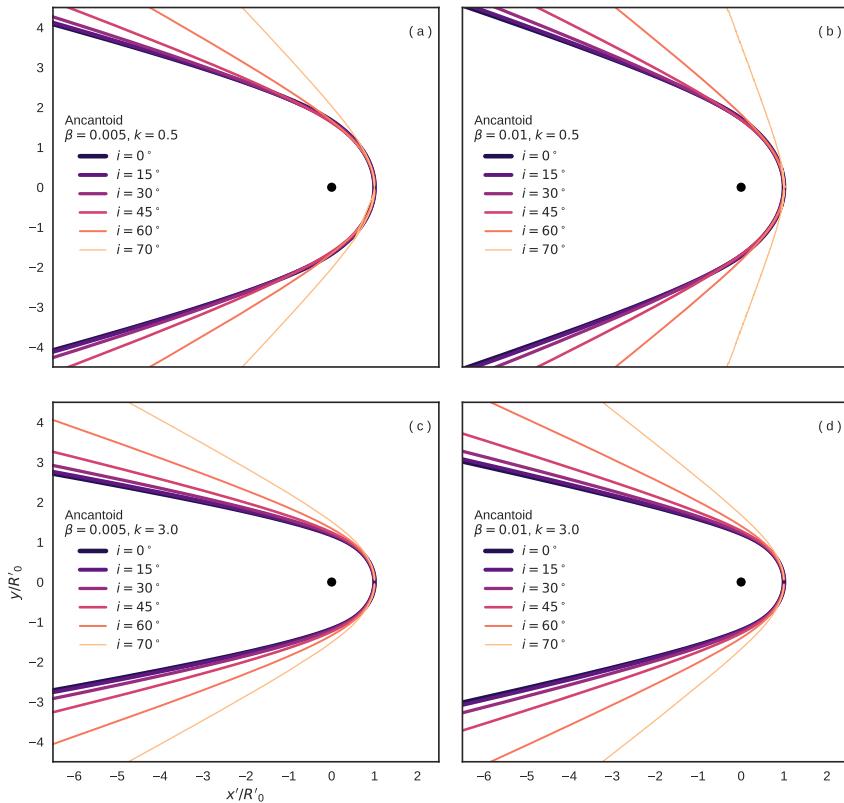


Figura 3.5: Extensión de la figura 3.4 para choques de proa no isotrópicos (ancantoides): (a) $\beta = 0,005, k = 1/2$. (b) $\beta = 0,01, k = 1/2$. (c) $\beta = 0,005, k = 3$. (d) $\beta = 0,01, k = 3$

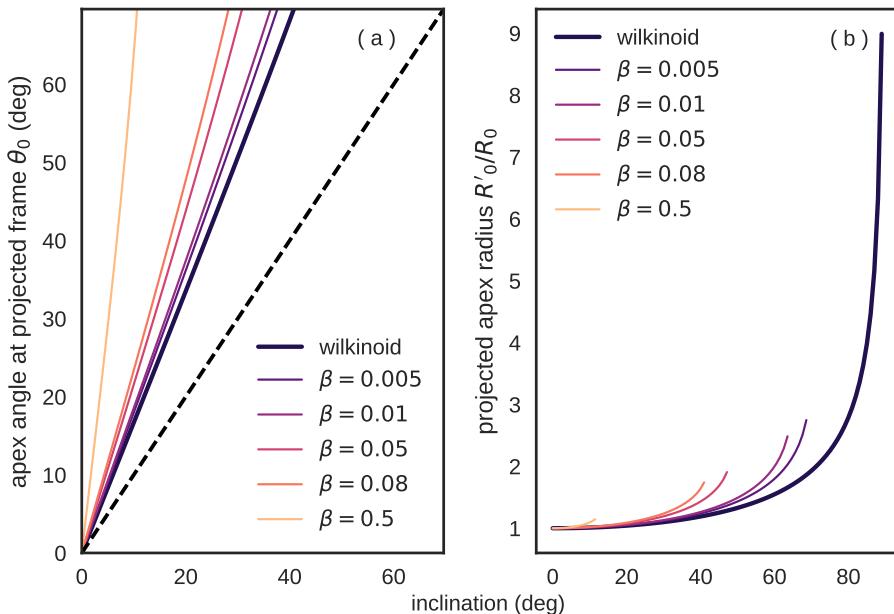


Figura 3.6: (a) Soluciones a la ecuación (2.33) en función de la inclinación para choques de proa del modelo de capa delgada y viento interior isotrópico (cantoídes y wilkinoides). (b) Soluciones a la ecuación (2.34) en función de la inclinación normalizadas con R_0 .

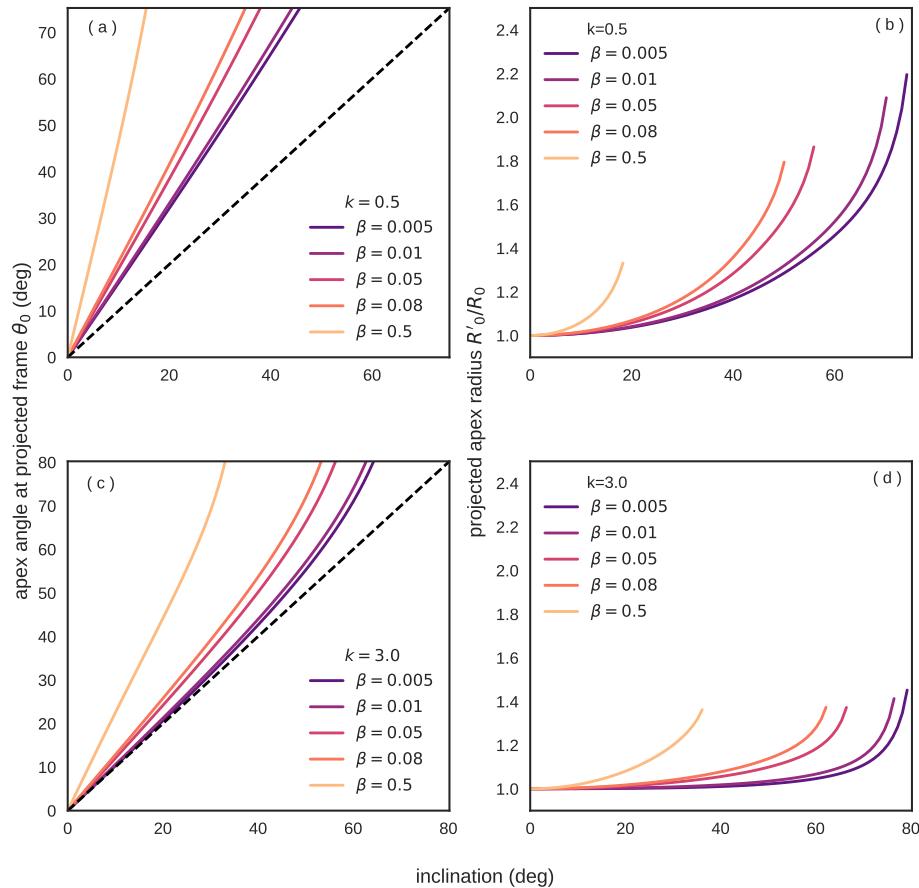


Figura 3.7: (a) Soluciones a la ecuación (2.33) en función de la inclinación para choques de proa del modelo de capa delgada y viento interior anisotrópico (ancantoides) para dos índices de anisotropía: $k = 1/2$ (arriba) y $k = 3$ (abajo). (b) Soluciones a la ecuación (2.34) en función de la inclinación normalizadas con R_0 .

