

Tesis de doctorado



Jorge Alejandro Tarango Yong

29 de mayo de 2018



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE POSGRADO EN ASTROFÍSICA

Instituto de Radioastronomía y Astrofísica

“Estudio de la Interacción de Flujos Múltiples de Fuentes
Astrofísicas, Aplicada a los Proplyds Clásicos de la Nebulosa de
Orión”

**PARA OPTAR POR EL GRADO DE
DOCTOR EN CIENCIAS (ASTROFÍSICA)**

P R E S E N T A
JORGE ALEJANDRO TARANGO YONG

Director de Tesis: Dr. William J. Henney

Morelia, Michoacán. 29 de mayo de 2018

Índice general

1. Objetos y Fenómenos Astrofísicos Relevantes	9
1.1. Nubes Moleculares Gigantes	9
1.2. La Nebulosa de Orión	10
1.3. Proplyds	11
1.3.1. Descubrimiento	11
1.3.2. ¿Qué es un proplyd? Breve introducción (Johnstone et al., 1998)	12
1.3.3. Mecanismos de fotoevaporación (Johnstone et al., 1998)	12
1.4. Objetos LL	15
1.4.1. Mapa de Objetos	15
1.5. Regiones HII (Stahler & Palla, 2004)	16
1.5.1. Esfera de Strömgren	16
1.5.2. Primera y Segunda expansión	18
1.5.3. Flujos de Champaña	19
1.5.4. Características de la emisión	19
2. Conceptos fundamentales	21
2.1. Parámetros Fundamentales	23
2.2. Planitud y “Alatud”	23
2.3. Cuádricas de Revolución	25
2.4. Proyección en el Plano del Cielo	28
2.4.1. Vectores normal y tangente a la superficie	29
2.4.2. Línea tangente	31
2.4.3. Planiud y Alatud proyectadas: caso general	32

2.4.4. Aplicación a las Cuádricas de Revolución	33
3. Modelo de Capa Delgada	41
3.1. Cantidades conservadas en un flujo hipersónico de capa delgada	41
3.2. Problema de Interacción de Dos Vientos	43
3.2.1. Interacción con un viento esférico isotrópico	45
3.2.2. Interacción de un viento esférico isotrópico con un viento plano-paralelo (Choques Wilkinoides)	47
3.3. Forma “verdadera” de los choques cantoides, ancantoides y wilkinoides	48
3.4. Obtención de la Forma Aparente	52
4. Resultados obtenidos para los proplyds “clásicos”	63
4.1. Metodología para la medición de la forma aparente.	63
4.1.1. Medición de incertidumbres	65
4.2. Resultados	65
5. Conclusiones	71
Bibliografía	73
A. Choques y Frentes de Ionización	75
A.1. Choques	75
A.2. Frentes de Ionización	79
B. Matrices de Rotación y Proyección en el Plano del Cielo.	83
C. Derivación Matemática del Radio de Curvatura	85
C.1. Radio de curvatura para un polinomio de grado $2n$	87
D. Derivación paso a paso de los Radios Característicos en la aproximación hipersónica del modelo de interacción de dos vientos	89
D.1. R_0	89
D.2. Alatud de Choques tipo Cantoides y Ancantoides	90

D.3. Planitud de choques tipo Cantoides y Ancantoides	91
D.4. Radio de Curvatura para choques tipo Wilkinoides	94
E. True Versus Apparent Shapes of Bowshocks	95

Agradecimientos

Esta tesis se realizó para obtener el título de doctorado en ciencias (Astronomía). Deseo aprovechar esta sección para hacer agradecimientos a personas y/o instituciones que me ayudaron para que pueda completar este trabajo de manera exitosa.

Resumen

Abstract en español

Abstract

Abstract written in english

Capítulo 1

Objetos y Fenómenos Astrofísicos Relevantes

1.1. Nubes Moleculares Gigantes

Las grandes “guarderías” de estrellas a lo largo de la Galaxia se localizan en nubes moleculares gigantes, compuestas principalmente por hidrógeno molecular H₂. Siendo que esta molécula solo emite radiación en ultravioleta, donde el medio interestelar tiene una alta extinción, para detectar la presencia de las nubes moleculares se recurre a otras moléculas llamadas “trazadoras”, principalmente CO, la segunda molécula más abundante en el medio interestelar, que posee líneas espectrales en el rango de las ondas de radio.

Complejos como el de Taurus-Auriga se formaron debido a la convergencia de dos flujos de material neutro (Ballesteros-Paredes et al., 1999) que se enfrió y se volvió más denso debido a inestabilidades térmicas (Hennebelle & Péault, 1999). Muchas de estas nubes moleculares tienen forma filamentaria debido a que se están colapsando gravitacionalmente en caída libre (Ballesteros-Paredes et al., 2011). Dentro de los filamentos puede haber colapsos locales que pueden dar lugar a regiones de formación estelar de baja masa o incluso asociaciones OB como es el caso de la Nebulosa de Orión (Hartmann & Burkert, 2007).

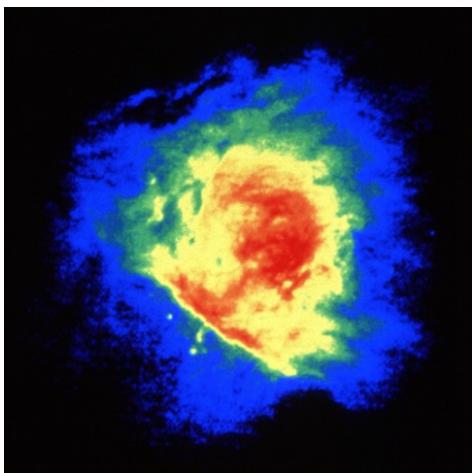


Figura 1.1: La Nebulosa de Orión observada por el VLA en la banda L ($\lambda = 20\text{ cm}$, $\nu = 1.4\text{ GHz}$, Yusef-Zadeh (1990)).

1.2. La Nebulosa de Orión

La Nebulosa de Orión (ONC por sus siglas en inglés), ubicada a $\sim 414\text{ pc}$ (Menten et al., 2007), es probablemente la región H II mejor estudiada del cielo (ver §1.5). Forma parte de la nube molecular gigante de Orión, de donde se distinguen dos sub-unidades, llamadas Orión A y Orión B. ONC forma parte de Orión A. El cúmulo de estrellas que se formó y que es responsable de la región H II se conoce como asociación OB Ori Id, cuyos miembros más prominentes son un grupo de cuatro estrellas conocidas como el “Trapecio”. La más masiva de éstas es $\theta^1\text{ Ori C}$, de clasificaciónpectral O6 aproximadamente (ver tabla), tiene una luminosidad de $4 \times 10^5\text{ }L_\odot$ y una temperatura de $4 \times 10^4\text{ K}$. Cuando la región H II se encuentra embebida en el gas molecular, no puede ser visible en el rango óptico del espectro. En el caso de ONC, que se ubica cerca del borde de la nube molecular Orion A, el gas ionizado caliente, que posee una presión mayor que el gas molecular frío, se escapa hacia el gas adyacente a la nube molecular en forma de “flujo de champaña” (figura 1.2), y de esta manera el gas ionizado puede ser visible por medio de diferentes líneas espectrales, tanto de hidrógeno como de otros

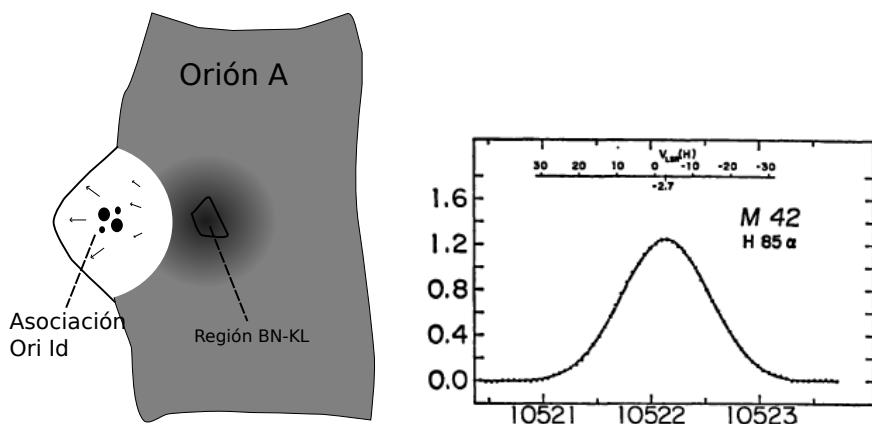


Figura 1.2: Izquierdo: Representación esquemática de la Asociación Ori Id y su ubicación dentro de la nube molecular gigante Orión A. La región BN-KL es una región de formación estelar muy activa donde se observan entre otras cosas, máseres de agua y SiO y flujos moleculares (Stahler & Palla, 2004). Derecha: Línea espectral $H\ 85\ \alpha$ de hidrógeno de ONC. El eje horizontal corresponde a la frecuencia en MHz, mientras que el eje vertical representa la temperatura de antena. El espectro muestra un corrimiento al azul que muestra que el gas se acerca a una velocidad de $\sim 3\ km\ s^{-1}$ (Stahler & Palla, 2004; Gordon & Churchwell, 1970)

elementos.

1.3. Proplyds

1.3.1. Descubrimiento

Observaciones en óptico de la región del trapecio en filtros de banda angosta de diferentes líneas de emisión tales como $H\alpha$, $H\beta$, [O III], [N II], [S II] y continuo, revelaron la existencia de objetos puntuales únicamente

visibles en líneas de alta ionización ($H\alpha$, $H\beta$ y [O III]) que fueron inicialmente denominados como “condensaciones nebulares” (Laques & Vidal, 1979). Hasta el momento no se sabía con certeza si “condensaciones nebulares” eran en realidad condensaciones nebulares (regiones donde la densidad de la nebulosa es inusualmente alta por alguna razón o bien esferas de gas molecular cuya envolvente fue ionizada y que la radiación de la estrella central la está “erosionando”) o si se

trataba de protoestrellas de baja masa cuyo disco protoplanetario estaba siendo fotoevaporado por la estrella central (Churchwell et al., 1987). No fue sino hasta que se contó con observaciones de alta resolución con el

Telescopio Espacial Hubble (HST) que se pudo determinar la verdadera naturaleza de estos objetos (O'dell et al., 1993) y la razón por la que se les denominó “proplyds” (PROtOPLanetarY DiskS). A su vez se encontraron por primera vez arcos delgados y otras estructuras de gran interés.

1.3.2. ¿Qué es un proplyd? Breve introducción (Johnstone et al., 1998)

Las imágenes del HST de la Nebulosa de Orión mostraron imágenes de discos alrededor de estrellas jóvenes de baja masa. Algunos se ven como siluetas oscuras que contrastan con la nebulosa, y otros casos son visibles en líneas de emisión de líneas de alta ionización. Un proplyd típico tiene forma cometaria, con una cabeza brillante que apunta hacia la fuente de radiación ionizante, y una cola que se extiende en dirección contraria a ésta. La explicación a esta forma es que el disco protoplanetario está siendo fotoevaporado por la radiación ionizante de una estrella masiva (θ^1 Ori C en caso de la Nebulosa de Orión), la cabeza es un frente de ionización cuyo radio escala como $R_{IF} \propto D^{2/3}$, donde D es la distancia a

la estrella masiva. La forma de la cola se debe a radiación ionizante difusa, producto de dispersión por polvo y por re combinaciones (Figura 1.3). Churchwell et al. (1987) ya había notado que la tasa de pérdida de masa observada en el gas ionizado implicaba que la fuente de este gas debía oscurecer a la protoestrella huésped, a menos que proviniera de un

disco circumestelar. De la emisión de radio observada, se estima la densidad electrónica en $n_e \sim 10^6 \text{ cm}^{-3}$ y la tasa de pérdida de masa en $\dot{M} \sim 10^{-7} M_\odot \text{ yr}^{-1}$.

1.3.3. Mecanismos de fotoevaporación (Johnstone et al., 1998)

El principal mecanismo de fotoevaporación es el campo de radiación de la estrella central, en la parte ultravioleta del espectro electromagnético. Según la masa de la estrella central, podemos tener dos clases de flujo

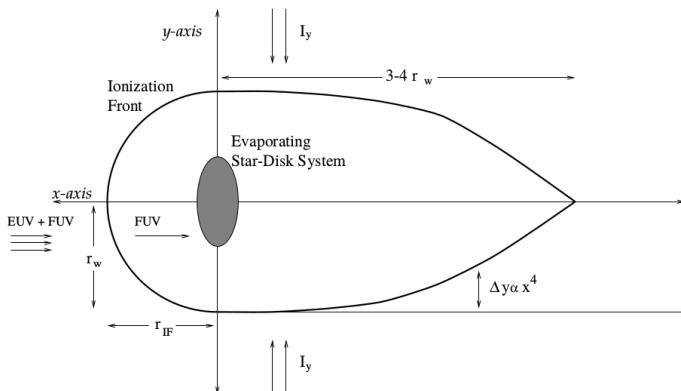


Figura 1.3: Representación esquemática de la formación de un frente de ionización hemisférico y de una cola de gas ionizado detrás del disco en proceso de fotoevaporación. r_{IF} y r_w representan el radio del frente de ionización en las direcciones de los ejes *x* e *y*, respectivamente. I_y representa el campo de radiación difusa. Por detrás del disco, la radiación difusa calienta el gas del disco provocando otro flujo fotoevaporado. Δy es la diferencia entre la forma actual del frente de ionización por detrás del disco y una forma cilíndrica. La forma de la colase explica como que el flujo de radiación I_y es capaz de penetrar más cerca del eje *x* conforme uno se aleja del disco, donde el flujo fotoevaporado es menos denso.

radiativo: Dominado por el ultravioleta lejano (FUV, $h\nu < 13.6 \text{ eV}$) o dominado por el ultravioleta extremo (EUV, $h\nu \geq 13.6 \text{ eV}$). En general, el FUV se encarga de disociar moléculas y de calentar el gas de la región de fotodisociación (PDR) hasta temperaturas de 100 - 1000 K, mientras que el EUV puede ionizar el gas y elevar su temperatura hasta 10^4 K . El

EUV no puede atravesar el frente de ionización (IF) pero el FUV sí.

En el caso de que el flujo sea dominado por el EUV, la presión térmica del flujo fotoevaporado es determinada por la fotoionización, la PDR producida por el FUV es delgada. El gas calentado por el FUV se mueve de manera subsónica hasta llegar al IF y la tasa de pérdida de masa depende de la tasa de ionización inducida por el EUV.

Si el flujo está dominado por el FUV, la presión térmica depende del calentamiento por el FUV. El gas tibio se expande como un viento que empuja el IF lejos del disco. La tasa de pérdida de masa la determina la temperatura de la PDR, el flujo FUV y la opacidad del polvo a las longitudes de onda del FUV. Inicialmente la forma del disco impone una geometría cilíndrica en el flujo fotoevaporado, pero eventualmente los gradientes de presión tornan esta geometría en esférica.

Las ecuaciones de continuidad de la masa y el momento restringen la velocidad del flujo neutro antes de alcanzar el IF. Mas allá de éste, la presión del gas hace que éste se expanda a velocidades del orden de una a dos veces la velocidad del sonido. Para el gas neutro dentro del IF hay dos posibles soluciones: si el gas neutro es supersónico entonces el IF será de baja densidad (Tipo R) con bajo contraste de densidad entre gas neutro y gas ionizado. O si el gas neutro es subsónico se formará un IF tipo D con un gran contraste de densidad entre el gas neutro y el gas ionizado. Sin embargo, sin importar qué tipo de radiación domina la fotoevaporación, el gas neutro permanece a velocidades subsónicas al llegar al IF, por lo que dicho frente será tipo D. En el caso de un flujo dominado por el EUV, el gas neutro permanece a velocidad subsónica, su velocidad decrece como $v_I \propto r^{-2}$ y llega a 0.5 km s^{-1} al llegar al frente de ionización. Cuando el flujo es dominado por el FUV, el gas neutro se acelera hasta llegar a velocidades supersónicas, luego atraviesa un choque isotérmico que lo desacelera y llega al frente de ionización a 0.5 km s^{-1} . Sin importar el tipo de mecanismo de fotoevaporación dominante, el flujo fotoevaporado solo si la presión térmica supera a la gravedad de la

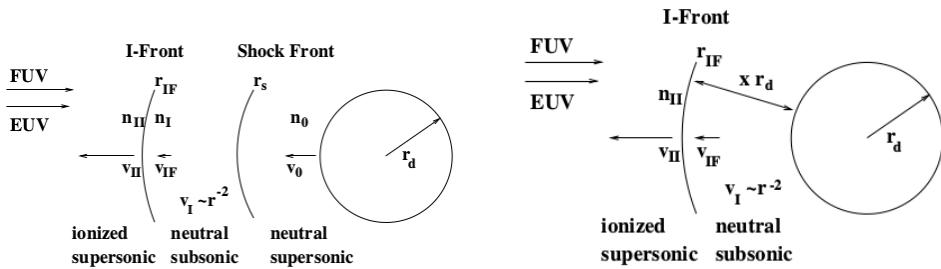


Figura 1.4: Representación esquemática de las regiones del flujo fotoevaporado de un proplyd. Izquierda: Cuando el flujo es dominado por el FUV. Derecha: Flujo dominado por EUV (Johnstone et al., 1998)

protoestrella. Entonces, el flujo fotoevaporado solo existe a partir de un radio crítico r_g , donde este radio se estima a partir del balance entre la energía necesaria para escapar de una órbita kepleriana y la energía térmica:

$$r_g = \frac{GM_*}{a^2} \quad (1.1)$$

Donde M_* es la masa de la protoestrella y a es la velocidad del sonido del gas. Para las protoestrellas típicas del trapecio la masa típica es de $M_* = 0,2 M_\odot$. Para el gas neutro la velocidad del sonido es de $a_I \sim 3 \text{ km s}^{-1}$ y para el gas ionizado es de $a_{II} \sim 10 \text{ km s}^{-1}$. Por tanto, el radio gravitacional para un flujo dominado por el EUV es de $r_{gII} \sim 2 \text{ AU}$ y para un flujo dominado por el FUV es de $r_{gI} \sim 20 \text{ AU}$.

1.4. Objetos LL

1.4.1. Mapa de Objetos



1.5. Regiones HII (Stahler & Palla, 2004)

Consideremos el caso en que se forma una estrella masiva dentro de una nube molecular, que por simplicidad está compuesta exclusivamente de hidrógeno molecular H_2 . La estrella masiva emite fotones ultravioleta que tienen la energía suficiente para disociar el H_2 como para ionizar el hidrógeno atómico resultante. Luego el plasma ionizado se recombina para volver a ser H_I emitiendo líneas espectrales de diversas energías, siendo la más energética la línea de Ly α . Como al realizar una ionización se pierde un fotón ionizante y el flujo de radiación proveniente de la estrella es finito, entonces la estrella solo puede ionizar la región de la nube más próxima a ésta. Si suponemos que la nube tiene densidad uniforme, entonces esta región tendrá forma esférica, conocida como *esfera de Strömgren*.

1.5.1. Esfera de Strömgren

El plasma ionizado dentro de la Esfera de Strömgren se encuentra en balance de ionización, esto es, que la tasas de ionización y la de recombinación son iguales. La tasa de ionizaciones es igual a la cantidad de fotones ionizantes que emite la estrella central por segundo. Esto es, los fotones que poseen una energía mayor al límite de Lyman, que corresponde a $E = 13.6 \text{ eV}$, o bien $\lambda = 912 \text{ Å}$. En la tabla 1.1 se muestra la tasa de fotones ionizantes \mathcal{N}_* para estrellas masivas de tipo espectral O y B temprano.

El radio de esta esfera se denomina *Radio de Strömgren* que viene dado por:

$$R_s = \left[\frac{3\mathcal{N}_*}{4\pi\alpha'_{rec}(n_H^0)^2} \right]^{1/3} = 0.4 \text{ pc} \left(\frac{\mathcal{N}_*}{10^{49} \text{ s}^{-1}} \right)^{1/3} (n_{H_2})^{-2/3} \quad (1.2)$$

Donde α'_{rec} es el coeficiente de recombinación a todos los niveles energéticos del hidrógeno excepto el estado base, n_H^0 y n_{H_2} son la densidad numérica del hidrógeno neutro y del hidrógeno molecular donde está embebida la región HII, respectivamente.

Tipo Espectral	Masa (M_\odot)	$\log \mathcal{N}_*$ (s^{-1})	$\log \mathcal{N}_{FUV}$ (s^{-1})
O4	70	49.9	49.5
O5	60	49.4	49.2
O6	40	48.8	48.8
O7	30	48.5	48.6
O8	23	48.2	48.4
O9	20	47.8	48.2
B0	18	47.1	48.1
B1	13	45.4	47.5
B2	10	44.8	47.1

Cuadro 1.1: Tasa de fotones ionizantes para estrellas masivas (Stahler & Palla, 2004)

En la expresión numérica, se adopta una temperatura de 10^4 K que es la temperatura característica de una región *HII* y con la que el coeficiente de recombinación α'_{rec} adopta un valor de $2,6 \times 10^{-13} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$.

Dentro de la región *HII*, la probabilidad por unidad de tiempo de ionizar un átomo de hidrógeno dado es mucho mayor a la probabilidad de una recombinación, por lo que el gas está casi completamente ionizado. Sin embargo, en los bordes de la región *HII*, la densidad de gas neutro aumenta debido a que en dicha región el flujo de fotones ionizantes ha sido atenuado por todo el gas ionizado más próximo a la estrella. La transición de gas ionizado a gas neutro tiene un grosor Δr que corresponde al camino libre medio del gas neutro. Esto es:

$$\Delta R = \frac{1}{\sigma_{\nu_1} n_H^0} \quad (1.3)$$

Donde σ_{ν_1} es la sección recta de un átomo de hidrógeno en el estado base, evaluada en la longitud de onda del límite de Lymann. Utilizando $\sigma_{\nu_1} = 6,8 \times 10^{-18} \text{ cm}^2$ y $n_H^0 = 2 \times 10^3 \text{ cm}^{-3}$ obtenemos que $\Delta r = 7,4 \times 10^{13} \text{ cm} \sim 5 \times 10^{-5} R_s$, lo que muestra que las regiones *HII* tienden a tener bordes bien delimitados.

1.5.2. Primera y Segunda expansión

Las esferas de Strömgren no son objetos estáticos, sino que se expanden con el tiempo. Este proceso ocurre en dos etapas: en la primera inicialmente no existe ninguna región *HII* pero que la radiación ultravioleta de la estrella hace que se expanda rápidamente al disociar e ionizar el gas a su alrededor hasta alcanzar el radio de Strömgren. En la segunda expansión la diferencia de presiones entre el gas ionizado de la región *HII*, mucho mayor que la del gas neutro que lo rodea, provoca otra expansión más lenta que la primera hasta que haya equilibrio de presión.

El radio de la región *HII* durante la primera expansión se comporta siguiendo la siguiente expresión:

$$\lambda(\tau) = \left[1 - \exp\left(-\frac{2}{3}\tau\right) \right]^{1/3} \quad (1.4)$$

Donde $\lambda \equiv R/R_s$, $\tau \equiv t/t_{rec}$ y $t_{rec} \equiv \frac{1}{n_H^0 \alpha_{rec}}$ que es el tiempo medio de recombinación del hidrógeno.

De la ecuación (1.4) vemos que cuando han pasado una y media veces del tiempo de recombinación, la región *HII* se ha expandido alrededor del 86 % del radio de Strömgren, y aunque la expansión se va descelerando constantemente, ya es de una extensión considerable.

La velocidad del sonido en el gas ionizado con temperatura de $\sim 10^4$ K es de $a_{II} \sim 10 \text{ km s}^{-1}$, si comparamos esta velocidad con la media de la velocidad del frente de ionización, por ejemplo, en el intervalo $0 < \tau < \frac{3}{2}$, en el que ya comprobamos que el frente de ionización casi alcanza el radio de Strömgren, encontramos lo siguiente:

$$\bar{v}_{IF} = \frac{R_s}{t_{rec}} \frac{1}{\frac{3}{2} - 0} \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{d\lambda}{d\tau} d\tau = \frac{2R_s}{3t_{rec}} \lambda(3/2) \quad (1.5)$$

Con los valores típicos adoptados en esta sección obtenemos que:

$$\bar{v}_{IF} \simeq 135 \text{ km s}^{-1} \left(\frac{\mathcal{N}_*}{10^{49} \text{ s}^{-1}} \right)^{1/3} (n_{H_2})^{-2/3} \quad (1.6)$$

Para la segunda expansión encontramos lo siguiente:

$$\lambda = \left(1 + \frac{7\tau'}{4}\right)^{4/7} \quad (1.7)$$

Donde $\tau' \equiv a_1 \frac{t}{R_s}$ y a_1 es la velocidad del sonido del gas ionizado.

1.5.3. Flujos de Champaña

La segunda expansión lleva a que la región H II se expanda dos órdenes de magnitud por encima del radio de Strömgren, pero el tiempo que toma alcanzar dichas dimensiones es tan largo que la estrella central muere antes de se alcance el equilibrio de presiones. Sin embargo, es más probable que el frente de ionización rebase el borde de la nube molecular donde se formó, y en este caso el gas ionizado altamente presurizado escapa directamente hacia el medio interestelar que lo rodea (que tiene una presión aún menor que la de la nube molecular), creando el *Flujo de champaña*.

1.5.4. Características de la emisión



Capítulo 2

Conceptos fundamentales

Para este trabajo consideramos en general dos modelos de interacción de vientos:

- Una fuente localizada en el origen que emite un viento esférico que puede ser isotrópico o anisotrópico (figura 2.1) no acelerado que interactúa con el viento esférico isotrópico de otra fuente que se encuentra a una distancia D de la primera (figura 2.2). A los choques de proa resultantes se conocen como “Cantoides” y “Ancantoides”, respectivamente.
- Una fuente localizada en el origen que emite un viento esférico isotrópico no acelerado que interactúa con un viento plano paralelo no acelerado y densidad constante (figura 2.2b). Los choques resultantes en este caso se conocen como “Wilkinoides”.

Para caracterizar al choque de proa utilizaremos coordenadas esféricas, siguiendo la simetría del viento interior. La forma del choque de proa medido a partir del origen es $R(\theta, \phi)$, donde θ y ϕ son el ángulo polar y azimutal, respectivamente. Asumiendo simetría cilíndrica en el sistema, esta función se simplifica a $R(\theta)$.

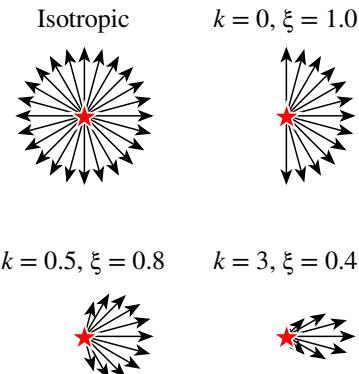


Figura 2.1: Representación esquemática de vientos con diferentes anisotropías: Arriba izquierdo: Viento isotrópico esférico. Arriba derecho: viento isotrópico hemisférico. Abajo: Vientos anisotrópicos donde el parámetro k indica el grado de anisotropía (ver capítulo 3)

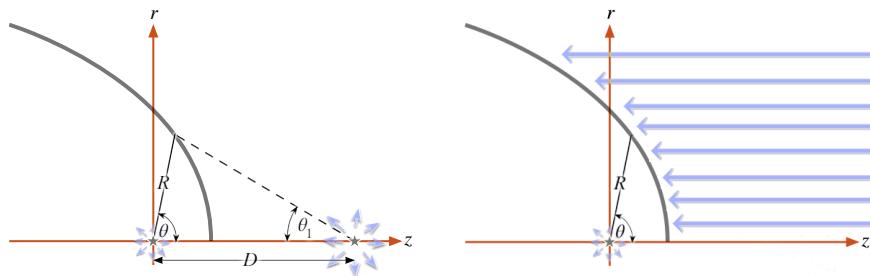


Figura 2.2: Izquierda: Representación esquemática del problema de interacción de dos vientos esféricos: Dos fuentes separadas por una distancia R emitir un viento radial que forma un choque de proa a una distancia R del origen. El sistema tiene geometría cilíndrica siendo el eje z el eje de simetría. La forma del choque es función únicamente del ángulo polar θ , medido a partir del origen. Otro ángulo que es de utilidad es θ_1 , que corresponde al ángulo polar medido a partir de la posición de la otra fuente. Cuando el viento interior tiene densidad constante y es esférico, denominamos al choque resultante como “cantoide”, mientras que si su densidad sigue una ley de potencias de $\cos \theta$, siguiendo la ecuación (3.13) del capítulo 3, será un choque “ancantoide”. Derecha: Representación esquemática de la interacción de un choque esférico e isotrópico con una corriente plano-paralela de densidad y velocidad constantes. El choque resultante es en este caso de tipo “wilkinode”.

2.1. Parámetros Fundamentales

El valor mínimo de $R(\theta)$, bajo las condiciones ya mencionadas, ocurre en el ápex ($\theta = 0$), y lo denotamos como R_0 . Bajo la condición de estado estacionario, la condición de equilibrio de presión ram entre ambos vientos implica que:

$$\frac{R_0}{D} = \frac{\beta^{1/2}}{1 + \beta^{1/2}} \quad (2.1)$$

Donde β es la tasa de momentos entre los vientos en interacción. Si los dos vientos son isotrópicos, donde la tasa de pérdida de masa del viento interior es \dot{M}_w y su velocidad terminal es v_w y para el viento exterior estas cantidades son \dot{M}_{w1} y v_{w1} , entonces la tasa de momentos es:

$$\beta = \frac{\dot{M}_w v_w}{\dot{M}_{w1} v_{w1}} \quad (2.2)$$

En el caso de que el viento exterior sea una corriente plano-paralela (tipo wilkinoide, siguiendo a Wilkin (1996)), correspondería al caso en que $\beta \rightarrow 0$, entonces D deja de ser un parámetro relevante, ya que técnicamente $D \rightarrow \infty$.

En el caso de que el viento interior no sea isotrópico es tratado en el capítulo 3.

