

Tesis de doctorado



Jorge Alejandro Tarango Yong

19 de septiembre de 2017

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

INSTITUTO DE RADIOASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA

**“Estudio de la Interacción de Flujos Múltiples de Fuentes Astrofísicas, Aplicada
a los Proplyds Clásicos de la Nebulosa de Orión”**

T E S I S

**PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE
DOCTOR EN CIENCIAS (ASTRONOMÍA)**

P R E S E N T A

JORGE ALEJANDRO TARANGO YONG

Director de Tesis: Dr. William J. Henney

Morelia, Michoacán

2017

Índice general

1. Objetos Astrofísicos Relevantes	9
1.1. La Nebulosa de Orión	10
1.2. Estrellas “Errantes”	10
1.3. Discos Protoplanetarios	10
1.4. Proplyds	10
1.4.1. Descubrimiento	10
1.4.2. ¿Qué es un proplyd? Breve introducción (Johnstone et al., 1998)	10
1.4.3. Mecanismos de fotoevaporación (Johnstone et al., 1998) .	12
1.5. Objetos LL	13
1.5.1. Mapa de Objetos	13
2. Marco Teórico	15
2.1. Vientos Estelares	16
2.2. Choques	16
2.3. Frentes de Ionización	16
2.4. Regiones HII	16
2.5. Modelo Genérico de los Choques de Proa	16
2.5.1. Radios “Característicos”	18
2.6. Aproximación Hipersónica	20
2.6.1. Cantidades conservadas en un flujo hipersónico de capa delgada	20
2.6.2. Problema de Interacción de Dos Vientos	21
2.7. Proyección en el Plano del Cielo	29
2.7.1. Vectores normal y tangente a la superficie	29

2.7.2.	Línea tangente	31
2.7.3.	Radio característicos en el plano del cielo	33
2.8.	Cuádricas de Revolución	33
2.8.1.	Radio Característicos	37
2.8.2.	Proyección en el plano del cielo	37
3.	Aproximación Hipersónica	41
3.1.	Cantidades conservadas en un flujo hipersónico de capa delgada	42
3.2.	Problema de Interacción de Dos Vientos	43
3.2.1.	Interacción con un viento esférico isotrópico	44
3.2.2.	Interacción con un viento plano-paralelo	46
4.	Ajustes de cuádricas de revolución a la forma de los choques de proa	47
5.	Resultados obtenidos para los proplyds “clásicos”	49
6.	Resultados obtenidos para otros objetos	51
7.	Conclusiones	53
.1.	Derivación Matemática del Radio de Curvatura	54
.1.1.	Radio de curvatura para un polinomio de grado n	55
.2.	Derivación paso a paso de los Radios Característicos en la aproximación hipersónica del modelo de interacción de dos vientos	55
.2.1.	R_0	55
.2.2.	\tilde{R}_{90}	56
Bibliografía		61
.1.	Derivación Matemática del Radio de Curvatura	61
.1.1.	Radio de curvatura para un polinomio de grado n	63
.2.	Derivación paso a paso de los Radios Característicos en la aproximación hipersónica del modelo de interacción de dos vientos	63
.2.1.	R_0	63
.2.2.	\tilde{R}_{90}	64

Agradecimientos

Esta tesis se realizó para obtener el título de doctorado en ciencias (Astronomía). Deseo aprovechar esta sección para hacer agradecimientos a personas y/o instituciones que me ayudaron para que pueda completar este trabajo de manera exitosa.

Resumen

Abstract en español

Abstract

Abstract written in english

Capítulo 1

Objetos Astrofísicos Relevantes

1.1. La Nebulosa de Orión

1.2. Estrellas “Errantes”

1.3. Discos Protoplanetarios

1.4. Proplyds

1.4.1. Descubrimiento

Observaciones en óptico de la región del trapecio en filtros de banda angosta de diferentes líneas de emisión tales como $H\alpha$, $H\beta$, $[OIII]$, $[NII]$, $[SII]$ y continuo, revelaron la existencia de objetos puntuales únicamente visibles en líneas de alta ionización ($H\alpha$, $H\beta$ y $[OIII]$) que fueron inicialmente denominados como “condensaciones nebulares” (Laques & Vidal, 1979).

Hasta el momento no se sabía con certeza si “condensaciones nebulares” eran en realidad condensaciones nebulares (regiones donde la densidad de la nebulosa es inusualmente alta por alguna razón o bien esferas de gas molecular cuya envoltura fue ionizada y que la radiación de la estrella central la está “erosionando”) o si se trataba de protoestrellas de baja masa cuyo disco protoplanetario estaba siendo fotoevaporado por la estrella central (Churchwell et al., 1987). No fue sino hasta que se contó con observaciones de alta resolución con el Telescopio Espacial Hubble (HST) que se pudo determinar la verdadera naturaleza de estos objetos (O’dell et al., 1993) y la razón por la que se les denominó “proplyds” (PROtoPLANetarY DiskS). A su vez se encontraron por primera vez arcos delgados y otras estructuras de gran interés.

1.4.2. ¿Qué es un proplyd? Breve introducción (Johnstone et al., 1998)

Las imágenes del HST de la Nebulosa de Orión mostraron imágenes de discos alrededor de estrellas jóvenes de baja masa. Algunos se ven como siluetas oscuras que contrastan con la nebulosa, y otros casos son visibles en líneas de emisión de líneas de alta ionización. Un proplyd típico tiene forma cometaria, con una cabeza brillante que apunta hacia la fuente de radiación ionizante, y una cola que se extiende en dirección contraria a ésta. La explicación a esta forma es

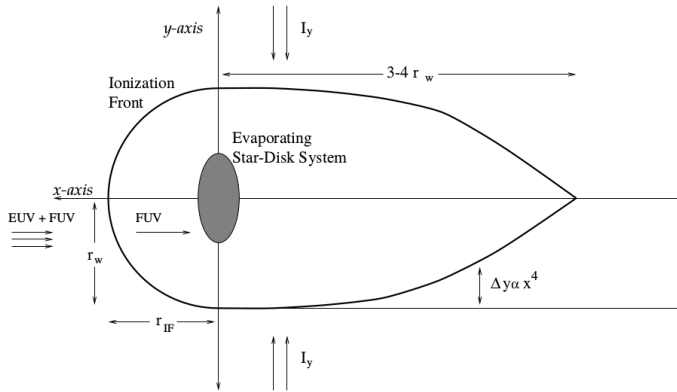


Figura 1.1: Representación esquemática de la formación de un frente de ionización hemisférico y de una cola de gas ionizado detrás del disco en proceso de fotoevaporación. r_{IF} y r_w representan el radio del frente de ionización en las direcciones de los ejes x e y , respectivamente. I_y representa el campo de radiación difusa. Por detrás del disco, la radiación difusa calienta el gas del disco provocando otro flujo fotoevaporado. Δy es la diferencia entre la forma actual del frente de ionización por detrás del disco y una forma cilíndrica. La forma de la cola se explica como que el flujo de radiación I_y es capaz de penetrar más cerca del eje x conforme uno se aleja del disco, donde el flujo fotoevaporado es menos denso.

que el disco protoplanetario está siendo fotoevaporado por la radiación ionizante de una estrella masiva ($\theta^1 C$ en caso de la Nebulosa de Orión), la cabeza es un frente de ionización cuyo radio escala como $R_{IF} \propto D^{2/3}$, donde D es la distancia a la estrella masiva. La forma de la cola se debe a radiación ionizante difusa, producto de dispersión por polvo y por recombinaciones (Figura 1.4.2)

Churchwell et al. (1987) ya había notado que la tasa de pérdida de masa observada en el gas ionizado implicaba que la fuente de este gas debía oscurecer a la protoestrella huésped, a menos que proviniera de un disco circumestelar. De la emisión de radio observada, se estima la densidad electrónica en $n_e \sim 10^6 \text{ cm}^{-3}$ y la tasa de pérdida de masa en $\dot{M} \sim 10^{-7} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$.

1.4.3. Mecanismos de fotoevaporación (Johnstone et al., 1998)

El principal mecanismo de fotoevaporación es el campo de radiación de la estrella central, especialmente en la parte ultravioleta del espectro electromagnético. Según la masa de la estrella central, podemos tener dos clases de flujo radiativo: Dominado por el ultravioleta lejano (FUV, $h\nu < 13,6 \text{ eV}$) o dominado por el ultravioleta extremo (EUV, $h\nu \geq 13,6 \text{ eV}$). En general, el FUV se encarga de disociar moléculas y de calentar el gas de la región de fotodisociación (PDR) hasta temperaturas de 100 - 1000 K, mientras que el EUV puede ionizar el gas y elevar su temperatura hasta 10^4 K . El EUV no puede atravesar el frente de ionización (IF) pero el FUV sí.

En el caso de que el flujo sea dominado por el EUV, la presión térmica del flujo fotoevaporado es determinada por la fotoionización, la PDR producida por el FUV es delgada. El gas calentado por el FUV se mueve de manera subsónica hasta llegar al IF y la tasa de pérdida de masa depende de la tasa de ionización inducida por el EUV.

Si el flujo está dominado por el FUV, la presión térmica depende del calentamiento por el FUV. El gas tibio se expande como un viento que empuja el IF lejos del disco. La tasa de pérdida de masa la determina la temperatura de la PDR, el flujo FUV y la opacidad del polvo a las longitudes de onda del FUV.

Inicialmente la forma del disco impone una geometría cilíndrica en el flujo fotoevaporado, pero eventualmente los gradientes de presión tornan esta geometría en esférica.