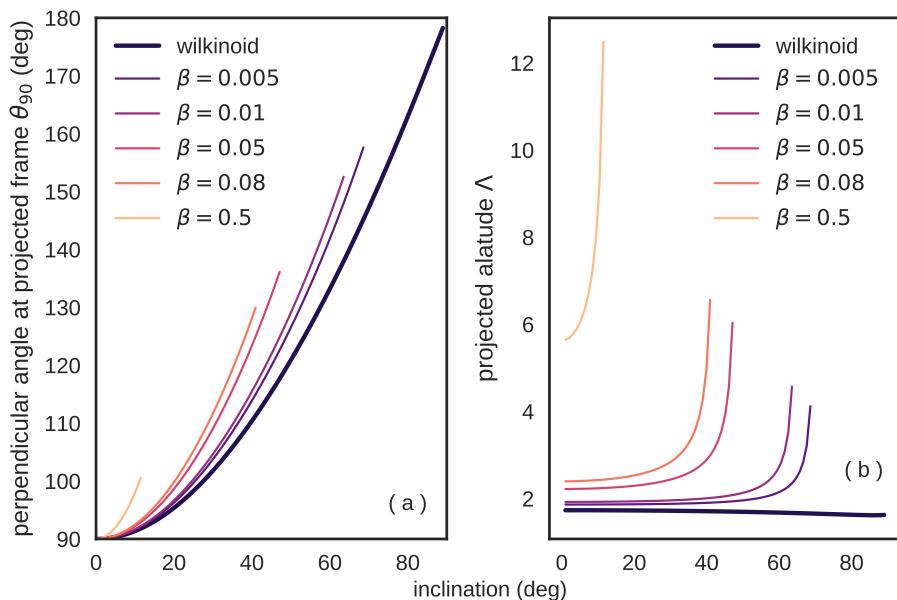


Figura 3.8: (a) Soluciones a la ecuación (2.36) en función de la inclinación para choques de proa del modelo de capa delgada y viento interior isotrópico (cantoídes y wilkinoides). (b) Alatud aparente en función de la inclinación, obtenida a a partir del cociente de las soluciones de las ecuaciones (2.35, ??)

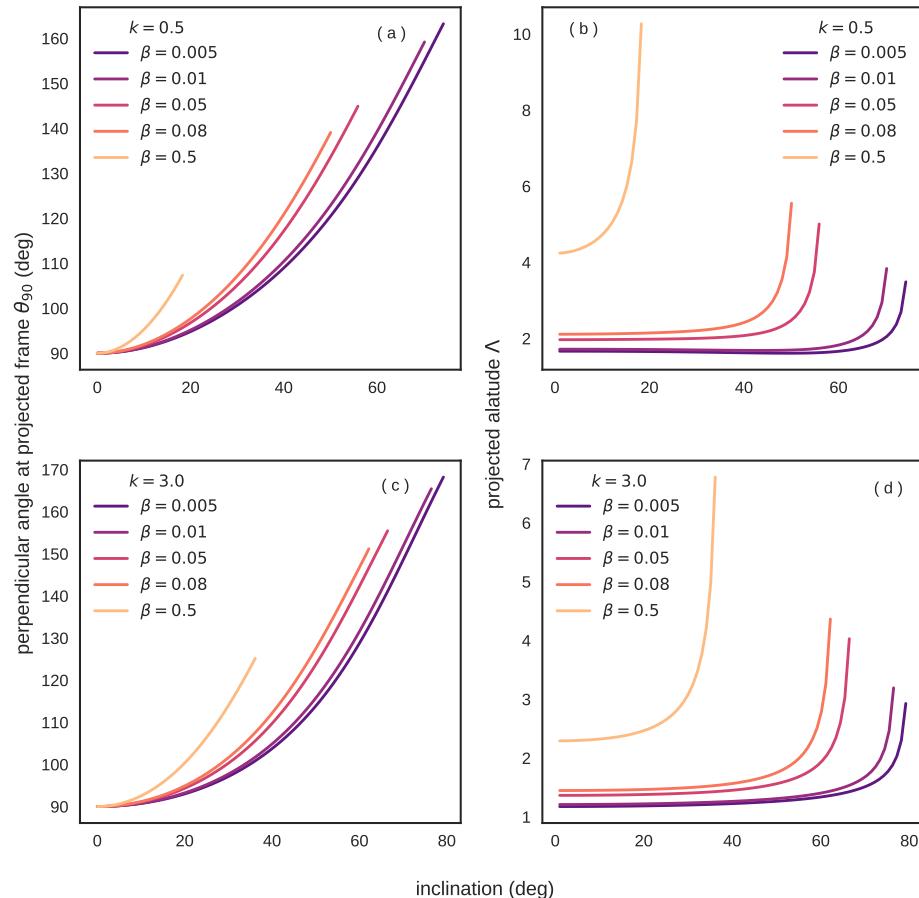


Figura 3.9: (a) Soluciones a la ecuación (2.36) en función de la inclinación para choques de proa del modelo de capa delgada y viento interior anisotrópico (ancantoides) para dos índices de anisotropía: $k = 1/2$ (arriba) y $k = 3$ (abajo). (b) Alatud aparente en función de la inclinación, obtenida a partir del cociente de las soluciones de las ecuaciones (2.35, 2.34)

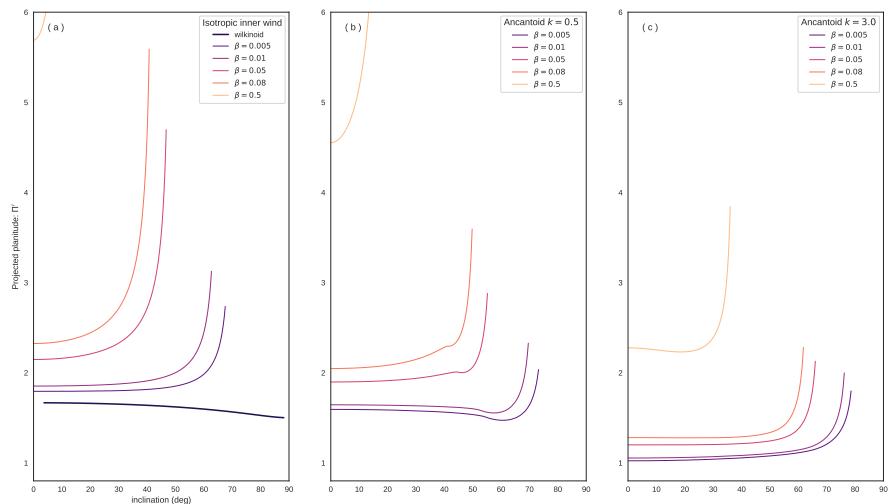


Figura 3.10: Soluciones a la ecuación 2.37 para obtener la planitud aparente en función de la inclinación en el modelo de capa delgada para: (a) viento interno isotrópico (cantoides y wilkinoides) y viento interno anisotrópico (ancantoides) con índice de anisotropía de (b) $k = 1/2$ y (c) $k = 3$.

se diferencia del de las cuádricas de revolución, mostrado en la figura 2.9a. En este caso, las curvas no están confinadas a una sola región: para inclinaciones bajas, la mayoría de las curvas ajustan mejor a la forma de elipsoides proláticos, a excepción de las curvas con parámetro β alto ($\beta \gtrsim 0,01$), mientras que para altas inclinaciones la forma ajusta mejor a hiperboloides. Esto se debe a la tensión que existe entre la forma de la cabeza y de la cola (figura).

La curva del choque wilkinoide se muestra en color blanco, y tiene un comportamiento menos interesante que otras curvas: simplemente se mueve desde $(5/3, \sqrt{3})$ hasta $(3/2, \sqrt{8/3})$. Aunque se ubica en la región de elipsoide prolático, el hecho de que θ_∞ sea de 180° sugiere que la forma de las alas lejanas sea más parecida al de un paraboloide. Pero converge en $(3/2, \sqrt{8/3})$ en vez de en $(2, 2)$ porque las alas lejanas son asintóticamente cúbicas en vez de cuadráticas.

La densidad de marcas a lo largo de una curva nos indican la probabilidad de observar dicha porción de ésta, si asumimos una distribución isotrópica de ángulos de visión. Se puede observar que la densidad de marcas usualmente se concentra al inicio de cada curva, cerca de $i = 0^\circ$, y este efecto se intensifica cuando β es pequeño.

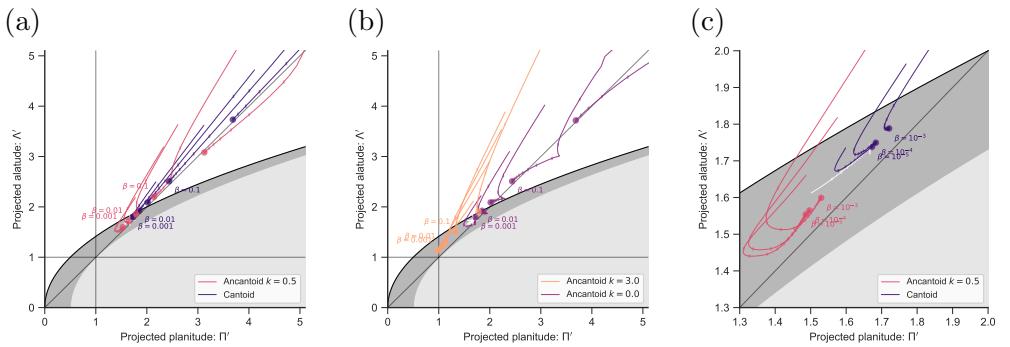


Figura 3.11: Diagramas planitud-ataud para las soluciones del modelo de capa delgada. Los círculos de colores indican la forma intrínseca para cada modelo ($i = 0^\circ$). Las líneas muestran la solución a este mismo modelo en función de la inclinación. Las marcas más pequeñas corresponden a inclinaciones igualmente espaciadas de $|\sin i|$. El modelo wilkinoide se muestra en color blanco. (a) Soluciones para los modelos cantoide (azul) y ancantoide $k = 0.5$ (rojo) para $\beta = [0,001, 0,003, 0,01, 0,03, 0,1, 0,3]$. (b) Soluciones para modelos ancantoides $k = 3$ (naranja) y $k = 0$ (morado). (c) Igual que (a) pero aumentada para mostrar la convergencia de los modelos cantoideos hacia el modelo wilkinoide conforme $\beta \rightarrow 0$ utilizando como referencia $\beta = [10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}]$.