2.2. Planitud y “Alatud”

R_0 no indica la escala del choque de proa, pero para caracterizar su forma utilizamos parámetros adicionales, mostrados en la figura 2.3. El radio perpendicular R_{90} se obtiene evaluando la función $R(\theta)$ en $\theta = \pi/2$, mientras R_c es el radio de curvatura medido en la posición del ápex, que en coordenadas cilíndricas se calcula como sigue (ver apéndice C):

$$R_c = \frac{R_0^2}{R_0 - R_{\theta\theta,0}} \quad (2.3)$$

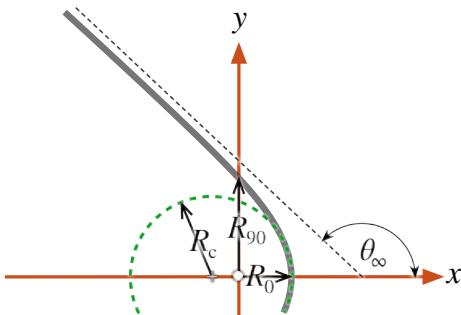


Figura 2.3: Representación esquemática de los radios característicos de un choque de proa

donde $R_{\theta\theta,0} \equiv \frac{d^2R}{d\theta^2}$ evaluado en $\theta = 0$.

Una forma simple de obtener el radio de curvatura es haciendo una expansión Taylor para la función $R(\theta)$ como sigue:

$$R(\theta) \simeq R_0 + \frac{1}{2}R_{\theta\theta,0}\theta^2 + \mathcal{O}(\theta^4) \quad (2.4)$$

y hacer un ajuste polinomial a $R(\theta)$ para $|\theta| < \Delta\theta$ y determinar R_0 y $R_{\theta\theta,0}$ de los primeros coeficientes del ajuste, y posteriormente R_c a partir de la ecuación 2.3. $\Delta\theta$ es el rango del ángulo polar dentro del cual se puede hacer el ajuste. $\Delta\theta = 30^\circ$ es una buena opción.

Un último parámetro es el ángulo asintótico de apertura de las alas, denotado como θ_∞ . Sin embargo, esta medida solo aplica para choques cuyas alas son asintóticamente cónicas, y aún para éstos en la mayoría de los casos es difícil de medirlo debido a que el ángulo polar θ tiende al valor asintótico muy lentamente y además la emisión de las alas es bastante débil. Por otro lado, los radios característicos (R_0, R_c, R_{90}) son medibles observacionalmente en la mayoría de los casos. A partir de éstos, podemos determinar dos parámetros adimensionales llamados “planitud” y “alatud”. El primero de éstos es una medida de qué tan plano es el choque de proa en la nariz o “apex”, y lo denotamos con la letra griega Π , mientras que el segundo es una medida de qué tanto se abren las alas del choque de proa, y lo denotamos con la letra griega Λ . Ambos parámetros se definen a continuación:

$$\Pi \equiv \frac{R_c}{R_0} \quad (2.5)$$

$$\Lambda \equiv \frac{R_{90}}{R_0} \quad (2.6)$$

2.3. Cuádricas de Revolución

En el caso general es difícil encontrar la forma aparente para un choque de proa siguiendo el formalismo desarrollado en la sección anterior, por lo que optamos por aproximar la forma éstos con una de las superficies más simples: las *cuádricas de revolución*, que son superficies de revolución de las curvas cónicas. Dado el modelo general descrito en la §2, haremos algunas restricciones para las superficies cuádricas que utilizaremos en este trabajo:

- El eje focal se encuentra alineado con el eje x
- La posición del foco de la superficie cuádrica no necesariamente coincide con la posición de la fuente
- En el caso de las hipérbolas, solo tomamos una de las ramas de ésta.

Implementando dichas restricciones, utilizamos la representación paramétrica de las curvas cónicas en términos de un parámetro adimensional denotado con la letra t :

$$x = x_0 + \sigma a \mathcal{C}(t) \quad (2.7)$$

$$y = b \mathcal{S}(t) \quad (2.8)$$

Donde:

$$\mathcal{C}(t), \mathcal{S}(t) = \begin{cases} \cos t, \sin t & \text{elipses} \\ \cosh t, \sinh t & \text{hipérbolas} \end{cases} \quad (2.9)$$

$$\sigma = \begin{cases} +1 & \text{elipses} \\ -1 & \text{hipérbolas} \end{cases} \quad (2.10)$$

$$x_0 = R_0 - \sigma a \quad (2.11)$$

Donde a y b representan la longitud de los semi-ejes de la cónica en cuestión (Figura 2.4). x_0 representa la distancia entre el centro de la cónica y el origen.

La forma polar del choque de proa $R(\theta)$ viene dada por:

$$\tan \theta = \frac{b\mathcal{S}(t)}{a\mathcal{C}(t) + x_0} \quad (2.12)$$

$$R = \left((a\mathcal{C}(t) + x_0)^2 + b^2\mathcal{S}^2(t) \right)^{1/2} \quad (2.13)$$

El tipo de cónica lo podemos caracterizar mediante el parámetro \mathcal{Q} , donde:

$$\mathcal{Q} \equiv \sigma \frac{b^2}{a^2} \quad (2.14)$$

Para las superficies abiertas (hiperboloides) tenemos que $\mathcal{Q} < 0$, mientras que para las superficies cerradas tenemos que $\mathcal{Q} > 0$. Casos particulares son la esfera $\mathcal{Q} = 1$ y el paraboloide $\mathcal{Q} = 0$. De manera equivalente se puede definir el ángulo θ_Q como sigue:

$$\tan \theta_Q = \sigma \frac{b}{a} \quad (2.15)$$

Este ángulo se relaciona con la excentricidad de las cónicas (y que sustituye a esta última en este trabajo) como se muestra a continuación:

$$\tan \theta_Q = \sigma \sqrt{|1 - e^2|} \quad (2.16)$$

El set de parámetros (a, x_0, \mathcal{Q}) es suficiente para caracterizar a nuestras cuádricas de revolución: \mathcal{Q} nos indica el tipo de cónica, a establece la escala y x_0 el desplazamiento del centro a lo largo del eje x. Sin embargo, para futuras aplicaciones tanto a modelos de interacción de vientos como a observaciones (capítulos 3 y 4) nos sería útil hacer la caracterización mediante los parámetros (R_0, Π, Λ) (ver §2.2). Las equivalencias entre los dos sets de parámetros los calculamos a continuación:

$$R_c = \frac{b^2}{a} = a|\mathcal{Q}| \quad (2.17)$$

$$R_{90}^2 = b^2\sigma \left(1 - \frac{x_0^2}{a^2} \right) = \mathcal{Q} (a^2 - x_0^2) \quad (2.18)$$

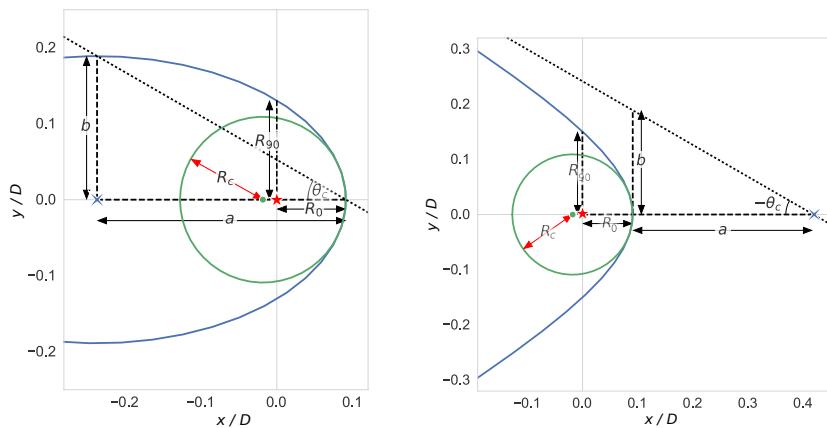


Figura 2.4: Representación esquemática de: Izquierda: Elipse. Y, derecha: Hipérbola. En ambos casos se ilustran los parámetros relevantes de éstas y los radios característicos

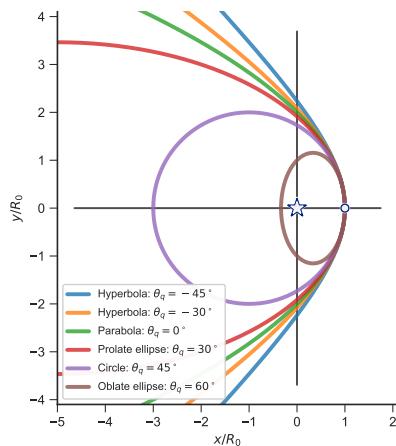


Figura 2.5: Familia de curvas cónicas, donde el valor del parámetro θ_Q varía desde $\theta_Q < 0$ (hipérbolas) hasta $\theta_Q > 0$ (elipses). Casos especiales son $\theta_Q = 0$ (parábola) y $\theta_Q = 45^\circ$ (círculo). Este parámetro sustituye en este trabajo a la excentricidad.

Combinando las ecuaciones (2.5, 2.6, 2.11, 2.14, 2.17, 2.18), obtenemos lo siguiente:

$$R_0 = x_0 + \sigma a \quad (2.19)$$

$$\Pi = \frac{a|\mathcal{Q}|}{x_0 + \sigma a} = \frac{a\mathcal{Q}}{\sigma(x_0 + \sigma a)} = \frac{a\mathcal{Q}}{(a + \sigma x_0)} \quad (2.20)$$

$$\Lambda = \left(\mathcal{Q} \frac{a - \sigma x_0}{a + \sigma x_0} \right)^{1/2} \quad (2.21)$$

De aquí podemos escribir el parámetro de las cuádricas \mathcal{Q} en términos de la planitud y la alatud:

$$\mathcal{Q} = 2\Pi - \Lambda^2 \quad (2.22)$$

Por tanto, el signo de $2\Pi - \Lambda^2$ determina si una cuádrica es esferoidal o hiperboloidal. En la figura 2.5 mostramos como, para planitud constante, podemos tener una familia de cónicas variando únicamente la alatud, y por consiguiente, el parámetro \mathcal{Q} .

2.4. Proyección en el Plano del Cielo

Para un choque de proa que es la vez geométricamente delgado y ópticamente delgado, únicamente se observa el borde de éste por abrillantamiento al limbo, por lo tanto, su orientación respecto a la línea de visión modifica su forma respecto a la forma real del choque. Para ello, rotamos el sistema de referencia del choque de proa en coordenadas cartesianas, denotado por (x, y, z) , por un ángulo que llamamos *inclinación*, denotado por i , en el plano xz . La inclinación está definida de modo que cuando $i = 0^\circ$ el eje de simetría del choque es perpendicular a la línea de visión, es decir, lo observamos “de canto”. Y cuando $i = 90^\circ$ el eje desimetría es paralelo a la línea de visión, es decir, que lo observamos “de frente”. De este modo la transformación entre el sistema de referencia del choque y el sistema de referencia del plano del cielo,

denotado por (x', y', z') queda como sigue:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \mathbf{A}_y(i) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos i - z \sin i \\ y' \\ z \cos i + x \sin i \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Donde $\mathbf{A}_y(i)$ está definida por la ecuación (B.4) en el apéndice B. Por otro lado, la forma tridimensional del choque de proa viene dado por una rotación alrededor del eje x de su forma bidimensional en coordenadas polares utilizando la matriz de rotación $\mathbf{A}_x(\phi)$ definida en (B.5):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{A}_x(\phi) \begin{pmatrix} R(\theta) \cos \theta \\ R(\theta) \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(\theta) \cos \theta \\ R(\theta) \sin \theta \cos \phi \\ R(\theta) \sin \theta \sin \phi \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

La relación entre ambos sistemas de referencia se ilustra en la figura 2.6.

2.4.1. Vectores normal y tangente a la superficie

Si definimos los vectores \hat{n} y \hat{t} , como los vectores normal y tangente a la superficie, respectivamente para ϕ constante. En el caso $\phi = 0$ (figura 2.7), ambos vectores se encuentran en el plano xy y es fácil mostrar que:

$$\hat{t}_0 = \begin{pmatrix} -\cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \hat{n}_0 = \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

Donde:

$$\tan \alpha = -\frac{dy}{dx} = \frac{1 + \omega \tan \theta}{\tan \theta - \omega} \quad (2.26)$$

y:

$$\omega(\theta) = -\frac{1}{R} \frac{dR}{d\theta} \quad (2.27)$$

Para $\phi \neq 0$, basta con hacer una rotación de las ecuaciones (2.25) alrededor del eje x utilizando la matriz de rotación $\mathbf{A}_x(\phi)$:

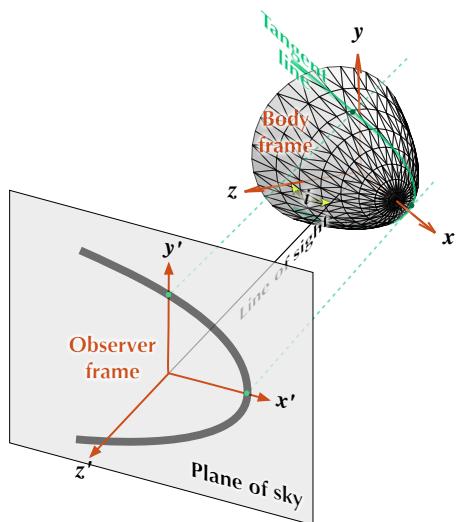


Figura 2.6: Sistema de referencia del choque vs sistema de referencia del plano del cielo. Los ejes x' y y' se encuentran en el plano del cielo, mientras el eje z' es paralelo a la línea de visión. Solo la región del choque cuya tangente sea paralela a la línea de visión será visible por abrillantamiento al limbo.

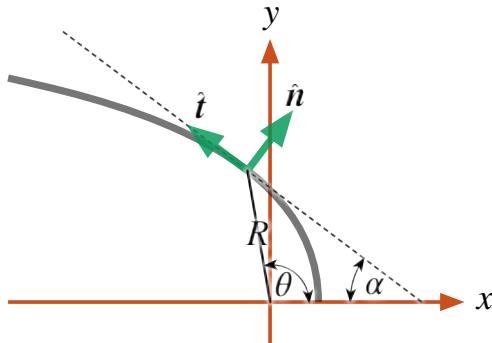


Figura 2.7: Vectores unitarios normal y tangente a la superficie $R(\theta)$ en un plano de azimuth ϕ constante.

$$\hat{n} = \mathbf{A}_x(\phi)\hat{n}_0 = \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \cos \phi \\ \cos \alpha \sin \phi \end{pmatrix} \quad \hat{t} = \mathbf{A}_x(\phi)\hat{t}_0 = \begin{pmatrix} -\cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \phi \\ \sin \alpha \sin \phi \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

2.4.2. Línea tangente

Debido a que el choque es ópticamente delgado y geométricamente delgado, solo la región del choque cuya tangente sea paralela a la línea de visión será visible. Esto corresponde a una curva que denominamos *línea tangente*, que debe cumplir con la siguiente condición:

$$\hat{n} \cdot \hat{z}' = 0 \quad (2.29)$$

Denotamos como ϕ_T al ángulo azimutal que cumple la condición anterior para una inclinación dada, en función del ángulo polar θ :

$$\sin \phi_T = -\tan i \tan \alpha = \tan i \frac{1 + \omega \tan \theta}{\omega - \tan \theta} \quad (2.30)$$

De esta manera, la forma de la línea tangente del choque de proa, a la que llamamos *forma proyectada* viene dada por:

$$\begin{pmatrix} x'_T \\ y'_T \\ z'_T \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} \cos \theta \cos i - \sin \theta \sin \phi_t \sin i \\ \sin \theta (1 - \sin^2 \phi_t)^{1/2} \\ \cos \theta \sin i + \sin \theta \sin \phi_t \cos i \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

En el caso general, z'_T no es una función lineal de x'_T y y'_T , por lo que la línea tangente no se encuentra en un plano. La forma aparente (x'_T, y'_T) de la línea tangente también puede escribirse en coordenadas polares (R', θ') , donde:

$$R'(\theta) = (x'^2_T + y'^2_T)^{1/2} \quad \text{y} \quad \tan \theta' = \frac{y'_T}{x'_T} \quad (2.32)$$

Es de notar a su vez que la ecuación (2.30) no tiene solución para valores arbitrarios de θ y de la inclinación, puesto que se requiere que $|\sin \phi_t| < 1$. Por tanto, la línea tangente solo existe para valores de θ tales que $\theta < \theta_0$ donde θ_0 es el valor de θ en el eje de simetría de la línea tangente proyectada ($\theta'(\theta_0) = 0$) y que se obtiene resolviendo la siguiente ecuación implícita:

$$\tan \theta_0 = \frac{|\tan i| + \omega(\theta_0)}{1 - \omega(\theta_0)|\tan i|} \quad (2.33)$$

Esto implica que si el choque de proa es suficientemente “abierto” ($\alpha > \alpha_{min}$), entonces para inclinaciones tales que $|i| > 90^\circ - \alpha_{min}$ no existirá la línea tangente para ningún valor de θ , es decir, el choque de proa se encontrará suficientemente “de cara” como para que ya no parezca un choque de proa para el observador.

2.4.3. Planiud y Alatud proyectadas: caso general

En orden de comparar la forma $R(\theta)$ con observaciones, es útil definir los radios característicos R'_0 y R'_{90} , donde R'_0 es el radio del eje de simetría aparente y R'_{90} es el radio aparente en la dirección perpendicular a R'_0 . Es decir $R'_0 = x'_T(y'_t = 0)$ y $R'_{90} = y'_t(x'_t = 0)$. Utilizando las ecuaciones (2.30) y (2.31) encontramos que:

$$R'_0 = R(\theta_0) \cos(\theta_0 - |i|)^1 \quad (2.34)$$

Donde θ_0 es la solución de la ecuación (2.33), y

$$R'_{90} = R(\theta_{90}) \sin \theta_{90} (1 - \sin^2 \phi_T(\theta_{90}))^{1/2} \quad (2.35)$$

donde θ_{90} es la solución de la siguiente ecuación implícita:

$$\cot \theta_{90} = \frac{1 - (1 + \omega(\theta_{90})^2 \sin^2 2i)^{1/2}}{2\omega(\theta_{90}) \cos^2 i} \quad (2.36)$$

El radio de curvatura aparente se obtiene a partir de la ecuación (2.3)
pero en el sistema de referencia primado:

$$R'_c = \frac{R'_0}{R'_0 - R'_{\theta'\theta',0}} \quad (2.37)$$

2.4.4. Aplicación a las Cuádricas de Revolución

El objetivo de esta sección es obtener la forma proyectada de las cuádricas de revolución, puesto que son una aproximación buena y mucho más sencilla a la forma real de un choque de proa. Para esto es conveniente utilizar un sistema de referencia donde el origen se ubica en el centro de la sección cónica:

$$(X, Y, Z) = (x - x_0, y, z) \quad (2.38)$$

De esta manera, la forma de la cuádrica de revolución es:

$$X = a\mathcal{C}(t) \quad (2.39)$$

$$Y = b\mathcal{S}(t) \cos \phi \quad (2.40)$$

$$Z = b\mathcal{S}(t) \sin \phi \quad (2.41)$$

¹Evaluando la ecuación (2.30) en $\theta = \theta_0$ con ayuda de la ecuación (2.33) encontramos que $\sin \phi_T(\theta_0) = -\frac{\tan i}{|\tan i|}$ por lo que al sustituir este resultado en la componente x de la ecuación (2.31) encontramos que $R'_0 = R(\theta_0) \left(\cos \theta_0 \cos i + \sin \theta_0 \sin i \frac{\tan i}{|\tan i|} \right)$ que finalmente se reduce al resultado de la ecuación (2.34)

Siguiendo el procedimiento mostrado en la §2.4 calculamos el ángulo azimutal ϕ que cumple con el criterio de ser tangente a la línea de visión:

$$\sin \phi_T = \frac{b\mathcal{C}(t)}{a\mathcal{S}(t)} \tan i \quad (2.42)$$

Ahora utilizamos la ecuación (2.23) para obtener la forma aparente de una cuádrica dada:

$$X'_T = \frac{\mathcal{C}(t)}{a \cos i} (a^2 \cos^2 i + \sigma b^2 \sin^2 i) \quad (2.43)$$

$$Y'_T = b\mathcal{S}(t) \left(1 - \frac{b^2 \mathcal{C}^2(t)}{a^2 \mathcal{S}^2(t)} \tan^2 i \right)^{1/2} \quad (2.44)$$

Podemos mostrar que la forma proyectada de una sección cónica (elipse o hipérbola), es de la misma clase que la sección cónica original. Si ese fuera el caso, entonces podemos escribir las ecuaciones (2.43, 2.44) de la siguiente manera:

$$X'_T = a'\mathcal{C}(t') \quad (2.45)$$

$$Y'_T = b'\mathcal{S}(t') \quad (2.46)$$

Después de un poco de álgebra encontramos que nuestra suposición es consistente, con las siguientes equivalencias:

$$a' = a \cos i f_{Q,i} \quad (2.47)$$

$$b' = b \quad (2.48)$$

$$\mathcal{C}(t') = f_{Q,i} \mathcal{C}(t) \quad (2.49)$$

Donde introducimos el factor de proyección de las cuádricas:

$$f_{Q,i} = (1 + Q \tan^2 i)^{1/2} \quad (2.50)$$

Como ya demostramos que la forma proyectada de la línea tangente de una superficie cuádrica es una sección cónica del mismo tipo, entonces podemos determinar la forma proyectada reutilizando las ecuaciones

(2.19-2.22) sustituyendo las cantidades no primadas por sus equivalentes primados. De esta manera, utilizando las ecuaciones (2.14, 2.47, 2.48) encontramos que el parámetro de las cuádricas para la forma proyectada es:

$$\mathcal{Q}' = \frac{\mathcal{Q}}{f_{\mathcal{Q},i}^2 \cos^2 i} \quad (2.51)$$

Ahora regresamos al sistema de referencia centrado en la estrella:

$$(x'_T, y'_T) = (X'_T + x'_0, Y'_T) \quad (2.52)$$

donde el desplazamiento proyectado x'_0 es:

$$x'_0 = x_0 \cos i \quad (2.53)$$

La proyección de la distancia al ápex viene dada por la versión primada de la ecuación (2.19):

$$R'_0 = x'_0 + \sigma a' \quad (2.54)$$

$$\Rightarrow \frac{R'_0}{R_0} = \cos i \left[1 + \frac{\Pi}{\mathcal{Q}} (1 - f_{\mathcal{Q},i}) \right] \quad (2.55)$$

Asimismo la planitud y la alatud proyectada pueden calcularse a partir de las ecuaciones (2.20, 2.22, 2.47, 2.51):

$$\Pi' = \frac{\Pi}{(R'_0/R_0) f_{\mathcal{Q},i} \cos i} \quad (2.56)$$

$$\Lambda' = (2\Pi' - \mathcal{Q}')^{1/2} \quad (2.57)$$

En la figura (2.8) mostramos el comportamiento de la planitud y la alatud aparente con la inclinación para distintos valores del parámetro \mathcal{Q} (color) y de la planitud Π (grosor de la curva). Se puede observar que para las superficies elipsoidales ($\mathcal{Q} > 0$), la planitud y alatud aparente tienden a $\Pi' = \Lambda' = 1$ conforme $i \rightarrow 90^\circ$. Esto se debe a que en este

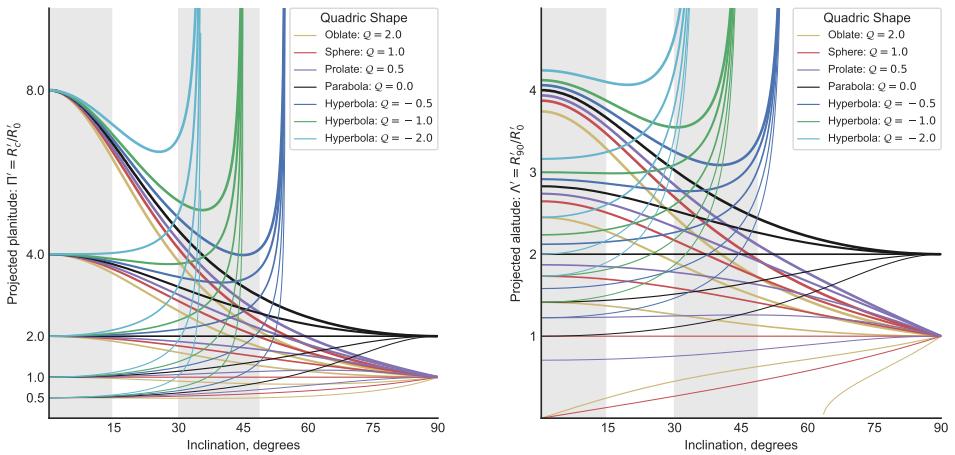


Figura 2.8: Efectos de la proyección sobre las cuádricas de revolución con la inclinación $|i|$. Los colores de las curvas representan variaciones en el parámetro Q de las cuádricas. El grosor de la curva indica el valor de la planitud intrínseca Π . Los rectángulos sombreados muestran cuartiles de $|\sin i|$ que se encuentran equitativamente poblados para una distribución isotrópica de orientaciones. (a) Planitud aparente Π' . (b) Alatud aparente Λ'

límite observamos la superficie de frente y vemos su sección transversal circular. En el caso del paraboloide la convergencia se da a $\Lambda' = \Pi' = 2$.

Por otro lado, la planitud y alatud aparente divergen cuando $|i| \rightarrow i_{\text{crit}} = 90^\circ - |\theta_Q|$ debido a que cuando $|i| > i_{\text{crit}}$ ya no existe una línea tangente a la línea de visión y por tanto no se observaría abrillantamiento al limbo. También cabe destacar dos casos particulares: El esferoide confocal con planitud unitaria ($\Pi = 1$) y el paraboloide confocal ($\Pi = \Lambda = 2$). En estos dos casos su forma aparente no se ve afectada por la inclinación.

En la figura 2.9a observamos el diagrama de diagnóstico $\Pi' - \Lambda'$. Cada curva representa a una cuádrica de revolución siguiendo la misma convención que en la figura 2.8 para los valores de Q y Π y variando la inclinación a lo largo de cada una de éstas, donde además el punto donde $i = 0$ (cuádrica vista de canto) se marca con un punto. Las regiones sombreadas representan a cada clase de cuádrica, la zona superior más

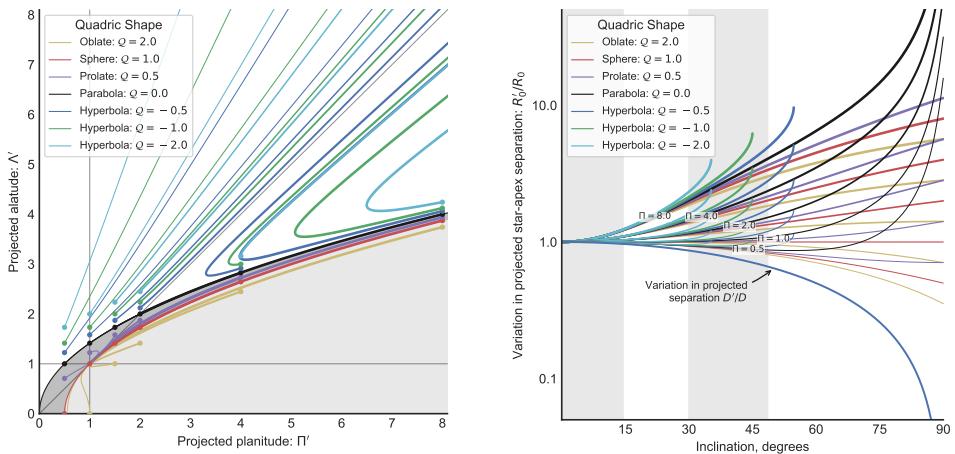


Figura 2.9: (a) Diagrama de diagnóstico Λ' vs Π' para diferentes tipos de cuádricas: esferoides oblatos (amarillo), esferoides (rojo), esferoides prolatos (morado), paraboloides (negro) e hiperboloides (azul, verde y turquesa). Cada punto de una curva representa un valor diferente de la inclinación, y se muestran explícitamente las inclinaciones múltiples de 15° , con la forma de círculos rellenos. Las regiones sombreadas representan al tipo de cuádrica que mejor ajusta a los parámetros (Π', Λ') cubiertos. La región clara para los hiperboloides, la región gris oscura para los esferoides prolatos y la región gris clara para los hiperboloides oblatos. La interfaz entre la región de hiperboloides y esferoides prolatos corresponde a los paraboloides y la región entre esferoides prolatos y oblatos a los esferoides. (b) Distancia proyectada R'_0/R_0 versus $|I|$.

clara a los hiperboloides, la zona gris delgada a los elipsoides prolatos, la interfaz entre estas dos últimas a los hiperboloides y la zona gris inferior a los elipsoides oblato. Se puede observar que en ningún caso las curvas cruzan de una región a otra. También se observa de nuevo que las curvas elipsoidales convergen a $(\Pi', \Lambda') = (1, 1)$, las curvas hiperbólicas a $(\Pi', \Lambda') = (+\infty, +\infty)$ y las parabólicas a $(\Pi', \Lambda') = (2, 2)$. Asimismo en la figura 2.9b observamos el comportamiento de la separación aparente

estrella–áplex con inclinación. En este caso se observa que para inclinaciones pequeñas ($|i| < 30^\circ$), esta separación depende muy poco del parámetro \mathcal{Q} , siendo más importante la planitud Π . Por otro lado, para inclinaciones mayores, la separación aparente se incrementa cada vez más rápido para cuádricas abiertas ($\mathcal{Q} \leq 0$), mientras que para los elipsoides la separación es cada vez más lenta e incluso puede decrecer con inclinación.

De manera complementaria en la figura 2.10 mostramos una visión complementaria del análisis de la forma aparente con la inclinación. En esta figura se toman “capturas” de (Π', Λ') en intervalos regulares de $\sin i$.

Los valores de la planitud y alatud intrínseca están uniformemente distribuidos en los intervalos $\Pi = [0,5, 4,5]$ y $\Lambda = [0,5, 4,5]$, lo que nos da un cuadrado uniformemente distribuido de valores cuando $|i| = 0$, y que se va distorsionando conforme $|i|$ se incrementa. La escala de color representa el parámetro \mathcal{Q} , incrementándose dicho parámetro desde el azul hasta el amarillo, pasando por el naranja, mientras que el tamaño del punto es proporcional a R'_0/R_0 . Se puede observar que todos los puntos tienden a la línea $\Pi' = \Lambda'$ a altas inclinaciones, y que los puntos azules quedan fuera del rango de la gráfica. Esto es porque a altas inclinaciones, para las formas muy abiertas ya no existe la línea tangente a la línea de visión. De hecho, la región verde sombreada es la región para la cual aun existe la línea de visión para cada inclinación y se hace cada vez más pequeña conforme la inclinación aumenta. Esta figura es meramente cualitativa, puesto que no hay razón para esperar una distribución uniforme de planitud y alatud (en el siguiente capítulo encontramos que en el modelo de capa delgada no encontramos formas cuyo parámetro \mathcal{Q} sea mayor a 1, por ejemplo).