Las ecuaciones de continuidad de la masa y el momento restringen la velocidad del flujo neutro antes de alcanzar el IF. Mas allá de éste, la presión del gas hace que éste se expanda a velocidades del orden de una a dos veces la velocidad del sonido. Para el gas neutro dentro del IF hay dos posibles soluciones: si el gas neutro es supersónico entonces el IF será de baja densidad (Tipo R) con bajo contraste de densidad entre gas neutro y gas ionizado. O si el gas neutro es subsónico se formará un IF tipo D con un gran contraste de densidad entre el gas neutro y el gas ionizado. Sin embargo, sin importar qué tipo de radiación domina la fotoevaporación, el gas neutro permanece a velocidades subsónicas al llegar al IF, por lo que dicho frente será tipo D. En el caso de un flujo dominado por el EUV, el gas neutro permanece a velocidad subsónica, su velocidad decae como $v_I \propto r^{-2}$ y llega a $0,5 \text{ km s}^{-1}$ al llegar al frente de ionización. Cuando el flujo es dominado por el FUV, el gas neutro se acelera hasta llegar a velocidades

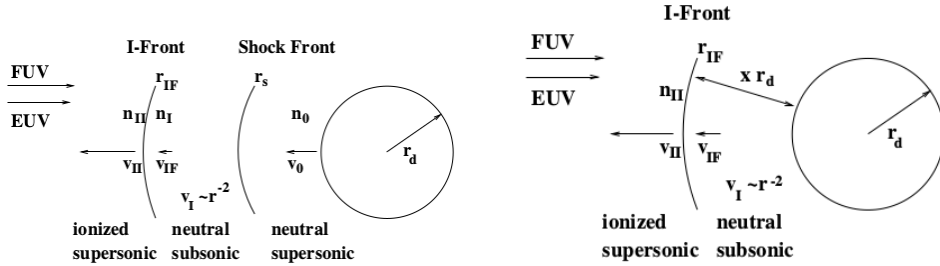


Figura 1.2: Representación esquemática de las regiones del flujo fotoevaporado de un proplyd. Izquierda: Cuando el flujo es dominado por el FUV. Derecha: Flujo dominado por EUV (Johnstone et al., 1998)

supersónicas, luego atraviesa un choque isotérmico que lo desacelera y llega al frente de ionización a $0,5 \text{ km s}^{-1}$.

Sin importar el tipo de mecanismo de fotoevaporación dominante, el flujo fotoevaporado solo si la presión térmica supera a la gravedad de la protoestrella. Entonces, el flujo fotoevaporado solo existe a partir de un radio crítico r_g , donde este radio se estima a partir del balance entre la energía necesaria para escapar de una órbita kepleriana y la energía térmica:

$$r_g = \frac{GM_*}{a^2} \quad (1.1)$$

Donde M_* es la masa de la protoestrella y a es la velocidad del sonido del gas. Para las protoestrellas típicas del trapecio la masa típica es de $M_* = 0,2 M_\odot$. Para el gas neutro la velocidad del sonido es de $a_I \sim 3 \text{ km s}^{-1}$ y para el gas ionizado es de $a_{II} \sim 10 \text{ km s}^{-1}$. Por tanto, el radio gravitacional para un flujo dominado por el EUV es de $r_{gII} \sim 2 \text{ AU}$ y para un flujo dominado por el FUV es de $r_{gI} \sim 20 \text{ AU}$.

1.5. Objetos LL

1.5.1. Mapa de Objetos

Capítulo 2

Marco Teórico

2.1. Vientos Estelares

2.2. Choques

2.3. Frentes de Ionización

Un frente de ionización es la interfaz entre un medio gaseoso neutro y uno ionizado. Ocurren cerca de fuentes de radiación ionizante, tales como estrellas masivas, tipo B temprana o tipo O. el frente de ionización puede tratarse como una discontinuidad en el medio gaseoso

2.4. Regiones HII

Las regiones HII se forman cuando una estrella masiva, de tipo espectral O ó B temprana, ioniza el gas que se encuentra a su alrededor. El gas ionizado se encuentra en equilibrio térmico, a una temperatura del orden de 10^4 K. El principal proceso de calentamiento es la radiación de la estrella central, mientras que el enfriamiento se da principalmente por la recombinación de líneas prohibidas y por emisión libre-libre.

2.5. Modelo Genérico de los Choques de Proa

Para este trabajo consideramos en general dos modelos de interacción de vientos:

- Una fuente localizada en el origen que emite un viento esférico que puede ser isotrópico o anisotrópico (figura 2.5) no acelerado que interactúa con el viento esférico isotrópico de otra fuente que se encuentra a una distancia D de la primera (figura 2.5)
- Una fuente localizada en el origen que emite un viento esférico isotrópico no acelerado que interactúa con un viento plano paralelo no acelerado y densidad constante (figura)

El sistema en su conjunto tiene simetría cilíndrica.

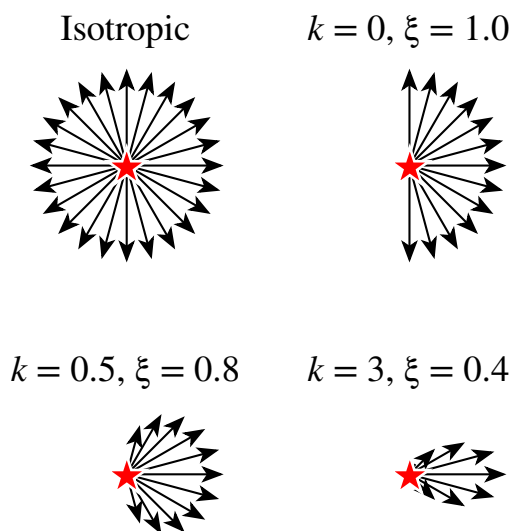


Figura 2.1: Representación esquemática de vientos con diferentes anisotropías: Arriba izquierda: Viento isotrópico esférico. Arriba derecha: viento isotrópico hemisférico. Abajo: Vientos anisotrópicos donde el parámetro k indica el grado de anisotropía (ver sección 2.6)

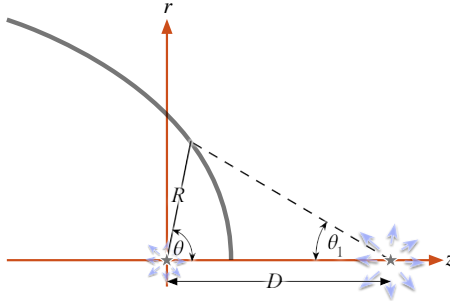


Figura 2.2: Representación esquemática del problema de interacción de dos vientos: Dos fuentes separadas por una distancia D emiten un viento radial que forma un choque de proa a una distancia R del origen. El sistema tiene geometría cilíndrica siendo el eje z el eje de simetría. La forma del choque depende únicamente del ángulo polar θ , medido a partir del origen. Otro ángulo que es de utilidad es θ_1 , que corresponde al ángulo polar medido a partir de la posición de la otra fuente.

2.5.1. Radios “Característicos”

Las cantidades medibles que nos ayudan a caracterizar un choque de proa las llamamos “Radios característicos” (ilustrados en la figura 2.5.1):

- Radio del choque en la dirección del eje de simetría del sistema. Denotado como R_0
- Radio en dirección perpendicular al eje de simetría del sistema. Denotado como R_{90}
- Radio de curvatura en la “nariz” del choque de proa. Denotado como R_c

. Para este trabajo resulta útil hacer una normalización de los radios característicos u otros radios, para que las mediciones que obtengamos sean adimensionales. De esta forma, podemos hacer la normalización con la distancia D , o bien con R_0 , dependiendo de qué tipo de normalización resulte más conveniente. En el primer caso expresamos explícitamente el cociente (e.g. $\frac{R_0}{D}$, $\frac{R_c}{D}$, $\frac{R_{90}}{D}$), y en el segundo caso añadiremos una tilde al radio en cuestión (e.g. \tilde{R}_c , \tilde{R}_{90}).

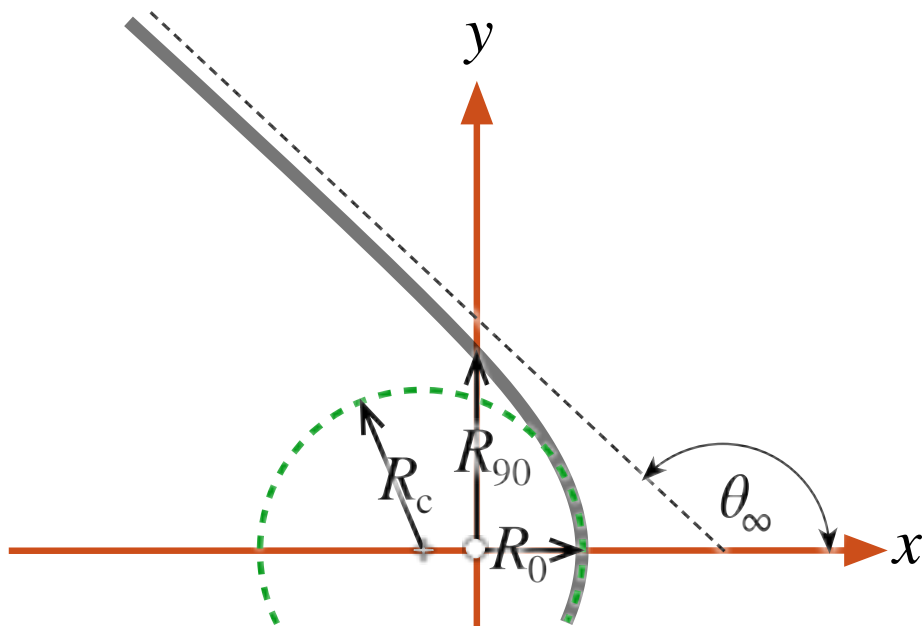


Figura 2.3: Representación esquemática de los radios característicos de un choque de proa

2.6. Interacción de dos vientos: Aproximación Hipersónica (Canto et al., 1996)

El problema de interacción de dos vientos es de gran interés en astrofísica, y ha sido estudiado en múltiples ocasiones, principalmente mediante simulaciones hidrodinámicas. Sin embargo, cuando se toman en cuenta diversos factores, incluídos conservación de masa, momento y momento angular, el problema puede resolverse de manera algebraica.