Capítulo 4

Resultados obtenidos para los proplyds “clásicos”

Probamos nuestro modelo descrito en los capítulos anteriores en una muestra de proplyds pertenecientes a la Nebulosa de Orión (ONC) que presentan un choque de proa. En la figura 4.1 se muestran los proplyds que pertenecen a nuestra muestra.

En todos los casos no fue posible medir el radio característico R_{90} debido a que el brillo de la cáscara decae con el ángulo polar θ y no es detectable para ángulos del orden de 60° . Sin embargo, a continuación mostraremos la metodología para obtener la inclinación más probable de cada choque, así como los parámetros del modelo de cada uno de éstos que nos indican su forma intrínseca.

4.1. Metodología para la medición de la forma aparente.

Se utilizaron imágenes en el filtro de [OIII] de la cámara WPC2 del Telescopio Espacial Hubble (HST). Se utilizaron las herramientas del programa DS9 para análisis de imágenes astronómicas para trazar la posición de θ^1 Ori C y de cada uno de los proplyds de la muestra. La posición y la forma de los choques de proa fue trazada con una serie de marcas a lo largo del choque. Las coordenadas de las marcas fueron guardadas

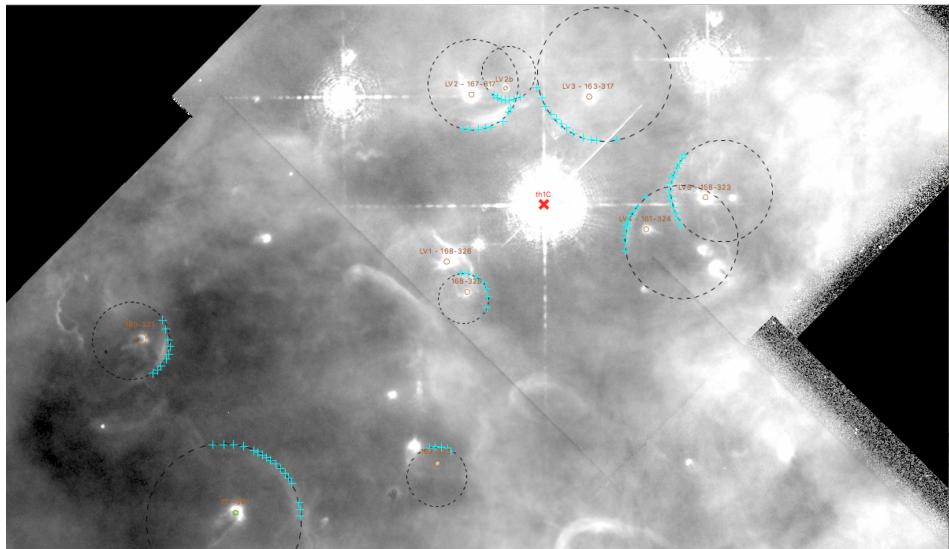


Figura 4.1: Imagen de la parte central de la Nebulosa de Orión donde se ubican los proplyds de nuestra muestra. Las cruces color cyan corresponden a las mediciones de la forma aparente para cada choque de proa. Los círculos amarillos marcan la posición de cada proplyd y la “x” roja corresponde a la posición de la estrella ionizante θ^1 Ori C. Los círculos negros ilustran de manera esquemática el radio de curvatura de cada choque.

en un archivo y luego procesadas para tener las coordenadas del choque en el sistema de referencia del prolyd (Figura 4.1). El radio de curvatura aparente se obtiene haciendo un ajuste de mínimos cuadrados de la forma de un círculo de las mediciones obtenidas. R_0 se obtiene como la distancia mínima entre el prolyd y el ajuste circular dentro del rango de las coordenadas de las mediciones.

4.1.1. Medición de incertidumbres

Para saber qué tan confiables son las coordenadas de las mediciones, se realizó el procedimiento siguiente: Del total de mediciones realizadas para cada prolyd, se crearon varias sub-muestras donde se utilizamos aproximadamente las dos terceras partes de las mediciones, pero dejando un mínimo de cuatro puntos, y se procedió a calcular los radios característicos para cada submuestra, y comprobar qué tanto se desvían estas mediciones de la original. En la figura 4.2 se muestran ejemplos de dichas sub-muestras para algunos prolyds.

4.2. Resultados

Los radios característicos obtenidos para la muestra original y para las submuestras se muestran en la figura 4.3. En cada pánel se utiliza un valor fijo para el parámetro de anisotropía k . De esta figura se pueden encontrar algunas observaciones cualitativas: Los prolyds con planitud mayor, LV4 y LV2b ajustan mejor a modelos donde el parámetro de anisotropía es bajo. Para LV2, por otro lado, su medición principal no ajusta a ningún modelo, pero tiene dos variaciones que se desvían mucho de la medición principal que ajustan a modelos con índice de anisotropía alto. Probablemente la presencia de un jet interfiera con la forma del choque (añadir referencia) pero es una hipótesis que no se puede que va más allá del objetivo de este trabajo. El resto de los prolyds ajusta bien con un parámetro de anisotropía medio ($k \sim 1/2 - 3$). Dependiendo de los parámetros (β, k), la inclinación que se le puede atribuir a cada prolyd en la mayoría de los casos varía entre 15° y 40° .

Con base a este análisis, se resume en la tabla 4.1 los ajustes a los parámetros de los prolyds: inclinación, distancia a θ^1 Ori C intrínseca D y radio

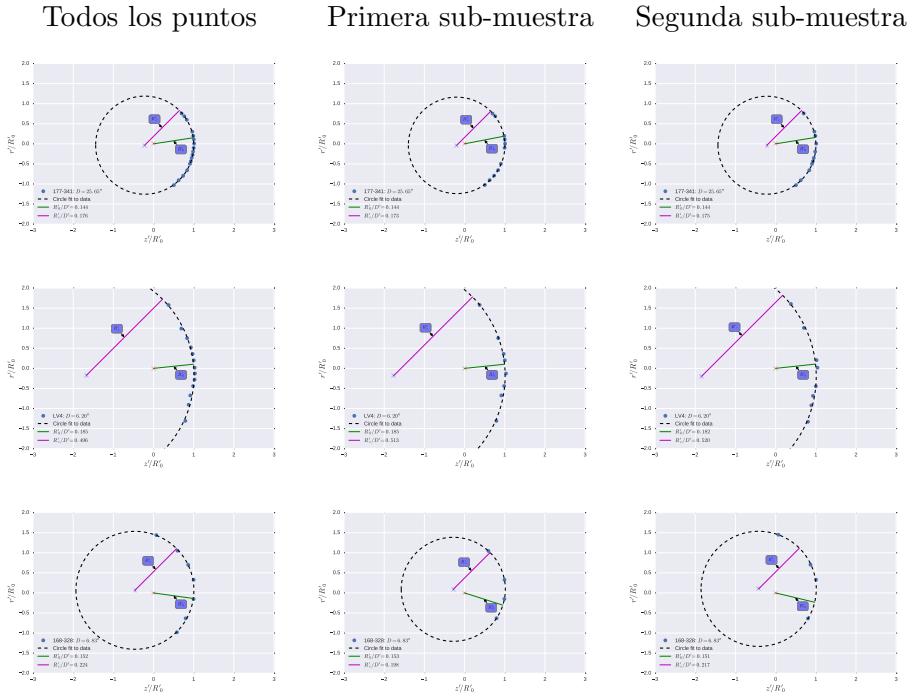


Figura 4.2: Ejemplos de incertidumbres sistemáticas en los ajustes circulares a la forma de los choques para tres fuentes (desde la línea superior hasta la inferior): 177-341, LV4 y 168-328. La columna de la izquierda muestra el ajuste a todos los puntos identificados en el borde de la cáscara, donde el número y el espaciamiento de los puntos es una medida subjetiva de nuestra confianza al trazar el borde de cada cáscara. Las dos columnas restantes muestran ajustes a sub-muestras seleccionadas aleatoriamente que contienen 2/3 partes de los puntos de la muestra original para cada cáscara.