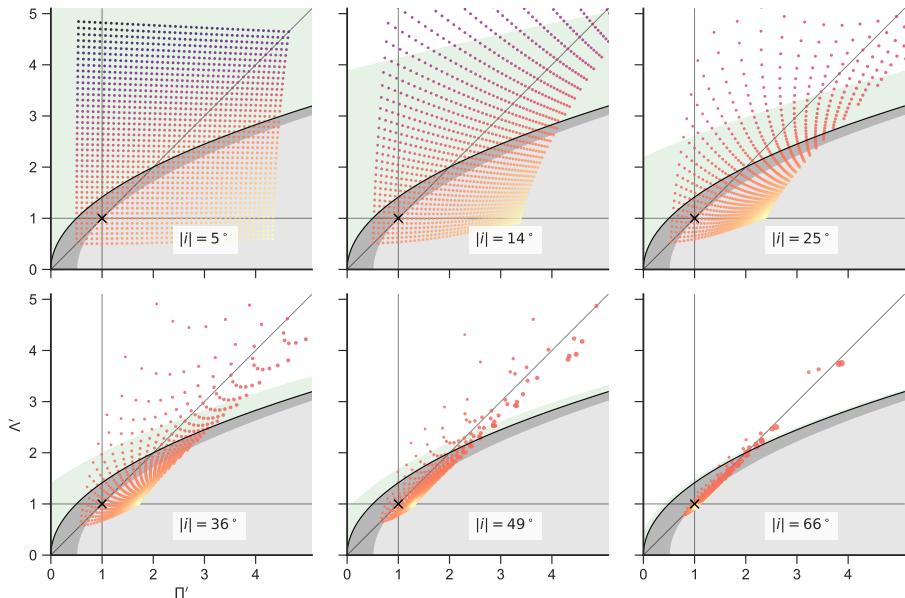


Figura 2.10: Efectos de la inclinación de la forma aparente de arcos cuádricos cuya planitud y alatud están uniformemente distribuidos en los rangos $\Pi = [0,5, 4,5]$, $\Lambda = [0,5, 4,5]$. En cada pánel se muestra la forma aparente incrementando la inclinación en intervalos iguales de $|\sin i|$. El color representa el parámetro Q , desde azul (menor valor de Q , que representa formas más abiertas), pasando por naranja, hasta amarillo (elipsoides oblatos). El tamaño representa la distancia aparente estrella–ápex R'_0/R_0 .

Capítulo 3

Modelo de Capa Delgada

Un ejemplo más realista para la forma de los choques de proa proviene de modelos hidrodinámicos en estado estacionario de la interacción de flujos hipersónicos en el límite de capa delgada. Ejemplos clásicos son la interacción entre dos vientos de Canto et al. (1996) (CRW de aquí en adelante) y la interacción entre un viento con una corriente plano-paralela (Wilkin, 1996).

3.1. Cantidades conservadas en un flujo hipersónico de capa delgada

Consideramos dos flujos hipersónicos, no acelerados que forman una capa estacionaria delgada formada por dos choques radiativos separados por una discontinuidad de contacto. El sistema tiene geometría cilíndrica y los vientos no tienen velocidad azimutal. Bajo estos términos, describimos la posición de la capa delgada como $R(\theta)$, donde R es el radio de la capa medida a partir de la posición del origen del viento con menor momento y θ es el ángulo polar. Asumimos que el gas chocado está bien mezclado, esto implica que tiene una sola velocidad pos-choque dada por:

$$\vec{v} = v_r \hat{r} + v_z \hat{z} \quad (3.1)$$

Donde el eje de simetría del sistema es paralelo a \hat{z} , y \hat{r} es el radio cilíndrico. Definimos $\dot{M}(\theta)$, $\vec{\Pi}(\theta)$ y $\vec{J}(\theta)$ como la tasa de pérdida de masa, la tasa de momento y la tasa de momento angular, respectivamente, de la capa delgada integradas desde $\theta = 0$ hasta θ . Éstas se calculan de la siguiente manera:

$$\vec{\Pi}(\theta) = \dot{\Pi}_r(\theta)\hat{r} + \dot{\Pi}_z(\theta)\hat{z} = \dot{M}(v_r\hat{r} + v_z\hat{z}) \quad (3.2)$$

$$\vec{J}(\theta) = \vec{R}(\theta) \times \vec{\Pi}(\theta) \quad (3.3)$$

$$\dot{M}(\theta) = \dot{M}_w(\theta) + \dot{M}_{w1} \quad (3.4)$$

Donde $\vec{R}(\theta) \equiv R(\theta) \sin \theta \hat{r} + R(\theta) \cos \theta \hat{z}$. Resolviendo el producto cruz y tomando su magnitud encontramos que:

$$\vec{J}(\theta) = \dot{M}(\theta)R(\theta)v_\theta \quad (3.5)$$

$$\text{donde : } v_\theta = v_r \cos \theta - v_z \sin \theta \quad (3.6)$$

Por otro lado, al asumir estado estacionario, necesitamos que la tasa de pérdida de masa, la tasa de momento y la tasa de momento angular de la capa delgada sean iguales a aquellas inyectadas por los dos vientos.

Entonces definimos estas cantidades como \dot{M}_w , $\dot{\Pi}_{wr}$, $\dot{\Pi}_{wz}$ y \dot{J}_w para el viento con menor momento, y para el otro viento se utiliza la misma notación solo que utilizando el subíndice “w1”. De esta forma tenemos que:

$$\dot{\Pi}_r(\theta)\hat{r} + \dot{\Pi}_z(\theta)\hat{z} = [\dot{\Pi}_{wr}(\theta) + \dot{\Pi}_{wr1}(\theta)]\hat{r} + [\dot{\Pi}_{wz}(\theta) + \dot{\Pi}_{wz1}(\theta)]\hat{z} \quad (3.7)$$

$$\vec{J} = \dot{J}_w(\theta) + \dot{J}_{w1}(\theta) \quad (3.8)$$

$$\dot{M}(\theta) = \dot{M}_w(\theta) + \dot{M}_{w1}(\theta) \quad (3.9)$$

Combinando las ecuaciones (3.2, 3.4, 3.5, 3.7-3.9) encontramos que:

$$\dot{M}(\theta)[v_r\hat{r} + v_z\hat{z}] = (\dot{\Pi}_{wr}(\theta) + \dot{\Pi}_{wr1}(\theta))\hat{r} + (\dot{\Pi}_{wz}(\theta) + \dot{\Pi}_{wz1}(\theta))\hat{z} \quad (3.10)$$

$$\dot{M}(\theta)v_\theta R(\theta) = \dot{J}_w(\theta) + \dot{J}_{w1}(\theta) \quad (3.11)$$

Y finalmente combinando con la ecuación (3.6) resolvemos para $R(\theta)$:

$$R(\theta) = \frac{\dot{J}_w(\theta) + \dot{J}_{w1}(\theta)}{\left(\dot{\Pi}_{wr}(\theta) + \dot{\Pi}_{wr1}(\theta) \right) \cos \theta - \left(\dot{\Pi}_{wz}(\theta) + \dot{\Pi}_{wz1}(\theta) \right) \sin \theta} \quad (3.12)$$

3.2. Problema de Interacción de Dos Vientos

Aplicamos el formalismo ya mencionado para la interacción de dos vientos radiales. El viento con menor momento se localiza en el origen, y su densidad a radio fijo varía con el ángulo polar como una ley de potencias (figura 2.1), o bien, un viento interno con densidad constante e isotrópica:

$$n_{An}(\theta) = \begin{cases} n_0 \cos^k \theta & \text{si } \theta \leq 90^\circ \\ 0 & \text{si } \theta > 90^\circ \end{cases} \quad (3.13)$$

$$n_C = n_0 \quad (3.14)$$

Donde el índice k indica el grado de anisotropía del viento “interno”.

Cuando la densidad del viento está dada por la ecuación (3.14) denominamos a los choques resultantes como “cantoides”, por Canto et al. (1996), mientras que si la densidad está dada por (3.13) entonces los denominamos “Ancantoides”. Un caso particularmente interesantes son el viento para un prolyd (Henney & Arthur, 1998), donde ($k = 1/2$).

Por el momento restringimos al viento “externo” como isotrópico. El problema se muestra de manera esquemática en la figura 2.2.

Utilizando las ecuaciones (3.13, 3.14) encontramos que la tasa de pérdida de masa está dada por:

$$\dot{M}_w = \int_0^\theta \int_0^{2\pi} \rho_w v_w r_0^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \quad (3.15)$$

Donde v_w es la velocidad del viento inteno, $\rho_w = n\bar{m}$ es su densidad, n se obtiene de las ecuaciones (3.13), \bar{m} es la masa promedio de las partículas del viento y r_0 es el radio del viento al cual se alcanza la velocidad terminal v_w . Para un prolyd consideramos que dicho radio es el del frente de ionización.

Resolviendo (3.15) para vientos con densidades dadas por (3.13, 3.14), encontramos que:

$$\dot{M}_w = \dot{M}_w^0 \begin{cases} (1 - \cos^k \theta) & \text{Ancantoides} \\ \frac{1}{2} (1 - \cos \theta) & \text{Cantoides} \end{cases} \quad (3.16)$$

Donde:

$$\dot{M}_w^0 = \begin{cases} \frac{2\pi}{k+1} \bar{m} n_o v_w r_0^2 & \text{Ancantoides} \\ 4\pi \bar{m} n_o v_w r_0^2 & \text{Cantoides} \end{cases} \quad (3.17)$$

Con esto, obtenemos las tasas de momento y momento angular. Para los choques cantoides, los resultados corresponden a las ecuaciones (9-11) de CRW, sin embargo, para los choques ancantoides, las tasas de momento (axial y radial) y momento angular están dados por:

$$\dot{\Pi}_{wz} = \int_0^{\min(\theta, \pi/2)} v_w \cos \theta \, d\dot{M}_w = \frac{v_w \dot{M}_w^0}{2(k+2)} \max(1 - \cos^{k+2} \theta, 1) \quad (3.18)$$

$$\dot{\Pi}_{wr} = \int_0^{\min(\theta, \pi/2)} v_w \sin \theta \, d\dot{M}_w = \frac{1}{2} \dot{M}_w^0 v_w I_k(\theta) \quad (3.19)$$

$$\dot{J}_w = \int_0^{\min(\theta, \pi/2)} |\vec{R} \times \vec{v}_w| d\dot{M}_w = 0 \quad (3.20)$$

Donde:

$$I_k(\theta) = \int_0^{\min(\theta, \pi/2)} \cos^k \theta \sin^2 \theta \, d\theta \quad (3.21)$$

Esta última integral tiene una solución analítica en términos de una función hipergeométrica de la forma ${}_2F_1\left(-\frac{1}{2}; \frac{1+k}{2}; \frac{3+k}{2}; \cos^2 \theta\right)$. En el caso particular $k = 1/2$, este resultado se “simplifica” a una integral de segundo tipo de la forma $E\left(\frac{\theta}{2}|2\right)$, pero es más sencillo calcularla de manera numérica. La tasa de momento angular para el viento interior es cero debido a que éste se mide respecto al origen, donde se localiza la fuente con menor momento. En este punto los vectores de posición y velocidad para un valor de θ dado son paralelos.

Para el viento exterior utilizamos las ecuaciones (12-15) y (19-22) de CRW sin cambiar, pero las incluimos en las siguientes secciones por completez.

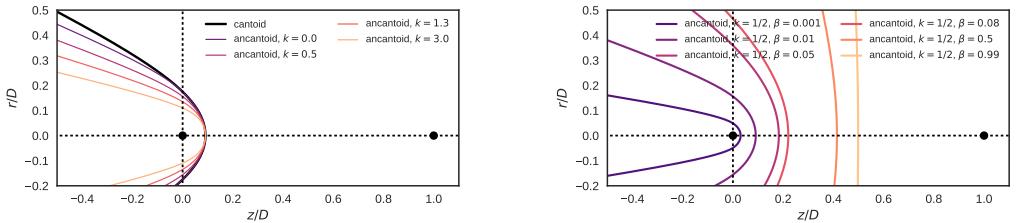


Figura 3.1: Forma de choques de proa de vientos en interacción. Las coordenadas están normalizadas con D , la distancia entre las fuentes de los vientos. La fuente del viento más débil se localiza en el origen $(0,0)$, mientras que la otra fuente se localiza en $(1,0)$, ambas marcadas con puntos negros. En (a) los choques de proa mostrados tienen un valor del parámetro $\beta = 0,01$ fijo, mientras que el índice de anisotropía k varía desde 0 hasta 3, mostrados en escala de colores verdes. El choque cantoide con $\beta = 0,01$ se muestra en negro. Nótese que el choque ancantoide con $k = 0$ es más cerrado en las alas que el tipo cantoide, debido a que en los choques ancantoides la densidad del viento cae a cero cuando $\theta \geq 90^\circ$, mientras que en los cantoídes la densidad del viento es constante para toda θ . En (b) el parámetro de anisotropía k es fijo con valor de $1/2$, mientras que el parámetro β varía desde 10^{-3} hasta $0,99$. La distancia al ápex R_0 se incrementa conforme β crece, llegando al valor asintótico de $R_0/D = 0,5$ cuando $\beta \rightarrow 1$. Lo mismo sucede con el radio de curvatura y R_{90} . Algo notable es que en los choques ancantoides aun en el caso límite $\beta = 1$, la forma del choque también es curva, debido a que la densidad del viento interior cae con θ y fuera del eje de simetría el momento del viento exterior es mayor.

3.2.1. Interacción con un viento esférico isotrópico

En este caso tomamos como variable independiente al ángulo polar medido a partir de la posición de la fuente del viento externo, denotado por θ_1 . De esta forma las tasas de pérdida de masa, momento y momento angular quedan como sigue:

$$\dot{M}_{w1} = \frac{M_{w1}^0}{2} (1 - \cos \theta_1) \quad (3.22)$$

$$\dot{\Pi}_{wz1} = -\frac{v_{w1} \dot{M}_{w1}^0}{4} \sin^2 \theta_1 \quad (3.23)$$

$$\dot{\Pi}_{wr1} = \frac{v_{w1} \dot{M}_{w1}^0}{4} (\theta_1 - \sin \theta_1 \cos \theta_1) \quad (3.24)$$

$$\dot{J}_{w1} = \int_0^{\theta_1} R(\theta) v_{w1} \sin(\pi - \theta - \theta_1) d\dot{M}_{w1} \quad (3.25)$$

Utilizando la ley de los senos (ver figura 2.2), la ecuación (3.25) queda como sigue:

$$\dot{J}_{w1} = D v_{w1} \int_0^{\theta_1} \sin \theta_1 d\dot{M}_{w1} = \frac{v_{w1} \dot{M}_{w1}^0}{4} (\theta_1 - \sin \theta_1 \cos \theta_1) D \quad (3.26)$$

Por otro lado, de la figura 2.2, podemos deducir la siguiente relación geométrica entre $R(\theta)$, θ y θ_1 :

$$\frac{R(\theta)}{D} = \frac{\sin \theta_1}{\sin(\theta + \theta_1)} \quad (3.27)$$

Combinando las ecuaciones (3.12, 3.18 - 3.26, 3.27) obtenemos una ecuación implícita que nos indica la dependencia de θ_1 con θ :

$$\theta_1 \cot \theta_1 - 1 = 2\beta I_k(\theta) \cot \theta - \frac{2\beta}{k+2} (1 - \cos^{k+2} \theta) \quad (3.28)$$

Donde en este caso, la condición de equilibrio de presiones RAM implica que la tasa de momentos β ahora está definida como sigue:

$$\beta_A = 2(k+1)\beta \quad (3.29)$$

Donde β está dado por (2.2).

Sin embargo, (3.28) solo aplica en el rango $0 < \theta \leq \pi/2$. Cuando $\theta > \pi/2$ la relación entre θ y θ_1 es:

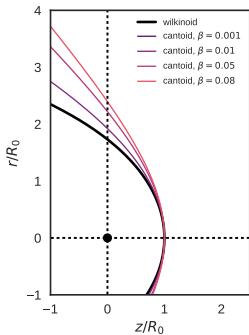


Figura 3.2: Forma de choques cantoides y el choque wilkinoide. Las coordenadas están normalizadas con la distancia al ápex R_0 . El choque wilkinoide se muestra en negro y los choques cantoides en escala de azul, con β variando desde 10^{-3} hasta 0.08. Nótese que el choque wilkinoide se comporta como el caso asintótico de los choques cantoides cuando $\beta \rightarrow 0$.

$$\theta_1 \cot \theta_1 - 1 = 2\beta \left(I_k(\pi/2) \cot \theta - \frac{1}{k+2} \right) \quad (3.30)$$

Donde:

$$I_k(\pi/2) = \frac{\pi}{4} \frac{\Gamma(\frac{1+k}{2})}{\Gamma(\frac{4+k}{2})} \quad (3.31)$$

y Γ es la función Gamma usual.

3.2.2. Interacción de un viento esférico isotrópico con un viento plano-paralelo (Choques Wilkinoides)

En este caso las tasas de pérdida de masa, de momento y momento angular del viento plano-paralelo con velocidad v_a y densidad uniforme

ρ_a quedan como sigue:

$$\dot{M}_{w1} = \pi \rho_a v_a R^2 \sin^2 \theta \quad (3.32)$$

$$\dot{\Pi}_{wz1} = -\pi \rho_a v_a^2 R^2 \sin^2 \theta \quad (3.33)$$

$$\dot{\Pi}_{wr1} = 0 \quad (3.34)$$

$$\dot{J}_{w1} = \int_0^r r' v_a \sin \theta \, d\dot{M}_{w1} = \frac{2}{3} \pi \rho_a v_a^2 R^3 \sin^3 \theta \quad (3.35)$$

Sustituyendo estas ecuaciones en (3.12) junto con (3.16-3.20) para vientos tipo cantoides ($k = 0$) obtenemos lo siguiente:

$$R = \frac{\frac{2}{3} \pi \rho_a v_a R^3 \sin^3 \theta}{\frac{\dot{M}_{w1}^0 v_w}{4} (\theta - \sin \theta \cos \theta) \cos \theta - \left(\frac{\dot{M}_{w1}^0 v_w}{4} \sin^2 \theta - \pi \rho_a v_a^2 R^2 \sin^2 \theta \right) \sin \theta} \quad (3.36)$$

La condición de equilibrio de presión en este caso nos lleva a la siguiente relación:

$$\frac{\dot{M}_w^0 v_w}{4\pi R_0^2} = \rho_a v_a^2 \quad (3.37)$$

Por tanto:

$$R/R_0 = \frac{\frac{2}{3} (R/R_0)^3 \sin^3 \theta}{(\theta - \sin \theta \cos \theta) \cos \theta - \left(\sin^2 \theta - (R/R_0)^2 \sin^2 \theta \right) \sin \theta} \quad (3.38)$$

Resolviendo para R/R_0 encontramos que:

$$R = R_0 [\csc^2 \theta (1 - \theta \cot \theta)]^{1/2} \quad (3.39)$$

3.3. Forma “verdadera” de los choques cantoides, ancantoides y wilkinoides

Para los tres tipos de formas de proa que utilizamos en este trabajo (cantoides, ancantoides y wilkinoides), calculamos su correspondiente alatud y planitud. Para los choques ancantoides obtenemos lo siguiente. El procedimiento detallado se puede consultar en el apéndice D:

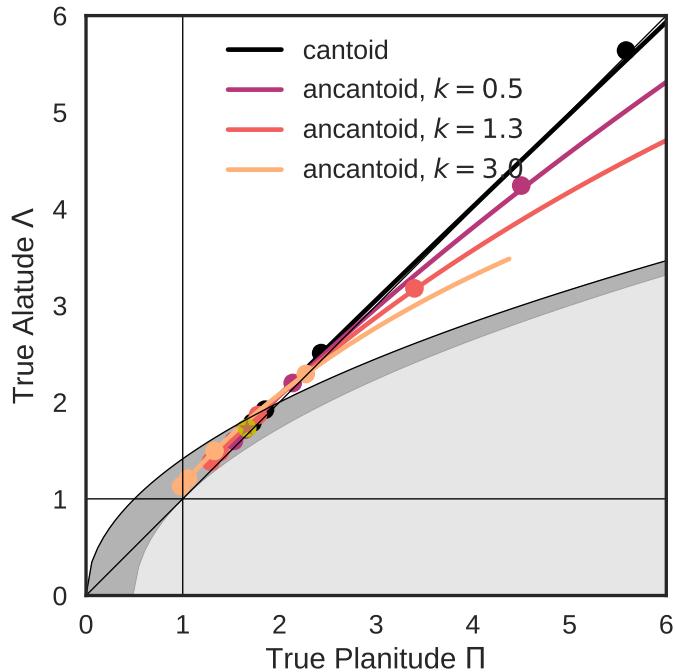


Figura 3.3: Forma verdadera de los choques cantoides, ancantoides y wilkinoides. En cada línea, β varía en el rango $[0, 1]$, y los parámetros (Π, Λ) fueron calculados de acuerdo a los resultados del apéndice D. Los círculos del color de las líneas representan valores particulares de β : 10^{-3} , 10^{-2} , 0.1 y 0.5, y con la diferencia de que el coeficiente de segundo orden de la ecuación 3.41 para la planitud Π fue obtenido de manera numérica con el fin de utilizar este método para encontrar la planitud aparente con la ecuación 2.37

$$\Lambda = \frac{(3\xi_k)^{1/2} (1 + \beta^{1/2})}{(1 + \frac{1}{5}\xi_k\beta)^{1/2} (1 - \xi_k\beta)} \quad (3.40)$$

$$\Pi = \left| 1 - 2 \frac{R_{\theta\theta,0}}{R_0} \right|^{-1} \quad (3.41)$$

$$\text{Donde : } R_{\theta\theta,0} = \frac{C_{k\beta}}{1 + \beta^{1/2}} + \frac{1 + 2\beta^{1/2}}{3} \quad (3.42)$$

Donde $\xi_k \equiv \frac{2}{k+2}$ y $C_{k\beta}$ son parámetros que se introduce por conveniencia en el apéndice D.

Para los choques cantoides la planitud y alatud son equivalentes al resultado del choque ancantoide con $k = 0$, pero se muestran a continuación por completez:

$$\Pi = \frac{5}{3(1 - \beta^{1/2})} \quad (3.43)$$

$$\Lambda = \frac{\sqrt{3}}{(1 + \frac{1}{5}\beta)^{1/2} (1 - \beta^{1/2})} \quad (3.44)$$

Por último, el radio en el ápex, la planitud y alatud para los choques wilkinoides es:

$$R_0 = \left(\frac{\dot{M}_w^0 v_w}{4\pi\rho_a v_a^2} \right)^{1/2} \quad (3.45)$$

$$\Lambda = \sqrt{3} \quad (3.46)$$

$$\Pi = \frac{5}{3} \quad (3.47)$$

R_0 en este caso se obtiene directamente de la ecuación (3.37), mientras que Π y Λ se obtienen tomando el límite $\beta \rightarrow 0$ en las ecuaciones (3.43, 3.44), aunque Λ también puede obtenerse evaluando la ecuación (3.39) en $\theta = \pi/2$.

En la figura 3.3 se muestran los resultados de las ecuaciones (3.40-3.47) en forma de diagrama $\Lambda - \Pi$. Los choques tipo cantoides ocupan en este diagrama una curva, donde cada punto de ésta representa un valor distinto de β , cuyo rango es $(0, 1)$, y está representada en color negro. Los choques ancantoides ocupan diferentes curvas, una por cada valor del índice de anisotropía k , y se representan por curvas con diferente tonalidad de verde, mientras que los choques wilkinoides ocupan un solo punto en este diagrama, representado por el círculo amarillo.

La tendencia general de los choques cantoides y ancantoides es que conforme se incrementan β y k , también se vuelven más abiertos y más planos en el aex (Π y Λ incrementan), siendo el choque tipo cantoide el más abierto a un valor de β dado. Como ya hemos mencionado, el choque tipo cantoide y el tipo ancantoide con $k = 0$ son muy similares, excepto que el choque cantoide es más abierto en las alas ($\theta > 90^\circ$) debido al soporte que da hacia atrás el viento interior. Sin embargo, como su comportamiento es igual para $\theta \leq 90^\circ$, por tanto, no hay diferencia entre estos dos tipos de choques en este diagrama. Todos los choques se encuentran ya sea en la región de esferoides proláticos (región gris oscura) o hiperboloides (región clara), ninguno en la región de esferoides oblatos (ver figura 2.9a). Los choques tipo esferoide prolato son los que tienen valores de β pequeños, y la transición hacia hiperboloide se da cunado $\beta \sim 0,01$ para los choques cantoides y ancantoides con parámetro k pequeño. Esta transición a los hiperboloides se recorre para β mayor conforme el parámetro k se incrementa. Esto contrasta con el caso de las cuádricas puras, que siempre permanecen en la misma región, pero esto se debe a que las formas de los choques de proa son más complejas que una cuádrica de revolución: mientras que la forma de la “cabeza” del choque (la región cercana al ápex) puede aproximarse bien con una variedad de cuádricas, la forma de las alas lejanas siempre es más parecida a un hiperboloide (ver figura). El choque wilkinoide se ubica en el límite $\beta \rightarrow 0$ de la curva de los choques cantoides, como era de esperarse, y se ubica en la región de esferoides proláticos. Otro detalle que puede apreciarse en esta figura es que todas las curvas (al menos para β pequeña) se aglomeran cerca de la diagonal $\Pi \simeq \Lambda$ con la tendencia de que para anisotropía grande, $\Lambda > \Pi$, existe ena región donde hay una degeneración entre β y k que se rompe para β grande.

Todo esto funciona para la forma verdadera de los choques de proa, que corresponde a cuando son vistos de canto ($i = 0$). La alatud y planitud verdaderas no toman en cuenta el comportamiento de las alas lejanas ($\theta > 90^\circ$). De hecho, para un choque dado, hay dos formas de calcular el ángulo de las cuádricas θ_Q . Una es a partir de los parámetros (Π, Λ) utilizando las ecuaciones (2.14, 2.15, 2.22):

$$\theta_Q^{\text{head}} = \operatorname{sgn}(2\Pi - \Lambda^2) \tan^{-1} |2\Pi - \Lambda^2| \quad (3.48)$$

La segunda manera es a partir de estimar el ángulo asintótico θ_∞ :

$$\theta_Q^{\text{tail}} = \theta_\infty - \pi \quad (3.49)$$

Donde θ_∞ puede obtenerse a partir de la ecuación (28) de CRW para los choques cantoides:

$$\theta_\infty - \tan \theta_\infty = \frac{\pi}{1 - \beta} \quad (3.50)$$

Mientras que para los choques ancantoides utilizamos la ecuación (3.30) utilizando la condición $\theta_\infty + \theta_{1\infty} = \pi$:

$$\theta_\infty - \left(\frac{k + 2(1 - \beta)}{k + 2} \right) \tan \theta_\infty = \pi + 2\beta I_k(\pi/2) \quad (3.51)$$

Como las soluciones a la forma de los choques de proa, tanto cantoides como ancantoides solo ajustan parcialmente a una cuádrica de revolución, entonces $\theta_Q^{\text{head}} \neq \theta_Q^{\text{tail}}$. Esta discrepancia se vuelve relevante al momento de obtener la forma aparente, ya que en este caso la región del choque que es tangente a la línea de visión se aleja del ápex y se acerca a las alas lejanas conforme se incrementa la inclinación.

3.4. Obtención de la Forma Aparente

A continuación aplicamos el formalismo desarrollado en la sección §2.4 a las formas de los choques de proa obtenidos en este capítulo para obtener tanto la forma aparente como la planitud y alatud aparentes.

En la figura 3.4 mostramos la forma aparente de choques tipo cantoides y wilkinoides, y mostramos como referencia un paraboloide confocal cuya forma aparente no cambia con la inclinación (ver §2.4.4), mientras que la figura 3.5 muestra la forma aparente de choques ancantoides.

Se muestra una tendencia general en donde las alas son sistemáticamente más abiertas para altas inclinaciones. Sin embargo, en el caso de los choques Wilkinoides se muestra el comportamiento opuesto, aunque los cambios son muy sutiles. El caso de la figura 3.5a, donde se muestra un choque tipo ancantoide con $\beta = 0,005$ y $k = 1/2$ se observa que para inclinaciones menores a 60° , las alas cercanas ($\theta \sim 90^\circ$) se cierran sutilmente, y luego se abren más para inclinaciones mayores.

En las figuras 3.6 y 3.7 mostramos la solución a las ecuaciones (2.33, refeq:R0p) para el modelo de capa delgada, junto con el factor de escalamiento R'_0/R_0 en función de la inclinación. En estas figuras se observa que el radio aparente en el ápex siempre aumenta con la inclinación, mostrando un crecimiento más rápido para choques más abiertos, pero un incremento mayor para choques más cerrados; ésto debido a que en los choques más cerrados la inclinación máxima donde aun existe una línea tangente es mayor.

Las soluciones a las ecuaciones (2.36, 2.35) para el modelo de capa delgada se muestran en las figuras 3.8, 3.9. Se observa que la alatud aparente se incrementa abruptamente cuando la inclinación se aproxima a la inclinación máxima, excepto en el caso wilkinoides, donde la alatud disminuye con inclinación muy lentamente.

La planitud aparente se obtuvo a partir de realizar ajustes polinómicos en θ^2 a la forma aparente $R'(\theta')$ para calcular el coeficiente de segundo orden $R'_{\theta'\theta',0}$ y posteriormente utilizar las ecuaciones (2.37, 2.34).

Su comportamiento con inclinación se muestra en la figura 3.10. Aquí se observa un comportamiento similar al de la alatud aparente; sin embargo, en la figura 3.10b, donde el parámetro de anisotropía es $k = 1/2$, se observa una pequeña caída en la planitud justo antes de llegar a la inclinación máxima.