2.6.1. Cantidades conservadas en un flujo hipersónico de capa delgada

Consideramos dos flujos hipersónicos, no acelerados que forman una capa estacionaria delgada formada por dos choques radiativos separados por una discontinuidad de contacto. El sistema tiene geometría cilíndrica y los vientos no tienen velocidad azimutal. Bajo estos términos, describimos la posición de la capa delgada como $R(\theta)$, donde R es el radio de la capa medido a partir de la posición del origen del viento con menor momento y θ es el ángulo polar. Si asumimos que el gas chocado está bien mezclado, entonces tiene una sola velocidad pos choque dada por:

$$\vec{v} = v_r \hat{r} + v_z \hat{z} \quad (2.1)$$

Donde el eje de simetría del sistema es paralelo a \hat{z} , y \hat{r} es el radio cilíndrico. Definimos $\dot{M}(\theta)$, $\vec{\Pi}(\theta)$ y $\dot{J}(\theta)$ como la tasa de pérdida de masa, la tasa de momento y la tasa de momento angular, respectivamente, de la capa delgada integradas desde $\theta = 0$ hasta θ . Éstas se calculan de la siguiente manera:

$$\vec{\Pi}(\theta) = \dot{\Pi}_r(\theta) \hat{r} + \dot{\Pi}_z(\theta) \hat{z} = \dot{M} (v_r \hat{r} + v_z \hat{z}) \quad (2.2)$$

$$\vec{J}(\theta) = \vec{R}(\theta) \times \vec{\Pi}(\theta) \quad (2.3)$$

$$\dot{M}(\theta) = \dot{M}_w(\theta) + \dot{M}_{w1} \quad (2.4)$$

Donde $\vec{R}(\theta) \equiv R(\theta) \sin \theta \hat{r} + R(\theta) \cos \theta \hat{z}$. Resolviendo el producto cruz y tomando su magnitud encontramos que:

$$\dot{J}(\theta) = \dot{M}(\theta)R(\theta)v_\theta \quad (2.5)$$

$$\text{donde : } v_\theta = v_r \cos \theta - v_z \sin \theta \quad (2.6)$$

Por otro lado, al asumir estado estacionario, necesitamos que la tasa de pérdida de masa, la tasa de momento y la tasa de momento angular de la capa delgada sean iguales a aquellas inyectadas por los dos vientos. Entonces definimos estas cantidades como \dot{M}_w , $\dot{\Pi}_{wr}$, $\dot{\Pi}_{wz}$ y \dot{J}_w para el viento con menor momento, y para el otro viento se utiliza la misma notación solo que utilizando el subíndice “w1”. De esta forma tenemos que:

$$\dot{\Pi}_r(\theta)\hat{r} + \dot{\Pi}_z(\theta)\hat{z} = \left[\dot{\Pi}_{wr}(\theta) + \dot{\Pi}_{wr1}(\theta) \right] \hat{r} + \left[\dot{\Pi}_{wz}(\theta) + \dot{\Pi}_{wz1}(\theta) \right] \hat{z} \quad (2.7)$$

$$\dot{J} = \dot{J}_w(\theta) + \dot{J}_{w1}(\theta) \quad (2.8)$$

$$\dot{M}(\theta) = \dot{M}_w(\theta) + \dot{M}_{w1}(\theta) \quad (2.9)$$

Combinando las ecuaciones (3.2), (3.5), (3.4), (3.7), (3.8) y (3.9) encontramos que:

$$\dot{M}(\theta) [v_r \hat{r} + v_z \hat{z}] = \left(\dot{\Pi}_{wr}(\theta) + \dot{\Pi}_{wr1}(\theta) \right) \hat{r} + \left(\dot{\Pi}_{wz}(\theta) + \dot{\Pi}_{wz1}(\theta) \right) \hat{z} \quad (2.10)$$

$$\dot{M}(\theta)v_\theta R(\theta) = \dot{J}_w(\theta) + \dot{J}_{w1}(\theta) \quad (2.11)$$

Y finalmente combinando con la ecuación (3.6) resolvemos para $R(\theta)$:

$$R(\theta) = \frac{\dot{J}_w(\theta) + \dot{J}_{w1}(\theta)}{\left(\dot{\Pi}_{wr}(\theta) + \dot{\Pi}_{wr1}(\theta) \right) \cos \theta - \left(\dot{\Pi}_{wz}(\theta) + \dot{\Pi}_{wz1}(\theta) \right) \sin \theta} \quad (2.12)$$

2.6.2. Problema de Interacción de Dos Vientos

Aplicamos el formalismo ya mencionado para la interacción de dos vientos radiales. El viento con menor momento se localiza en el origen, y su densidad a radio fijo varía con el ángulo polar como una ley de potencias (figura 2.5):

$$n(\theta) = n_0 \cos^k \theta \quad (2.13)$$

Donde el índice k indica el grado de anisotropía del viento “interno”. Algunos casos particularmente interesantes son el viento para un proplyd (Henney &

Arthur, 1998), donde ($k = 1/2$) y el caso “isotrópico” (Canto et al., 1996) donde $k = 0$. Por el momento restringimos al viento “externo” como isotrópico. El problema se muestra de manera esquemática en la figura 2.5.

Utilizando la ecuación (3.13) encontramos que la tasa de pérdida de masa está dada por:

$$\dot{M}_w = \int_0^\theta \int_0^{2\pi} \rho_w v_w d\theta d\phi = \frac{M_w^0}{2(k+1)} (1 - \cos^{k+1} \theta) \quad (2.14)$$

Donde v_w es la velocidad del viento inteno, $\rho_w = n\bar{m}$ es su densidad, n se obtiene de la ecuación (3.13), $M_w^0 = 4\pi r_0^2 v_w n_0 \bar{m}$ es la tasa de pérdida de masa integrada hasta $\theta = \pi$ para el caso isotrópico, \bar{m} es la masa promedio de las partículas del viento y r_0 es el radio del viento al cual se alcanza la velocidad terminal v_w . Para un proplyd consideramos que dicho radio es el del frente de ionización.

Con esto, obtenemos las tasas de momento y momento angular:

$$\dot{\Pi}_{wz} = \int_0^\theta v_w \cos \theta d\dot{M}_w = \frac{v_w \dot{M}_w^0}{2(k+2)} (1 - \cos^{k+2} \theta) \quad (2.15)$$

$$\dot{\Pi}_{wr} = \int_0^\theta v_w \sin \theta d\dot{M}_w = \frac{1}{2} \dot{M}_w^0 v_w I_k(\theta) \quad (2.16)$$

$$\dot{J}_w = \int_0^\theta |\vec{R} \times \vec{v}_w| d\dot{M}_w = 0 \quad (2.17)$$

Donde la integral $I_k(\theta) = \int_0^\theta \cos^k \theta \sin^2 \theta d\theta$ tiene solución analítica para $k = 0$, es una integral elíptica de segundo tipo cuando $k = \frac{1}{2}$ y su solución es aun más compleja para el resto de los casos. Las tasa de momento angular para el viento interior es cero debido a que éste se mide respecto al origen, donde se localiza la fuente con menor momento. En este punto los vectores de posición y velocidad para un valor de θ dado son paralelos.

Para el viento exterior consideramos dos casos principales: un viento esférico e isotrópico y un viento plano-paralelo de densidad y velocidad constante.

Interacción con un viento esférico isotrópico

En este caso tomamos como variable independiente al ángulo polar medido a partir de la posición de la fuente del viento externo, denotado por θ_1 . De esta

forma las tasas de pérdida de masa, momento y momento angular quedan como sigue:

$$\dot{M}_{w1} = \frac{M_{w1}^0}{2} (1 - \cos \theta_1) \quad (2.18)$$

$$\dot{\Pi}_{wz1} = -\frac{v_{w1} \dot{M}_{w1}^0}{4} \sin^2 \theta_1 \quad (2.19)$$

$$\dot{\Pi}_{wr1} = \frac{v_{w1} \dot{M}_{w1}^0}{4} (\theta_1 - \sin \theta_1 \cos \theta_1) \quad (2.20)$$

$$\dot{J}_{w1} = \int_0^{\theta_1} R(\theta) v_{w1} \sin(\pi - \theta - \theta_1) d\dot{M}_{w1} \quad (2.21)$$

Utilizando la ley de los senos (ver figura 2.5), ecuación (3.21) queda como sigue:

$$\dot{J}_{w1} = D v_{w1} \int_0^{\theta_1} \sin \theta_1 d\dot{M}_{w1} = \frac{v_{w1} \dot{M}_{w1}^0}{4} (\theta_1 - \sin \theta_1 \cos \theta_1) D \quad (2.22)$$

Por otro lado, de la figura 2.5, podemos deducir la siguiente relación geométrica entre $R(\theta)$, θ y θ_1 :

$$\frac{R(\theta)}{D} = \frac{\sin \theta_1}{\sin(\theta + \theta_1)} \quad (2.23)$$

Combinando las ecuaciones (3.12), (3.15) - (3.22) y (3.23) obtenemos una ecuación implícita que nos indica la dependencia de θ_1 con θ :

$$\theta_1 \cot \theta_1 - 1 = 2\beta I_k(\theta) \cot \theta - \frac{2\beta}{k+2} (1 - \cos^{k+2} \theta) \quad (2.24)$$

Donde $\beta = \frac{\dot{M}_w^0 v_w}{\dot{M}_{w1}^0 v_{w1}}$ es el cociente del momentos entre los vientos. Este parámetro, junto con el índice de anisotropía k son los que determinan la forma del choque de proa.

En este caso, podemos determinar el radio característico R_0 a partir de la condición de que el choque es estacionario. En este caso, los momentos de los dos

vientos son iguales en la posición del choque. Por tanto, utilizando la ecuación de momento en $\theta = 0$ obtenemos lo siguiente:

$$\rho_{ws} v_w^2 = \rho_{ws1} v_{w1}^2 \quad (2.25)$$

Donde ρ_{ws} y ρ_{ws1} son las densidades de los dos vientos en la posición del choque. Por otro lado, como la tasa de pérdida de masa es constante para un ángulo θ dado, entonces podemos hacer lo siguiente:

$$\frac{\dot{M}_w^0}{4\pi R^2 v_w} v_w^2 = \frac{\dot{M}_{w1}^0}{4\pi (D - R)^2 v_{w1}} v_{w1}^2 \quad (2.26)$$

En esta última ecuación hemos sustituido $\dot{M}_w^0 = 4\pi R_0^2 v_w \rho_{ws}$ y $\dot{M}_{w1}^0 = 4\pi (D - R_0)^2 v_{w1} \rho_{ws1}$ aprovechando que dichas cantidades deben conservarse.