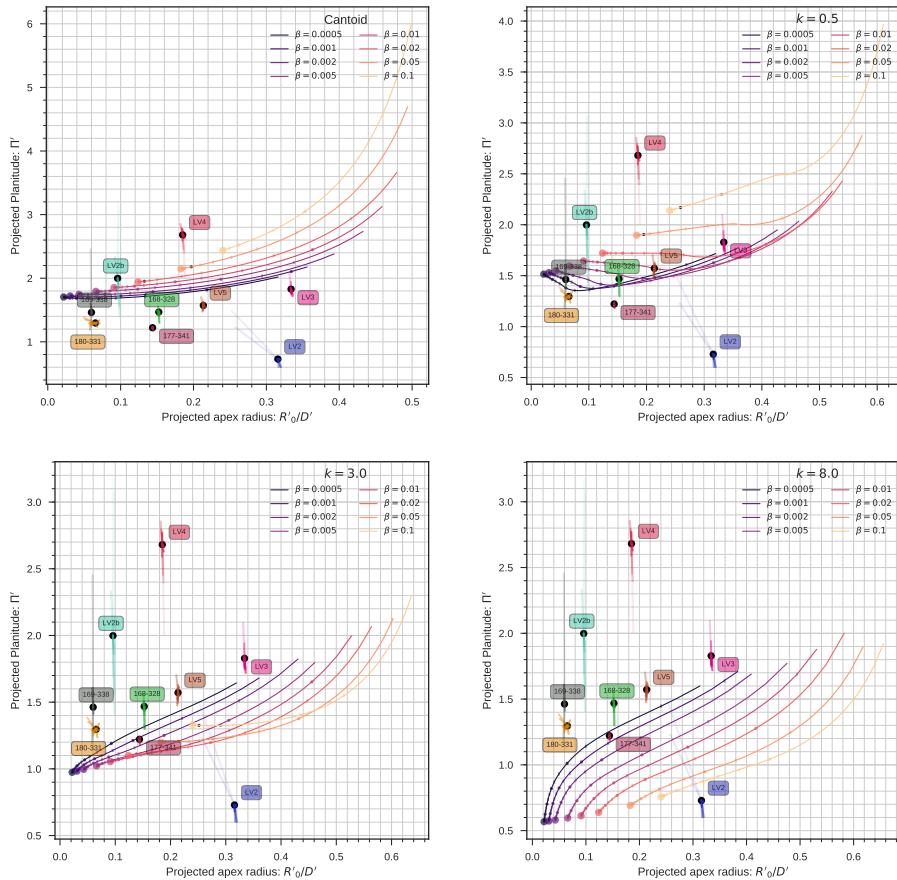


Figura 4.3: Similar a la figura 3.11 pero sustituyendo la alatud aparente por el radio aparente en el áplex R'_0/D' para diferentes grados de anisotropía k , donde en cada pánel se asume que este parámetro es fijo. A lo largo de cada curva el valor del parámetro β es fijo, mientras que la inclinación se incrementa a lo largo de la curva, empezando a partir del círculo grande, donde $i = 0^\circ$. Las marcas circulares pequeñas representan intervalos de 15° , mientras que las marcas más pequeñas representan intervalos de 5° . Los resultados observacionales de los choques de proa para nuestro set de prolyds se muestran con puntos negros, mientras que las mediciones de las sub muestras se muestran con líneas de colores radiales que parten desde la medición ‘‘principal’’. La opacidad de la medición de cada sub muestra es mayor cuanto menor sea la desviación respecto a la medición principal.

del choque en el eje de simetría R_0/D .

Cuadro 4.1: Ajuste a los parámetros de los arcos para los choques de proa de los proplyds

| OW (1) | Nombre (2) | Obsetvado | | | | β (7) |
|-----------|---------------|-------------|-------------------|-------------------------------------|------------------------------------|-------------------|
| | | D' (3) | R'_0/D' (4) | $(R'_c/R'_0)_{\text{shape}}$ (5) | $(R'_c/R'_0)_{\text{flux}}$ (6) | |
| 168-328 | | 6.8 | $0,152 \pm 0,001$ | $1,42 \pm 0,09$ | $1,45 \pm 0,05$ | $0,018 \pm 0,003$ |
| 169-338 | | 16.4 | $0,059 \pm 0,001$ | $1,76 \pm 0,48$ | $1,50 \pm 0,05$ | $0,002 \pm 0,001$ |
| 177-341 | HST1 | 25.6 | $0,144 \pm 0,001$ | $1,21 \pm 0,02$ | $1,25 \pm 0,02$ | $0,018 \pm 0,003$ |
| 180-331 | | 25.1 | $0,061 \pm 0,007$ | $1,30 \pm 0,05$ | $1,27 \pm 0,05$ | $0,003 \pm 0,001$ |
| 167-317 | LV2 | 7.8 | $0,305 \pm 0,025$ | $0,81 \pm 0,28$ | $1,50 \pm 0,1$ | $0,085 \pm 0,015$ |
| | LV2b | 7.2 | $0,097 \pm 0,002$ | $2,00 \pm 0,62$ | $1,63 \pm 0,08$ | $0,008 \pm 0,003$ |
| 163-317 | LV3 | 6.9 | $0,334 \pm 0,002$ | $1,81 \pm 0,12$ | $1,85 \pm 0,15$ | $0,075 \pm 0,025$ |
| 161-324 | LV4 | 6.2 | $0,186 \pm 0,002$ | $2,59 \pm 0,24$ | $2,05 \pm 0,07$ | $0,040 \pm 0,014$ |
| 168-323 | LV5 | 9.6 | $0,213 \pm 0,002$ | $1,57 \pm 0,07$ | $1,60 \pm 0,07$ | $0,055 \pm 0,005$ |

Notes – Col. (1): ID de la fuente (O'Dell & Wen, 1994). Col. (2): Nombre alternativo de la fuente. Col. (3): Distancia proyectada desde θ^1 Ori C, segundos de arco. Col. (4): Radio exterior aparente a lo largo del eje, normalizado con la distancia proyectada, con una incertidumbre de $\pm 1\sigma$, determinado con el ajuste circular descrito en § 4.1. Col. (5): Radio de curvatura aparente, normalizado con el radio a lo largo del eje, con incertidumbres de $\pm 1\sigma$, determinado con el ajuste circular descrito en § 4.1. Col. (6): Igual que Col. (5) pero aplicando el criterio adicional de que el brillo superficial del proplyd obtenido debe coincidir con la predicción teórica. Col. (7): Cociente de momentos entre el viento del proplyd y la estrella O (ver capítulo 3). Col. (8): Parámetro de anisotropía del viento del proplyd. Col. (9): Inclinación respecto al plano del cielo, en grados. Col. (10): Distancia real desde θ^1 Ori C, parsecs. Col. (11): Radio real de la cáscara a lo largo del eje, normalizado con distancia.

Capítulo 5

Conclusiones

Write Conclusions, discussions, etc. here



CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES

Bibliografía

Ballesteros-Paredes J., Hartmann L., Vázquez-Semadeni E., 1999, , 527, 285

Ballesteros-Paredes J., Hartmann L. W., Vázquez-Semadeni E., Heitsch F., Zamora-Avilés M. A., 2011, , 411, 65

Canto J., Raga A. C., Wilkin F. P., 1996, , 469, 729

Churchwell E., Felli M., Wood D. O. S., Massi M., 1987, , 321, 516

Gordon M. A., Churchwell E., 1970, , 9, 307

Hartmann L., Burkert A., 2007, , 654, 988

Hennebelle P., Pérault M., 1999, , 351, 309

Henney W. J., Arthur S. J., 1998, , 116, 322

Johnstone D., Hollenbach D., Bally J., 1998, , 499, 758

Laques P., Vidal J. L., 1979, , 73, 97

Menten K. M., Reid M. J., Forbrich J., Brunthaler A., 2007, , 474, 515

O'Dell C. R., Wen Z., 1994, , 436, 194

O'dell C. R., Wen Z., Hu X., 1993, , 410, 696

Shull J. M., McKee C. F., 1979, , 227, 131

Stahler S. W., Palla F., 2004, The Formation of Stars. Wiley-VCH

Wilkin F. P., 1996, , 459, L31

Yusef-Zadeh F., 1990, , 361, L19

Apéndice A

Choques y Frentes de Ionización

Algunas veces en un medio gaseoso pueden existir discontinuidades importantes en alguna de sus propiedades físicas, cuando estas propiedades son la presión, densidad y temperatura del gas nos estamos refiriendo a un choque, que es producido cuando el gas sufre una perturbación a una velocidad superior a la del sonido, mientras que si la discontinuidad ocurre en el grado de ionización del gas, entonces esta discontinuidad es conocida como frente de ionización. En esta sección analizaremos las condiciones de salto tanto de los choques como de los frentes de ionización para conocer las propiedades del gas en las dos interfaces de la discontinuidad.