Por último, mostramos en la figura 3.11 los diagramas $\Lambda' - \Pi'$ para diferentes tipos de choques de proa. Cada curva representa un choque de proa con parámetros (β, k) fijos donde la inclinación varía de un punto a otro a lo largo de la curva. El comportamiento de estos choques de proa

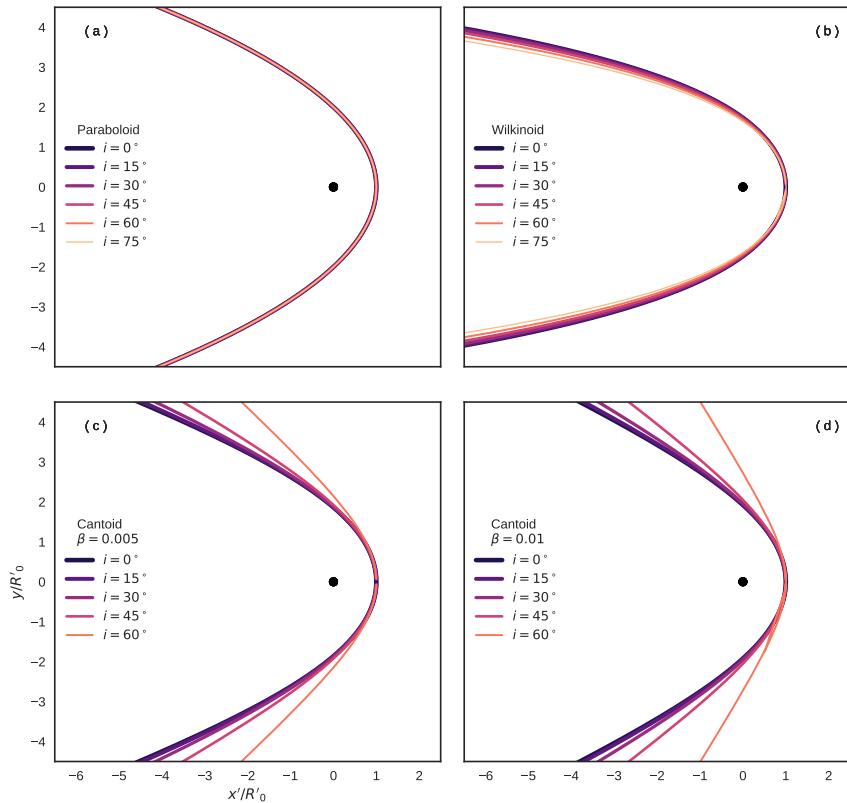


Figura 3.4: Forma aparente de diferentes choques de proa en intervalos de inclinación de 15° : (a) Parabolóide confocal. (b) Wilkinoido. (c) Cantoide $\beta = 0,005$. (d) Cantoide $\beta = 0,01$

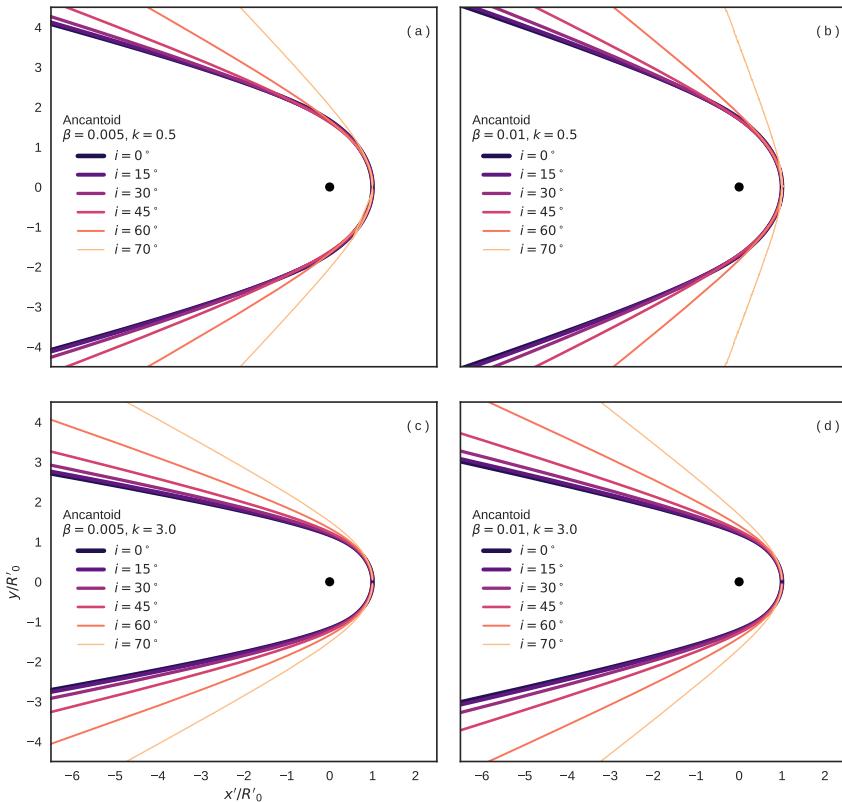


Figura 3.5: Extensión de la figura 3.4 para choques de proa no isotrópicos (ancantoides): (a) $\beta = 0,005, k = 1/2$. (b) $\beta = 0,01, k = 1/2$. (c) $\beta = 0,005, k = 3$. (d) $\beta = 0,01, k = 3$

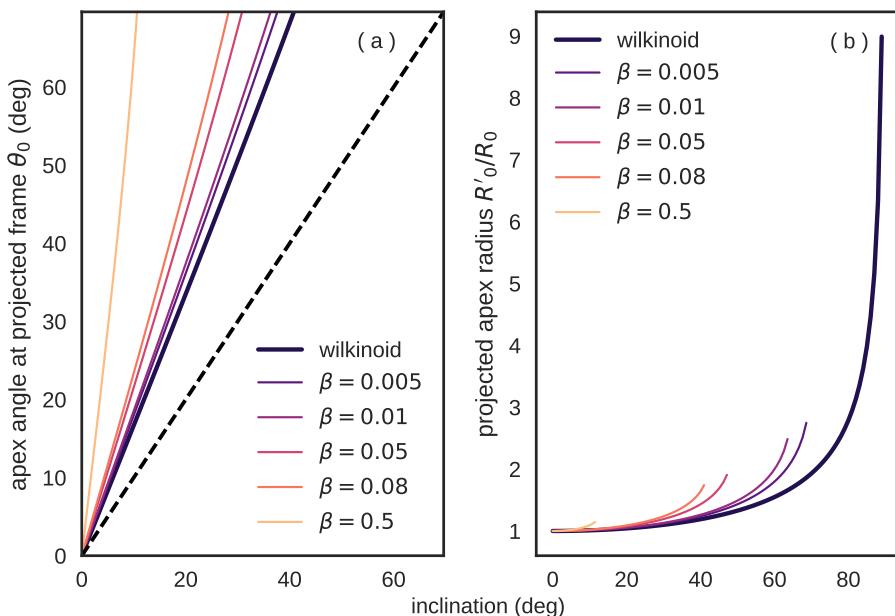


Figura 3.6: (a) Soluciones a la ecuación (2.33) en función de la inclinación para choques de proa del modelo de capa delgada y viento interior isotrópico (cantoides y wilkinoides). (b) Soluciones a la ecuación (2.34) en función de la inclinación normalizadas con R_0 .

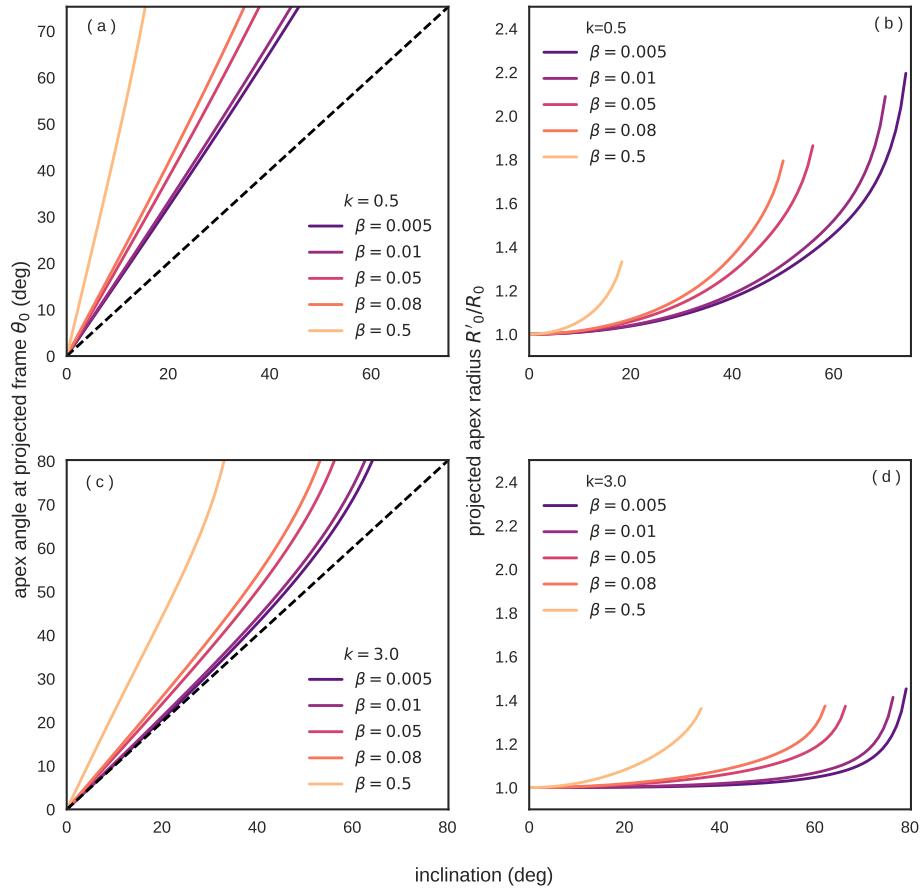


Figura 3.7: (a) Soluciones a la ecuación (2.33) en función de la inclinación para choques de proa del modelo de capa delgada y viento interior anisotrópico (ancantoides) para dos índices de anisotropía: $k = 1/2$ (arriba) y $k = 3$ (abajo). (b) Soluciones a la ecuación (2.34) en función de la inclinación normalizadas con R_0 .

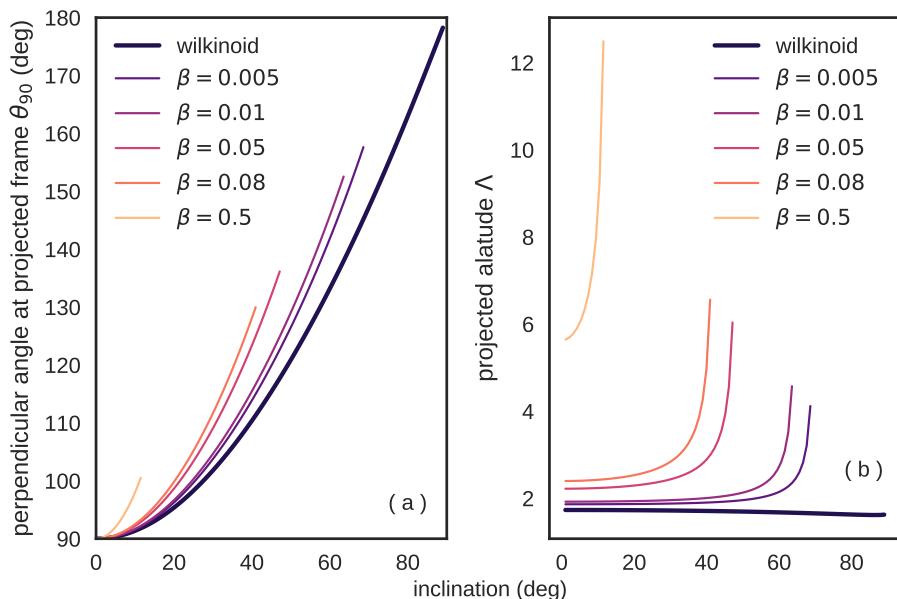


Figura 3.8: (a) Soluciones a la ecuación (2.36) en función de la inclinación para choques de proa del modelo de capa delgada y viento interior isotrópico (cantoídes y wilkinoides). (b) Alatud aparente en función de la inclinación, obtenida a partir del cociente de las soluciones de las ecuaciones (2.35), (2.34)

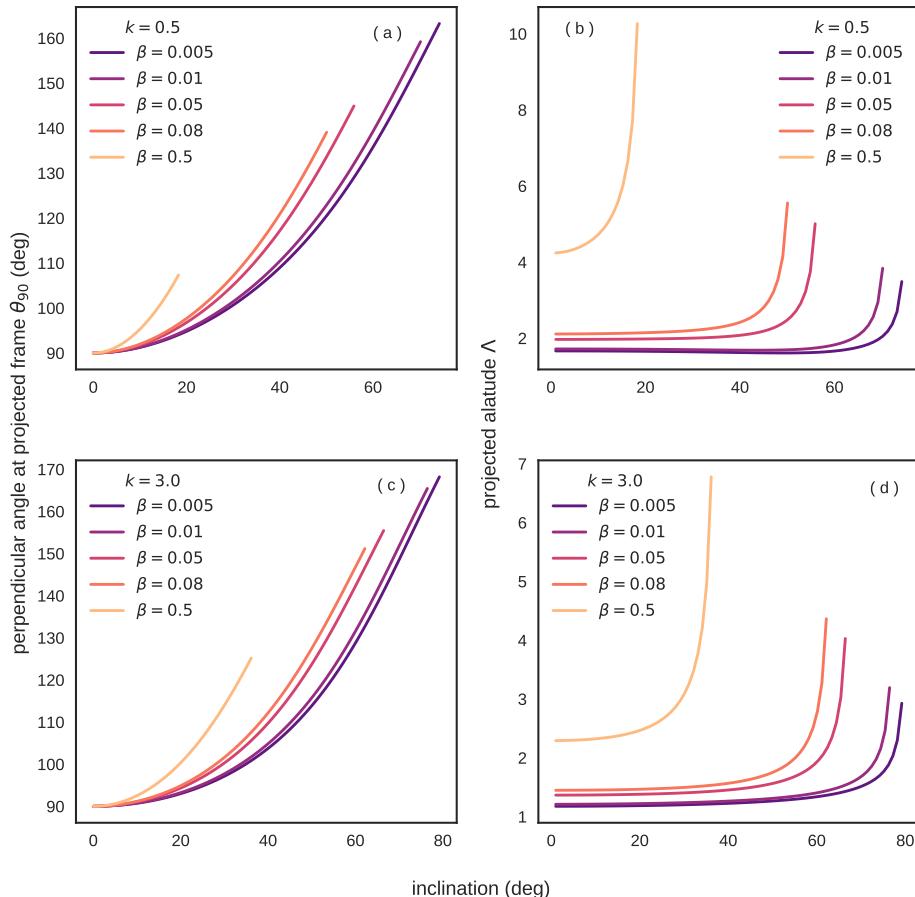


Figura 3.9: (a) Soluciones a la ecuación (2.36) en función de la inclinación para choques de proa del modelo de capa delgada y viento interior anisotrópico (ancantoides) para dos índices de anisotropía: $k = 1/2$ (arriba) y $k = 3$ (abajo). (b) Alatud aparente en función de la inclinación, obtenida a partir del cociente de las soluciones de las ecuaciones (2.35, 2.34)

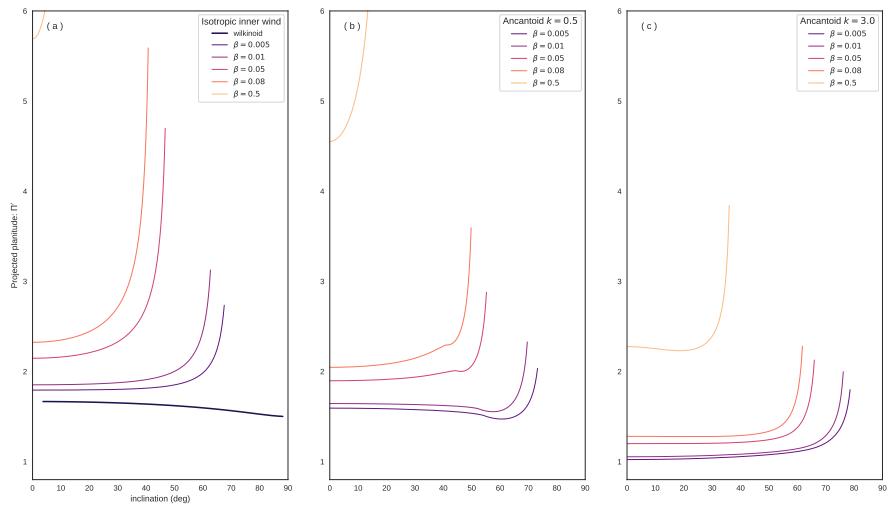


Figura 3.10: Soluciones a la ecuación 2.37 para obtener la planitud aparente en función de la inclinación en el modelo de capa delgada para: (a) viento interno isotrópico (cantoides y wilkinoides) y viento interno anisotrópico (ancantoides) con índice de anisotropía de (b) $k = 1/2$ y (c) $k = 3$.

se diferencia del de las cuádricas de revolución, mostrado en la figura 2.9a. En este caso, las curvas no están confinadas a una sola región: para inclinaciones bajas, la mayoría de las curvas ajustan mejor a la forma de elipsoides proláticos, a excepción de las curvas con parámetro β alto ($\beta \gtrsim 0,01$), mientras que para altas inclinaciones la forma ajusta mejor a hiperboloides. Esto se debe a la tensión que existe entre la forma de la cabeza y de la cola (figura).

La curva del choque wilkinode se muestra en color blanco, y tiene un comportamiento menos interesante que otras curvas: simplemente se mueve desde $(5/3, \sqrt{3})$ hasta $(3/2, \sqrt{8/3})$. Aunque se ubica en la región de elipsoide prolático, el hecho de que θ_∞ sea de 180° sugiere que la forma de las alas lejanas sea más parecido al de un paraboloide. Pero converge en $(3/2, \sqrt{8/3})$ en vez de en $(2, 2)$ porque las alas lejanas son asintóticamente cúbicas en vez de cuadráticas.

La densidad de marcas a lo largo de una curva nos indican la probabilidad de observar dicha porción de ésta, si asumimos una distribución isotrópica de ángulos de visión. Se puede observar que la densidad de marcas usualmente se concentra al inicio de cada curva, cerca de $i = 0^\circ$, y este efecto se intensifica cuando β es pequeño.

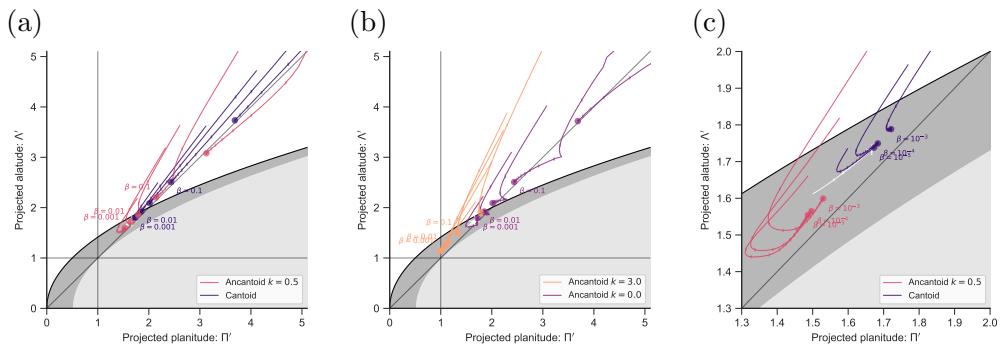


Figura 3.11: Diagramas planitud-ataud para las soluciones del modelo de capa delgada. Los círculos de colores indican la forma intrínseca para cada modelo ($i = 0^\circ$). Las líneas muestran la solución a este mismo modelo en función de la inclinación. Las marcas más pequeñas corresponden a inclinaciones igualmente espaciadas de $|\sin i|$. El modelo wilkinoide se muestra en color blanco. (a) Soluciones para los modelos cantoide (azul) y ancantoid $k = 0.5$ (rojo) para $\beta = [0.001, 0.003, 0.01, 0.03, 0.1, 0.3]$. (b) Soluciones para modelos ancantoides $k = 3$ (naranja) y $k = 0$ (morado). (c) Igual que (a) pero aumentada para mostrar la convergencia de los modelos cantoideos hacia el modelo wilkinoide conforme $\beta \rightarrow 0$ utilizando como referencia $\beta = [10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}]$.

Capítulo 4

Resultados obtenidos para los proplyds “clásicos”

Probamos nuestro modelo descrito en los capítulos anteriores en una muestra de proplyds pertenecientes a la Nebulosa de Orión (ONC) que presentan un choque de proa. En la figura 4.1 se muestran los proplyds que pertenecen a nuestra muestra.

En todos los casos no fue posible medir el radio característico R_{90} debido a que el brillo de la cáscara decae con el ángulo polar θ y no es detectable para ángulos del orden de 60° . Sin embargo, a continuación mostraremos la metodología para obtener la inclinación más probable de cada choque, así como los parámetros del modelo de cada uno de éstos que nos indican su forma intrínseca.

4.1. Metodología para la medición de la forma aparente.

Se utilizaron imágenes en el filtro de [O III] de la cámara WPC2 del Telescopio Espacial Hubble (HST). Se utilizaron las herramientas del programa DS9 para análisis de imágenes astronómicas para trazar la posición de θ^1 Ori C y de cada uno de los proplyds de la muestra. La posición y la forma de los choques de proa fue trazada con una serie de marcas a lo largo del choque. Las coordenadas de las marcas fueron

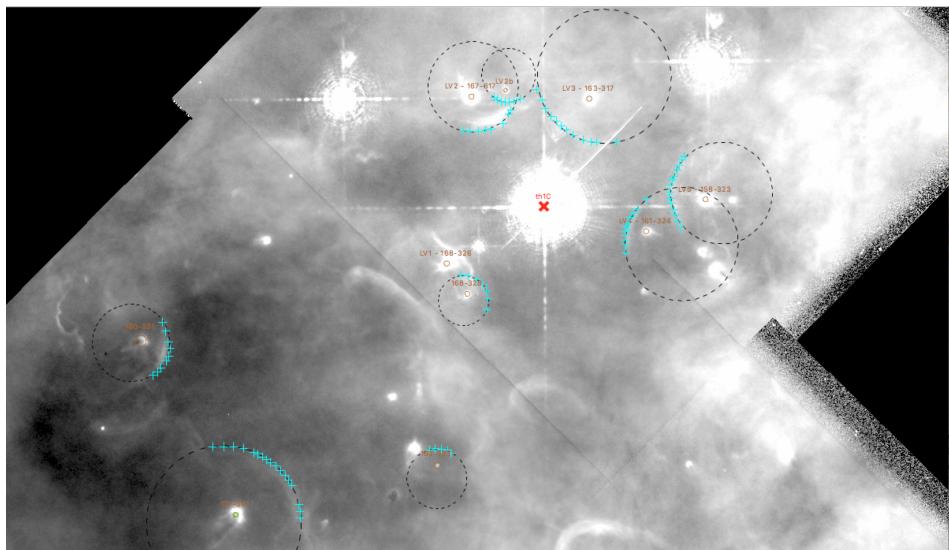


Figura 4.1: Imagen de la parte central de la Nebulosa de Orión donde se ubican los proplyds de nuestra muestra. Las cruces color cyan corresponden a las mediciones de la forma aparente para cada choque de proa. Los círculos amarillos marcan la posición de cada proplyd y la “x” roja corresponde a la posición de la estrella ionizante θ^1 Ori C. Los círculos negros ilustran de manera esquemática el radio de curvatura de cada choque.

guardadas en un archivo y luego procesadas para tener las coordenadas del choque en el sistema de referencia del proplyd (Figura 4.1). El radio de curvatura aparente se obtiene haciendo un ajuste de mínimos cuadrados de la forma de un círculo de las mediciones obtenidas. R_0 se obtiene como la distancia mínima entre el proplyd y el ajuste circular dentro del rango de las coordenadas de las mediciones.

4.1.1. Medición de incertidumbres

Para saber qué tan confiables son las coordenadas de las mediciones, se realizó el procedimiento siguiente: Del total de mediciones realizadas para cada proplyd, se crearon varias sub-muestras donde se utilizamos aproximadamente las dos terceras partes de las mediciones, pero dejando un mínimo de cuatro puntos, y se procedió a calcular los radios característicos para cada submuestra, y comprobar qué tanto se desvían estas mediciones de la original. En la figura 4.2 se muestran ejemplos de dichas sub-muestras para algunos proplyds.

4.2. Resultados

Los radios característicos obtenidos para la muestra original y para las submuestras se muestran en la figura 4.3. En cada pánel se utiliza un valor fijo para el parámetro de anisotropía k . De esta figura se pueden encontrar algunas observaciones cualitativas: Los proplyds con planitud mayor, LV4 y LV2b ajustan mejor a modelos donde el parámetro de anisotropía es bajo. Para LV2, por otro lado, su medición principal no ajusta a ningún modelo, pero tiene dos variaciones que se desvían mucho de la medición principal que ajustan a modelos con índice de anisotropía alto. Probablemente la presencia de un jet interfiera con la forma del choque (añadir referencia) pero es una hipótesis que va más allá del objetivo de este trabajo. El resto de los proplyds ajusta bien con un parámetro de anisotropía medio ($k \sim 1/2 - 3$). Dependiendo de los parámetros (β, k), la inclinación que se le puede atribuir a cada proplyd en la mayoría de los casos varía entre 15° y 40° .

Con base a este análisis, se resume en la tabla 4.1 los ajustes a los parámetros de los proplyds: inclinación, distancia a θ^1 Ori C intrínseca D

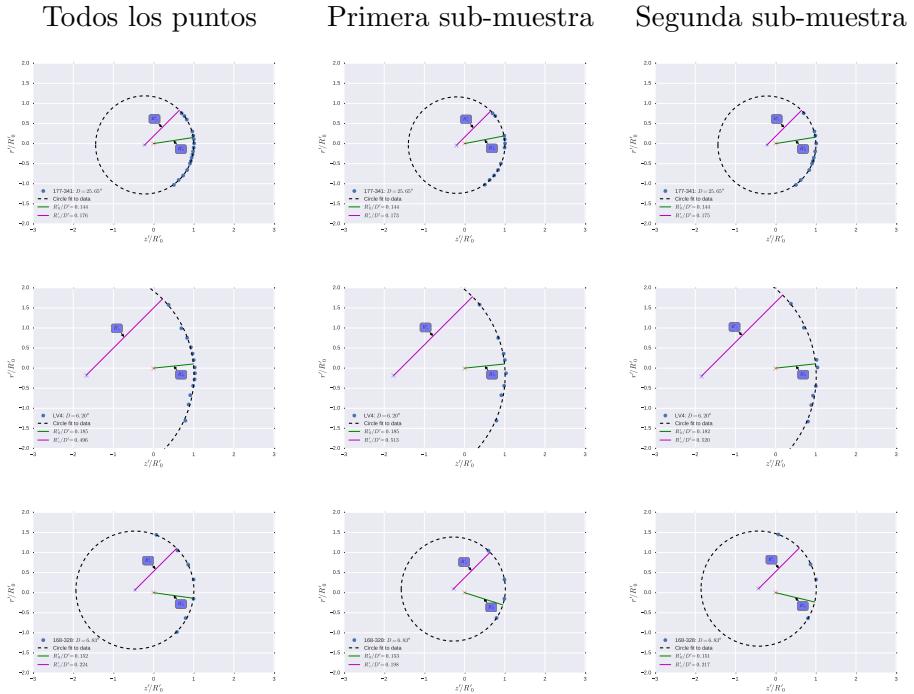


Figura 4.2: Ejemplos de incertidumbres sistemáticas en los ajustes circulares a la forma de los choques para tres fuentes (desde la línea superior hasta la inferior): 177-341, LV4 y 168-328. La columna de la izquierda muestra el ajuste a todos los puntos identificados en el borde de la cáscara, donde el número y el espaciamiento de los puntos es una medida subjetiva de nuestra confianza al trazar el borde de cada cáscara. Las dos columnas restantes muestran ajustes a sub-muestras seleccionadas aleatoriamente que contienen 2/3 partes de los puntos de la muestra original para cada cáscara.

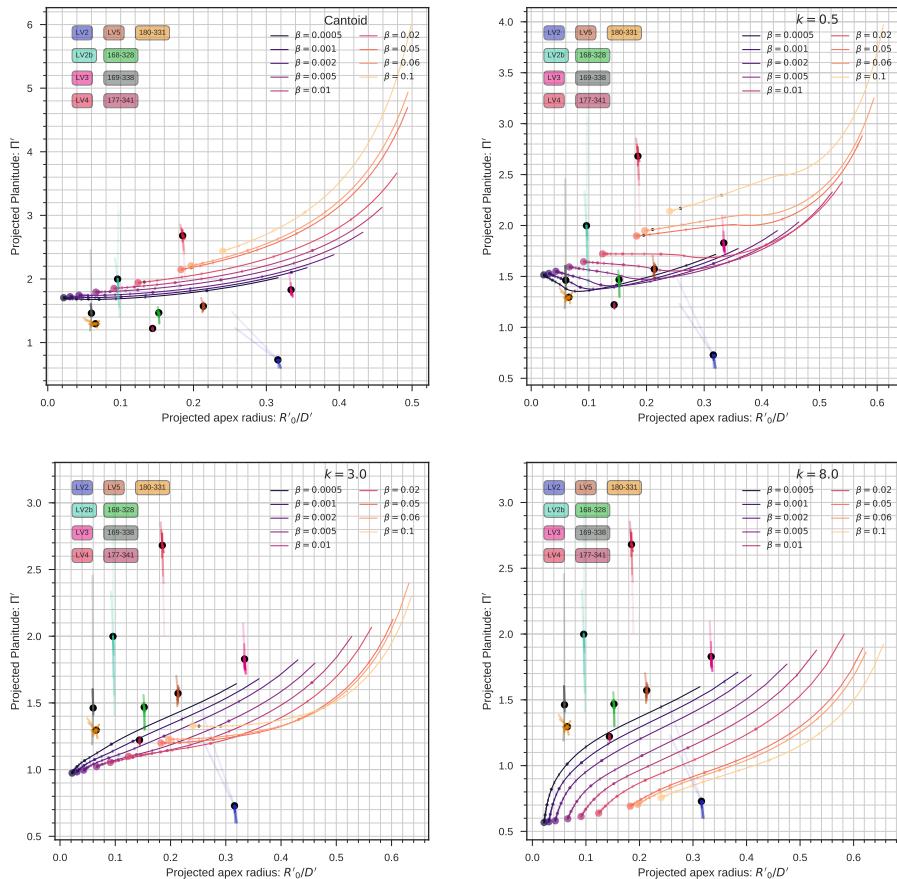


Figura 4.3: Similar a la figura 3.11 pero sustituyendo la alatud aparente por el radio aparente en el áplex R'_0/D' para diferentes grados de anisotropía k , donde en cada pánel se asume que este parámetro es fijo. A lo largo de cada curva el valor del parámetro β es fijo, mientras que la inclinación se incrementa a lo largo de la curva, empezando a partir del círculo grande, donde $i = 0^\circ$. Las marcas circulares pequeñas representan intervalos de 15° , mientras que las marcas más pequeñas representan intervalos de 5° . Los resultados observacionales de los choques de proa para nuestro set de prolyds se muestran con puntos negros, mientras que las mediciones de las sub muestras se muestran con líneas de colores radiales que parten desde la medición “principal”. La opacidad de la medición de cada sub muestra es mayor cuanto menor sea la desviación respecto a la medición principal.

y radio del choque en el eje de simetría R_0/D .