Reduciendo la ecuación (71) encontramos una expresión para R_0 :

$$\frac{R_0}{D} = \frac{\beta^{1/2}}{1 + \beta^{1/2}} \quad (2.27)$$

Los radios característicos R_{90} y R_c pueden determinarse a partir de la ecuación (3.24). El primero evaluando las ecuaciones (3.23) y (3.24) en $\theta = \frac{\pi}{2}$ como sigue:

$$\frac{R_{90}}{D} = \tan \theta_{1,90} \quad (2.28)$$

$$\theta_{1,90} \cot \theta_{1,90} - 1 = -\frac{2\beta}{k+2} \quad (2.29)$$

Donde $\theta_{1,90} = \theta_1 \left(\frac{\pi}{2} \right)$. Introducimos un nuevo parámetro $\xi \equiv \frac{2}{k+2}$ de modo que combinando las dos ecuaciones anteriores obtenemos lo siguiente:

$$\frac{R_{90}}{D} = \tan \theta_{1,90} = \frac{\theta_{1,90}}{1 - \xi\beta} \quad (2.30)$$

Hacemos una expansión en serie para el lado izquierdo de la ecuación y reducimos:

$$\theta_{1,90}^2 \left(1 + \frac{\theta_{1,90}^2}{15} \right) \simeq 3\beta\xi \quad (2.31)$$

Tomamos la solución a primer orden $\theta_{1,90} = 3\beta\xi$, sustituimos este valor en el término correctivo y resolvemos para $\theta_{1,90}$:

$$\theta_{1,90} = \left(\frac{3\xi\beta}{1 + \frac{1}{5}\xi\beta} \right)^{1/2} \quad (2.32)$$

Finalmente sustituimos (77) en (75) para obtener R_{90} :

$$\frac{R_{90}}{D} = \frac{(3\xi\beta)^{1/2}}{\left(1 + \frac{1}{5}\xi\beta \right)^{1/2} (1 - \xi\beta)} \quad (2.33)$$

$$\tilde{R}_{90} = \frac{(3\xi)^{1/2} (1 + \beta^{1/2})}{\left(1 + \frac{1}{5}\xi\beta \right)^{1/2} (1 - \xi\beta)} \quad (2.34)$$

Siendo que el choque de proa en nuestro modelo genérico es simétrico, entonces la forma $R(\theta)$ debe ser una función par, por tanto podemos hacer la siguiente expansión en serie:

$$R(\theta) \simeq R_0 \left(1 + \gamma\theta^2 + \Gamma\theta^4 + \dots + \dots \right) \quad (2.35)$$

De esta forma el radio de curvatura para $\theta = 0$ queda como sigue (ver apéndice):

$$R_c = R_0 (1 - 2\gamma)^{-1} \quad (2.36)$$

Para encontrar el coeficiente de segundo orden γ hacemos una expansión en serie de las ecuaciones (3.24) y (3.23) para ángulos pequeños, mostrando a continuación la expansión de cada término para al final hacer la reducción algebraica:

$$\theta_1 \cot \theta_1 - 1 \simeq -\frac{\theta_1^2}{3} \left(1 + \frac{\theta_1^2}{15} \right) \quad (2.37)$$

$$\cos^k \theta \simeq \left(1 - \frac{\theta^2}{2} \right)^k \simeq \left(1 - \frac{k\theta^2}{2} \right) \quad (2.38)$$

$$\sin^2 \theta \simeq \theta^2 \left(1 - \frac{\theta^2}{6} \right)^2 \simeq \theta^2 \left(1 - \frac{\theta^2}{3} \right) \quad (2.39)$$

$$\Rightarrow \cos^k \theta \sin \theta \simeq \theta^2 - \left(\frac{1}{3} + \frac{k}{2} \right) \theta^4 \quad (2.40)$$

$$\Rightarrow I_k(\theta) \simeq \frac{\theta^3}{3} \left[1 - \frac{1}{10} (3k+2) \theta^2 \right] \quad (2.41)$$

$$\cot \theta \simeq \theta^{-1} \left(1 - \frac{\theta^2}{3} \right) \quad (2.42)$$

$$\Rightarrow 2\beta I_k(\theta) \cot \theta \simeq \frac{2}{3} \beta \theta^2 \left[1 - \frac{1}{30} (9k+16) \theta^2 \right] \quad (2.43)$$

$$-\frac{2\beta}{k+2} (1 - \cos^{k+2} \theta) \simeq \beta \theta^2 \left[1 - \frac{1}{12} (3k+4) \theta^2 \right] \quad (2.44)$$

$$(2.45)$$

Sustituyendo las expansiones anteriores en (3.24) obtenemos lo siguiente:

$$\theta_1^2 \left(1 + \frac{\theta_1^2}{15} \right) \simeq \beta \theta^2 \left[1 + \frac{1}{60} (4-9k) \theta^2 \right] \quad (2.46)$$

La solución a primer orden (ignorando el término cuártico) es $\theta_1^2 \simeq \beta \theta^2$. Sustituimos esta solución en el término correctivo y resolvemos para θ_1^2 :

$$\theta_1^2 \simeq \beta \theta^2 \left[1 + \frac{1}{60} (4 - 9k) \theta^2 \right] \left(1 + \frac{\beta \theta^2}{15} \right)^{-1} \quad (2.47)$$

$$\theta_1^2 \simeq \beta \theta^2 \left[1 + \frac{1}{60} (4 - 9k) \theta^2 \right] \left(1 - \frac{\beta \theta^2}{15} \right) \quad (2.48)$$

$$\Rightarrow \theta_1^2 \simeq \beta \theta^2 (1 + 2C_{k\beta} \theta^2) \quad (2.49)$$

$$\text{Donde : } C_{k\beta} = \frac{1}{2} \left(A_k - \frac{\beta}{15} \right) \quad (2.50)$$

$$A_k = \frac{1}{15} - \frac{3k}{20} \quad (2.51)$$

Utilizamos esta solución para θ_1 en la ecuación (3.23), ignorando términos de orden superior al cuártico dentro de los corchetes:

$$\theta_1 \simeq \beta^{1/2} \theta \left(1 + 2C_{k\beta} \theta^2\right)^{1/2} \quad (2.52)$$

$$\Rightarrow \theta + \theta_1 \simeq \theta \left[1 + \beta^{1/2} \left(1 + 2C_{k\beta} \theta^2\right)^{1/2}\right] \simeq \theta \left[1 + \beta^{1/2} \left(1 + C_{k\beta} \theta^2\right)\right] \quad (2.53)$$

$$\sin \theta_1 \simeq \theta_1 \left(1 - \frac{\theta_1^2}{6}\right) \quad (2.54)$$

$$\simeq \beta^{1/2} \theta \left(1 + 2C_{k\beta} \theta^2\right)^{1/2} \left[1 - \frac{\beta \theta^2 \left(1 + 2C_{k\beta} \theta^2\right)}{6}\right] \quad (2.55)$$

$$\simeq \beta^{1/2} \theta \left(1 + C_{k\beta} \theta^2\right) \left[1 - \frac{\beta \theta^2 \left(1 + 2C_{k\beta} \theta^2\right)}{6}\right] \quad (2.56)$$

$$\simeq \beta^{1/2} \theta \left[\left(1 + C_{k\beta} \theta^2\right) - \frac{\beta \theta^2 \left(1 + 2C_{k\beta} \theta^2\right) \left(1 + C_{k\beta} \theta^2\right)}{6}\right] \quad (2.57)$$

$$\Rightarrow \sin \theta_1 \simeq \beta^{1/2} \theta \left[1 + \left(C_{k\beta} - \frac{\beta}{6}\right) \theta^2\right] \quad (2.58)$$

$$\sin (\theta + \theta_1) \simeq (\theta + \theta_1) \left[1 - \frac{(\theta + \theta_1)^2}{6}\right] \quad (2.59)$$

$$\simeq \theta \left[1 + \beta^{1/2} \left(1 + C_{k\beta} \theta^2\right)\right] \left[1 - \frac{\theta^2 \left(1 + \beta^{1/2} \left(1 + C_{k\beta} \theta^2\right)\right)^2}{6}\right] \quad (2.60)$$

$$\simeq \theta \left[1 + \beta^{1/2} \left(1 + C_{k\beta} \theta^2\right)\right] \left[1 - \frac{\theta^2}{6} \left(1 + \beta^{1/2}\right)^2 \left(1 + \frac{2\beta}{1 + \beta^{1/2}} C_{k\beta} \theta^2\right)\right] \quad (2.61)$$

$$\simeq \theta \left[1 + \beta^{1/2} - \frac{1}{6} \left(1 + \beta^{1/2}\right)^3 \theta^2 + \beta^{1/2} C_{k\beta} \theta^2\right] \quad (2.62)$$

$$\simeq \theta \left(1 + \beta^{1/2}\right) \left[1 + \left(\frac{\beta^{1/2} C_{k\beta}}{1 + \beta^{1/2}} - \frac{1}{6} \left(1 + \beta^{1/2}\right)^2 \theta^2\right)\right] \quad (2.63)$$

$$\Rightarrow \frac{R}{D} \simeq \frac{\beta^{1/2}}{1 + \beta^{1/2}} \left[1 + \left(C_{k\beta} - \frac{\beta}{6}\right) \theta^2\right] \left[1 + \left(\frac{\beta^{1/2} C_{k\beta}}{1 + \beta^{1/2}} - \frac{\left(1 + \beta^{1/2}\right)^2}{6}\right) \theta^2\right]^{-1} \quad (2.64)$$

Interacción con un viento plano-paralelo

2.7. Proyección en el Plano del Cielo

Para un choque de proa que es la vez geoméricamente delgado y ópticamente delgado, únicamente se observa el borde de éste por abrillantamiento al limbo, por lo tanto, su orientación respecto a la línea de visión modifica su forma respecto a la forma real del choque. Para ello, rotamos el sistema de referencia del choque de proa en coordenadas cartesianas, denotado por (x, y, z) , por un ángulo que llamamos *inclinación*, denotado por i , en el plano xz , de modo que la transformación entre el sistema de referencia del choque y el sistema de referencia del plano del cielo, denotado por (x', y', z') queda como sigue:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos i - z \sin i \\ y' \\ z \cos i + x \sin i \end{pmatrix} \quad (2.65)$$

Por otro lado, la forma tridimensional del choque de proa viene dado por:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \end{pmatrix} \quad (2.66)$$

La relación entre ambos sistemas de referencia se ilustra en la figura 2.7.