A.1. Choques

Consideremos un fluído que tiene densidad ρ_1 , presión P_1 y se mueve en la dirección de eje $+x$ con velocidad u_1 . En la posición $x = s(t)$ existe un choque que se mueve a velocidad $u_0 \equiv \frac{ds}{dt}$. Delante del choque el fluido tiene densidad ρ_2 , presión P_2 y se mueve a velocidad u_2 .

Antes y después del choque escogemos dos puntos arbitrarios, x_1 y x_2 , respectivamente que forman una superficie cada uno en el plano yz que están en co-movimiento con la discontinuidad (ver figura A.1).

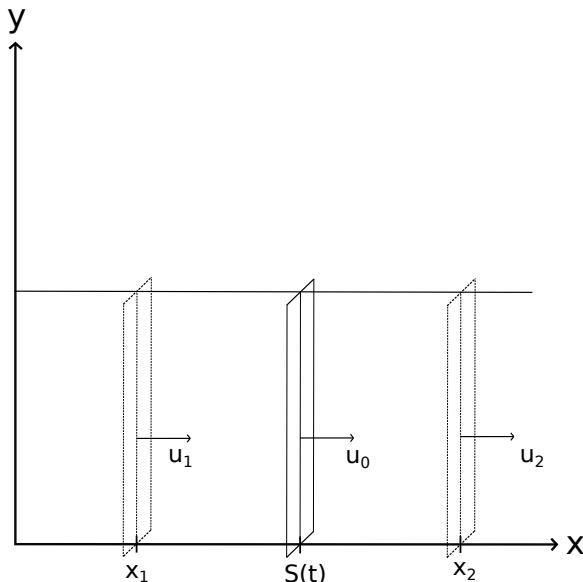


Figura A.1: Representación esquemática de un fluido con una discontinuidad situada en $x = s(t)$. Detrás y delante del choque en las posiciones $x = x_1$ y $x = x_2$, respectivamente, situamos dos superficies paralelas al choque y que están en co-movimiento con éste.

La masa encerrada dentro del volumen que forman las dos superficies es constante en el tiempo, esto es, la cantidad que fluido que entra por la superficie 1 (atrás del choque), debe ser igual a la que sale por la superficie 2:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho \, dx = 0 \quad (\text{A.1})$$

Por otro lado, dentro del volumen entre las dos superficies, la presión del fluido en la superficie 1 contribuye a incrementar el momento, mientras que la presión en la superficie 2 tiene el efecto contrario, entonces:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho u \, dx = P_1 - P_2 \quad (\text{A.2})$$

Por último, por completez la potencia mecánica por unidad de área $P_1 u_1 - P_2 u_2$ incrementa la energía interna del fluido entre las superficies:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho \left(\frac{u^2}{2} + \epsilon \right) \, dx = P_1 u_1 - P_2 u_2 \quad (\text{A.3})$$

Donde ϵ es la energía interna por unidad de masa. Nótese que esta ecuación no es válida si el fluido puede perder energía por radiación (este caso se discutirá aparte más adelante).

Las tres ecuaciones anteriores son de la siguiente forma:

$$\frac{dJ}{dt} \equiv \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \Psi(x, t) \, dx \quad (\text{A.4})$$

Donde $\Psi(x, t)$ presenta una discontinuidad espacial en $x = s(t)$. Como la integral implica solo la coordenada espacial y la derivada es respecto al tiempo, entonces podemos intercambiar el orden de éstas:

$$\frac{dJ}{dt} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\Psi}{dt} \, dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{dx}{dt} \right) \, dx \quad (\text{A.5})$$

Debido a la discontinuidad separaremos el segundo término de la integral:

$$\begin{aligned}\frac{dJ}{dt} &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \Psi}{\partial t} dx + \int_{x_1}^s \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{dx}{dt} dx + \int_s^{x_2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{dx}{dt} dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \Psi}{\partial t} dx (\Psi_1 u_0 - \Psi_1 u_1 + \Psi_2 u_2 - \Psi_2 u_0)\end{aligned}\quad (\text{A.6})$$

Como x_1 y x_2 son puntos arbitrarios, podemos tomar el límite cuando $x_1, x_2 \rightarrow s$. Este límite es de interés ya que los choques en muchos casos son muy delgados en comparación con el tamaño característico del sistema. De esta manera el primer término del lado derecho de la ecuación (A.6) desaparece porque la derivada parcial respecto al tiempo de Ψ es finita para toda x (incluída la discontinuidad). Entonces:

$$\lim_{x_1, x_2 \rightarrow s} \frac{dJ}{dt} = \Psi_2 v_2 - \Psi_1 v_1 \quad (\text{A.7})$$

Donde $v_2 \equiv u_2 - u_0$ y $v_1 \equiv u_1 - u_0$ son las velocidades del fluido respecto a la velocidad del choque.

Utilizando la ecuación (A.7) en (A.1) obtenemos la primera condición de salto:

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 \quad (\text{A.8})$$

Aplicando a su vez en la ecuación (A.2) con ayuda de la ecuación (A.8) obtenemos la siguiente condición de salto:

$$\rho_1 v_1^2 = \rho_2 v_2^2 \quad (\text{A.9})$$

Por último, la última condición de salto, solo válida para sistemas adiabáticos es, utilizando la ecuación (A.3) es:

$$\frac{1}{2} v_1^2 + \epsilon_1 + \frac{P_1}{\rho_1} = \frac{1}{2} v_2^2 + \epsilon_2 + \frac{P_2}{\rho_2} \quad (\text{A.10})$$

Para el caso en que el fluído pierde energía por radiación, la ecuación (A.2) sufre la siguiente modificación:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_3} \rho \left(\frac{u^2}{2} + \epsilon \right) dx = P_1 u_1 - P_3 u_3 - 2F_{rad} \quad (\text{A.11})$$

Donde F_{rad} es el flujo de radiado por el fluído y x_3 es un punto localizado más allá de la región de relajamiento del choque (la zona donde el fluído está radiando, como referencia podemos tomar la figura 3 de Shull & McKee (1979)).

De esta forma, la nueva condición de salto en caso de un choque radiativo es:

$$\frac{1}{2} v_3^2 + \epsilon_3 + \frac{P_3}{\rho_3} = \frac{1}{2} v_1^2 + \epsilon_1 + \frac{P_1}{\rho_1} \frac{2F_{rad}}{\rho_1 v_1} \quad (\text{A.12})$$

A.2. Frentes de Ionización

Para esta sección, utilizaremos el subíndice “0” para las propiedades del gas en la interfaz neutra, mientras que para la interfaz ionizada utilizaremos el subíndice “i” (ver figura A.2). Bajo esta nomenclatura, combinando las ecuaciones (A.8, A.9) para las condiciones de salto en el Frente de ionización y reescribiendo la presión en términos de la velocidad del sonido:

$$P_x = c_x^2 \rho_x \quad (\text{A.13})$$

Donde el subíndice “x” puede hacer referencia tanto al medio neutro o ionizado, encontramos el salto en densidad del frente de ionización:

$$\frac{\rho_i}{\rho_0} = \frac{1}{2c_i^2} \left[v_0^2 + c_0^2 \pm \left((v_0^2 + c_0^2)^2 - 4v_0^2 c_i^2 \right)^{1/2} \right] \quad (\text{A.14})$$

O bien, en términos del número de Mach del gas neutro $\mathcal{M} \equiv v_0/c_0$:

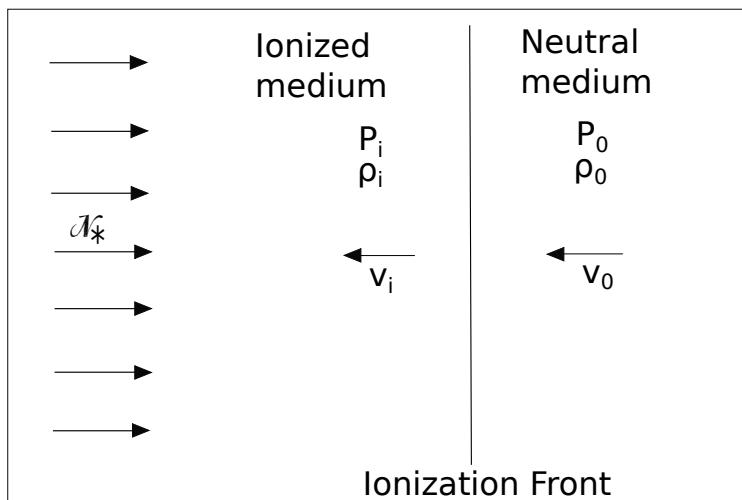


Figura A.2: Representación esquemática de la estructura de un frente de ionización. En un medio gaseoso, con densidad ρ_0 , presión P_0 y que se mueve velocidad v_0 está expuesto a radiación ionizante con flujo \mathcal{N}_* . El gas ionizado tiene densidad ρ_i , presión P_i y se mueve a velocidad v_i . Las velocidades están medidas en el sistema de referencia del frente de ionización.

$$\frac{\rho_i}{\rho_0} = \frac{1}{2} \frac{c_0^2}{c_i^2} \left[\mathcal{M}^2 + 1 \pm \left((\mathcal{M}^2 + 1)^2 - 4\mathcal{M}^2 \frac{c_i^2}{c_0^2} \right)^{1/2} \right] \quad (\text{A.15})$$

En la ecuación (A.15) se requiere que el argumento de la raíz cuadrada sea positivo. Para que esto suceda se debe cumplir la siguiente condición:

$$\mathcal{M}^2 - 2\mathcal{M} \frac{c_i}{c_0} + 1 \geq 0 \quad (\text{A.16})$$

Los casos críticos (donde el discriminante (A.16) es igual a cero) son:

$$\mathcal{M}_R = \frac{c_i}{c_0} \left[1 + \left(1 - \frac{c_0^2}{c_i^2} \right)^{1/2} \right] \quad (\text{A.17})$$

$$\mathcal{M}_D = \frac{c_i}{c_0} \left[1 - \left(1 - \frac{c_0^2}{c_i^2} \right)^{1/2} \right] \quad (\text{A.18})$$

Como $c_i^2 \gg c_0^2$, dado que $c_i \sim 10 \text{ kms}^{-1}$ y $c_0 \sim 1 - 3 \text{ kms}^{-1}$ entonces podemos hacer las siguientes aproximaciones:

$$\mathcal{M}_R \simeq 2 \frac{c_i}{c_0} \quad (\text{A.19})$$

$$\mathcal{M}_D \simeq \frac{1}{2} \frac{c_0}{c_i} \quad (\text{A.20})$$

Cuando $\mathcal{M} \geq \mathcal{M}_R$, el frente de ionización se denomina tipo R (rarified), y en caso de que $\mathcal{M} \leq \mathcal{M}_D$ se denominan frentes tipo D (dense). Cuando $\mathcal{M} = \mathcal{M}_R$ o $\mathcal{M} = \mathcal{M}_D$ los frentes se denominan R crítico y D crítico, respectivamente. En los frentes tipo R el material neutro viaja a velocidad supersónica y el salto de densidad es $\rho_i/\rho_0 < 0$ (la onda de material que pasa a través del frente de ionización está rarificada respecto al material ionizado, de ahí el nombre). En los frentes tipo D ocurre lo contrario: la onda de material viaja a velocidad subsónica y es densa respecto al material ionizado. En el caso de que $\mathcal{M}_D < \mathcal{M} < \mathcal{M}_R$ la onda de material que

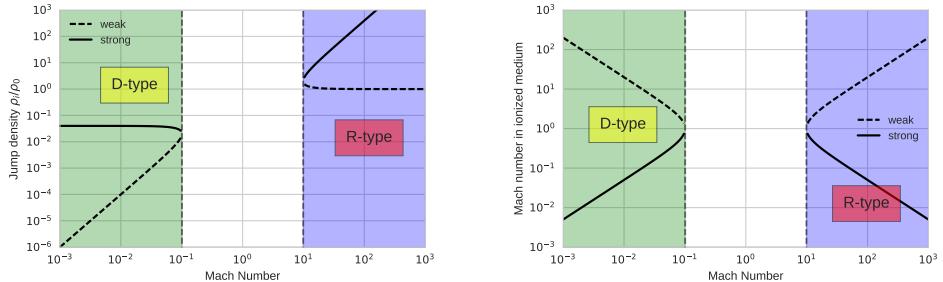


Figura A.3: Soluciones para el salto en (a) densidad y (b) velocidad de un frente de ionización. La línea punteada representa la solución a la ecuación (A.15) cuando se utiliza el signo negativo, mientras que la línea continua a la solución con signo positivo. En la región sombreada en verde se muestran los frentes tipo D y en la región azul los frentes tipo R. Los frentes tipo D crítico y R crítico ocurren donde se intersectan las soluciones con las líneas punteadas verticales.

viaja hacia el frente de ionización se amortigua rápidamente. En la figura A.3a se muestran las soluciones para el salto de densidad para frentes de ionización “fuertes” (signo positivo en la ecuación (A.15)) y “débiles” (signo negativo en (A.15)).

Por otro lado, el salto en velocidad lo podemos derivar combinando las ecuaciones (A.8, A.15). El resultado se muestra en la figura A.3b. En el caso de los frentes R crítico y D crítico, la velocidad del gas en el medio ionizado es igual a la velocidad del sonido.

Apéndice B

Matrices de Rotación y Proyección en el Plano del Cielo.

La transformación del sistema de referencia del objeto (no primado) al sistema de referencia del plano del cielo (primado), se realiza mediante una rotación respecto al eje y por un ángulo i . Dicha rotación es descrita por la matriz de rotación $\mathbf{A}_y(i)$:

$$\mathbf{A}_y(i) = \begin{pmatrix} \cos i & 0 & -\sin i \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin i & 0 & \cos i \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

A su vez se pueden obtener con esta matriz los vectores unitarios del sistema de referencia primado en términos de los vectores unitarios del sistema de referencia no primado:

$$\hat{x}' = \mathbf{A}_y(-i) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (B.2)$$

$$\hat{y}' = \mathbf{A}_y(-i) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (B.3)$$

$$\hat{z}' = \mathbf{A}_y(-i) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (B.4)$$

Es de notarse que en este caso el signo de i está invertido debido a que actualmente la matriz de rotación $\mathbf{A}_y(i)$ realiza una rotación en favor de las manecillas del reloj, mientras que convencionalmente se utiliza el signo positivo del ángulo de rotación para rotaciones en contra de las manecillas del reloj (add reference HERE).

Por otro lado, como estamos considerando choques con geometría cilíndrica, entonces todos los ángulos azimutales ϕ son equivalentes. Entonces, por simplicidad, podemos trabajar con curvas bidimensionales en plano xy ($z = 0$), donde su forma tridimensional es una superficie de revolución de éstas alrededor del eje x y se puede encontrar mediante la matriz de rotación:

$$\mathbf{A}_x(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (B.5)$$

Donde ϕ toma valores en el intervalo $[0, 2\pi]$

Apéndice C

Derivación Matemática del Radio de Curvatura

Tomamos una curva genérica $\vec{\sigma}(t) \equiv x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y}$ continua y suave para todo valor de t real y finito. Sus derivadas se denotan como $\vec{\sigma}'(t)$ y $\vec{\sigma}''(t)$. Su longitud de arco está dada por:

$$s(t) = \int_0^t \|\vec{\sigma}'(t')\| dt' \quad (\text{C.1})$$

Reparametrizamos la trayectoria $\vec{\sigma}(t)$ con la longitud de arco y diferenciando respecto a ésta obtenemos lo siguiente:

$$\frac{d\vec{\sigma}}{ds} = \frac{\vec{\sigma}'(t)}{\|\vec{\sigma}'(t)\|} \equiv \vec{T}(s) \quad (\text{C.2})$$

Esta última expresión se logró diferenciando la ecuación (C.1) y aplicando la regla de la cadena al diferenciar $\frac{d\vec{\sigma}}{ds}$. $\vec{T}(s)$ es el vector tangente a la trayectoria $\vec{\sigma}(s)$.