Cuadro 4.1: Ajuste a los parámetros de los arcos para los choques de proa de los proplyds

OW (1)	Nombre (2)	D' (3)	R'_0/D' (4)	$(R'_c/R'_0)_{\text{shape}}$ (5)	$(R'_c/R'_0)_{\text{flux}}$ (6)	β (7)
168-328		6.8	$0,152 \pm 0,001$	$1,42 \pm 0,09$	$1,45 \pm 0,05$	$0,018 \pm 0,003$
169-338		16.4	$0,059 \pm 0,001$	$1,76 \pm 0,48$	$1,50 \pm 0,05$	$0,002 \pm 0,001$
177-341	HST1	25.6	$0,144 \pm 0,001$	$1,21 \pm 0,02$	$1,25 \pm 0,02$	$0,018 \pm 0,003$
180-331		25.1	$0,061 \pm 0,007$	$1,30 \pm 0,05$	$1,27 \pm 0,05$	$0,003 \pm 0,001$
167-317	LV2	7.8	$0,305 \pm 0,025$	$0,81 \pm 0,28$	$1,50 \pm 0,1$	$0,085 \pm 0,015$
	LV2b	7.2	$0,097 \pm 0,002$	$2,00 \pm 0,62$	$1,63 \pm 0,08$	$0,008 \pm 0,003$
163-317	LV3	6.9	$0,334 \pm 0,002$	$1,81 \pm 0,12$	$1,85 \pm 0,15$	$0,075 \pm 0,025$
161-324	LV4	6.2	$0,186 \pm 0,002$	$2,59 \pm 0,24$	$2,05 \pm 0,07$	$0,040 \pm 0,014$
168-323	LV5	9.6	$0,213 \pm 0,002$	$1,57 \pm 0,07$	$1,60 \pm 0,07$	$0,055 \pm 0,005$

Notes – Col. (1): ID de la fuente (O'Dell & Wen, 1994). Col. (2): Nombre alternativo de la fuente. Col. (3): Distancia proyectada desde θ^1 Ori C, segundos de arco. Col. (4): Radio exterior aparente a lo largo del eje, normalizado con la distancia proyectada, con una incertidumbre de $\pm 1\sigma$, determinado con el ajuste circular descrito en § 4.1. Col. (5): Radio de curvatura aparente, normalizado con el radio a lo largo del eje, con incertidumbres de $\pm 1\sigma$, determinado con el ajuste circular descrito en § 4.1. Col. (6): Igual que Col. (5) pero aplicando el criterio adicional de que el brillo superficial del proplyd obtenido debe coincidir con la predicción teórica. Col. (7): Cociente de momentos entre el viento del proplyd y la estrella O (ver capítulo 3). Col. (8): Parámetro de anisotropía del viento del proplyd. Col. (9): Inclinación respecto al plano del cielo, en grados. Col. (10): Distancia real desde θ^1 Ori C, parsecs. Col. (11): Radio real de la cáscara a lo largo del eje, normalizado con distancia.

Capítulo 5

Conclusiones

Write Conclusions, discussions, etc. here



CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES

Bibliografía

Ballesteros-Paredes J., Hartmann L., Vázquez-Semadeni E., 1999, *ApJ*, 527, 285

Ballesteros-Paredes J., Hartmann L. W., Vázquez-Semadeni E., Heitsch F., Zamora-Avilés M. A., 2011, *MNRAS*, 411, 65

Canto J., Raga A. C., Wilkin F. P., 1996, *ApJ*, 469, 729

Churchwell E., Felli M., Wood D. O. S., Massi M., 1987, *ApJ*, 321, 516

Gordon M. A., Churchwell E., 1970, *A&A*, 9, 307

Hartmann L., Burkert A., 2007, *ApJ*, 654, 988

Hennebelle P., Péault M., 1999, *A&A*, 351, 309

Henney W. J., Arthur S. J., 1998, *AJ*, 116, 322

Johnstone D., Hollenbach D., Bally J., 1998, *ApJ*, 499, 758

Laques P., Vidal J. L., 1979, *A&A*, 73, 97

Menten K. M., Reid M. J., Forbrich J., Brunthaler A., 2007, *A&A*, 474, 515

O'Dell C. R., Wen Z., 1994, *ApJ*, 436, 194

O'dell C. R., Wen Z., Hu X., 1993, *ApJ*, 410, 696

Shull J. M., McKee C. F., 1979, *ApJ*, 227, 131

Stahler S. W., Palla F., 2004, The Formation of Stars. Wiley-VCH

Wilkin F. P., 1996, [ApJ](#), 459, L31

Yusef-Zadeh F., 1990, [ApJ](#), 361, L19

Apéndice A

Choques y Frentes de Ionización

Algunas veces en un medio gaseoso pueden existir discontinuidades importantes en alguna de sus propiedades físicas, cuando estas propiedades son la presión, densidad y temperatura del gas nos estamos refiriendo a un choque, que es producido cuando el gas sufre una perturbación a una velocidad superior a la del sonido, mientras que si la discontinuidad ocurre en el grado de ionización del gas, entonces esta discontinuidad es conocida como frente de ionización. En esta sección analizaremos las condiciones de salto tanto de los choques como de los frentes de ionización para conocer las propiedades del gas en las dos interfaces de la discontinuidad.

A.1. Choques

Consideremos un fluído que tiene densidad ρ_1 , presión P_1 y se mueve en la dirección de eje $+x$ con velocidad u_1 . En la posición $x = s(t)$ existe un choque que se mueve a velocidad $u_0 \equiv \frac{ds}{dt}$. Delante del choque el fluído tiene densidad ρ_2 , presión P_2 y se mueve a velocidad u_2 . Antes y después del choque escogemos dos puntos arbitrarios, x_1 y x_2 , respectivamente que forman una superficie cada uno en el plano yz que están en co-movimiento con la discontinuidad (ver figura A.1).

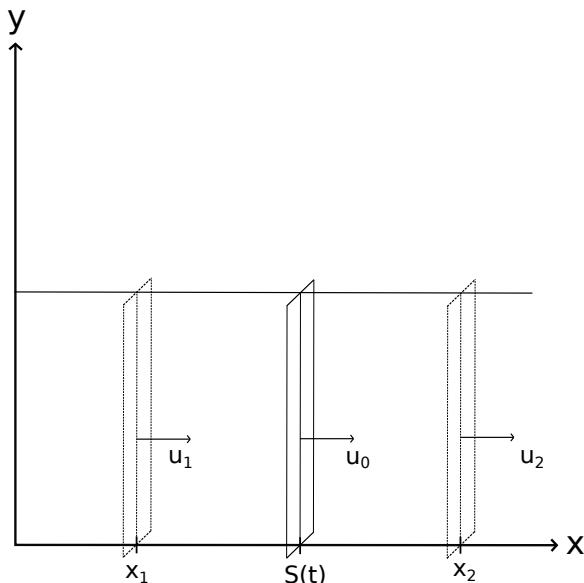


Figura A.1: Representación esquemática de un fluido con una discontinuidad situada en $x = s(t)$. Detrás y delante del choque en las posiciones $x = x_1$ y $x = x_2$, respectivamente, situamos dos superficies paralelas al choque y que están en co-movimiento con éste.

La masa encerrada dentro del volumen que forman las dos superficies es constante en el tiempo, esto es, la cantidad que fluido que entra por la superficie 1 (atrás del choque), debe ser igual a la que sale por la superficie 2:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho \, dx = 0 \quad (\text{A.1})$$

Por otro lado, dentro del volumen entre las dos superficies, la presión del fluido en la superficie 1 contribuye a incrementar el momento, mientras que la presión en la superficie 2 tiene el efecto contrario, entonces:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho u \, dx = P_1 - P_2 \quad (\text{A.2})$$

Por último, por completez la potencia mecánica por unidad de área $P_1 u_1 - P_2 u_2$ incrementa la energía interna del fluido entre las superficies:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho \left(\frac{u^2}{2} + \epsilon \right) \, dx = P_1 u_1 - P_2 u_2 \quad (\text{A.3})$$

Donde ϵ es la energía interna por unidad de masa. Nótese que esta ecuación no es válida si el fluido puede perder energía por radiación (este caso se discutirá aparte más adelante).

Las tres ecuaciones anteriores son de la siguiente forma:

$$\frac{dJ}{dt} \equiv \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \Psi(x, t) \, dx \quad (\text{A.4})$$

Donde $\Psi(x, t)$ presenta una discontinuidad espacial en $x = s(t)$. Como la integral implica solo la coordenada espacial y la derivada es respecto al tiempo, entonces podemos intercambiar el orden de éstas:

$$\frac{dJ}{dt} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\Psi}{dt} \, dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{dx}{dt} \right) \, dx \quad (\text{A.5})$$

Debido a la discontinuidad separaremos el segundo término de la integral:

$$\begin{aligned}\frac{dJ}{dt} &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \Psi}{\partial t} dx + \int_{x_1}^s \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{dx}{dt} dx + \int_s^{x_2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{dx}{dt} dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \Psi}{\partial t} dx (\Psi_1 u_0 - \Psi_1 u_1 + \Psi_2 u_2 - \Psi_2 u_0)\end{aligned}\quad (\text{A.6})$$

Como x_1 y x_2 son puntos arbitrarios, podemos tomar el límite cuando $x_1, x_2 \rightarrow s$. Este límite es de interés ya que los choques en muchos casos son muy delgados en comparación con el tamaño característico del sistema. De esta manera el primer término del lado derecho de la ecuación (A.6) desaparece porque la derivada parcial respecto al tiempo de Ψ es finita para toda x (incluida la discontinuidad). Entonces:

$$\lim_{x_1, x_2 \rightarrow s} \frac{dJ}{dt} = \Psi_2 v_2 - \Psi_1 v_1 \quad (\text{A.7})$$

Donde $v_2 \equiv u_2 - u_0$ y $v_1 \equiv u_1 - u_0$ son las velocidades del fluido respecto a la velocidad del choque.

Utilizando la ecuación (A.7) en (A.1) obtenemos la primera condición de salto:

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 \quad (\text{A.8})$$

Aplicando a su vez en la ecuación (A.2) con ayuda de la ecuación (A.8) obtenemos la siguiente condición de salto:

$$\rho_1 v_1^2 = \rho_2 v_2^2 \quad (\text{A.9})$$

Por último, la última condición de salto, solo válida para sistemas adiabáticos es, utilizando la ecuación (A.3) es:

$$\frac{1}{2} v_1^2 + \epsilon_1 + \frac{P_1}{\rho_1} = \frac{1}{2} v_2^2 + \epsilon_2 + \frac{P_2}{\rho_2} \quad (\text{A.10})$$

Para el caso en que el fluído pierde energía por radiación, la ecuación (A.2) sufre la siguiente modificación:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_3} \rho \left(\frac{u^2}{2} + \epsilon \right) dx = P_1 u_1 - P_3 u_3 - 2F_{rad} \quad (\text{A.11})$$

Donde F_{rad} es el flujo de radiado por el fluido y x_3 es un punto localizado más allá de la región de relajamiento del choque (la zona donde el fluido está radiando, como referencia podemos tomar la figura 3 de Shull & McKee (1979)).

De esta forma, la nueva condición de salto en caso de un choque radiativo es:

$$\frac{1}{2} v_3^2 + \epsilon_3 + \frac{P_3}{\rho_3} = \frac{1}{2} v_1^2 + \epsilon_1 + \frac{P_1}{\rho_1} \frac{2F_{rad}}{\rho_1 v_1} \quad (\text{A.12})$$

A.2. Frentes de Ionización

Para esta sección, utilizaremos el subíndice “0” para las propiedades del gas en la interfaz neutra, mientras que para la interfaz ionizada utilizaremos el subíndice “i” (ver figura A.2). Bajo esta nomenclatura, combinando las ecuaciones (A.8, A.9) para las condiciones de salto en el Frente de ionización y reescribiendo la presión en términos de la velocidad del sonido:

$$P_x = c_x^2 \rho_x \quad (\text{A.13})$$

Donde el subíndice “x” puede hacer referencia tanto al medio neutro o ionizado, encontramos el salto en densidad del frente de ionización:

$$\frac{\rho_i}{\rho_0} = \frac{1}{2c_i^2} \left[v_0^2 + c_0^2 \pm \left((v_0^2 + c_0^2)^2 - 4v_0^2 c_i^2 \right)^{1/2} \right] \quad (\text{A.14})$$

O bien, en términos del número de Mach del gas neutro $\mathcal{M} \equiv v_0/c_0$:

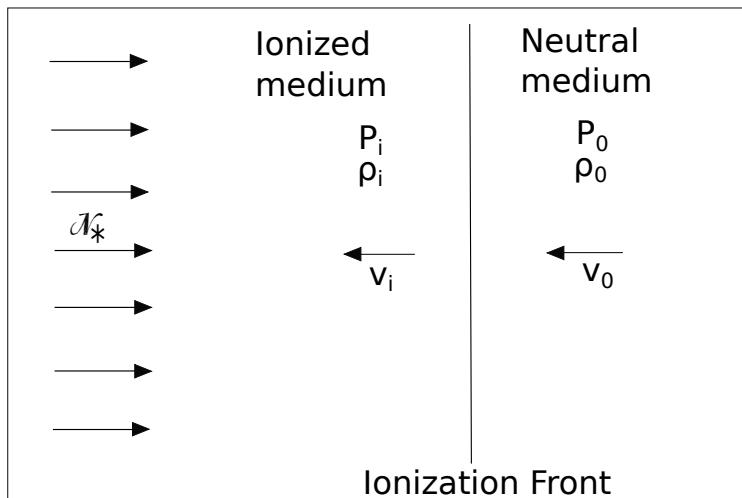


Figura A.2: Representación esquemática de la estructura de un frente de ionización. En un medio gaseoso, con densidad ρ_0 , presión P_0 y que se mueve velocidad v_0 está expuesto a radiación ionizante con flujo \mathcal{N}_* . El gas ionizado tiene densidad ρ_i , presión P_i y se mueve a velocidad v_i . Las velocidades están medidas en el sistema de referencia del frente de ionización.

$$\frac{\rho_i}{\rho_0} = \frac{1}{2} \frac{c_0^2}{c_i^2} \left[\mathcal{M}^2 + 1 \pm \left((\mathcal{M}^2 + 1)^2 - 4\mathcal{M}^2 \frac{c_i^2}{c_0^2} \right)^{1/2} \right] \quad (\text{A.15})$$

En la ecuación (A.15) se requiere que el argumento de la raíz cuadrada sea positivo. Para que esto suceda se debe cumplir la siguiente condición:

$$\mathcal{M}^2 - 2\mathcal{M} \frac{c_i}{c_0} + 1 \geq 0 \quad (\text{A.16})$$

Los casos críticos (donde el discriminante (A.16) es igual a cero) son:

$$\mathcal{M}_R = \frac{c_i}{c_0} \left[1 + \left(1 - \frac{c_0^2}{c_i^2} \right)^{1/2} \right] \quad (\text{A.17})$$

$$\mathcal{M}_D = \frac{c_i}{c_0} \left[1 - \left(1 - \frac{c_0^2}{c_i^2} \right)^{1/2} \right] \quad (\text{A.18})$$

Como $c_i^2 \gg c_0^2$, dado que $c_i \sim 10 \text{ kms}^{-1}$ y $c_0 \sim 1 - 3 \text{ kms}^{-1}$ entonces podemos hacer las siguientes aproximaciones:

$$\mathcal{M}_R \simeq 2 \frac{c_i}{c_0} \quad (\text{A.19})$$

$$\mathcal{M}_D \simeq \frac{1}{2} \frac{c_0}{c_i} \quad (\text{A.20})$$

Cuando $\mathcal{M} \geq \mathcal{M}_R$, el frente de ionización se denomina tipo R (rarified), y en caso de que $\mathcal{M} \leq \mathcal{M}_D$ se denominan frentes tipo D (dense). Cuando $\mathcal{M} = \mathcal{M}_R$ o $\mathcal{M} = \mathcal{M}_D$ los frentes se denominan R crítico y D crítico, respectivamente. En los frentes tipo R el material neutro viaja a velocidad supersónica y el salto de densidad es $\rho_i/\rho_0 < 0$ (la onda de material que pasa a través del frente de ionización está rarificada respecto al material ionizado, de ahí el nombre). En los frentes tipo D ocurre lo contrario: la onda de material viaja a velocidad subsónica y es densa respecto al material ionizado. En el caso de que $\mathcal{M}_D < \mathcal{M} < \mathcal{M}_R$

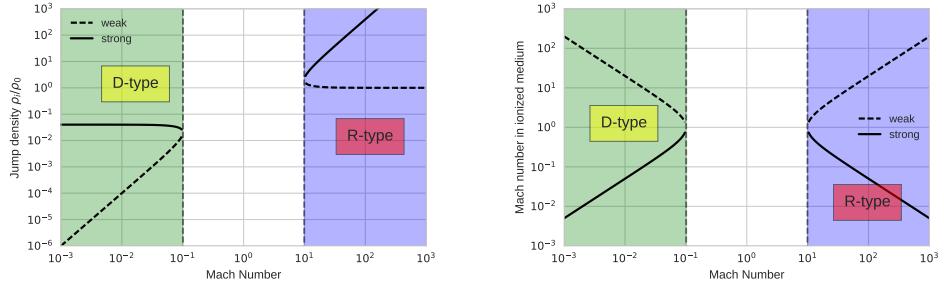


Figura A.3: Soluciones para el salto en (a) densidad y (b) velocidad de un frente de ionización. La línea punteada representa la solución a la ecuación (A.15) cuando se utiliza el signo negativo, mientras que la línea continua a la solución con signo positivo. En la región sombreada en verde se muestran los frentes tipo D y en la región azul los frentes tipo R. Los frentes tipo D crítico y R crítico ocurren donde se intersectan las soluciones con las líneas punteadas verticales.

la onda de material que viaja hacia el frente de ionización se amortigua rápidamente. En la figura A.3a se muestran las soluciones para el salto de densidad para frentes de ionización “fuertes” (signo positivo en la ecuación (A.15)) y “débiles” (signo negativo en (A.15)).

Por otro lado, el salto en velocidad lo podemos derivar combinando las ecuaciones (A.8, A.15). El resultado se muestra en la figura A.3b. En el caso de los frentes R crítico y D crítico, la velocidad del gas en el medio ionizado es igual a la velocidad del sonido.

Apéndice B

Matrices de Rotación y Proyección en el Plano del Cielo.

La transformación del sistema de referencia del objeto (no primado) al sistema de referencia del plano del cielo (primado), se realiza mediante una rotación respecto al eje y por un ángulo i . Dicha rotación es descrita por la matriz de rotación $\mathbf{A}_y(i)$:

$$\mathbf{A}_y(i) = \begin{pmatrix} \cos i & 0 & -\sin i \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin i & 0 & \cos i \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

A su vez se pueden obtener con esta matriz los vectores unitarios del sistema de referencia primado en términos de los vectores unitarios del sistema de referencia no primado:

$$\hat{x}' = \mathbf{A}_y(-i) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (B.2)$$

$$\hat{y}' = \mathbf{A}_y(-i) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (B.3)$$

$$\hat{z}' = \mathbf{A}_y(-i) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (B.4)$$

Es de notarse que en este caso el signo de i está invertido debido a que actualmente la matriz de rotación $\mathbf{A}_y(i)$ realiza una rotación en favor de las manecillas del reloj, mientras que convencionalmente se utiliza el signo positivo del ángulo de rotación para rotaciones en contra de las manecillas del reloj (add reference HERE).

Por otro lado, como estamos considerando choques con geometría cilíndrica, entonces todos los ángulos azimutales ϕ son equivalentes. Entonces, por simplicidad, podemos trabajar con curvas bidimensionales en plano xy ($z = 0$), donde su forma tridimensional es una superficie de revolución de éstas alrededor del eje x y se puede encontrar mediante la matriz de rotación:

$$\mathbf{A}_x(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (B.5)$$

Donde ϕ toma valores en el intervalo $[0, 2\pi]$

Apéndice C

Derivación Matemática del Radio de Curvatura

Tomamos una curva genérica $\vec{\sigma}(t) \equiv x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y}$ continua y suave para todo valor de t real y finito. Sus derivadas se denotan como $\vec{\sigma}'(t)$ y $\vec{\sigma}''(t)$.

Su longitud de arco está dada por:

$$s(t) = \int_0^t \|\vec{\sigma}'(t')\| dt' \quad (\text{C.1})$$

Reparametrizamos la trayectoria $\vec{\sigma}(t)$ con la longitud de arco y diferenciando respecto a ésta obtenemos lo siguiente:

$$\frac{d\vec{\sigma}}{ds} = \frac{\vec{\sigma}'(t)}{\|\vec{\sigma}'(t)\|} \equiv \vec{T}(s) \quad (\text{C.2})$$

Esta última expresión se logró diferenciando la ecuación (C.1) y aplicando la regla de la cadena al diferenciar $\frac{d\vec{\sigma}}{ds}$. $\vec{T}(s)$ es el vector tangente a la trayectoria $\vec{\sigma}(s)$.

La curvatura κ se define como la magnitud de la derivada del vector tangente respecto a la longitud de arco, o bien, como la segunda derivada de la trayectoria $\vec{\sigma}(s)$:

$$\kappa \equiv \|\vec{T}'(s)\| = \|\vec{\sigma}''(s)\| \quad (\text{C.3})$$

El radio de curvatura se define como el radio de un círculo que ajusta localmente a la trayectoria, y se calcula como el inverso multiplicativo de la curvatura:

$$R_c = \frac{1}{\kappa} \quad (\text{C.4})$$

Aplicando la regla de la cadena encontramos la siguiente expresión para la curvatura:

$$\kappa = \left\| \frac{\vec{\sigma}''(t)}{\|\vec{\sigma}'(t)\|^2} - \frac{\vec{\sigma}'(t)}{\|\vec{\sigma}'(t)\|^4} \vec{\sigma}'(t) \cdot \vec{\sigma}''(t) \right\| \quad (\text{C.5})$$

Escribimos las componentes de las derivadas de $\vec{\sigma}(t)$ para calcular los factores que intervienen en la ecuación (C.5):

$$\vec{\sigma}'(t) = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} \quad (\text{C.6})$$

$$\vec{\sigma}''(t) = \ddot{x}\hat{x} + \ddot{y}\hat{y} \quad (\text{C.7})$$

$$\implies \vec{\sigma}'(t) \cdot \vec{\sigma}''(t) = \dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} \quad (\text{C.8})$$

De esta forma, calculamos la curvatura como sigue:

$$\kappa = \left[\left(\frac{\ddot{x}}{\|\vec{\sigma}'\|^2} - \frac{\dot{x}(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y})}{\|\vec{\sigma}'\|^4} \right)^2 + \left(\frac{\ddot{y}}{\|\vec{\sigma}'\|^2} - \frac{\dot{y}(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y})}{\|\vec{\sigma}'\|^4} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (\text{C.9})$$

$$\begin{aligned} \kappa &= \|\vec{\sigma}'\|^{-2} \left[(\ddot{x}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \dot{x}(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}))^2 \right. \\ &\quad \left. + (\ddot{y}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \dot{y}(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}))^2 \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

$$\kappa = \|\vec{\sigma}'\|^{-2} \left[(\ddot{x}\dot{y}^2 - \dot{x}\dot{y}\ddot{y})^2 + (\ddot{y}\dot{x}^2 - \dot{y}\dot{x}\ddot{x})^2 \right]^{1/2} \quad (\text{C.11})$$

$$\kappa = \|\vec{\sigma}'\|^{-3} [\dot{x}^2\dot{y}^2 + \dot{y}^2\dot{x}^2 - 2\dot{x}\dot{y}\dot{x}\dot{y}]^{1/2} \quad (\text{C.12})$$

$$\kappa = \frac{|\dot{x}\dot{y} - \dot{y}\dot{x}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} \quad (\text{C.13})$$

Utilizando coordenadas polares, y utilizando el ángulo polar θ como parámetro, la expresión para el radio de curvatura queda como sigue:

$$R_c = \frac{(R^2 + R_\theta^2)^{3/2}}{|R^2 + 2R_\theta - RR_{\theta\theta}|} \quad (\text{C.14})$$

Donde $R_\theta \equiv \frac{dR}{d\theta}$ y $R_{\theta\theta} \equiv \frac{d^2R}{d\theta^2}$.

Evaluando (C.14) en el ápex ($\theta = 0$) encontramos que $R_{\theta,0} = 0$ por ser el mínimo de $R(\theta)$ y podemos quitar las barras de valor absoluto porque el denominador resultante siempre es positivo por la misma razón. Por tanto recuperamos la ecuación (2.3):

$$R_c = \frac{R_0^2}{R - R_{\theta\theta,0}} \quad (\text{C.15})$$

C.1. Radio de curvatura para un polinomio de grado $2n$

Dado que es de nuestro interés calcular el radio de curvatura del choque en el eje de simetría ($\theta = 0$), debido a que es analíticamente más fácil de calcular, y a su vez es medible observationalmente ajustando un círculo a una serie de mediciones de la posición del choque (sección). Entonces, hacemos una aproximación para la función $R(\theta)$ que nos da la forma del choque mediante un polinomio par de grado $2n$ de la siguiente forma:

$$R(\theta) \simeq R_0 (1 + R_{\theta\theta,0}\theta^2 + \mathcal{O}(\theta^4)) \quad (\text{C.16})$$

De esta forma calculamos las derivadas de $R(\theta)$:

$$\dot{R}(\theta) \simeq R_0\theta (2R_{\theta\theta,0} + \mathcal{O}(\theta^2)) \quad (\text{C.17})$$

$$\ddot{R}(\theta) \simeq R_0 (2R_{\theta\theta,0} + \mathcal{O}(\theta^2)) \quad (\text{C.18})$$

Evaluando en $\theta = 0$ obtenemos los siguiente:

$$R(0) = R_0 \quad (\text{C.19})$$

$$\dot{R}(0) = 0 \quad (\text{C.20})$$

$$\ddot{R}(0) = 2R_{\theta\theta,0}R_0 \quad (\text{C.21})$$

$$\implies \omega(0) = 0 \quad (\text{C.22})$$

$$\dot{\omega}(0) \equiv \frac{\ddot{R}(0)}{R(0)} - \left(\frac{\dot{R}(0)}{R(0)} \right)^2 = 2R_{\theta\theta,0} \quad (\text{C.23})$$

Sustituyendo en la ecuación (C.14) obtenemos la planitud en el ápex:

$$\Pi = \frac{1}{|1 - 2R_{\theta\theta,0}|} \quad (\text{C.24})$$

Por esto en el apéndice D para encontrar el radio de curvatura nos enfocamos en encontrar el coeficiente de segundo orden en la expansión en serie de $R(\theta)$.

Apéndice D

Derivación paso a paso de los Radios Característicos en la aproximación hipersónica del modelo de interacción de dos vientos

D.1. R_0

Podemos determinar el radio característico R_0 a partir de la condición de que el choque es estacionario. En este caso, los momentos de los dos vientos son iguales en la posición del choque. Por tanto, utilizando la ecuación de momento en $\theta = 0$ obtenemos lo siguiente:

$$\rho_{ws}v_w^2 = \rho_{ws1}v_{w1}^2 \quad (\text{D.1})$$

Donde ρ_{ws} y ρ_{ws1} son las densidades de los dos vientos en la posición del choque. Por otro lado, como la tasa de pérdida de masa es constante para un ángulo θ dado, entonces podemos hacer lo siguiente:

$$\frac{\dot{M}_w^0}{4\pi R_0^2 v_w} v_w^2 = \frac{\dot{M}_{w1}^0}{4\pi (D - R_0)^2 v_{w1}} v_{w1}^2 \quad (\text{D.2})$$

En esta última ecuación hemos sustituído $\dot{M}_w^0 = 4\pi R_0^2 v_w \rho_{ws}$ y $\dot{M}_{w1}^0 = 4\pi (D - R_0)^2 v_{w1} \rho_{ws1}$.