2.7.1. Vectores normal y tangente a la superficie

Si definimos los vectores \hat{n} y \hat{t} , como los vectores normal y tangente a la superficie, respectivamente para ϕ constante. En el caso $\phi = 0$ (figura 2.7.1), ambos vectores se encuentran en el plano xy y es fácil mostrar que:

$$\hat{t}_0 = \begin{pmatrix} -\cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \hat{n}_0 = \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.67)$$

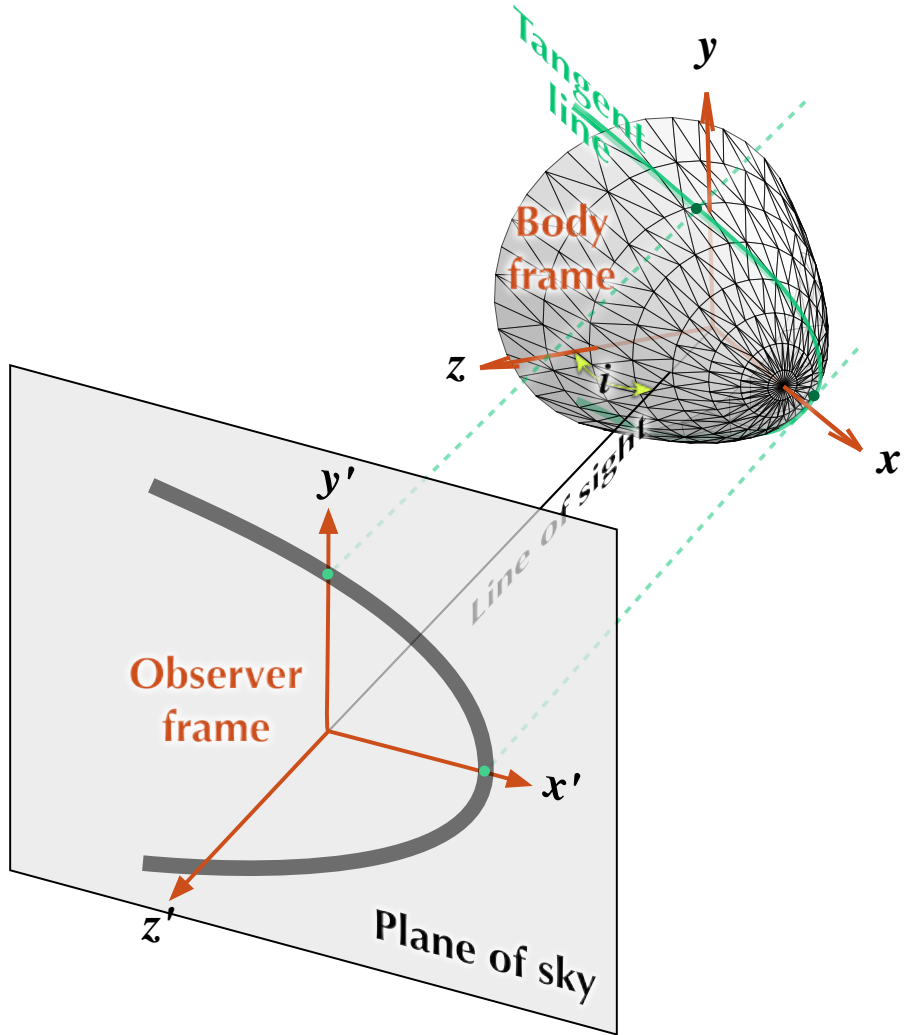


Figura 2.4: Sistema de referencia del choque vs sistema de referencia del plano del cielo. Los ejes x' y y' se encuentran en el plano del cielo, mientras el eje z' es paralelo a la línea de visión. Solo la región del choque cuya tangente sea paralela a la línea de visión será visible por abrillantamiento al limbo.

Donde:

$$\tan \alpha = -\frac{dy}{dx} = \frac{1 + \omega \tan \theta}{\tan \theta - \omega} \quad (2.68)$$

y:

$$\omega(\theta) = -\frac{1}{R} \frac{dR}{d\theta} \quad (2.69)$$

Para otros valores de ϕ , basta con hacer una rotación de las ecuaciones (2.67) alrededor del eje x . Para la conversión al sistema de referencia del plano del cielo se utiliza la ecuación (2.65):

$$\hat{n}' = \frac{1}{(1 + \omega^2)^{1/2}} \quad (2.70)$$

$$\times \begin{pmatrix} (\cos \theta + \omega \sin \theta) \cos i - (\sin \theta - \omega \cos \theta) \sin i \sin \phi \\ (\sin \theta - \omega \cos \theta) \cos \phi \\ (\cos \theta + \omega \sin \theta) \sin i + (\sin \theta - \omega \cos \theta) \sin \phi \cos i \end{pmatrix} \quad (2.71)$$

$$\hat{i}' = \frac{1}{(1 + \omega^2)^{1/2}} \quad (2.72)$$

$$\times \begin{pmatrix} -(\sin \theta - \omega \cos \theta) \cos i - (\cos \theta + \omega \sin \theta) \sin i \sin \phi \\ (\cos \theta + \omega \sin \theta) \cos \phi \\ -(\cos \theta + \omega \sin \theta) \sin i + (\sin \theta - \omega \cos \theta) \sin \phi \cos i \end{pmatrix} \quad (2.73)$$

2.7.2. Línea tangente

Debido a que el choque es ópticamente delgado y geoméricamente delgado, solo la región del choque cuya tangente sea paralela a la línea de visión será visible. Esto corresponde a una curva que denominamos *línea tangente*, que debe cumplir con la siguiente condición:

$$\hat{n}' \cdot \hat{z}' = 0 \quad (2.74)$$

Denotamos como ϕ_T al ángulo azimutal que cumple la condición anterior para una inclinación dada, en función del ángulo polar θ :

$$\sin \phi_T = \tan i \tan \alpha = \tan i \frac{1 + \omega \tan \theta}{\omega - \tan \theta} \quad (2.75)$$

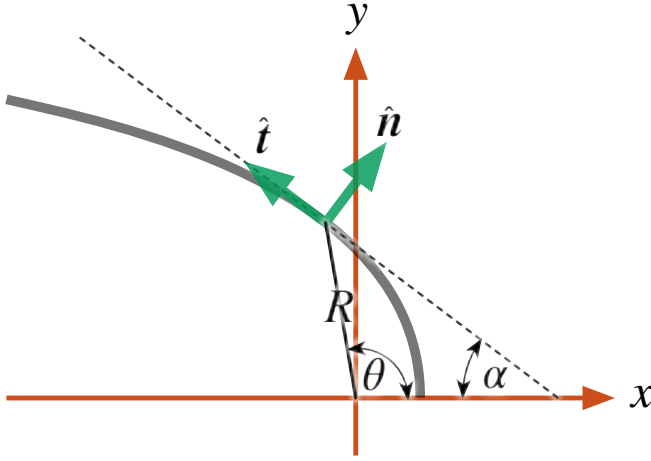


Figura 2.5: Vectores unitarios normal y tangente a la superficie $R(\theta)$ en un plano de azimuth ϕ constante.

De esta manera, la forma de la línea tangente del choque de proa, a la que llamamos *forma proyectada* viene dada por:

$$\begin{pmatrix} x'_T \\ y'_T \\ z'_T \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} \cos \theta \cos i - \sin \theta \sin \phi_T \sin i \\ \sin \theta (1 - \sin^2 \phi_T)^{1/2} \\ \cos \theta \sin i + \sin \theta \sin \phi_T \cos i \end{pmatrix} \quad (2.76)$$

En el caso general, z'_T no es una función lineal de x'_T y y'_T , por lo que la línea tangente no se encuentra en un plano.

La forma aparente (x'_T, y'_T) de la línea tangente también puede escribirse en coordenadas polares (R', θ') , donde:

$$R'(\theta) = (x'^2_T + y'^2_T)^{1/2} \quad \tan \theta' = \frac{y'_T}{x'_T} \quad (2.77)$$

Es de notar a su vez que la ecuación (2.75) no tiene solución para valores arbitrarios de θ y de la inclinación, puesto que se requiere que $|\sin \phi_T| < 1$. Por tanto,

la línea tangente solo existe para valores de θ tales que $\theta < \theta_0$ donde θ_0 es el valor de θ en el eje de simetría de la línea tangente proyectada ($\theta'(\theta_0) = 0$) y que se obtiene de la siguiente ecuación implícita:

$$\tan \theta_0 = \frac{|\tan i| + \omega(\theta_0)}{1 - \omega(\theta_0)|\tan i|} \quad (2.78)$$

Esto implica que si el choque de proa es suficientemente “abierto” ($\alpha > \alpha_{min}$), entonces para inclinaciones tales que $|i| > 90^\circ - \alpha_{min}$ no existirá la línea tangente para ningún valor de θ , es decir, el choque de proa se encontrará suficientemente “de cara” como para que ya no parezca un choque de proa para el observador.

2.7.3. Radios característicos en el plano del cielo

En orden de comparar la forma $R(\theta)$ con observaciones, es útil definir los radios característicos R'_0 y R'_{90} , donde R'_0 es el radio del eje de simetría aparente y R'_{90} es el radio aparente en la dirección perpendicular a R'_0 . Es decir $R'_0 = x'_T(y'_t = 0)$ y $R'_{90} = y'_t(x'_t = 0)$. Utilizando las ecuaciones (2.75) y (2.76) encontramos que:

$$R'_0 = R(\theta_0) \cos(\theta_0 + i) \quad (2.79)$$

Donde θ_0 es la solución de la ecuación (2.78), y

$$R'_{90} = R(\theta_{90}) \sin \theta_{90} \left(1 - \sin^2 \phi_T(\theta_{90})\right)^{1/2} \quad (2.80)$$

donde θ_{90} es la solución de la siguiente ecuación implícita:

$$\cot \theta_{90} = \frac{1 - \left(1 + \omega(\theta_{90})^2 \sin^2 2i\right)^{1/2}}{2\omega(\theta_{90}) \cos^2 i} \quad (2.81)$$

2.8. Cuádricas de Revolución

En el caso general es difícil encontrar la forma aparente para un choque de proa siguiendo el formalismo desarrollado en la sección anterior, por lo que optamos por aproximar la forma éstos con una de las superficies más simples: las *cuádricas de revolución*, que son superficies de revolución de las curvas cónicas. Dado el modelo general descrito en la sección 2.5, haremos algunas restricciones para las superficies cuádricas que utilizaremos en este trabajo:

- El eje focal se encuentra alineado con el eje x
- La posición del foco de la superficie cuádrica no necesariamente coincide con la posición de la fuente
- En el caso de las hipérbolas, solo tomamos una de las ramas de ésta.