La curvatura κ se define como la magnitud de la derivada del vector tangente respecto a la longitud de arco, o bien, como la segunda derivada de la trayectoria $\vec{\sigma}(s)$:

$$\kappa \equiv \|\vec{T}'(s)\| = \|\vec{\sigma}''(s)\| \quad (\text{C.3})$$

El radio de curvatura se define como el radio de un círculo que ajusta localmente a la trayectoria, y se calcula como el inverso multiplicativo de la curvatura:

$$R_c = \frac{1}{\kappa} \quad (\text{C.4})$$

Aplicando la regla de la cadena encontramos la siguiente expresión para la curvatura:

$$\kappa = \left\| \frac{\vec{\sigma}''(t)}{\|\vec{\sigma}'(t)\|^2} - \frac{\vec{\sigma}'(t)}{\|\vec{\sigma}'(t)\|^4} \vec{\sigma}'(t) \cdot \vec{\sigma}''(t) \right\| \quad (\text{C.5})$$

Escribimos las componentes de las derivadas de $\vec{\sigma}(t)$ para calcular los factores que intervienen en la ecuación (C.5):

$$\vec{\sigma}'(t) = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} \quad (\text{C.6})$$

$$\vec{\sigma}''(t) = \ddot{x}\hat{x} + \ddot{y}\hat{y} \quad (\text{C.7})$$

$$\implies \vec{\sigma}'(t) \cdot \vec{\sigma}''(t) = \dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} \quad (\text{C.8})$$

De esta forma, calculamos la curvatura como sigue:

$$\kappa = \left[\left(\frac{\ddot{x}}{\|\vec{\sigma}'\|^2} - \frac{\dot{x}(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y})}{\|\vec{\sigma}'\|^4} \right)^2 + \left(\frac{\ddot{y}}{\|\vec{\sigma}'\|^2} - \frac{\dot{y}(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y})}{\|\vec{\sigma}'\|^4} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (\text{C.9})$$

$$\begin{aligned} \kappa &= \|\vec{\sigma}'\|^{-2} \left[(\ddot{x}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \dot{x}(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}))^2 \right. \\ &\quad \left. + (\ddot{y}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \dot{y}(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}))^2 \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

$$\kappa = \|\vec{\sigma}'\|^{-2} \left[(\ddot{x}\dot{y}^2 - \dot{x}\dot{y}\ddot{y})^2 + (\ddot{y}\dot{x}^2 - \dot{y}\dot{x}\ddot{x})^2 \right]^{1/2} \quad (\text{C.11})$$

$$\kappa = \|\vec{\sigma}'\|^{-3} [\ddot{x}^2\dot{y}^2 + \dot{y}^2\dot{x}^2 - 2\ddot{x}\dot{y}\dot{x}\dot{y}]^{1/2} \quad (\text{C.12})$$

$$\kappa = \frac{|\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} \quad (\text{C.13})$$

Utilizando coordenadas polares, la expresión para el radio de curvatura queda como sigue:

$$R_c = R \frac{(1 + \omega^2)^{3/2}}{|1 + \omega^2 - \dot{\omega}|} \quad (\text{C.14})$$

Donde $\omega \equiv \frac{1}{R} \frac{dR}{d\theta}$ (ver sección 2.4)

C.1. Radio de curvatura para un polinomio de grado $2n$

Dado que es de nuestro interés calcular el radio de curvatura del choque en el eje de simetría ($\theta = 0$), debido a que es analíticamente más fácil de calcular, y a su vez es medible observacionalmente ajustando un círculo a una serie de mediciones de la posición del choque (sección). Entonces, hacemos una aproximación para la función $R(\theta)$ que nos da la forma del choque mediante un polinomio par de grado $2n$ de la siguiente forma:

$$R(\theta) \simeq R_0 (1 + R_{\theta\theta,0} \theta^2 + \mathcal{O}(\theta^4)) \quad (\text{C.15})$$

De esta forma calculamos las derivadas de $R(\theta)$:

$$\dot{R}(\theta) \simeq R_0 \theta (2R_{\theta\theta,0} + \mathcal{O}(\theta^2)) \quad (\text{C.16})$$

$$\ddot{R}(\theta) \simeq R_0 (2R_{\theta\theta,0} + \mathcal{O}(\theta^2)) \quad (\text{C.17})$$

Evaluando en $\theta = 0$ obtenemos los siguientes:

$$R(0) = R_0 \quad (\text{C.18})$$

$$\dot{R}(0) = 0 \quad (\text{C.19})$$

$$\ddot{R}(0) = 2R_{\theta\theta,0}R_0 \quad (\text{C.20})$$

$$\implies \omega(0) = 0 \quad (\text{C.21})$$

$$\dot{\omega}(0) \equiv \frac{\ddot{R}(0)}{R(0)} - \left(\frac{\dot{R}(0)}{R(0)} \right)^2 = 2R_{\theta\theta,0} \quad (\text{C.22})$$

Sustituyendo en la ecuación (C.14) obtenemos la planitud en el ápex:

$$\Pi = \frac{1}{|1 - 2R_{\theta\theta,0}|} \quad (\text{C.23})$$

Por esto en el apéndice D para encontrar el radio de curvatura nos enfocamos en encontrar el coeficiente de segundo orden en la expansión en serie de $R(\theta)$.

Apéndice D

Derivación paso a paso de los Radios Característicos en la aproximación hipersónica del modelo de interacción de dos vientos

D.1. R_0

Podemos determinar el radio característico R_0 a partir de la condición de que el choque es estacionario. En este caso, los momentos de los dos vientos son iguales en la posición del choque. Por tanto, utilizando la ecuación de momento en $\theta = 0$ obtenemos lo siguiente:

$$\rho_{ws}v_w^2 = \rho_{ws1}v_{w1}^2 \quad (\text{D.1})$$

Donde ρ_{ws} y ρ_{ws1} son las densidades de los dos vientos en la posición del choque. Por otro lado, como la tasa de pérdida de masa es constante para un ángulo θ dado, entonces podemos hacer lo siguiente:

$$\frac{\dot{M}_w^0}{4\pi R_0^2 v_w} v_w^2 = \frac{\dot{M}_{w1}^0}{4\pi (D - R_0)^2 v_{w1}} v_{w1}^2 \quad (\text{D.2})$$

En esta última ecuación hemos sustituído $\dot{M}_w^0 = 4\pi R_0^2 v_w \rho_{ws}$ y $\dot{M}_{w1}^0 = 4\pi (D - R_0)^2 v_{w1} \rho_{ws1}$.

Reduciendo la ecuación (D.2) encontramos una expresión para R_0 :

$$\frac{R_0}{D} = \frac{\beta^{1/2}}{1 + \beta^{1/2}} \quad (\text{D.3})$$

D.2. Alatud de Choques tipo Cantoídes y An-cantoídes

R_{90} puede determinarse a partir de evaluar las ecuaciones (3.27) y (3.28) en $\theta = \frac{\pi}{2}$ como sigue:

$$\frac{R_{90}}{D} = \tan \theta_{1,90} \quad (\text{D.4})$$

$$\theta_{1,90} \cot \theta_{1,90} - 1 = -\frac{2\beta}{k+2} \quad (\text{D.5})$$

Donde $\theta_{1,90} = \theta_1 \left(\frac{\pi}{2} \right)$. Introducimos un nuevo parámetro $\xi \equiv \frac{2}{k+2}$ de modo que combinando las dos ecuaciones anteriores obtenemos lo siguiente:

$$\frac{R_{90}}{D} = \tan \theta_{1,90} = \frac{\theta_{1,90}}{1 - \xi \beta} \quad (\text{D.6})$$

Hacemos una expansión en serie para el lado izquierdo de la ecuación y reducimos:

$$\theta_{1,90}^2 \left(1 + \frac{\theta_{1,90}^2}{15} \right) \simeq 3\beta\xi \quad (\text{D.7})$$

Tomamos la solución a primer orden $\theta_{1,90} = 3\beta\xi$, sustituímos este valor en el término correctivo y resolvemos para $\theta_{1,90}$:

$$\theta_{1,90} = \left(\frac{3\xi\beta}{1 + \frac{1}{5}\xi\beta} \right)^{1/2} \quad (\text{D.8})$$

Finalmente sustituímos (D.8) en (D.6) para obtener R_{90} :

$$\frac{R_{90}}{D} = \frac{(3\xi\beta)^{1/2}}{\left(1 + \frac{1}{5}\xi\beta\right)^{1/2}(1 - \xi\beta)} \quad (\text{D.9})$$

$$\Lambda = \frac{(3\xi)^{1/2}(1 + \beta^{1/2})}{\left(1 + \frac{1}{5}\xi\beta\right)^{1/2}(1 - \xi\beta)} \quad (\text{D.10})$$