Reduciendo la ecuación (D.2) encontramos una expresión para R_0 :

$$\frac{R_0}{D} = \frac{\beta^{1/2}}{1 + \beta^{1/2}} \quad (\text{D.3})$$

D.2. Alatud de Choques tipo Cantoides y Ancantoides

R_{90} puede determinarse a partir de evaluar las ecuaciones (3.27) y (3.28) en $\theta = \frac{\pi}{2}$ como sigue:

$$\frac{R_{90}}{D} = \tan \theta_{1,90} \quad (\text{D.4})$$

$$\theta_{1,90} \cot \theta_{1,90} - 1 = -\frac{2\beta}{k+2} \quad (\text{D.5})$$

Donde $\theta_{1,90} = \theta_1(\frac{\pi}{2})$. Introducimos un nuevo parámetro $\xi \equiv \frac{2}{k+2}$ de modo que combinando las dos ecuaciones anteriores obtenemos lo siguiente:

$$\frac{R_{90}}{D} = \tan \theta_{1,90} = \frac{\theta_{1,90}}{1 - \xi \beta} \quad (\text{D.6})$$

Hacemos una expansión en serie para el lado izquierdo de la ecuación y reducimos:

$$\theta_{1,90}^2 \left(1 + \frac{\theta_{1,90}^2}{15} \right) \simeq 3\beta\xi \quad (\text{D.7})$$

Tomamos la solución a primer orden $\theta_{1,90} = 3\beta\xi$, sustituímos este valor en el término correctivo y resolvemos para $\theta_{1,90}$:

$$\theta_{1,90} = \left(\frac{3\xi\beta}{1 + \frac{1}{5}\xi\beta} \right)^{1/2} \quad (\text{D.8})$$

Finalmente sustituímos (D.8) en (D.6) para obtener R_{90} :

$$\frac{R_{90}}{D} = \frac{(3\xi\beta)^{1/2}}{\left(1 + \frac{1}{5}\xi\beta\right)^{1/2} (1 - \xi\beta)} \quad (\text{D.9})$$

$$\Lambda = \frac{(3\xi)^{1/2} (1 + \beta^{1/2})}{\left(1 + \frac{1}{5}\xi\beta\right)^{1/2} (1 - \xi\beta)} \quad (\text{D.10})$$

D.3. Planitud de choques tipo Cantoides y Ancantoides

Siendo que el choque de proa en nuestro modelo genérico es simétrico, entonces la forma $R(\theta)$ debe ser una función par, por tanto podemos hacer la siguiente expansión en serie:

$$R(\theta) \simeq R_0 + \frac{1}{2}R_{\theta\theta,0}\theta^2 + \mathcal{O}(\theta^4) \quad (\text{D.11})$$

De esta forma la planitud del choque en el ápex queda como sigue (ver apéndice C):

$$\Pi = \left(1 - 2 \frac{R_{\theta\theta,0}}{R_0} \right)^{-1} \quad (\text{D.12})$$

Para encontrar el coeficiente de segundo orden $R_{\theta\theta,0}$ hacemos una expansión en serie de las ecuaciones (3.28) y (3.27) para ángulos pequeños, mostrando a continuación la expansión de cada término para al final hacer la reducción algebraica:

$$\theta_1 \cot \theta_1 - 1 \simeq -\frac{\theta_1^2}{3} \left(1 + \frac{\theta_1^2}{15} \right) \quad (\text{D.13})$$

$$\cos^k \theta \simeq \left(1 - \frac{\theta^2}{2} \right)^k \simeq \left(1 - \frac{k\theta^2}{2} \right) \quad (\text{D.14})$$

$$\sin^2 \theta \simeq \theta^2 \left(1 - \frac{\theta^2}{6} \right)^2 \simeq \theta^2 \left(1 - \frac{\theta^2}{3} \right) \quad (\text{D.15})$$

$$\implies \cos^k \theta \sin^2 \theta \simeq \theta^2 \left[1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{k}{2} \right) \theta^2 \right] \quad (\text{D.16})$$

$$\implies I_k(\theta) \simeq \frac{\theta^3}{3} \left[1 - \frac{1}{10} (3k+2) \theta^2 \right] \quad (\text{D.17})$$

$$\cot \theta \simeq \theta^{-1} \left(1 - \frac{\theta^2}{3} \right) \quad (\text{D.18})$$

$$\implies 2\beta I_k(\theta) \cot \theta \simeq \frac{2}{3} \beta \theta^2 \left[1 - \frac{1}{30} (9k+16) \theta^2 \right] \quad (\text{D.19})$$

$$-\frac{2\beta}{k+2} \left(1 - \cos^{k+2} \theta \right) \simeq \beta \theta^2 \left[1 - \frac{1}{12} (3k+4) \right] \quad (\text{D.20})$$

Sustituyendo las expansiones anteriores en (3.28) obtenemos lo siguiente:

$$\theta_1^2 \left(1 + \frac{\theta_1^2}{15} \right) \simeq \beta \theta^2 \left[1 + \frac{1}{60} (4 - 9k) \theta^2 \right] \quad (\text{D.21})$$

La solución a primer orden (ignorando el término cuártico) es $\theta_1^2 \simeq \beta \theta^2$. Sustituímos esta solución en el término correctivo y resolvemos para θ_1^2 :

$$\theta_1^2 \simeq \beta \theta^2 \left[1 + \frac{1}{60} (4 - 9k) \theta^2 \right] \left(1 + \frac{\beta \theta^2}{15} \right)^{-1} \quad (\text{D.22})$$

$$\theta_1^2 \simeq \beta \theta^2 \left[1 + \frac{1}{60} (4 - 9k) \theta^2 \right] \left(1 - \frac{\beta \theta^2}{15} \right) \quad (\text{D.23})$$

$$\implies \theta_1^2 \simeq \beta \theta^2 (1 + C_{k\beta} \theta^2) \quad (\text{D.24})$$

$$\text{Donde : } C_{k\beta} = \left(\frac{1}{15} - \frac{3k}{20} - \frac{\beta}{15} \right) \quad (\text{D.25})$$

Utilizamos esta solución para θ_1 en la ecuación (3.27), ignorando términos de orden superior al cuártico dentro de los corchetes:

$$\theta_1 \simeq \beta^{1/2} \theta (1 + C_{k\beta} \theta^2)^{1/2} \quad (\text{D.26})$$

$$\implies \theta + \theta_1 \simeq \theta \left[1 + \beta^{1/2} \left(1 + \frac{C_{k\beta}}{2} \theta^2 \right) \right] \quad (\text{D.27})$$

$$\sin \theta_1 \simeq \theta_1 \left(1 - \frac{\theta_1^2}{6} \right) \quad (\text{D.28})$$

$$\simeq \beta^{1/2} \theta \left(1 + \frac{C_{k\beta}}{2} \theta^2 \right) \left[1 - \frac{\beta \theta^2 (1 + C_{k\beta} \theta^2)}{6} \right] \quad (\text{D.29})$$

$$\implies \sin \theta_1 \simeq \beta^{1/2} \theta \left[1 + \left(\frac{C_{k\beta}}{2} - \frac{\beta}{6} \right) \theta^2 \right] \quad (\text{D.30})$$

$$\sin(\theta + \theta_1) \simeq (\theta + \theta_1) \left[1 - \frac{(\theta + \theta_1)^2}{6} \right] \quad (\text{D.31})$$

$$\simeq \theta \left[1 + \beta^{1/2} \left(1 + \frac{C_{k\beta}}{2} \theta^2 \right) \right] \left[1 - \frac{\theta^2 \left(1 + \beta^{1/2} \left(1 + \frac{C_{k\beta}}{2} \theta^2 \right) \right)^2}{6} \right] \quad (\text{D.32})$$

$$\simeq \theta \left(1 + \beta^{1/2} \right) \left[1 + \left(\frac{\beta^{1/2} C_{k\beta}}{2(1 + \beta^{1/2})} - \frac{1}{6} (1 + \beta^{1/2})^2 \theta^2 \right) \right] \quad (\text{D.33})$$

$$\implies \frac{R}{D} \simeq \frac{\beta^{1/2}}{1 + \beta^{1/2}} \left[1 + \left(\frac{C_{k\beta}}{2} - \frac{\beta}{6} \right) \theta^2 \right] \quad (\text{D.34})$$

$$\left[1 + \left(\frac{\beta^{1/2} C_{k\beta}}{2(1 + \beta^{1/2})} - \frac{(1 + \beta^{1/2})^2}{6} \right) \theta^2 \right]^{-1}$$

$$\simeq R_0 \left[1 + \left(\frac{C_{k\beta}}{2(1 + \beta^{1/2})} + \frac{1 + 2\beta^{1/2}}{6} \right) \theta^2 \right] \quad (\text{D.35})$$

De esta mostramos que el término de segundo orden que necesitamos en la ecuación (3.41) está dado por:

$$\frac{R_{\theta\theta,0}}{2} = \frac{C_{k\beta}}{2(1+\beta^{1/2})} + \frac{1+2\beta^{1/2}}{6} \quad (\text{D.36})$$

que es el resultado mostrado en la ecuación (3.42)

D.4. Radio de Curvatura para choques tipo Wilkinoides

Hacemos expansión Taylor hasta cuarto orden de cada uno de los términos de la ecuación (3.39)

$$\csc^2 \theta \simeq \theta^{-2} \left(1 - \frac{\theta^2}{6} + \mathcal{O}(\theta^4) \right)^{-2} \simeq \theta^{-2} \left(1 + \frac{\theta^2}{3} + \mathcal{O}(\theta^4) \right) \quad (\text{D.37})$$

$$\theta \cot \theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{3} \left(1 + \frac{\theta^2}{15} + \mathcal{O}(\theta^4) \right) \quad (\text{D.38})$$

$$\implies 1 - \theta \cot \theta \simeq \frac{\theta^2}{3} \left(1 + \frac{\theta^2}{15} + \mathcal{O}(\theta^4) \right) \quad (\text{D.39})$$

Sustituímos en la ecuación (3.39):

$$R(\theta) \simeq R_0 \left[3\theta^{-2} \left(1 + \frac{\theta^2}{3} + \mathcal{O}(\theta^4) \right) \frac{\theta^2}{15} \left(1 + \frac{\theta^2}{15} \right) \right]^{1/2} \quad (\text{D.40})$$

$$\implies R(\theta) \simeq R_0 \left[1 + \frac{2\theta^2}{5} + \mathcal{O}(\theta^4) \right]^{1/2} \quad (\text{D.41})$$

$$\implies R(\theta) \simeq R_0 \left[1 + \frac{\theta^2}{5} + \mathcal{O}(\theta^4) \right] \quad (\text{D.42})$$

De esta forma mostramos que el coeficiente de segundo orden en este caso es $R_{\theta\theta,0} = \frac{1}{5}$. Por lo tanto, sustituyendo este valor en la ecuación (C.24) encontramos que

$$\Pi = \frac{5}{3} \quad (\text{D.43})$$

Apéndice E

True Versus Apparent Shapes of Bowshocks

3.3 Tangent line

The boundary on the plane of the sky of the projected surface is the locus of those lines of sight that graze the surface tangentially. This corresponds to a curve lined on the surface itself, which we denote the *tangent line*, and which is defined by the condition

$$\hat{n} \cdot \hat{z}' = 0. \quad (14)$$

We denote by ϕ_1 that value of ϕ that satisfies this relation for a given inclination, i , and polar angle, θ . From equations (12, 14, B4, 10) this is

$$\sin \phi_1 = -\tan i \tan \alpha = \tan \left(\frac{1 + \tan \theta}{\omega - \tan \theta} \right). \quad (15)$$

From equations (7, 8) it follows that the observer-frame coordinates of the tangent line are given by

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \\ z'_1 \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} \cos(\omega - \tan \theta) & -\sin(\omega - \tan \theta) & 0 \\ \sin(\omega - \tan \theta) & \cos(\omega - \tan \theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Note that, in general, x'_1 is not a linear function of x and y'_1 , so that the tangent line (x'_1, y'_1) is not a plain curve in 3-dimensional Euclidean space, \mathbb{R}^3 . However, for the projected shape (x'_1, y'_1) of the tangent line on the plane of the sky, \mathbb{R}^2 , the value of x'_1 does not matter parallel to i . The projected line-of-sight shell velocity is therefore

$$v_{\text{los}} = (\hat{t}' \cdot \hat{z}') v_{\text{gas}}(\theta) = \frac{v_{\text{gas}}(\theta)(1 + \omega)^{1/2} \sin \theta}{\sin^2 \theta - \omega \cos \theta}. \quad (23)$$

Equation (15) will not have a solution for arbitrary values of θ and i , but only if $|1 + \tan \theta| < 1$. In particular, if $i = 0$, then the tangent line does not exist unless $\theta_0 > 90^\circ$, where its value of θ does not exist for any value of i . If $i = 90^\circ$, then the viewing angle is sufficiently close to face-on, the projected surface has no “edge” and will not longer look like a bow to the observer.

After completing this work, it was brought to our attention that the principal results of this section had already been derived in Appendix B of the PhD thesis Wilkin (1997). For instance, Wilkin's equation (8) is equivalent (apart from differences in notation) to our equation (15).

3.4 Characteristic radii on the plane of the sky

In order to compare the shell shape given by $R(\theta)$ with observations, it is convenient to define the following apparent radii in the observer frame: R_0 and R_{90} . These are projected distances of the shell tangent line from the origin. The first is measured in the direction of the symmetry axis, and the second in a perpendicular direction. More concretely $R_0 = |x'_1|$, $y'_1 = 0$ and $R_{90} = |y'_1|$, $x'_1 = 0$. From equations (15) and (16) we find that:

$$R_0 = R(\theta_0) \cos(\theta_0 + i) \quad (19)$$

Where θ_0 is the solution of equation (18), and

$$R'_{90} = R(\theta_{90}) \sin \theta_{90} \left(1 - \sin^2(\phi_1(\theta_{90})) \right)^{1/2} \quad (20)$$

MNRAS **000**, 1–25 (2017)

Where θ_{90} is the solution of the implicit equation:

$$\cot \theta_{90} = \frac{1 + (\omega + \theta_{90})^2 \sin^2 2i}{2\omega(\theta_{90}) \cos^2 i}^{1/2} \quad (21)$$

The projected slantude (Σ) is then given by $\Sigma^2 = R'_{90}^2/R_0^2$. Similarly, the projected planitude (Π') is $\Pi' = R'_0/R_0$, where R'_0 is found by applying the equivalent of equation (3) for primed quantities:

$$R'_0 = \frac{(R_0)^2}{R_0 - R'_0 \cos^2 i}. \quad (22)$$

3.5 Line-of-sight velocities on the tangent line

Motions in a thin shell will be predominantly tangential to the shell surface. In addition, for the particular case of wind-wind bowshocks, the flow in each azimuthal slice can be shown to be independent (Wilkin 2000), which implies that the shell velocity is parallel to i . The projected line-of-sight shell velocity is therefore

$$v_{\text{los}} = (\hat{t}' \cdot \hat{z}') v_{\text{gas}}(\theta) = \frac{v_{\text{gas}}(\theta)(1 + \omega)^{1/2} \sin \theta}{\sin^2 \theta - \omega \cos \theta}, \quad (23)$$

where $v_{\text{gas}}(\theta)$ is the gas velocity along the shell and the standard sign convention has been adopted such that velocities away from the observer are deemed positive.

4 QUADRICS OF REVOLUTION

For an arbitrary surface of revolution, application of equations (15, 16) to determine the projected shape of the tangent line is not straightforward and in general requires numerical techniques. However, analytical results can be found for the implications of certain classes of quadratics of revolution (Gibson 1983; Gitterman & Zoonematkar-Murray 2009), which are formed by rotating a conic section plane about its symmetry axis. Examples are the sphere, spheroids (oblate and prolate), and right circular paraboloids and hyperboloids. Ignoring the effects of the case of ellipses, cones, and pairs of paraboloids, while mathematically simple, these quadratics are sufficiently flexible that they can provide a useful approximation to more complex bow shell shapes.

The shape of the quadratics of revolution ($\theta = 0$) are shown in Figure 7(a) for the elliptic and hyperbolic cases, respectively. The conic section itself is fully described by two lengths, a and b , which are the semi-axes.³ However, the curve can be translated along the x -axis to an arbitrary point with respect to the star, so that the apex ($x = 0$) and the center ($x = R_0$) of the bow have no necessary relation to a or b and therefore the bowshape requires three independent lengths for its specification. The displacement x_0 from the star to the “center” of the conic section is

$$x_0 = R_0 - \sigma a \quad \text{with} \quad \sigma = \begin{cases} +1 & \text{elliptic} \\ -1 & \text{hyperbola} \end{cases} \quad (24)$$

For hyperbolae the center is “outside” of the bow and x_0 is always

³ We consider only the case of a single sheet of a 2-sheet hyperboloid or paraboloid, since these are the shapes that resemble a bow, whereas 1-sheet versions resemble the waist of an hourglass.

⁴ Note that we do not require that $a > b$, so either a or b may be the semi-major axis.

positive, whereas for ellipses the center is “inside” the bow and is usually negative, except when $a > R_0$ (see Figure 7).

A general parametric form⁴ for the x -coordinates of the quadratics in the $\theta = 0$ plane, and with the star at the origin) as a function of $t = [0, \pi]$ is then

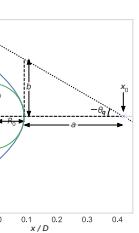


Figure 7. Example off-center conic sections that can form quadratics of revolution: (a) ellipse, (b) hyperbola. The relationship is shown between the conic section parameters a , b , R_0 and the bowshock characteristic radii R_0 , R_{90} , as defined in Fig. 4. The origin (center of the weaker flow) is indicated by a red star, the center of curvature of the apex of the bow shock is indicated by a green dot, and the geometric center of the conic section is indicated by a blue cross, which is offset by x_0 from the origin. Note that R_0 , R_{90} , R_0 , a , and b are all length and are always positive, whereas x_0 is a displacement and may be positive or negative.

positive, whereas for ellipses the center is “inside” the bow and is usually negative, except when $a > R_0$ (see Figure 7).

A general parametric form⁴ for the x -coordinates of the quadratics in the $\theta = 0$ plane, and with the star at the origin) as a function of $t = [0, \pi]$ is then

$$x = x_0 + \sigma a C(t) \quad (25)$$

where

$$\begin{aligned} S, C &= \begin{cases} \sin, \cos & \text{ellipse} \\ \sinh, \cosh & \text{hyperbola} \end{cases} \quad (26) \end{aligned}$$

Except for the circle case ($\sigma = +1$, $a = b$), the parametric variable t is not actually an angle in physical space. Instead, the polar form of the bow shape $R(t)$ must be found by substituting equations (25) into $\theta = \tan^{-1}(y/x)$ and $R = (x^2 + y^2)^{1/2}$.

The type of quadratic surface can be characterized by the *quadric parameter*:

$$Q = \sigma \frac{b^2}{a^2}, \quad (27)$$

where $Q < 0$ corresponds to open surfaces (hyperboloids) and $Q > 0$ corresponds to closed surfaces (elliptical spheres with $Q > 1$ and prolate spheroids with $Q < 1$). Special cases are the sphere ($Q = 1$) and the paraboloid ($Q = 0$). Alternatively, one can define a *quadric angle*:

$$\theta_Q = \sigma \tan^{-1}(b/a), \quad (28)$$

which is marked in Figure 7. In the case of hyperbolae, the

⁴ The special case of the parabola needs to be treated differently, see Appendix C.

Bow shock shapes 7

planitude, Π , we can have a family of different quadric types, with varying arclength, A , that increases from oblate, through prolate and paraboloid, to hyperboloid, as illustrated in Figure 8.

4.1 Parabolic departure function

The special case of confocal conic sections ($A = \Pi$) can be written in polar form as

$$R(\theta) = R_0 \frac{1 + \epsilon}{1 + \epsilon \cos \theta} \quad (35)$$

where $\epsilon = (1 - Q)/1/2$ is the eccentricity. For the confocal parabola ($\epsilon = 1$), the dimensionless reciprocal radius is therefore $R_0/R(\theta) = 1/(1 + \cos \theta)$, which suggests the following form for a *departure function* that measures the difference between a given $R(\theta)$ and the parabola:

$$\Delta(\theta) = \frac{R_0}{R(\theta)} - \frac{1}{2} (1 + \cos \theta). \quad (36)$$

From conditions (35) and (36) it is clear that Δ is a linear function of $\cos \theta$ (or other oblique angles) for elliptic ellipsoids ($\epsilon < 1$) and negative for hyperbolae ($\epsilon > 1$). Examples are shown in Figure 9 for a grid of 9 conics centered on the confocal parabola, with $(\Pi, A) = (2, 2)$, which has $\Delta(\theta = 0) = 0$. Planar shapes (shown by different line colors) determine the slope at the apex, $\cos \theta = 1$. Alatide (shown by line width) determines the slope at the apex, $\cos \theta = 0$. All conics with $\Delta(\theta = 0) \neq 0$ are concave.

Strictly speaking, the departure function is relevant if one is interested in the “true” bow shape, since they will be fully determined by Π and A . Nonetheless, as we will show in following sections, it is a useful tool for studying general $R(\theta)$, being very sensitive to small variations in the shape.

4.2 Plane-of-sky projection of quadric surfaces

We now apply the modulus of Σ to find the projected shape of a quadric bow on the plane of the sky. The intrinsic 3D shape of the shell is given by rotating equations (25) about the x -axis, but it is more convenient to first transform to a reference frame where the origin is at the center of the cone section:

$$(X, Y, Z) = (x - x_0, y, z). \quad (37)$$

In this new frame, the quadric shape is

$$X = C(t) \cos t \quad (38)$$

$$Y = S(t) \cos \theta \quad (38)$$

$$Z = S(t) \sin \theta \quad (38)$$

The azimuth of the tangent line as a function of inclination and parametric variable is then found from equations (10, 15) to be

$$\sin \theta = \frac{b C(t)}{a S(t)} \tan i. \quad (39)$$

Combining equations (8, 38, 39) gives the observer-frame cartesian plane-of-sky coordinates of the tangent line:

$$x'_t = \frac{C(t)}{a \cos^2 i} (2 \epsilon^2 \cos^2 \theta + \sigma b^2 \sin^2 \theta)^{1/2} \quad (40)$$

$$y'_t = b S(t) \left(1 - \frac{\epsilon^2 C^2(t)}{a^2 S^2(t)} \sin^2 \theta \right)^{1/2} \quad (40)$$

We wish to show that this projected shape is a conic section of the same variety (ellipse or hyperbola) as the one that generated the

6 Tarango-Yong & Henney

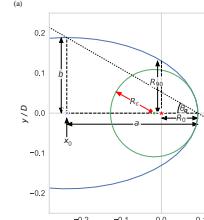


Figure 8. Example of a family of confocal conic sections, all with the same planimetric axes at apex, marked by white dot ($\Pi = R_0/R_0 = 2$). The oblique angle, θ_Q , varies from the family (see text), with lower values of θ_Q giving larger values of the alatide, $A = R_0/R_0$, meaning more open wings. Different values of Π can be achieved for the exact same quadratics by sliding them along the x -axis, which will also change the axis scales since these are normalized by R_0 .

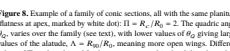


Figure 9. Parabolic departure functions given by equation (36) for a grid of 9 conics centered on the confocal parabola, with $(\Pi, A) = (2, 2)$, which has $\Delta(\theta = 0) = 0$. Planar shapes (shown by different line colors) determine the slope at the apex, $\cos \theta = 1$. Alatide (shown by line width) determines the slope at the apex, $\cos \theta = 0$. All conics with $\Delta(\theta = 0) \neq 0$ are concave.

8 Tarango-Yong & Henney

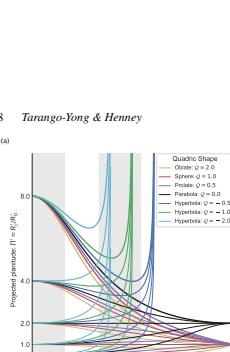


Figure 10. Effects of projection on quadratics of revolution: variation with inclination, $|\theta|$, of bow size and shape. Different line colors correspond to varying quadric parameter, Q (see key), while variation in line width corresponds to variation in the “true” planitude, Π , or apex radius of curvature. Vertical gray rectangles show quantities of $\Pi(\theta)$, which will be equally populated for an isotropic distribution of orientations. (a) Projected planitude Π' . (b) Projected alatide $A - R_0/R_0$.

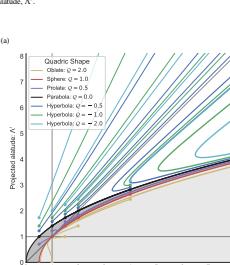


Figure 11. As Figure 10, but diagnostic: (a) planimetric alatide A versus Π' ; (b) variation in projected alatide A versus $|\theta|$. In (a), shading indicates different classes of quadratics: hyperboloids (white), prolate spheroids (dark gray), and oblate spheroids (light gray), with the limiting case of paraboloids shown by the thin black line.

which is the value of $\Delta(\theta = 0)$ in this case. Hence, it is the sign of $2\Pi - \Delta^2$ that determines σ and whether a quadric is a spheroid or a hyperboloid. For example, for a constant

$$\Omega = 2\Pi - \Delta^2 \quad (34)$$

Hence, it is the sign of $2\Pi - \Delta^2$ that determines σ and whether a quadric is a spheroid or a hyperboloid. For example, for a constant

original quadric. If this were true, then it would be possible to write the plane-of-sky coordinates as

$$\begin{aligned} X'_s &= b' C(t') \\ Y'_s &= b' S(t'). \end{aligned} \quad (41)$$

Comparing equations (40) and (41), we find after some algebra that the two forms for (X'_s, Y'_s) are indeed consistent, with the equivalences:

$$d = a f_{\text{lat}} \cos i \quad (42)$$

$$b' = b \quad (43)$$

$$t' = C^{-1}[f_{\text{lat}}, C(t)] \quad (44)$$

where for convenience we define the quadratic projection factor:

$$f_{\text{lat}} = (1 + Q \tan^2 i)^{1/2}. \quad (45)$$

This demonstrates the original claim that the projected shape is also a quadratic, meaning that we can re-use the previous equations (31–34) with primed quantities substituted for unprimed ones. From equations (27, 42, 43) we find that the quadratic parameter of the projected shape is

$$Q' = \frac{Q}{f_{\text{lat}}^2 \cos^2 i}. \quad (46)$$

Finally, we transform the projected reference frame back to be centered on the star again:

$$(x'_s, y'_s) = (X'_s + x'_0 V'_s). \quad (47)$$

where the projected quadratic displacement x'_0 follows from simple foreshortening:

$$x'_0 = v_0 \cos i. \quad (48)$$

The projection of the gape distance then follows from the primed version of equation (31) as

$$\frac{R'_0}{R_0} = \cos i \left[1 + \frac{1}{Q'} (f_{\text{lat}} - 1) \right]. \quad (49)$$

and the projected plumbline and slantude can be calculated from equations (32, 34, 42, 46) as

$$\frac{P}{R'_0/R_0} = f_{\text{lat}} \cos i \quad (50)$$

$$A' = (2\Pi - Q')^{1/2}. \quad (51)$$

These are all shown in Figures 10 and 11 for a variety of quadratic parameter Q (line color) and true plumbline Π (line thickness). The projected plumbline and slantude (Pi') (10) behave in a qualitatively similar manner. Whereas the plumbline and A' all spheroids ($Q = 0$) test towards $\Pi = 1$, and $A' = 1$ as the inclination increases towards 90°. This is because when the spheroid is oriented edge-on, we see its circular cross-section. Hyperboloids behave differently: although Π' and A' initially decrease with increasing inclination (for $Q = 1$), they turn around and increase as the apparent angle reaches a critical value of $\beta = 90^\circ - |i|$. For $|i| < \beta$ the apparent line does not exist (see § 3.3) because the line of sight “inside” the asymptotic cone of the far wings (with opening half-angle $\alpha_{\text{in}} = |\theta_{\text{in}}|$), and no limb-brightening should be visible.³ For paraboloids and

³ As illustrated in Figure 8 of Graham et al. (2003), the spheroidal emission contours are elliptical in this case (constant cylindrical symmetry) and no curved bow shape is apparent. Deviations from cylindrical symmetry could result in a curved emission axis; even for this no-target case (Graham et al.'s Fig. 9), but that is beyond the scope of this paper.

spheroids, $\alpha_{\text{min}} = 0$, which means that the tangent line exists for all viewing angles.

In Figure 11a, we show the inclination-dependent tracks of the quadratics in the diagnostic Π' – A' plane of projected slantude versus projected plumbline. The true plumbline and slantude, which are seen for an edge-on viewing angle $i = 0^\circ$, are marked by filled circles. The zones corresponding to each class of quadric (oblate spheroid, prolate spheroid, or hyperboloid) are shaded by gray shading, and the regions where the slantude tracks never cross the axes are marked by white. The convergence of all the slantude tracks on the point $(\Pi', A') = (1, 1)$ is apparent, as is the divergence of the hyperboloid tracks towards $(\Pi', A') = (+\infty, +\infty)$, whereas the paraboloids, by contrast, converge to a point at $(\Pi', A') = (2, 2)$. Thus, the slantude zones are the same as the specific paraboloids, and the spheroids share⁴ with true plumbline and slantude $(\Pi, A) = (2, 2)$ and $(1, 1)$, respectively, which are the only quadrics whose apparent shape remains identical for all inclination angles.

Figure 11b shows how the apparent star-gape separation varies with inclination $|i|$. For moderate inclinations, $|i| < 30^\circ$, this depends primarily on the true plumbline Π , with very little influence of the quadric parameter Q . For $|i| > 1$, the separation increases with $|i|$, whereas for $\Pi < 1$ it decreases slightly. Note, however, that for cases where the plumbline is filled with the source of the wind, $\Pi < 1$, it can be increased, $|i| / R'_0$ being an increasing function of $|i|$. For larger inclinations, $|i| > 30^\circ$, the strands for different Q begin to separate, with hyperboloids showing the strongest increase of R'_0 with $|i|$.

A complementary view of the effects of projection is shown in Figure 12, which shows “snapshots” of (Π, A') for a sequence of 6 values of the inclination, equally spaced in $|\sin i|$, so that each panel is equally likely for a isotropic distribution of orientations.

The distribution of the true Π and A are each explicitly shown on $i = 0$, which becomes increasingly distorted as $|i|$ increases. The color scale represents Q and the symbol size is proportional to R'_0/R_0 . It can be seen that the points tend to cluster closer and closer to the diagonal $\Pi' = A'$ as the inclinations increase, and that the most distant points tend to have the largest values of R'_0/R_0 . The grey shaded regions show the zones of true Π , A for hyperboloids where the tangent lines still exists for that value of $|i|$. This becomes smaller and smaller as $|i|$ increases, which explains why the slantude tracks for hyperboloids in Figure 11a remain quadratic, but lay above this region when $|i| = 0^\circ$ will no longer be visible as a bow for this value of $|i|$. Note that this figure is merely illustrative of the qualitative effects of projection, since in reality there is no particular reason to expect a uniform distribution in true Π and A .

5 THIN-SHELL BOW SHOCK MODELS

More physically realistic models of bow shapes are provided by steady-state hydrodynamic models for the simulation of hydrodynamic flows in the thin-shell limit. The classic example of such solutions for the wind–parallel wind and wind–wind problems (see § 1) of Canto et al. (1996, hereafter CRW), where it is assumed that the two shocks are highly radiative and that the post-shock flows are perfectly mixed to form a single shell of negligible thickness. In this

⁴ So named because the star is at the focus of the parabola, or the center of the sphere.