Implementando dichas restricciones, utilizamos la representación paramétrica de las curvas cónicas en términos de un parámetro adimensional denotado con la letra t de manera general:

$$x = aC(t) + x_0 \quad (2.82)$$

$$y = bS(t) \quad (2.83)$$

Donde:

$$C(t) = \begin{cases} \cos t & \theta_c > 0 \\ -\cosh t & \theta_c < 0 \end{cases} \quad (2.84)$$

$$S(t) = \begin{cases} \sin t & \theta_c > 0 \\ \sinh t & \theta_c < 0 \end{cases} \quad (2.85)$$

$$x_0 = R_0 \mp a \quad (2.86)$$

Donde a y b representan la longitud del semi-eje mayor y menor, respectivamente (Figura 2.8). x_0 representa la distancia entre el centro de la cónica y el origen. θ_c es un parámetro que está relacionado con la excentricidad y que en este trabajo sustituye a ésta y que están relacionadas por la siguiente expresión:

$$\tan \theta_c = \pm \sqrt{|1 - e^2|} \quad (2.87)$$

Tomamos el signo positivo cuando la cantidad dentro de las barras de valor absoluto es positiva y viceversa (Figura 2.8). También podemos definirlo en términos de los parámetros de las cónicas:

$$\tan \theta_c = \pm \frac{b}{a} \quad (2.88)$$

Siguiendo la convención de que el signo positivo corresponde a elipses, negativo a hipérbolas y cero para las parábolas.

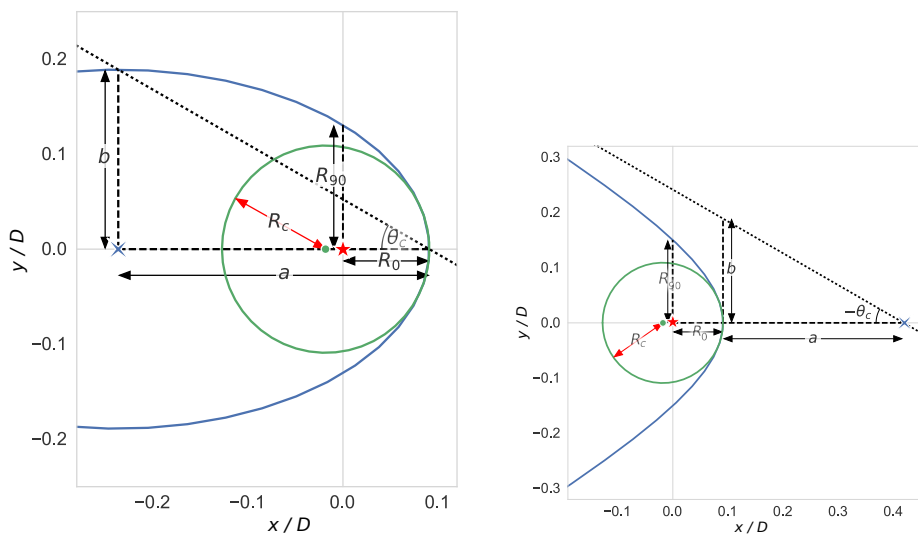


Figura 2.6: Representación esquemática de: Izquierda: Elipse. Y, derecha: Hipérbola. En ambos casos se ilustran los parámetros relevantes de éstas y los radios característicos

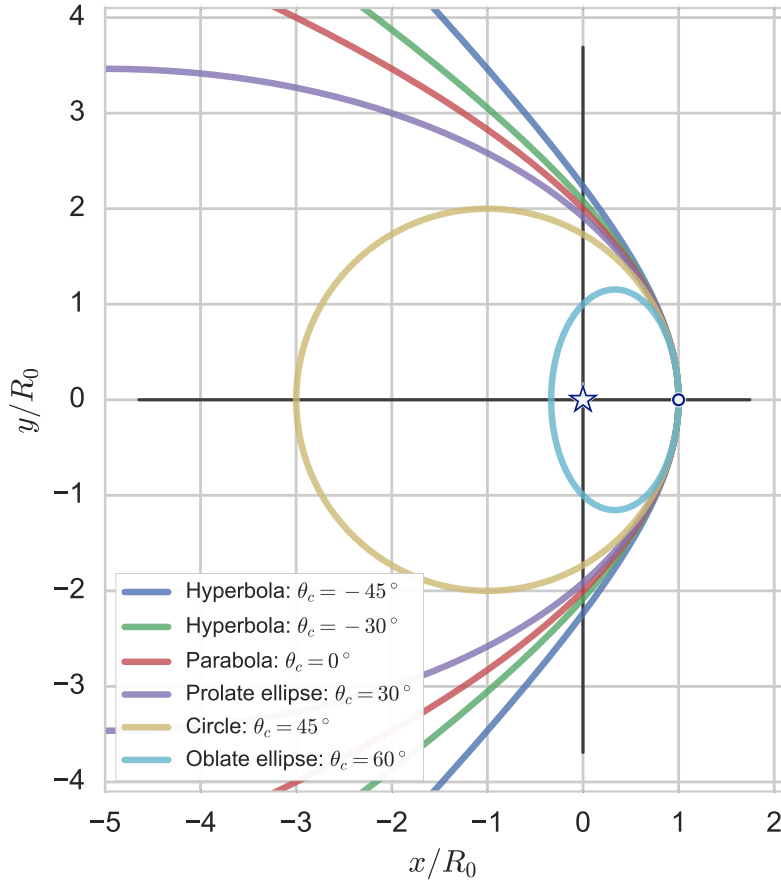


Figura 2.7: Familia de curvas cónicas, donde el valor del parámetro θ_c varía desde $\theta_c < 0$ (hipérbolas) hasta $\theta_c > 0$ (elipses). Casos especiales son $\theta_c = 0$ (parábola) y $\theta_c = 45^\circ$ (círculo). Este parámetro sustituye en este trabajo a la excentricidad.

2.8.1. Radios Característicos

Para que las curvas cónicas den una buena aproximación a la forma de un choque de proa dado, necesitamos saber calcular los radios característicos para éstas. A partir de la descripción de estos en la sección 2.5.1 podemos encontrar expresiones para cada uno de éstos en términos de los parámetros de las cónicas:

$$R_c = \frac{b^2}{a} \quad (2.89)$$

$$R_{90} = b \left[\pm \left(1 - \frac{(R_0 - a)^2}{a^2} \right) \right]^{1/2} \quad (2.90)$$

R_0 es independiente de los parámetros de las cónicas, por tanto, en esta sección nos será útil normalizar con este radio. De esta forma, podemos invertir las siguientes ecuaciones:

$$\tilde{a} = \pm \frac{\tilde{R}_c}{2\tilde{R}_c - \tilde{R}_{90}^2} \quad (2.91)$$

$$\tilde{b} = \frac{\tilde{R}_c}{|2\tilde{R}_c - \tilde{R}_{90}^2|^{1/2}} \quad (2.92)$$

$$\tan \theta_c = \pm |2\tilde{R}_c - \tilde{R}_{90}^2|^{1/2} \quad (2.93)$$

Nótese que la cantidad $T_c \equiv 2\tilde{R}_c - \tilde{R}_{90}^2$ nos sirve como discriminante para distinguir el tipo de curva cónica que mejor ajusta a un choque de proa dado.

2.8.2. Proyección en el plano del cielo

El objetivo de esta sección es obtener la forma proyectada de las cuádricas de revolución, puesto que son una aproximación buena y mucho más sencilla a la forma real de un choque de proa. La forma tridimensional de las cuádricas de revolución viene dada por:

$$x = aC(t) - x_0 \quad (2.94)$$

$$y = bS(t) \cos \phi \quad (2.95)$$

$$z = bS(t) \sin \phi \quad (2.96)$$

Siguiendo el procedimiento mostrado en la sección 2.7 calculamos el ángulo azimutal ϕ que cumple con el criterio de ser tangente a la línea de visión:

$$\sin \phi_T = \frac{b}{a} \tan i \mathcal{T}(t) \quad (2.97)$$

Donde:

$$\mathcal{T}(t) = \begin{cases} \cot t & \text{if } \theta_c > 0 \\ \coth t & \text{if } \theta_c < 0 \end{cases} \quad (2.98)$$

Podemos movernos a otro sistema de referencia (X, Y) centrado en el origen, donde $X = x - x_0$ y $Y = y$. En este sistema, utilizamos la ecuación (2.65) para obtener la forma aparente de una cuádrica dada:

$$X'_T = \frac{C(t)}{a \cos i} \left(a^2 \cos^2 i \pm b^2 \sin^2 i \right) \quad (2.99)$$

$$Y'_T = b \mathcal{S}(t) \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \tan^2 i \mathcal{T}^2(t) \right)^{1/2} \quad (2.100)$$

Se espera que la forma proyectada de una cuádrica dada sea otra cuádrica del mismo tipo, por lo que es posible escribir las ecuaciones (2.99) y (2.100) de la siguiente manera:

$$X'_T = a' C(t') \quad (2.101)$$

$$Y'_T = b' \mathcal{S}(t') \quad (2.102)$$

Donde:

$$a' = \left(a^2 \cos^2 i \pm 2 \sin^2 i \right)^{1/2} \quad (2.103)$$

$$b' = b \quad (2.104)$$

$$C(t') = \frac{a' C(t)}{a \cos i} \quad (2.105)$$

$$\mathcal{S}(t') = \left(1 - C^2(t') \right)^{1/2} \quad (2.106)$$

También implica que para encontrar los radios característicos en el sistema de referencia del observador solamente tenemos que sustituir a y b por a' y b' en las ecuaciones (2.86), (2.89), (2.90) y (2.88):

$$R'_0 = \pm a' + x_0 \cos i \quad (2.107)$$

$$R'_c = \frac{b'^2}{a'} \quad (2.108)$$

$$\tan \theta'_c = \frac{b'}{a'} \quad (2.109)$$

$$R'_{90} = \left(2R'_c \mp \tan^2 \theta'_c \right)^{1/2} \quad (2.110)$$

Utilizando las ecuaciones (2.86), (2.103) y (2.104), utilizando la definición $D' = D \cos i$ e introduciendo la función $f(i; \theta_c) \equiv \left(1 \pm \tan^2 \theta_c \tan^2 i \right)^{1/2}$ obtenemos ecuaciones explícitas para los radios característicos en el sistema de referencia del plano del cielo en términos de la inclinación:

$$\frac{q'}{q} = 1 \pm \tilde{R}_c \cot^2 \theta_c (f(i; \theta_c) - 1) \quad (2.111)$$

$$\tilde{R}'_c = \frac{\tilde{R}_c}{\cos^2 i f(i; \theta_c) \frac{q'}{q}} \quad (2.112)$$

$$\tan \theta'_c = \frac{\tan \theta_c}{\cos i f(i; \theta_c)} \quad (2.113)$$

$$\tilde{R}'_{90} = \left(\frac{2\tilde{R}_c f(i; \theta_c) \mp \tan^2 \theta_c \frac{q'}{q}}{q'/q} \right)^{1/2} \frac{\sec i}{f(i; \theta_c)} \quad (2.114)$$

Cuando \tilde{R}'_{90} es medible, entonces es posible hacer diagramas de diagnóstico como el de la figura 2.8.2 para comparar con observaciones, independientemente de cualquier modelo de choques de proa.