D.3. Planitud de choques tipo Cantoides y An-cantoides

Siendo que el choque de proa en nuestro modelo genérico es simétrico, entonces la forma $R(\theta)$ debe ser una función par, por tanto podemos hacer la siguiente expansión en serie:

$$R(\theta) \simeq R_0 + \frac{1}{2}R_{\theta\theta,0}\theta^2 + \mathcal{O}(\theta^4) \quad (\text{D.11})$$

De esta forma la planitud del choque en el ápex queda como sigue (ver apéndice C):

$$\Pi = \left(1 - 2 \frac{R_{\theta\theta,0}}{R_0} \right)^{-1} \quad (\text{D.12})$$

Para encontrar el coeficiente de segundo orden $R_{\theta\theta,0}$ hacemos una expansión en serie de las ecuaciones (3.28) y (3.27) para ángulos pequeños, mostrando a continuación la expansión de cada término para al final hacer la reducción algebraica:

$$\theta_1 \cot \theta_1 - 1 \simeq -\frac{\theta_1^2}{3} \left(1 + \frac{\theta_1^2}{15}\right) \quad (\text{D.13})$$

$$\cos^k \theta \simeq \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)^k \simeq \left(1 - \frac{k\theta^2}{2}\right) \quad (\text{D.14})$$

$$\sin^2 \theta \simeq \theta^2 \left(1 - \frac{\theta^2}{6}\right)^2 \simeq \theta^2 \left(1 - \frac{\theta^2}{3}\right) \quad (\text{D.15})$$

$$\implies \cos^k \theta \sin^2 \theta \simeq \theta^2 \left[1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{k}{2}\right) \theta^2\right] \quad (\text{D.16})$$

$$\implies I_k(\theta) \simeq \frac{\theta^3}{3} \left[1 - \frac{1}{10} (3k+2) \theta^2\right] \quad (\text{D.17})$$

$$\cot \theta \simeq \theta^{-1} \left(1 - \frac{\theta^2}{3}\right) \quad (\text{D.18})$$

$$\implies 2\beta I_k(\theta) \cot \theta \simeq \frac{2}{3} \beta \theta^2 \left[1 - \frac{1}{30} (9k+16) \theta^2\right] \quad (\text{D.19})$$

$$-\frac{2\beta}{k+2} \left(1 - \cos^{k+2} \theta\right) \simeq \beta \theta^2 \left[1 - \frac{1}{12} (3k+4)\right] \quad (\text{D.20})$$

Sustituyendo las expansiones anteriores en (3.28) obtenemos lo siguiente:

$$\theta_1^2 \left(1 + \frac{\theta_1^2}{15}\right) \simeq \beta \theta^2 \left[1 + \frac{1}{60} (4 - 9k) \theta^2\right] \quad (\text{D.21})$$

La solución a primer orden (ignorando el término cuártico) es $\theta_1^2 \simeq \beta \theta^2$. Sustituímos esta solución en el término correctivo y resolvemos para θ_1^2 :

$$\theta_1^2 \simeq \beta \theta^2 \left[1 + \frac{1}{60} (4 - 9k) \theta^2\right] \left(1 + \frac{\beta \theta^2}{15}\right)^{-1} \quad (\text{D.22})$$

$$\theta_1^2 \simeq \beta \theta^2 \left[1 + \frac{1}{60} (4 - 9k) \theta^2\right] \left(1 - \frac{\beta \theta^2}{15}\right) \quad (\text{D.23})$$

$$\implies \theta_1^2 \simeq \beta \theta^2 (1 + C_{k\beta} \theta^2) \quad (\text{D.24})$$

$$\text{Donde : } C_{k\beta} = \left(\frac{1}{15} - \frac{3k}{20} - \frac{\beta}{15}\right) \quad (\text{D.25})$$

Utilizamos esta solución para θ_1 en la ecuación (3.27), ignorando términos de orden superior al cuártico dentro de los corchetes:

$$\theta_1 \simeq \beta^{1/2} \theta (1 + C_{k\beta} \theta^2)^{1/2} \quad (\text{D.26})$$

$$\implies \theta + \theta_1 \simeq \theta \left[1 + \beta^{1/2} \left(1 + \frac{C_{k\beta}}{2} \theta^2 \right) \right] \quad (\text{D.27})$$

$$\sin \theta_1 \simeq \theta_1 \left(1 - \frac{\theta_1^2}{6} \right) \quad (\text{D.28})$$

$$\simeq \beta^{1/2} \theta \left(1 + \frac{C_{k\beta}}{2} \theta^2 \right) \left[1 - \frac{\beta \theta^2 (1 + C_{k\beta} \theta^2)}{6} \right] \quad (\text{D.29})$$

$$\implies \sin \theta_1 \simeq \beta^{1/2} \theta \left[1 + \left(\frac{C_{k\beta}}{2} - \frac{\beta}{6} \right) \theta^2 \right] \quad (\text{D.30})$$

$$\sin(\theta + \theta_1) \simeq (\theta + \theta_1) \left[1 - \frac{(\theta + \theta_1)^2}{6} \right] \quad (\text{D.31})$$

$$\simeq \theta \left[1 + \beta^{1/2} \left(1 + \frac{C_{k\beta}}{2} \theta^2 \right) \right] \left[1 - \frac{\theta^2 \left(1 + \beta^{1/2} \left(1 + \frac{C_{k\beta}}{2} \theta^2 \right) \right)^2}{6} \right] \quad (\text{D.32})$$

$$\simeq \theta \left(1 + \beta^{1/2} \right) \left[1 + \left(\frac{\beta^{1/2} C_{k\beta}}{2(1 + \beta^{1/2})} - \frac{1}{6} (1 + \beta^{1/2})^2 \theta^2 \right) \right] \quad (\text{D.33})$$

$$\implies \frac{R}{D} \simeq \frac{\beta^{1/2}}{1 + \beta^{1/2}} \left[1 + \left(\frac{C_{k\beta}}{2} - \frac{\beta}{6} \right) \theta^2 \right] \\ \left[1 + \left(\frac{\beta^{1/2} C_{k\beta}}{2(1 + \beta^{1/2})} - \frac{(1 + \beta^{1/2})^2}{6} \right) \theta^2 \right]^{-1} \quad (\text{D.34})$$

$$\simeq R_0 \left[1 + \left(\frac{C_{k\beta}}{2(1 + \beta^{1/2})} + \frac{1 + 2\beta^{1/2}}{6} \right) \theta^2 \right] \quad (\text{D.35})$$

De esta mostramos que el término de segundo orden que necesitamos en la ecuación (3.41) está dado por:

$$\frac{R_{\theta\theta,0}}{2} = \frac{C_{k\beta}}{2(1+\beta^{1/2})} + \frac{1+2\beta^{1/2}}{6} \quad (\text{D.36})$$

que es el resultado mostrado en la ecuación (3.42)

D.4. Radio de Curvatura para choques tipo Wilkinoides

Hacemos expansión Taylor hasta cuarto orden de cada uno de los términos de la ecuación (3.39)

$$\csc^2 \theta \simeq \theta^{-2} \left(1 - \frac{\theta^2}{6} + \mathcal{O}(\theta^4) \right)^{-2} \simeq \theta^{-2} \left(1 + \frac{\theta^2}{3} + \mathcal{O}(\theta^4) \right) \quad (\text{D.37})$$

$$\theta \cot \theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{3} \left(1 + \frac{\theta^2}{15} + \mathcal{O}(\theta^4) \right) \quad (\text{D.38})$$

$$\implies 1 - \theta \cot \theta \simeq \frac{\theta^2}{3} \left(1 + \frac{\theta^2}{15} + \mathcal{O}(\theta^4) \right) \quad (\text{D.39})$$

Sustituímos en la ecuación (3.39):

$$R(\theta) \simeq R_0 \left[3\theta^{-2} \left(1 + \frac{\theta^2}{3} + \mathcal{O}(\theta^4) \right) \frac{\theta^2}{15} \left(1 + \frac{\theta^2}{15} \right) \right]^{1/2} \quad (\text{D.40})$$

$$\implies R(\theta) \simeq R_0 \left[1 + \frac{2\theta^2}{5} + \mathcal{O}(\theta^4) \right]^{1/2} \quad (\text{D.41})$$

$$\implies R(\theta) \simeq R_0 \left[1 + \frac{\theta^2}{5} + \mathcal{O}(\theta^4) \right] \quad (\text{D.42})$$

De esta forma mostramos que el coeficiente de segundo orden en este caso es $R_{\theta\theta,0} = \frac{1}{5}$. Por lo tanto, sustituyendo este valor en la ecuación (C.23) encontramos que

$$\Pi = \frac{5}{3} \quad (\text{D.43})$$