⁵ By always placing the weaker of the two winds at the origin, it is only necessary to consider $\beta \leq 0$.

⁶ Note that the wind anisotropy axis must be aligned with the star-star axis to maintain cylindrical symmetry.

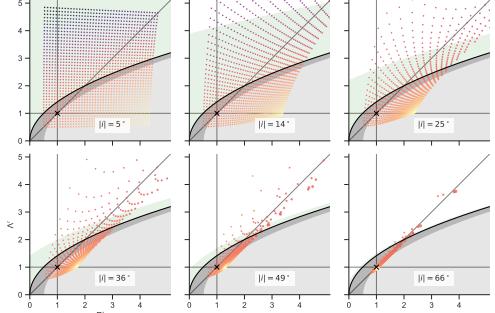


Figure 12. Variation with inclination angle of the apparent shape of quadric bows with true plumbline and slantude that are uniformly distributed over the ranges $\Pi \in [0.2, 4.5]$, $A \in [-0.5, 4.5]$. Panels show the apparent (Π, A') as the inclination is increased through uniform intervals in $|\sin i|$. Symbol color represents the quadric parameter Q , increasing from dark blue, through orange, to yellow. Symbol size is proportional to the increase in apparent star-gape separation, R'_0/R_0 .

approximation, the shape of the shell is found algebraically by CRW from conservation of linear and angular momentum, following an approach first outlined in Wilks (1990). For a wind-stream case, the resulting bow shape was dubbed *windbow* by Cox et al. (2012) and has the form

$$R(\theta, \theta) = R_0 \cos^2 \theta (3(1 - \cot \theta)^{1/2}. \quad (52)$$

For the wind-wind case, a family of solutions are found that depend on the value of β , the wind anisotropy angle. In Figure 3, equation (1), and the following discussion in § 1, we present those shapes that are called *canroids*. The exact solution for the canroid shapes (eqs. [23, 24] of CRW) is only obtainable in implicit form, but an approximate explicit solution (eq. [26] of CRW) is very accurate for $\beta \leq 0.1$. The windbow shape corresponds to the $\beta = 0$ limit of the canroid solution, and the anisotropy index is $k = 0$. We take $\beta = -0.03$, and see Figure 3, and we follow this usage for the thin-shell models discussed in this section. CRW's χ axis corresponds to the cartesian x axis used in sections 3 and 4 of the current paper, while the y axis corresponds to θ when $\beta = 0$.

A generalization of the canroids to the case of an anisotropic⁸

By always placing the weaker of the two winds at the origin, it is only necessary to consider $\beta \leq 0$.

Note that the wind anisotropy axis must be aligned with the star-star axis to maintain cylindrical symmetry.

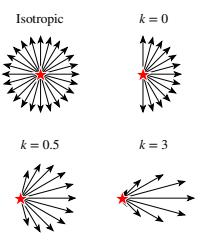


Figure 13. Schematic diagram of wind flow pattern in isotropic and anisotropic cases for different values of the anisotropy index k . Arrow length represents the wind momentum loss rate per solid angle.

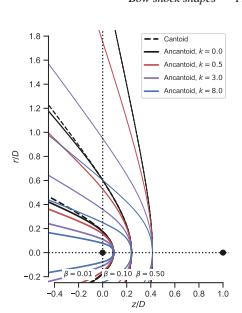


Figure 14. Bow shock shapes for interacting winds in the thin-shell approximation. The total mass-loss rate per solid angle is ρ_0 , and the distance between the two wind sources, which is indicated by black dots on the axis. The weaker source is at $(0, 0, 0)$ and the stronger source is at $(1, 0, 0)$. Results are shown for different values of the wind momentum ratio β (different line widths), and for the case when the weaker wind is isotropic (black lines) or anisotropic (colored lines).

is the total mass-loss rate of the inner wind. The integral

$$I_0(\theta) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \cos^k \theta \sin^2 \theta d\theta \quad (57)$$

has an analytic solution in terms of the hypergeometric function, $2F_1(1, \frac{1}{2} + \frac{k+1}{2}, \frac{3-k}{2}; \cos^2 \theta)$, but is more straightforwardly calculated by numerical quadrature. The angular momentum of the inner wind about the origin is $J_{\text{in}} = 0$ because it is purely radial. The outer wind momenta are unchanged from the CRW case, but are given here for completeness:

$$\begin{aligned} J_{\text{out}1} &= \frac{M_{\text{out}}^2 V_{\text{out}}}{(1 + M_{\text{out}}^2) I_0(\theta)} \sin^2 \theta \\ J_{\text{out}2} &= \frac{M_{\text{out}}^2 V_{\text{out}}}{(1 + M_{\text{out}}^2) I_0(\theta)} (\theta_1 - \sin \theta \cos \theta) \\ J_{\text{out}3} &= \frac{M_{\text{out}}^2 V_{\text{out}}}{(1 + M_{\text{out}}^2) I_0(\theta)} (\theta_1 - \sin \theta \cos \theta) D. \end{aligned} \quad (58)$$

We define β in this case as the momentum ratio on the symmetry axis, which means that

$$M_{\text{out}}^2 V_{\text{out}} I_0(\theta) = 2(k + 1) M_{\text{out}}^2 V_{\text{out}}. \quad (59)$$

Substituting equations (55)–(59) into equation (54) and making use of the geometric relation between the interior angles of the triangle shown in Figure 3:

$$R \sin(\theta + \theta_1) = D \sin \theta_1. \quad (60)$$

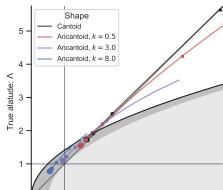


Figure 15. True shapes of canroids and anisocentroids in the II–A plane, calculated according to model of App.D. For each β the ρ_0 range is from 0 to 10, from lower left to upper right (although the black and red lines are truncated on the upper right), and line colors correspond to different anisotropy indices, model used to calculate the results. The symbol mark particularly is $\beta = 0.01$, $k = 1.0$, large open circle. See caption for details of the model used. The white plus symbol marks the result for the anisocentroid ($\Pi, A = (5, \sqrt{5})$). Background shading indicates the domains of different quadric classes: hyperboloids (white), prolate spheroids (dark gray), and oblate spheroids (light gray).

yields

$$\theta_1 \cot \theta_1 = 1 + 2\beta \left(I_0(\theta) \cot \theta - 1 - \frac{\cos^k \theta + 2}{k + 2} \theta \right). \quad (61)$$

which is the generalization of CRW's equation (24) to the anisotropic case. Equation (61) is solved numerically to give $\theta_1(\theta)$, which is then used to calculate $\theta_2(\theta)$ and $\theta_3(\theta)$ to give the final bow shape. $R(\theta, \theta_1, \theta_2)$ is given by (1) to give the final bow shape. $R(\theta, \theta_1, \theta_2)$, where we have set $\theta_3 = 0$, indicates the dependence of the bow shape on two parameters: axial momentum ratio, β , and anisotropy index, k . We refer to the resultant bow shapes as *anisocentroids*.

5.2 True shapes of canroids and anisocentroids

The shapes of the anisocentroid bow shapes are shown in Figure 14 for three different values of β , and are compared with the CRW results for isotropic winds. The shape of the anisocentroid bow in the Π – A plane is shown in Figure 15, where the gray background shading indicates the zones of different quadric classes, as in § 4. Figure 11 and 12, Values of Π and A are given for the case of an isotropic wind. All the models are close to the diagonal $A = \Pi$ in the plumbline–slantude plane, but with a tendency for $A > \Pi$ at higher anisotropy. There is therefore a degeneracy between β and k for higher values of β . The windbow shape, which corresponds to the $\beta = 0$ limit of the anisocentroid, is a white plus symbol in Figure 14, and is in the prolate spheroid region of the plane. Canroids lie either in the prolate spheroid or hyperboloid regions, according to whether k is less than or greater than about 3.0. For anisocentroids of increasing k , this division point moves to higher values of β , until almost all the range of models with $k > 3$ switch to hyperboloid regions.

The true plumbline and slantude, which are what would

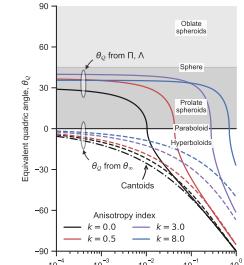


Figure 16. Equivalent quadric angles, θ_Q , for anisocentroids and canroids. Solid lines show the value of θ_Q from the II–A plane, and dotted lines show the value of θ_Q from the II–B plane. The value of θ_Q from the II–B plane is representative of the one from the II–A plane when $\beta = 0$. Gray shading and line colors have the same meaning as in Fig. 15.

It is apparent from Figure 14 that the $k = 0$ anisocentroid is identical to the windbow, but is $\beta > 0$, the anisocentroid is tilted relative to the windbow.⁹ Since the true plumbline and slantude depend on $R(\theta)$ only in the range $\theta = [0, 90^\circ]$, the canroid and $k = 0$ anisocentroid behave identically in Figure 15. There is a general tendency for the bows to flatten and to move to lower anisotropy indices as β increases, and to move to higher anisotropy indices as k increases. All the models are close to the diagonal $A = \Pi$ in the plumbline–slantude plane, but with a tendency for $A > \Pi$ at higher anisotropy. There is therefore a degeneracy between β and k for higher values of β . The windbow shape, which corresponds to the $\beta = 0$ limit of the anisocentroid, is a white plus symbol in Figure 14, and is in the prolate spheroid region of the plane. Canroids lie either in the prolate spheroid or hyperboloid regions, according to whether k is less than or greater than about 3.0. For anisocentroids of increasing k , this division point moves to higher values of β , until almost all the range of models with $k > 3$ switch to hyperboloid regions.

⁹ Due to the discontinuity in the inner wind density at $\theta = 90^\circ$ (see Fig. 13), there is a discontinuity in the second derivative of the wind bow.

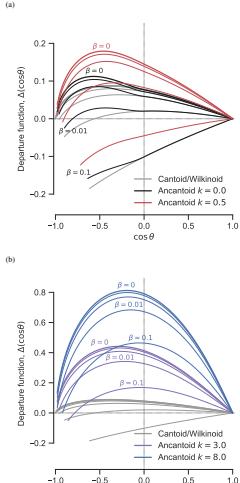


Figure 17. Parabolic departure function, $\Delta(\cos\theta)$, for anisotropic thin shell models. (a) Cantoidal paraboloid for comparison (shape independent of inclination). (b) Wilkinoiid. (c) Cantoid, $\beta = 0.001$. (d) Cantoid, $\beta = 0.1$.

best approximates each shape. We illustrate this in Figure 16, which shows two different ways of estimating the quadratic angle, θ_Q (see § 4). The first is from (IIA), as in Figure 15;

$$\theta_Q^{\text{head}} = \text{sgn}(2\Pi - \Lambda^2) \tan^{-1} |\Pi| - \Lambda^{1/2}, \quad (62)$$

which follows from equations (27), (28), and (34). The second is

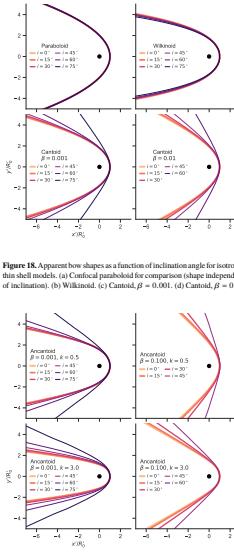


Figure 18. Apparent bow shapes as a function of inclination angle for isotropic thin shell models. (a) Cantoidal paraboloid for comparison (shape independent of inclination). (b) Wilkinoiid. (c) Cantoid, $\beta = 0.001$. (d) Cantoid, $\beta = 0.1$.

Figure 19. Further apparent bow shapes as a function of inclination angle for anisotropic thin shell models (anisotropics). (a) $\beta = 0.001$, $k = 0.5$; (b) $\beta = 0.1$, $k = 0.5$; (c) $\beta = 0.001$, $k = 3.0$; (d) $\beta = 0.1$, $k = 3.0$.

from the asymptotic opening angle of the wings, θ_∞ (Fig. 4);

$$\theta_Q^{\text{tail}} = \theta_\infty - 180^\circ. \quad (63)$$

where θ_∞ is calculated from equation (D17) for cantoids, or (D19) for cantoids. If the bow shock shape were truly a quadric, then these two definitions would agree. However, as seen in Figure 16, this is

not the case for the cantoids and anisotropics. While θ_Q^{head} generally corresponds to a prolate spheroid (except for the largest values of β), θ_Q^{tail} always corresponds to a hyperboloid. The difference between the shape of the head and the tail of the far wings has important implications for the projected shapes (as we will see in the next section), since the far wings influence the projected planitude and alitude when the inclination is large.

Figure 19 shows the apparent temperature function (eq. 4.1) for the anisotropic models. This provides an alternative perspective on the resultant bow shapes, with two different types of behavior being apparent. Models with high β and low anisotropy behave similarly to the hyperboloids, such as the (IIA, $\beta = 3/2, 3/2, 3/2, 3/2$), ($3/2, 3/2$), and ($1/2, 1/2, 1/2, 1/2$) models in Figure 17a, which show small deflections that become negative in the far wings (more open than parabolas) and terminate at $\theta = 0^\circ < 180^\circ$. The second type of behavior is shown by models with low β or high anisotropy, which behave like spheroids for positive and mildly negative values of β , but unlike the spheroids, all tend towards $\Delta = 0$ in the far tail as $\cos\theta \rightarrow -1$.

5.3 Apparent shapes of projected cantoids and anisotropics

Figures 18 and 19 show the apparent bow shapes of various thin shell models with isotropic, anisotropic, and hyperboloid-like inclination angles. For comparison, Figure 18a shows the projected paraboloid, whose apparent shape is independent of inclination (see Appendix C). The wilkinoiid (Fig. 18b) shows only subtle changes, with the wings becoming slightly more swept back as the inclination increases. The cantoids (Fig. 18c, d) are markedly more open. The cantoids with the wings closed ($\theta = 0^\circ$) have an opening angle $|\beta|$ exceeds 60° (for $\beta = 0.001$), or 45° (for $\beta = 0.01$). The anisotropics (Fig. 19a) can show more complex behavior. For instance, in the $\beta = 0.5$, $\beta = 0.001$ anisotropic (Fig. 19a) the near wings begin to become more closed with increasing inclination up to $|\beta| = 60^\circ$, at which point they open up again, whereas the opening angle of the far wings increases with $|\beta|$.

The inclination-dependent tracks that are traced by the thin shell models in the projected planitude-alitude plane are shown in Figure 20. The arrows indicate the direction from the quartic shapes shown in Figure 18 to the fact that the tracks are not confined within the borders of the region of a single type of quadric (hyperboloid or spheroid). At low inclinations, many of the models behave like the prolate paraboloids, but then switch to a hyperboloid behavior. The tracks are better suited to the transition between the shape of the head and the shape of the far wings, as discussed in the previous section. This can be seen most clearly in the $\beta = 0.001$, $k = 0.5$ anisotropic (lowest red line in Fig. 20a, see also zoomed version in Fig. 21). The track begins heading towards $(\Pi^*, \Lambda^*) = (1, 1)$, as expected for a spheroid-like arrow that crosses the paraboloid and heads out toward a hyperboloid-like arrow.

Anisotropics with different degrees of inner-wing anisotropy are shown in Figure 20b. In all cases, the tracks show hyperboloid-like behavior at high inclinations, tending to populate the region just above the line $\Lambda^* = \Pi^*$. The tracks are much more spread out in their tracks at the point where the projected apex passes through $\theta = 90^\circ$, due to the discontinuity in the second derivative of $R(\theta)$ there (see footnote 9). The wilkinoiid has a much less interesting track, most clearly seen in the zoomed Figure 21, simply moving the

¹⁰ See also previous studies of the projected shape of the wilkinoiid (Wilkinoiid 1997; Cox et al. 2012; Ng et al. 2017) and the cantoids (Roberto et al. 2005).

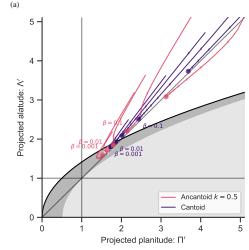


Figure 20. Projected apparent bow shapes of wilkinoiid, cantoids and anisotropics in the $\Pi^*\Lambda^*$ plane. Colored symbols indicate the $|\beta| = 0$ position for $\beta = 0.001$, 0.01 , 0.1 , 0.5 , 1 , 3 . The arrows indicate the direction from the quartic-shape models of each row, with the arrows being each for the 20 intermediate values of $|\beta|$. Gray shaded regions are as in Figure 18a. The wilkinoiid track is shown in white. (a) Isotropic wind model (cantoid) and propylid-like model (anisotropic, $k = 0.5$). (b) Hemispheric wind model (anisotropic, $k = 0$) and jet-like model (anisotropic, $k = 3$).

short distance from $(\sqrt{3}\sqrt{\beta}, 0)$ to $(2\sqrt{3}\sqrt{\beta}, 0)$. Despite its location in the elliptical region of the plane, the fact is that $\theta = -180^\circ$ means that it behaves more like a parabola at high inclination, but converges on $(3/2, \sqrt{3})$ instead of $(2, 2)$, since the far wings are asymptotically cubic, rather than quadratic.

The local density of tick marks gives an indication of how

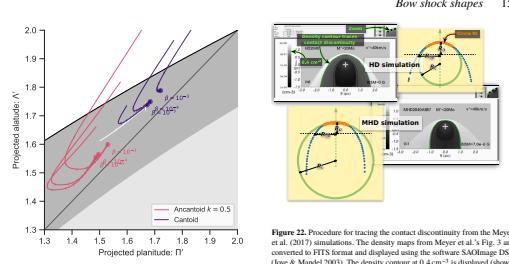


Figure 21. As Fig. 20b but zoomed in to show the the wilkinoiid track (yellow) and the convergence of the cantoid track (purple) to the wilkinoiid track (yellow).

likely it would be to observe each portion of the track, assuming an isotropic distribution of viewing angles. It can be seen that the ticks tend to be concentrated towards the beginning of each track, near the $|\beta| = 0$ point, so the hyperboloid-like portions of the tracks would be observed for only a relatively narrow range of inclinations. This concentration of ticks near the origin of the plot is a useful check to help us resolve the apparent paradox that the wilkinoiid corresponds to the $\theta \rightarrow 0$ limit of the cantoids, yet it follows a qualitatively different track. The detailed behavior of the small- β cantoid models shown in Figure 21, which seems to remain in the region around the wilkinoiid track, is likely the result of the way the cantoid model begins to develop its downward hook, similar to the $k = 0.5$ anisotropics discussed above. For $\beta < 10^{-4}$ this begins to approach the wilkinoiid track and the high inclination, upward portion of the track becomes less and less important as β decreases.

6 MORE REALISTIC BOW SHOCK MODELS

The results underlying the majority of the previous section must already be known to the reader. To test whether the general analytical results are still useful in ‘realistic’ situations we have applied it to more realistic simulations of stellar bow shocks. We choose a pair of hydrodynamic (HD) and magnetohydrodynamic (MHD) moving-star simulations from Meyer et al. (2017), in which the only difference between the present and previous sections is that the ambient magnetic field is zero. In the HD simulation, the thermal dust emission is taken to be constant and concentrated near the contact discontinuity. It is not reasonable to use this surface as a first approximation for the shape of the bow.

We have traced the contact discontinuity in the two models, using the procedure outlined in Figure 22, and show results for the two models in the projected planitude-alitude plane in Figure 23.

The MHD simulation shows a small quasi-negative dip in the departure function close to the apex ($\cos\theta = 1$), indicating a very flat shape.¹¹

The HD simulation shows only a small negative dip in the departure function at the apex, but otherwise approximately follows the wilkinoiid curve in the forward hemisphere.

¹¹ Note that, in the non-magnetic HD models, efficient thermal conduction leads to a thermal bow-shock, which is not present in the MHD models. The apparent shock is driven by the wind from the cool, dense shell of shocked ambient gas (see § 3.3 of Meyer et al. 2014). In this case, the contact discontinuity is taken to be the boundary between hot and cold ambient gas, as opposed to the material of the shocked shell. The MHD simulation, however, shows no thermal bow-shock, so the contact discontinuity is almost completely suppressed, so that the material and contact discontinuity are the same.

¹² Meyer et al. (2007) speculate that this feature may be the signature of the formation of a complex multi-shock topology at the apex (de Sterck & Perna 1999). For our purposes, the reason does not matter, merely that the magnetic and non-magnetic models predict markedly different shapes.

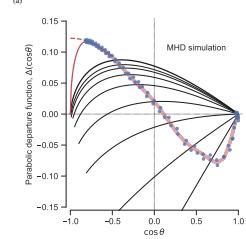


Figure 22. Procedure for tracing the contact discontinuity in the (a) MHD simulation and (b) HD simulation.

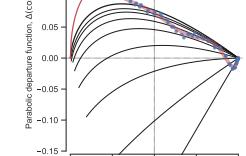


Figure 23. Departure function for the shape of the contact discontinuity. (a) Magnetohydrodynamic simulation of a 20Myr moving star, moving at $40\sqrt{3}\text{ km s}^{-1}$ through a medium of density 0.7 g cm^{-3} (Meyer et al. 2017). The MHD simulation shows a small quasi-negative dip in the departure function close to the apex ($\cos\theta = 1$), indicating a very flat shape. (b) Hydrodynamic simulation with zero magnetic field. Blue dots show the departure function for the HD simulation, which is nearly identical to the MHD simulation, the thermal dust emission is taken to be constant and concentrated near the contact discontinuity. The black dots show the departure function for the MHD simulation, which is zero. The magenta dots show the departure function for the HD simulation, which is zero. The magenta dots show the departure function for the MHD simulation, which is zero.

¹³ Note that, in the non-magnetic HD models, efficient thermal conduction leads to a thermal bow-shock, which is not present in the MHD models. The apparent shock is driven by the wind from the cool, dense shell of shocked ambient gas (see § 3.3 of Meyer et al. 2014). In this case, the contact discontinuity is taken to be the boundary between hot and cold ambient gas, as opposed to the material of the shocked shell. The MHD simulation, however, shows no thermal bow-shock, so the contact discontinuity is almost completely suppressed, so that the material and contact discontinuity are the same.

¹⁴ Meyer et al. (2007) speculate that this feature may be the signature of the formation of a complex multi-shock topology at the apex (de Sterck & Perna 1999). For our purposes, the reason does not matter, merely that the magnetic and non-magnetic models predict markedly different shapes.

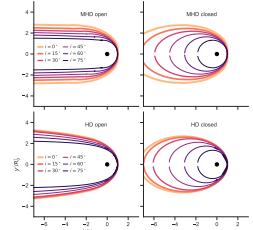


Figure 24. Projected shapes of contact discontinuity from simulations at different angles $|\beta|$ (varying line colors and thicknesses, see key). Top row shows magnetohydrodynamic simulation of Fig. 23a, bottom row shows non-magnetized simulation of Fig. 23b. Left column shows asymptotically open extrapolation, right column shows asymptotically closed extrapolation. All shapes are plotted to the projected apex distance, R_0 .

cases the departure function is more positive than the wilkinoiid in the far wings ($\cos\theta < -0.5$), but we do not have data for the full range of θ , and so two different extrapolations for $\theta \rightarrow 180^\circ$ are shown. In the first (dashed red line in figure), we find a fit to low-order polynomials, which extrapolates to $\theta = 180^\circ$, giving an asymptotically closed shape. In the second extrapolation (solid red line in figure), we find a polynomial that is multiplied by $(1 + \cos\theta)^{-1/2}$, which forces the departure function to zero at $\cos\theta = -1$, giving an asymptotically open shape, as with the wilkinoiid. The contact discontinuity for the HD simulation is asymptotically open, but as $\theta \rightarrow 180^\circ$ the flow becomes more linear and longer, so that a bow shock with a finite age will be closed.

Using a 12th-order Chebyshev fit to the traced shapes, we show the apparent shape of the contact discontinuity at a series of inclination angles, shown in Figure 24. The simulations and the two models used here are the same as those for the far wings.

Comparison with Figures 18 and 19 shows the general tendency is the same as with the wilkinoiid: that the apex becomes less flat and the wings less open as the inclination angle increases. There is no significant difference between the open and closed extrapolations in the HD simulation in the open regime. In high inclination, however, the contact discontinuities and anisotropics are as asymptotically hyperboloid. On the other hand, the projected shapes of both simulations vary much more strongly with $|\beta|$ than the wilkinoiid does. For the HD simulation this is mainly apparent for $|\beta| > 30^\circ$, but for the MHD simulation it occurs at $|\beta| > 10^\circ$.

The resultant inclination-dependent tracks in the planitude-alitude plane are shown in Figure 25. These are compared with measurements¹³ from post-process infrared dust continuum maps

¹³ The shape measurements were performed by converting to contours of $60\mu\text{m}$ images in Meyer et al. (2017’s Fig. 10 and tracing the ridge of

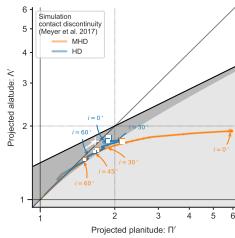


Figure 25. Apparent projected shapes of simulations in the $\text{II}'\text{-}\Delta'$ plane. Thick solid lines show the predicted inclination-dependent shapes of the traced contact discontinuity shape for the asymptotically open extrapolation, with tick marks indicating 20 equal intervals in $|\text{II}'|$. Thin solid lines show the same for the asymptotically closed extrapolation, which only deviates from the thick solid line at small $|\text{II}'|$. The open square symbols show the shapes traced from the dust emission maps at 60 μm for inclinations of (largest to smallest) 30°, 45°, and 60°. For comparison, the withheld track is shown. Note that the scales of both axes are logarithmic in this case.

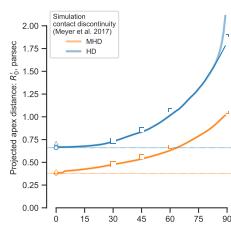


Figure 26. Apparent projected apex distance of simulations. Line and symbol meanings are as in Figure 25. In addition, triangle symbols with $|I| = 0^\circ$ denote radii measured on the optical emission maps. Note that the distances for the blue square symbols have been adjusted according to the correction factor discussed in footnote 14.

emission line maps, which are given for $|I| = 0^\circ$ in Fig. 7 of Meyer et al. (2017). Again, the agreement is good between the values obtained from the shape of the contact discontinuity and those derived from the surface brightness map. The greatest discrepancy is seen with the $\text{H}\alpha$ maps and the intermediate inclination dust maps, with R_0 being consistently larger than the value for the HD case. The differences in behaviour between the two simulations are much smaller in this case.

The larger true planitude of the MHD simulation means that the relative increase of $R_0/|\text{II}'|$ is much stronger than in the HD simulation for $|I| < 45^\circ$, as expected from Figure 10b. The probability densities¹⁹ of the apparent shape and size of the observed bow shocks are shown in Figure 27, assuming the same geometry as in Figure 27, assuming that the viewing direction is uniformly distributed in solid angle. The modal value of the projected planitude is similar at $\text{II}' \approx 1.8$ for both simulations, but the distribution is much broader in the MHD case, which has a low-level wing extending out to $\text{II}' \approx 6$. The projected altitude distributions are both

at radii that are clearly too large. The staved apex distance for the contact discontinuity in this simulation is 0.69 pc from Table 2 of Meyer et al. (2014), and the position of the peak in dust column density is 0.70 pc from Fig. 17a of Meyer et al. (2014). These values are consistent with Figs 3, 4 and 11 of Meyer et al. (2017), but differ from Figs 10 and 11. Lacking a position of the apex is clearly helpful in the 25% range of the 10–10 inclinations of 45° and 60°.

The projected separation of the true apex is $R_0/\cos I$, independent of the bow shape, which allows a correction factor of 0.65 to be found assuming a viewing angle of 28°, which is the median viewing angle for the dust column density. This correction has been applied to the blue square symbols shown in our Fig. 26.

¹⁹ The coordinate asymmetry is defined so that it integral over the full range of the histogram is unity, making it independent of the histogram bin width. This means that the characteristic width of an approximately unimodal distribution is one over the maximum probability density.

at radii that are clearly too large. The staved apex distance for the contact discontinuity in this simulation is 0.69 pc from Table 2 of Meyer et al. (2014), and the position of the peak in dust column density is 0.70 pc from Fig. 17a of Meyer et al. (2014). These values are consistent with Figs 3, 4 and 11 of Meyer et al. (2017), but differ from Figs 10 and 11. Lacking a position of the apex is clearly helpful in the 25% range of the 10–10 inclinations of 45° and 60°.

The projected separation of the true apex is $R_0/\cos I$, independent of the bow shape, which allows a correction factor of 0.65 to be found assuming a viewing angle of 28°, which is the median viewing angle for the dust column density. This correction has been applied to the blue square symbols shown in our Fig. 26.

¹⁹ The coordinate asymmetry is defined so that it integral over the full range of the histogram is unity, making it independent of the histogram bin width. This means that the characteristic width of an approximately unimodal distribution is one over the maximum probability density.

minimum radius of curvature of the contours. Identical results are found from using the 100 μm maps, although the same results are found for low inclinations, in the maps with $|I| > 45^\circ$ in the HD case it is possible to find a minimum radius of curvature because it becomes faster than the speed of the apex of the bow.

¹⁴ There is an apparent error in the simulation for the HD simulations in Figs 10 and 11 of Meyer et al. (2017), with the dust emission peaks occurring

Gutiérrez-Soto 2015) associated with proplyds¹⁶ in the west of the Orion Nebula (M42) at a distance of roughly 0.5 pc from the high-mass Trapezium stars that ionize the nebula. An image of one of these arcs (M42 069-601) was used in the illustration of bow shock terminology as Figure 1.

7.1 Empirical determination of bow shock shape

We consider three different tracings of the bow shape (see Fig. 28): the peak of the emission are (“ridge”), its inner and outer edges, in addition to the mean tracing that defines the bow. In this section we will focus on the latter, which is a mean tracing in a similar fashion to Figure 22, and guided by the image contours.

We determine the planitude and altitude by fitting circles to the trace points, as in Figure 28, or bows, as defined by the iterative algorithm described in Appendix E. The fitted circle, when combined with the position of the central source, yields the orientation of the bow axis, together with the apex distance, R_0 , radius of curvature, R_c , and two perpendicular radii (one for each wing), $R_{0\perp}$ and $R_{0\parallel}$. These are indicated in Figure 28 for light-colored lines. The projected planitude and altitude then follow as $\text{II}' = R_c/R_0$, $R_0 = R_{0\perp}/R_0$, $\Delta' = R_{0\parallel}/R_0$, which are shown in Figure 29.