Buscamos adjuntar el paper “quadrics bowshock”

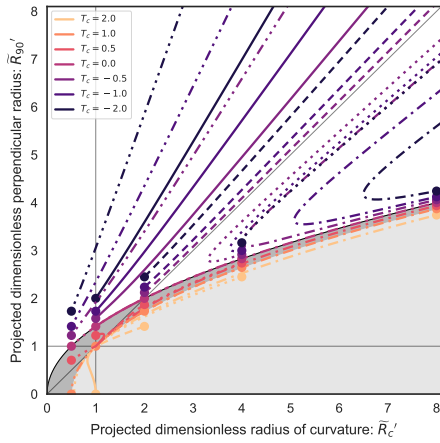


Figura 2.8: Diagrama de diagnóstico \tilde{R}'_{90} vs \tilde{R}'_c para las cuádricas de revolución. En la región sin sombrear se representan las superficies abiertas (hiperboloides, $\theta_c < 0$), mientras que la región más oscura representa a elipsoides prolatos ($0 < \theta_c < 45^\circ$) y la región poco sombreada a elipsoides oblatos ($\theta_c > 45^\circ$)

Capítulo 3

Interacción de dos vientos: Aproximación Hipersónica (Canto et al., 1996)

El problema de interacción de dos vientos es de gran interés en astrofísica, y ha sido estudiado en múltiples ocasiones, principalmente mediante simulaciones hidrodinámicas. Sin embargo, cuando se toman en cuenta diversos factores, incluidos conservación de masa, momento y momento angular, el problema puede resolverse de manera algebraica.

3.1. Cantidades conservadas en un flujo hipersónico de capa delgada

Consideramos dos flujos hipersónicos, no acelerados que forman una capa estacionaria delgada formada por dos choques radiativos separados por una discontinuidad de contacto. El sistema tiene geometría cilíndrica y los vientos no tienen velocidad azimutal. Bajo estos términos, describimos la posición de la capa delgada como $R(\theta)$, donde R es el radio de la capa medido a partir de la posición del origen del viento con menor momento y θ es el ángulo polar. Si asumimos que el gas chocado está bien mezclado, entonces tiene una sola velocidad por choque dada por:

$$\vec{v} = v_r \hat{r} + v_z \hat{z} \quad (3.1)$$

Donde el eje de simetría del sistema es paralelo a \hat{z} , y \hat{r} es el radio cilíndrico. Definimos $\dot{M}(\theta)$, $\vec{\Pi}(\theta)$ y $\dot{J}(\theta)$ como la tasa de pérdida de masa, la tasa de momento y la tasa de momento angular, respectivamente, de la capa delgada integradas desde $\theta = 0$ hasta θ . Éstas se calculan de la siguiente manera:

$$\vec{\Pi}(\theta) = \dot{\Pi}_r(\theta) \hat{r} + \dot{\Pi}_z(\theta) \hat{z} = \dot{M} (v_r \hat{r} + v_z \hat{z}) \quad (3.2)$$

$$\vec{J}(\theta) = \vec{R}(\theta) \times \vec{\Pi}(\theta) \quad (3.3)$$

$$\dot{M}(\theta) = \dot{M}_w(\theta) + \dot{M}_{w1} \quad (3.4)$$

Donde $\vec{R}(\theta) \equiv R(\theta) \sin \theta \hat{r} + R(\theta) \cos \theta \hat{z}$. Resolviendo el producto cruz y tomando su magnitud encontramos que:

$$\dot{J}(\theta) = \dot{M}(\theta) R(\theta) v_\theta \quad (3.5)$$

$$\text{donde : } v_\theta = v_r \cos \theta - v_z \sin \theta \quad (3.6)$$

Por otro lado, al asumir estado estacionario, necesitamos que la tasa de pérdida de masa, la tasa de momento y la tasa de momento angular de la capa delgada sean iguales a aquellas inyectadas por los dos vientos. Entonces definimos estas cantidades como \dot{M}_w , $\dot{\Pi}_{wr}$, $\dot{\Pi}_{wz}$ y \dot{J}_w para el viento con menor momento, y para el otro viento se utiliza la misma notación solo que utilizando el subíndice “w1”. De esta forma tenemos que:

$$\dot{\Pi}_r(\theta)\hat{r} + \dot{\Pi}_z(\theta)\hat{z} = \left[\dot{\Pi}_{wr}(\theta) + \dot{\Pi}_{wr1}(\theta) \right] \hat{r} + \left[\dot{\Pi}_{wz}(\theta) + \dot{\Pi}_{wz1}(\theta) \right] \hat{z} \quad (3.7)$$

$$\dot{J} = \dot{J}_w(\theta) + \dot{J}_{w1}(\theta) \quad (3.8)$$

$$\dot{M}(\theta) = \dot{M}_w(\theta) + \dot{M}_{w1}(\theta) \quad (3.9)$$

Combinando las ecuaciones (3.2), (3.5), (3.4), (3.7), (3.8) y (3.9) encontramos que:

$$\dot{M}(\theta) [v_r \hat{r} + v_z \hat{z}] = \left(\dot{\Pi}_{wr}(\theta) + \dot{\Pi}_{wr1}(\theta) \right) \hat{r} + \left(\dot{\Pi}_{wz}(\theta) + \dot{\Pi}_{wz1}(\theta) \right) \hat{z} \quad (3.10)$$

$$\dot{M}(\theta) v_\theta R(\theta) = \dot{J}_w(\theta) + \dot{J}_{w1}(\theta) \quad (3.11)$$

Y finalmente combinando con la ecuación (3.6) resolvemos para $R(\theta)$:

$$R(\theta) = \frac{\dot{J}_w(\theta) + \dot{J}_{w1}(\theta)}{\left(\dot{\Pi}_{wr}(\theta) + \dot{\Pi}_{wr1}(\theta) \right) \cos \theta - \left(\dot{\Pi}_{wz}(\theta) + \dot{\Pi}_{wz1}(\theta) \right) \sin \theta} \quad (3.12)$$

3.2. Problema de Interacción de Dos Vientos

Aplicamos el formalismo ya mencionado para la interacción de dos vientos radiales. El viento con menor momento se localiza en el origen, y su densidad a radio fijo varía con el ángulo polar como una ley de potencias (figura 2.5):

$$n(\theta) = n_0 \cos^k \theta \quad (3.13)$$

Donde el índice k indica el grado de anisotropía del viento “interno”. Algunos casos particularmente interesantes son el viento para un proplyd (Henney & Arthur, 1998), donde ($k = 1/2$) y el caso “isotrópico” (Canto et al., 1996) donde $k = 0$. Por el momento restringimos al viento “externo” como isotrópico. El problema se muestra de manera esquemática en la figura 2.5.

Utilizando la ecuación (3.13) encontramos que la tasa de pérdida de masa está dada por:

$$\dot{M}_w = \int_0^\theta \int_0^{2\pi} \rho_w v_w d\theta d\phi = \frac{M_w^0}{2(k+1)} (1 - \cos^{k+1} \theta) \quad (3.14)$$

Donde v_w es la velocidad del viento inteno, $\rho_w = n\bar{m}$ es su densidad, n se obtiene de la ecuación (3.13), $M_w^0 = 4\pi r_0^2 v_w n_0 \bar{m}$ es la tasa de pérdida de masa integrada hasta $\theta = \pi$ para el caso isotrópico, \bar{m} es la masa promedio de las partículas del viento y r_0 es el radio del viento al cual se alcanza la velocidad terminal v_w . Para un proplyd consideramos que dicho radio es el del frente de ionización.

Con esto, obtenemos las tasas de momento y momento angular:

$$\dot{\Pi}_{wz} = \int_0^\theta v_w \cos \theta d\dot{M}_w = \frac{v_w \dot{M}_w^0}{2(k+2)} (1 - \cos^{k+2} \theta) \quad (3.15)$$

$$\dot{\Pi}_{wr} = \int_0^\theta v_w \sin \theta d\dot{M}_w = \frac{1}{2} \dot{M}_w^0 v_w I_k(\theta) \quad (3.16)$$

$$\dot{J}_w = \int_0^\theta |\vec{R} \times \vec{v}_w| d\dot{M}_w = 0 \quad (3.17)$$

Donde la integral $I_k(\theta) = \int_0^\theta \cos^k \theta \sin^2 \theta d\theta$ tiene solución analítica para $k = 0$, es una integral elíptica de segundo tipo cuando $k = \frac{1}{2}$ y su solución es aun más compleja para el resto de los casos. Las tasa de momento angular para el viento interior es cero debido a que éste se mide respecto al origen, donde se localiza la fuente con menor momento. En este punto los vectores de posición y velocidad para un valor de θ dado son paralelos.

Para el viento exterior consideramos dos casos principales: un viento esférico e isotrópico y un viento plano-paralelo de densidad y velocidad constante.