7.2 Analysis of sources of systematic uncertainty

The planitude is found to have a moderate dependence on the choice of Δ' , as shown in Figure 30, where it can be seen that, although the values of II' are relatively stable for $\Delta' > 60^\circ$ (light grey shaded region), they can show much larger variations for $\Delta' < 60^\circ$. The fact that the radius of curvature is much more sensitive to the choice of Δ' suggests that it is better to use a small Δ' for the projected apex quantity²⁰ in order to reduce the errors. We will therefore choose to make $\Delta' = 60^\circ$ as the small Δ' parameter, but this will lead to circle fits that were extremely sensitive to the exact positions of the few points included in the fit. A reliable fit requires 4 or more points, ideally spanning a total segment that is a substantial fraction of R_c . For $R_c = 2.5$ pc, this corresponds to a range of Δ' from 17° to 63°, radians, or 60° to 90°. On the other hand, if $\Delta' > 90^\circ$ then the planitude and altitude would no longer be independent since the bow would be forced to lie on the “sphere” line, $\text{II}' = (\Delta'^2 - 1)^{1/2}$ (see § 4). Balancing these two concerns suggests an optimal $\Delta' = 75^\circ$, which is used in Figures 28 and 29. We show results for both 75° (the inner and ridge lines) and 60° (thin lines).

Unlike all the models considered in § 5 & 6, the observed bows are not necessarily symmetrical and so the altitude for the two wings, Δ'_\perp and Δ'_\parallel , may be different. We therefore calculate an average altitude, $\langle \Delta' \rangle$, and an altitude asymmetry, $\Delta\Delta'$:

$$\langle \Delta' \rangle = \frac{1}{2} (\Delta'_\perp + \Delta'_\parallel) \quad \Delta\Delta' = \frac{1}{2} (\Delta'_\perp - \Delta'_\parallel) \quad (64)$$

The results for these two quantities, together with the planitude, are shown in Table 1. For each object and for each tracing (inner, ridge, outer, see Fig. 28), the mean ± standard deviation is listed for circle fits.

7 EXAMPLE APPLICATION TO OBSERVATIONS

As an example of measuring the projected planitude and altitude of real bow shocks, we present an analysis of M42 000-400 and M42 069-601, which are two $\text{H}\alpha$ emission arcs (Bally et al. 2000;

¹⁶ The coordinate designation (see O'Dell & Wen 1994 for an explanation of the system) of M42 069-601 is very close to the right ascension, but we use it here for consistency with previous papers. The name proplyd is listed with the more correct designation 4596-400 in catalogs such as Ricci et al. (2008).

¹⁷ Even in the “ridge” method at least, it is possible to automate this step, which we will discuss in detail in a following paper.

¹⁸ For conciseness, we drop the prime symbol from the radii, both in this section and Appendix E, and an altitude asymmetry, $\Delta\Delta'$:

¹⁹ The coordinate designation (see O'Dell & Wen 1994 for an explanation of the system) of M42 000-400 is very close to the right ascension, but we use it here for consistency with previous papers. The name proplyd is listed with the more correct designation 4596-400 in catalogs such as Ricci et al. (2008).

²⁰ The coordinate asymmetry is defined so that it integral over the full range of the histogram is unity, making it independent of the histogram bin width. This means that the characteristic width of an approximately unimodal distribution is one over the maximum probability density.

²¹ The coordinate designation (see O'Dell & Wen 1994 for an explanation of the system) of M42 069-601 is very close to the right ascension, but we use it here for consistency with previous papers. The name proplyd is listed with the more correct designation 4596-400 in catalogs such as Ricci et al. (2008).

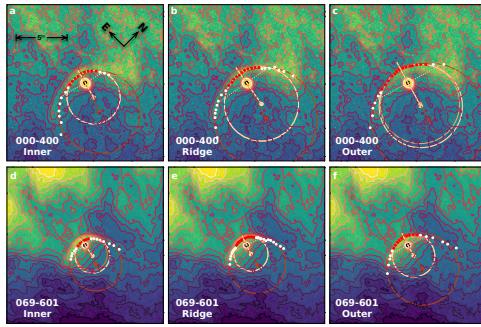


Figure 28. Example empirical determination of planitude and altitude for observed bow shocks associated with proplyds in the outer Orion Nebula (M42). Color scale and contours show an $\text{H}\alpha$ F658N image (ACS F658N filter; Bally et al. 2000) of M42 000-400 (panels a–c) and M42 069-601 (panels d–f). The image scale and orientation are indicated on each panel and are the same for all panels. Three different bows have been traced by eye on each object (red and white filled circles). (a, d) Inner edge, (b, e) ridge of emission, and (c, f) outer edge. For each panel, the black circle shows the location of the central source, the red circle the traced contact discontinuity, and the white and red dashed lines the outer and inner edges as defined by a small filled circle and dashed line in the same manner. Lighter color circles show three subsequent iterations where the fit is refined until a $\Delta' = 75^\circ$ of the axis. The subset of points used in the final iteration is marked in red. The perpendicular radii for the final iteration are shown by dotted lines. In panels a, b, d, f the iteration converge immediately, but in panel c the iterations stably oscillate between two slightly different solutions.

fits using $\Delta' = 60^\circ$ to 80° (see Fig. 30). Additionally, the row “All” for each object gives the global mean and standard deviation over all three traces.

It can be seen from Table 1 that the uncertainty in the fitted parameters is dominated by the variations between the different traced shapes. For example, the one-sigma relative variation of planitude, II' , is $< 10\%$ within the individual tracings, but $> 10\%$ between them. The mean and standard deviation of the mean and derived radii are shown by a small filled circle and dashed line in the same manner. Lighter color circles show three subsequent iterations where the fit is refined until a $\Delta' = 75^\circ$ of the axis. The subset of points used in the final iteration are shown by dotted lines. In panels a, b, d, f the iteration converge immediately, but in panel c the iterations stably oscillate between two slightly different solutions.

It could be argued that much of the between-tracing variations

in II' and Δ' are due to real differences between the shapes of the bows, in the absence of a robust theory. Although this might be true, in the absence of a robust theory as exactly what feature of the observed images constitutes the bow shape, such variations nevertheless serve to limit the precision with which the bow shock shape can be measured. We therefore conclude that conservative estimates of 20% to 30% for II' and 10% for Δ' are appropriate. These are probably pessimistic, and similar or better quality to those presented in Figure 28. This will be an important limitation when comparing the statistics of the shapes of different bow shock populations, as we will present in a following paper.

¹⁹ This is because the only way that changes the global mean and standard deviation over all the traces is if the orientation vector, and changing the orientation induces roughly opposite effects on Δ'_\perp and Δ'_\parallel , which approximately cancel out (the Δ' 's).

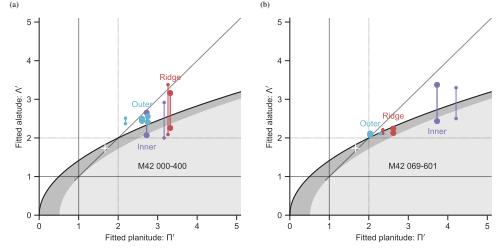


Figure 29. Location in the projected planitude-altitude plane of the converged circle fits to the M42 bows: (a) M42 000-400, (b) M42 069-601. For each solution, the two values of the projected planitude, II' , and the projected altitude, Δ' , corresponding to $R_{0\perp}$ and $R_{0\parallel}$, are joined by a vertical line. Small open circles show the results from the fits shown in Figure 28, while small symbols show results for fits using $\Delta' = 60^\circ$ instead of 75° . In panel a, two slightly different II' values are shown for the outer bow, since the fit does not converge to a single value (see Fig. 28c and App. E).

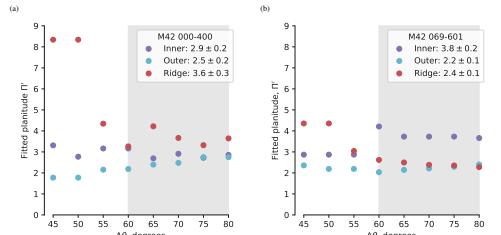


Figure 30. Variation of fitted planitude, II' , as a function of the parameter Δ' , which controls how close a point must be to the axis in order to be included in the fit. (a) M42 000-400, (b) M42 069-601. For the three traced bows (inner, outer, and ridge) of each object, the symbol key lists the mean and standard deviation of II' , calculated over the “stable” range $\Delta' = 60^\circ$ to 75° , which is indicated by light gray shading.

7.3 Derived shape of the M42 arcs

From a casual inspection of Figure 28, it is apparent that the shapes of the three M42 bows are closely similar, and this is confirmed by the numbers in Table 1. Both 000-400 and 069-601 are consistent with $(\text{II}', \Delta') \approx (3.0, 2.5)$, and if we take the absolute minimum

over all the different tracings and reasonable variations in the Δ' parameter, we find unusable lower limits of $(\text{II}', \Delta') > (2.1, 2.1)$. In the rest of this section, we consider only these lower limits, since they are already sufficient for drawing interesting conclusions.

Comparison with Figure 25 shows that both the MHD and HD simulations of Meyer et al. (2016) are inconsistent with the

observations. Although $\Pi' > 2.1$ can be satisfied,²¹ the simulations' projected altitude is $\Lambda' < 1.9$ which indicates, is typical for the case of the conical paraboloid of 2.1. This is particularly concerning since the simulations were limited to the situation of these preety bow shocks in M22, in which the mildly supersonic photoevaporation flow from an externally irradiated protoplanetary disk interacts with the mildly supersonic champagne flow from the core of the Orion Nebula. The project has at least four major differences from the one in the O-star case modeled by Meyer et al. (2016): (1) The velocity of the outer wind is $\leq 20 \text{ km s}^{-1}$ instead of 40 km s^{-1} ; (2) The outer wind is slightly divergent, rather than plane-parallel; (3) Both inner and outer shocks are more or less radial, rather than parabolic (see Fig. 2) compared to the observed orientation; (4) The inner wind is isotropic, but instead corresponds to the $k = 0.5$ case of equation (53). The ways in which these differences may account for the discrepancy with the observations will be explored in detail in a subsequent paper.

8 SUMMARY AND DISCUSSION

We have shown that the shapes of stellar bow shocks can be usefully characterized by two dimensionless numbers, the *plaititude*, Π , or flattening, and the *azimuth*, Λ , or opening angle. The spherical bow's wings (§ 2.1), the plaitude and azimuth can be estimated from ratios of lengths that can be straightforwardly measured from observations or theoretical models. We develop a general method (§ 3) for finding the projected shape, (Π', Λ') , of a bow's shape under a general angle, or *tangent line*, as a function of inclination angle, i , where the emission shell is oriented as a cylindrically symmetric source.

We first apply this method to find inclination-dependent tracks on the projected plaititude–slatitude plane for the special case of *parabolic* surfaces ($\Pi = 1$), and the *cantoids* and *wilkinoids*, and spheroids, where the tangent line is a cone section. The spheroids and hyperboloids occupy distinct regions of the plane, with the paraboloids defining the boundary between the two. As the inclination is increased, the slatitude Λ' increases, while Π' decreases. In fact, we find it tends to approach the diagonal $\Pi' = \Lambda'$. For increasing i according to conical optics, always remaining within their own region. At the highest inclinations, the spheroids all converge at $i = 90^\circ$ at the point $(\Pi', \Lambda') = (1, 1)$, and the paraboloids at $(\Pi', \Lambda') = (2, 2)$. As i increases, the other two dimensions of (Π', Λ') decrease towards zero for a finite value of i , and the asymptotic opening angle of the tail. For $i = i_{\text{tail}}$, the tangent line no longer exists for the hyperboloid, and it would no longer appear to be a curved bow shock. We reproduce the parabolic departure function (§ 4.1) and find interesting differences in bow shapes, R_θ , over the full range of $i = [0, 180^\circ]$.

We then apply the projection method to a set of thin-shell hydrodynamic models of bows (§ 5); the *wilkino*s from a wind-paralllel interaction and the *cantoids* from a wind-perpendicular interaction. We generalize the *wilkino*s to a small region of the $\Pi' - \Lambda'$ plane, with projected plaititude and slatitude varying with inclination by $< 15\%$. The cantoids and *wilkino*s with sufficiently small values of β , the wind momenta ratio, have more interesting behavior, with tracks that pass from the

spheroidal region at low inclinations to the hyperboloid region at high inclinations.

In the following section (§ 6), we test the projected shape analysis methods against the results of computational fluid dynamic simulations of magnetized and non-magnetized bow shocks from Meyer et al. (2017) of a runaway OB main-sequence star. We find that measurements made on maps of infrared dust emission can be used to estimate errors in the projected shape of the object discernible for a type of bow shock (Fig. 2). The distributions of projected plaititude and slatitude for a population of randomly oriented bow shocks shows systematic differences between the different simulations.

Finally (§ 7), we give an example of the application of our methods to projected emission maps of bow shocks, describing a robust algorithm for empirically determining the projected plaititude and slatitude from imperial real data. We investigate the sensitivity of the results to systematic errors in both observational uncertainties and subjective errors in the application of the algorithm. We find that the projected plaititude and slatitude have mean uncertainties of 20% and 10%, respectively. For our illustrative observations, we show that this is more than sufficient to rule out certain models.

This paper is the first of a series that will apply our shape analysis methods to real models and observational maps of bow shocks. In a second paper, we will compare an alternative model of dry radiation-driven bow waves (Oschner et al. 2014), instead of a hydrodynamic bow shock, and also calculate the signature in the plaititude–slatitude plane of oscillations in the bow wave, which may be detectable as a time-varying pattern in the map. In a third paper, we apply our techniques to astronomical datasets for three different classes of stellar bow shocks: OB stars (Kobulnicky et al. 2016), cool giants/supergiants (Jones et al. 2014), and young stars in the extended Orion Nebula (Henney et al. 2013). In a fourth paper, we will explore the proply bow shocks in the core of the Orion Nebula (Garcia-Arendon et al. 2001).

ACKNOWLEDGEMENTS

We are grateful for financial support provided by Dirección General de Asuntos del Personal Académico, Universidad Nacional Autónoma de México, through grant Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT). JATY acknowledges support via a research studentship from Consejo Nacional de Ciencias y Tecnología, Mexico. This work has made extensive use of Python language libraries from the SciPy (Jones et al. 2018) and AstroPy (Astropy Collaboration et al. 2013, 2018) projects. We appreciate the thoughtful comments of the anonymous referee, which led to a clarifying presentation of our results and prompted the addition of § 7 and Appendices A and B.

REFERENCES

- Astropy Collaboration et al. 2013, *A&A*, 558, A33
Astropy Collaboration et al. 2018, preprint, [arXiv:1801.02534](https://arxiv.org/abs/1801.02534)
Bally J., O’Dea C. R., McCaughrean M. J. 2000, *Nature*, 404, 119, 219
Bally J., O’Dea C. R., McCaughrean M. J. 2002, *Nature*, 419, 131, 473
Canal R., Japuá A. C., Wilkin P. 1996, *ApJ*, 460, 769
Cox N. L. J., et al. 2012, *A&A*, 537, A35
García-Arendón F., Henney W. J., Arthur S. J. 2001, *MNRAS*, 320, 849
Gayley K. G. 2000, *ApJ*, 533, 89
Gitterman S., Zoorab-Murray P. 2009, *Journal for Geometry and Graphics*, 13, 131

MNRAS **000**, 1–25 (2017)

convenient parametrization is

$$\begin{aligned} x &= R_0 \left(1 - \frac{1}{4} \Pi r^2 \right) \\ y &= R_0 \Pi r, \end{aligned} \quad (\text{C1})$$

where we have “buked” in knowledge of the plaititude, $\Pi = R_1/R_0$ (see § 2.2), the projected plane-of-sky coordinates of the tangent line follow from equation (5) as

$$\begin{aligned} x'_1/R_0 &= \cos i \left[1 + \frac{1}{2} \Pi \tan^2 i - \frac{1}{2} \Pi \left(\beta^2 - \tan^2 i \right) \right] \\ y'_1/R_0 &= \Pi \left(\beta^2 - \tan^2 i \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (\text{C2})$$

The projected star-space distance, R'_0 , is the value of x'_1 when $y'_1 = 0$, yielding

$$R'_0/R_0 = \cos i \left(1 + \frac{1}{2} \Pi \tan^2 i \right). \quad (\text{C4})$$

Note that this result can be obtained from a Taylor expansion of equation (45) substituted into (49) in the limit $Q \rightarrow 0$. Equation (C3) is valid in the form

$$\begin{aligned} x'_2 &= R'_0 \left(1 - \frac{1}{4} \Pi' r'^2 \right) \\ y'_2 &= R'_0 \Pi' r', \end{aligned} \quad (\text{C5})$$

where

$$\Pi' = \frac{2\Pi}{2 \cos^2 i + \Pi \sin^2 i}, \quad (\text{C6})$$

$$r' = \cos i \left(\beta^2 - \tan^2 i \right)^{1/2}. \quad (\text{C7})$$

which demonstrates that the projected shape is also a parabola. It is apparent from (C6) that the projected plaititude obeys

$$\tan^{-1} \Pi' = 2, \quad (\text{C8})$$

for all values of the true plaititude Π , as is shown by the black lines in Figure 10a. The projected slatitude can be found as

$$\Lambda' = (\Pi')^{1/2} \beta^2. \quad (\text{C9})$$

For the special case of the conical paraboloid, $\Pi = \Lambda = 2$, we have $\Pi' = \Lambda' = \Lambda$ as by equations (C6) and (C8) for all inclinations, so its shape is unaffected by projection.

APPENDIX D: ANALYTIC DERIVATION OF THIN-SHELL BOW SHAPE PARAMETERS

In this appendix, we provide analytic calculations of the plaititude, slatitude, and asymptotic opening angle of the wilkinoid, cantoids, and *wilkino*s. We first consider the most general case of the *cantoids*, and then show how results for *cantoids* and the *wilkino*s follow as special cases.

Bow shock shapes 23

D1 Plaititude of *cantoids*

From equations (3) and (5), the plaititude depends on the apex second derivative, $R_{0,0,0}$, as

$$H = \left(1 - R_{0,0}/R_0 \right)^{-1}. \quad (\text{D1})$$

From equation (4), the plaititude derivative can be found from the coefficient of θ^4 in the Taylor expansion of $R(\theta)$. Since we don't have $R(\theta)$ in analytic form, we proceed via a Taylor expansion of the implicit equations (60) and (61), retaining terms up to θ^6 to obtain from equation (61):

$$\theta_1^2 = \theta_0^2 \left(1 + C_{\theta_0} \theta^2 \right) + \mathcal{O}(\theta^6), \quad (\text{D2})$$

with the coefficient C_{θ_0} given by

$$C_{\theta_0} = \frac{1}{15} \frac{3k}{15} \frac{3k}{15} \frac{\beta}{15}. \quad (\text{D3})$$

Note that it is necessary to include the θ^4 term in the expansion of θ_1^2 so that θ_1/θ_0 is accurate to order θ^2 . Then, from equation (60) we find

$$\begin{aligned} R &= \frac{\sin \theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_0)} \\ &= \frac{\theta_1^2}{\theta_0^2} \left(1 + \theta^2 \left[\frac{C_{\theta_0}}{2(1 + \theta^2)^{1/2}} + \frac{1}{1 + \theta^2} (1 + 2\theta^2)^{1/2} \right] \right) + \mathcal{O}(\theta^6), \end{aligned} \quad (\text{D4})$$

where in the second line we have carried out a Taylor expansion of the two sin terms and substituted (D2). Comparing coefficients of unity and θ^2 between equations (D4) and (D1) we find

$$\begin{aligned} \frac{R_0}{R_0} &= \frac{\theta_1^2}{1 + \theta^2} \\ \frac{R_{0,0}}{R_0} &= \frac{C_{\theta_0}}{1 + \theta^2} + \frac{1}{1 + \theta^2} (1 + 2\theta^2)^{1/2}, \end{aligned} \quad (\text{D5})$$

so that the final result for the plaititude, from (D1), is

$$\text{cantoid } \Pi = \left| 1 + \frac{C_{\theta_0}}{1 + \theta^2} + \frac{1}{1 + \theta^2} (1 + 2\theta^2)^{1/2} \right|^{-1}. \quad (\text{D7})$$

D2 Slatitude of *cantoids*

To find the slatitude, $\Lambda = R_0/R_0$, we use equation (60) at $\theta = 90^\circ$ to write

$$\Lambda = \frac{D}{\theta_0} \tan \theta_{0,0}. \quad (\text{D8})$$

where $\theta_{0,0} = \theta_1(0 = 90^\circ)$, which, following equation (61), must satisfy

$$\theta_{0,0} \cot \theta_{0,0} = 1 - \frac{2\beta}{k + 2}. \quad (\text{D9})$$

Combining (D8) and (D9) with (D5) yields

$$\Lambda = \frac{1 + \theta^2}{\theta^2 + (1 - \theta_{0,0})^2} \theta_{0,0}. \quad (\text{D10})$$

where

$$\theta_{0,0} = \frac{2}{k + 2}. \quad (\text{D11})$$

We now take the Taylor expansion of equation (D9) to find

$$\theta_{0,0}^2 + \frac{4}{k+2} \theta_{0,0} + \frac{4}{k+2} \theta_{0,0}^2 = 3\theta_{0,0}. \quad (\text{D12})$$

22 Tarango-Yong & Henney

Goldman R. 1983, *IEEE Computer Graphics and Applications*, 3, 68

Graham M. F., Meaburn J., Garrington S. T., O'Brien T. J., Henney W. J., O’Dea C. R. 2002, *ApJ*, 570, 222

Guggenheim E. 1952, *Continuum Mechanics*. Dover Books on Mathematics

Gutierrez-Sosa L. A. 2015, Master’s thesis, Universidad Nacional Autónoma de México

Hartmann P., Raymond J., Hartmann L. 1987, *ApJ*, 316, 323

Hawley J. H., Houck J. R., Miles J. W. 1994, *ApJ*, 433, 157

Henney W. J., García-Díaz M. T., Del C. R., Rubin R. H. 2013, *MNRAS*, 432, 204

Jones E., Oliphant T., Peterson P. et al. 2001–2018, SciPy: Open source scientific tools for Python, <http://www.scipy.org/>

Joy W. A., Mandel I. S., Payne P. 2002, *ApJ*, 570, 127

Meinhardt H., Böhm J., Boerner S. 2013, *MNRAS*, 435, 3462

McDonald N. X., Arribalzaga S. J., Henney W. J., Meléndez G., Gao J., Azzopardi A. 2014, *ApJ*, 795, 109

Meyer D. M. A., Mackey J., Langer N., Guzman V. M., Mignone A., Jones G. 2014, *ApJ*, 444, 276

Meyer D. M. A., van Marle A. J., Mackey J., Kaper R., Kley W. 2017, *MNRAS*, 464, 3228

Meyer D. M. A., van Marle A. J., Mackey J., Kaper R., Raga A. C., Kley W. 2017, *MNRAS*, 470, 40

Ng C. Y., Bandaru R., Hwang S., Johnson S. 2017, *ApJ*, 842, 100

Oschner F. R., Wenz W. 1994, *ApJ*, 436, 194

Oschner F. R., Verdun S. L., Verma N. L. J., Benne J., Kaper R., Tielen A. G. M., van der Klis M. 2002, *ApJ*, 567, 475

Penzias A. S., Wilson R. W. 1965, *Nature*, 200, 168

Phillips J. P., Cusell L. C., Ramos-Larios G. 2010, *MNRAS*, 409, 881

Quigley P. 1999, *Mathematica*, Wolfram Research, <http://www.wolfram.com/Mathematica/>

Rothko M., et al. 2002, *ApJ*, 570, 216

Rothko M., et al. 2005, *AJ*, 129, 1534

Schreier K., Feldmeier J. 2001, *ApJ*, 578, 25

Schwarz J. 1999, *Mathematica*, Wolfram Research, <http://www.wolfram.com/Mathematica/>

Shu F. H., Lizano S., Galli D., Canto J., Laughlin G. 2002, *ApJ*, 580, 969

Smith N., Balby J., Shrapley R. Y., Morris M., Kassis M. 2005, *ApJ*, 630, 1763

Stevens J. R., Blandford R. D. 2006, *ApJ*, 641, 265

Tenorio-Tagle G., New R. 1993, *ApJ*, 403, 107

Veluswamy E. 1999–2018, Radius of Curvature, From MathWorld – A Wolfram Web Resource, <http://mathworld.wolfram.com/RadiusOfCurvature.html>

Wilkin P. 1997, *PhD* dissertation, University of California, Berkeley

Wilkin P. 2000, *ApJ*, 532, 400

Wilson A. S., Uebel J. S. 1987, *ApJ*, 319, 105

Zahn J. R., Spiegel E. 1973, *ApJ*, 186, 475

Zahn J. R., Spiegel E. 1976, *ApJ*, 203, 541

von Bremen D., McCray R. 1988, *ApJ*, 329, L29

von Dyke M. 1982, *A book of hidden motion*. Parabolic Press, Stanford

van Marle A. J., Meléndez J., Keppens R., Deeln C., 2011, *ApJ*, 734, L26

Wilkino M. 2003, *ApJ*, 593, 103

Wilkinson D. 1999, *Mathematica*, Wolfram Research, <http://www.wolfram.com/Mathematica/>

Wilkinson D. 2002, *ApJ*, 570, 213

Wilkinson D. 2005, *ApJ*, 621, 103

Wilkinson D. 2007, *ApJ*, 661, 103

Wilkinson D. 2010, *ApJ*, 715, 103

Wilkinson D. 2012, *ApJ*, 751, 103

Wilkinson D. 2016, *ApJ*, 823, 103

Wilkinson D. 2017, *ApJ*, 851, 103

Wilkinson D. 2018, *ApJ*, 859, 103

Wilkinson D. 2019, *ApJ*, 882, 103

Wilkinson D. 2020, *ApJ*, 905, 103

Wilkinson D. 2021, *ApJ*, 938, 103

Wilkinson D. 2022, *ApJ*, 953, 103

Wilkinson D. 2023, *ApJ*, 960, 103

Wilkinson D. 2024, *ApJ*, 971, 103

Wilkinson D. 2025, *ApJ*, 984, 103

Wilkinson D. 2026, *ApJ*, 997, 103

Wilkinson D. 2027, *ApJ*, 1010, 103

Wilkinson D. 2028, *ApJ*, 1023, 103

Wilkinson D. 2029, *ApJ*, 1036, 103

Wilkinson D. 2030, *ApJ*, 1049, 103

Wilkinson D. 2031, *ApJ*, 1062, 103

Wilkinson D. 2032, *ApJ*, 1075, 103

Wilkinson D. 2033, *ApJ*, 1088, 103

Wilkinson D. 2034, *ApJ*, 1101, 103

Wilkinson D. 2035, *ApJ*, 1114, 103

Wilkinson D. 2036, *ApJ*, 1127, 103

Wilkinson D. 2037, *ApJ*, 1140, 103

Wilkinson D. 2038, *ApJ*, 1153, 103

Wilkinson D. 2039, *ApJ*, 1166, 103

Wilkinson D. 2040, *ApJ*, 1179, 103

Wilkinson D. 2041, *ApJ*, 1192, 103

Wilkinson D. 2042, *ApJ*, 1205, 103

Wilkinson D. 2043, *ApJ*, 1218, 103

Wilkinson D. 2044, *ApJ*, 1231, 103

Wilkinson D. 2045, *ApJ*, 1244, 103

Wilkinson D. 2046, *ApJ*, 1257, 103

Wilkinson D. 2047, *ApJ*, 1270, 103

Wilkinson D. 2048, *ApJ*, 1283, 103

Wilkinson D. 2049, *ApJ*, 1296, 103

Wilkinson D. 2050, *ApJ*, 1309, 103

Wilkinson D. 2051, *ApJ*, 1322, 103

Wilkinson D. 2052, *ApJ*, 1335, 103

Wilkinson D. 2053, *ApJ*, 1348, 103

Wilkinson D. 2054, *ApJ*, 1361, 103

Wilkinson D. 2055, *ApJ*, 1374, 103

Wilkinson D. 2056, *ApJ*, 1387, 103

Wilkinson D. 2057, *ApJ*, 1399, 103

Wilkinson D. 2058, *ApJ*, 1412, 103

Wilkinson D. 2059, *ApJ*, 1425, 103

Wilkinson D. 2060, *ApJ*, 1438, 103

Wilkinson D. 2061, *ApJ*, 1451, 103

Wilkinson D. 2062, *ApJ*, 1464, 103

Wilkinson D. 2063, *ApJ*, 1477, 103

Wilkinson D. 2064, *ApJ*, 1490, 103

Wilkinson D. 2065, *ApJ*, 1503, 103

the previous iteration, which can lead to points entering and leaving the fitted set. We have not found this to be a serious problem in practice, since the two evolution tend to move close to one another. It could be improved by averaging r_s^2 over two previous iterations. The alternative of measuring the angle with respect to the center of curvature, r_s^* , instead of the source, r_0 , is found to be much less stable.

If quantitative estimates exist for the uncertainties, ϵ_i , in the measurements of r_{ij} , then it is appropriate to incorporate weights of ϵ_i^{-2} in the objective function. However, it is rare for the ϵ_i to be objectively quantifiable, since the uncertainties are often systematic and/or subjective. In cases where the bow shape is traced by eye, based on a set of unlabelled points, a reasonable procedure is to minimize uniform weighting but to place a greater density of points r_{ij} in regions where the shape is well-determined and to place them more sparsely in regions where the shape is less certain.

Since there is no guarantee of symmetry about the axis \hat{x} , the perpendicular radius will in general be different in the two wings of the bow, with values R_{0+} and R_{0-} . These can be estimated by defining

$$R_s = |r_x - r_y| \quad (17)$$

and linearly interpolating between the points (θ_0, R_0) at $\theta = 45^\circ$.

Our Python language implementation of this algorithm is freely available at <https://github.com/div-9>equals-4/circle-fit>. An example application to real data is given in § 7 and Figure 28. Note that this method is not necessary if the orientation of the bow axis is known a priori, in which case the Taylor series method described in § 2 is more efficient and accurate.

This paper has been typeset from a $\text{\LaTeX}/\text{\TeX}$ file prepared by the author.