3.2.1. Interacción con un viento esférico isotrópico

En este caso tomamos como variable independiente al ángulo polar medido a partir de la posición de la fuente del viento externo, denotado por θ_1 . De esta forma las tasas de pérdida de masa, momento y momento angular quedan como sigue:

$$\dot{M}_{w1} = \frac{M_{w1}^0}{2} (1 - \cos \theta_1) \quad (3.18)$$

$$\dot{\Pi}_{wz1} = -\frac{v_{w1} \dot{M}_{w1}^0}{4} \sin^2 \theta_1 \quad (3.19)$$

$$\dot{\Pi}_{wr1} = \frac{v_{w1} \dot{M}_{w1}^0}{4} (\theta_1 - \sin \theta_1 \cos \theta_1) \quad (3.20)$$

$$j_{w1} = \int_0^{\theta_1} R(\theta) v_{w1} \sin(\pi - \theta - \theta_1) d\dot{M}_{w1} \quad (3.21)$$

Utilizando la ley de los senos (ver figura 2.5), ecuación (3.21) queda como sigue:

$$j_{w1} = D v_{w1} \int_0^{\theta_1} \sin \theta_1 d\dot{M}_{w1} = \frac{v_{w1} \dot{M}_{w1}^0}{4} (\theta_1 - \sin \theta_1 \cos \theta_1) D \quad (3.22)$$

Por otro lado, de la figura 2.5, podemos deducir la siguiente relación geométrica entre $R(\theta)$, θ y θ_1 :

$$\frac{R(\theta)}{D} = \frac{\sin \theta_1}{\sin(\theta + \theta_1)} \quad (3.23)$$

Combinando las ecuaciones (3.12), (3.15) - (3.22) y (3.23) obtenemos una ecuación implícita que nos indica la dependencia de θ_1 con θ :

$$\theta_1 \cot \theta_1 - 1 = 2\beta I_k(\theta) \cot \theta - \frac{2\beta}{k+2} (1 - \cos^{k+2} \theta) \quad (3.24)$$

Donde $\beta = \frac{\dot{M}_w^0 v_w}{\dot{M}_{w1}^0 v_{w1}}$ es el cociente del momentos entre los vientos. Este parámetro, junto con el índice de anisotropía k son los que determinan la forma del choque de proa.

Los radios característicos en este caso se muestran a continuación. El procedimiento detallado se puede consultar en el apéndice ??:

3.2.2. Interacción con un viento plano-paralelo

En este caso las tasas de pérdida de masa, de momento y momento angular del viento plano-paralelo quedan como sigue:

(3.25)

Capítulo 4

Ajustes de cuádricas de revolución a la forma de los choques de proa

CAPÍTULO 4. AJUSTES DE CUÁDRICAS DE REVOLUCIÓN A LA FORMA DE LOS CHOQUES DE PROA

This is chapter 4

Capítulo 5

Resultados obtenidos para los proplyds “clásicos”

This is chapter 5

Capítulo 6

Resultados obtenidos para otros objetos

This is chapter 6

Capítulo 7

Conclusiones

1. Derivación Matemática del Radio de Curvatura

Tomamos una curva genérica $\vec{\sigma}(t) \equiv x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y}$ continua y suave para todo valor de t real y finito. Sus derivadas se denotan como $\vec{\sigma}'(t)$ y $\vec{\sigma}''(t)$. Su longitud de arco está dada por:

$$s(t) = \int_0^t \|\vec{\sigma}'(t')\| dt' \quad (1)$$

Reparametrizamos la trayectoria $\vec{\sigma}(t)$ con la longitud de arco y diferenciando respecto a ésta obtenemos lo siguiente:

$$\frac{d\vec{\sigma}}{ds} = \frac{\vec{\sigma}'(t)}{\|\vec{\sigma}'(t)\|} \equiv \vec{T}(s) \quad (2)$$

Esta última expresión se logró diferenciando la ecuación (57) y aplicando la regla de la cadena al diferenciar $\frac{d\vec{\sigma}}{ds}$. $\vec{T}(s)$ es el vector tangente a la trayectoria $\vec{\sigma}(s)$.

La curvatura κ se define como la magnitud de la derivada del vector tangente respecto a la longitud de arco, o bien, como la segunda derivada de la trayectoria $\vec{\sigma}(s)$:

$$\kappa \equiv \|\vec{T}'(s)\| = \|\vec{\sigma}''(s)\| \quad (3)$$

El radio de curvatura se define como el radio de un círculo que ajusta localmente a la trayectoria, y se calcula como el inverso multiplicativo de la curvatura:

$$R_c = \frac{1}{\kappa} \quad (4)$$

Aplicando la regla de la cadena encontramos la siguiente expresión para la curvatura:

$$\kappa = \left\| \frac{\vec{\sigma}''(t)}{\|\vec{\sigma}'(t)\|^2} - \frac{\vec{\sigma}'(t)}{\|\vec{\sigma}'(t)\|^4} \vec{\sigma}'(t) \cdot \vec{\sigma}''(t) \right\| \quad (5)$$

Escribimos las componentes de las derivadas de $\vec{\sigma}(t)$ para calcular los factores que intervienen en la ecuación (61):

$$\vec{\sigma}'(t) = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} \quad (6)$$

$$\vec{\sigma}''(t) = \ddot{x}\hat{x} + \ddot{y}\hat{y} \quad (7)$$

$$\Rightarrow \vec{\sigma}'(t) \cdot \vec{\sigma}''(t) = \dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} \quad (8)$$

De esta forma, calculamos la curvatura como sigue:

$$\kappa = \left[\left(\frac{\ddot{x}}{\|\vec{\sigma}'\|^2} - \frac{\dot{x}(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y})}{\|\vec{\sigma}'\|^4} \right)^2 + \left(\frac{\ddot{y}}{\|\vec{\sigma}'\|^2} - \frac{\dot{y}(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y})}{\|\vec{\sigma}'\|^4} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (9)$$

$$\kappa = \|\vec{\sigma}'\|^{-2} \left[\left(\ddot{x}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \dot{x}(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}) \right)^2 + \left(\ddot{y}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \dot{y}(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}) \right)^2 \right]^{1/2} \quad (10)$$

$$\kappa = \|\vec{\sigma}'\|^{-2} \left[\left(\ddot{x}\dot{y}^2 - \dot{x}\dot{y}\ddot{y} \right)^2 + \left(\ddot{y}\dot{x}^2 - \dot{y}\dot{x}\ddot{x} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (11)$$

$$\kappa = \|\vec{\sigma}'\|^{-3} \left[\ddot{x}^2\dot{y}^2 + \ddot{y}^2\dot{x}^2 - 2\ddot{x}\ddot{y}\dot{x}\dot{y} \right]^{1/2} \quad (12)$$

$$\kappa = \frac{|\ddot{x}\dot{y} - \ddot{y}\dot{x}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} \quad (13)$$

Utilizando coordenadas polares, la expresión para el radio de curvatura queda como sigue:

$$R_c = R \frac{(1 + \omega^2)^{3/2}}{|1 + \omega^2 - \dot{\omega}|} \quad (14)$$

Donde $\omega \equiv \frac{1}{R} \frac{dR}{d\theta}$ (ver sección 2.7)

.1.1. Radio de curvatura para un polinomio de grado n

.2. Derivación paso a paso de los Radios Característicos en la aproximación hipersónica del modelo de interacción de dos vientos

.2.1. R_0

Podemos determinar el radio característico R_0 a partir de la condición de que el choque es estacionario. En este caso, los momentos de los dos vientos son iguales en la posición del choque. Por tanto, utilizando la ecuación de momento en $\theta = 0$ obtenemos lo siguiente:

$$\rho_{ws} v_w^2 = \rho_{ws1} v_{w1}^2 \quad (15)$$

Donde ρ_{ws} y ρ_{ws1} son las densidades de los dos vientos en la posición del choque. Por otro lado, como la tasa de pérdida de masa es constante para un ángulo θ dado, entonces podemos hacer lo siguiente:

$$\frac{\dot{M}_w^0}{4\pi R^2 v_w} v_w^2 = \frac{\dot{M}_{w1}^0}{4\pi (D - R)^2 v_{w1}} v_{w1}^2 \quad (16)$$

En esta última ecuación hemos sustituido $\dot{M}_w^0 = 4\pi R_0^2 v_w \rho_{ws}$ y $\dot{M}_{w1}^0 = 4\pi (D - R_0)^2 v_{w1} \rho_{ws1}$ aprovechando que dichas cantidades deben conservarse.

Reduciendo la ecuación (71) encontramos una expresión para R_0 :

$$\frac{R_0}{D} = \frac{\beta^{1/2}}{1 + \beta^{1/2}} \quad (17)$$

.2.2. \tilde{R}_{90}

R_{90} puede determinarse a partir de evaluar las ecuaciones (3.23) y (3.24) en $\theta = \frac{\pi}{2}$ como sigue:

2. DERIVACIÓN PASO A PASO DE LOS RADIOS CARACTERÍSTICOS EN LA
APROXIMACIÓN DE CHUEN

$$\frac{R_{90}}{D} = \tan \theta_{1,90} \quad (18)$$

$$\theta_{1,90} \cot \theta_{1,90} - 1 = -\frac{2\beta}{k+2} \quad (19)$$

Donde $\theta_{1,90} = \theta_1 \left(\frac{\pi}{2} \right)$. Introducimos un nuevo parámetro $\xi \equiv \frac{2}{k+2}$ de modo que combinando las dos ecuaciones anteriores obtenemos lo siguiente:

$$\frac{R_{90}}{D} = \tan \theta_{1,90} = \frac{\theta_{1,90}}{1 - \xi\beta} \quad (20)$$

Hacemos una expansión en serie para el lado izquierdo de la ecuación y reducimos:

$$\theta_{1,90}^2 \left(1 + \frac{\theta_{1,90}^2}{15} \right) \simeq 3\beta\xi \quad (21)$$

Tomamos la solución a primer orden $\theta_{1,90} = 3\beta\xi$, sustituimos este valor en el término correctivo y resolvemos para $\theta_{1,90}$:

$$\theta_{1,90} = \left(\frac{3\xi\beta}{1 + \frac{1}{5}\xi\beta} \right)^{1/2} \quad (22)$$

Finalmente sustituimos (77) en (75) para obtener R_{90} :

$$\frac{R_{90}}{D} = \frac{(3\xi\beta)^{1/2}}{\left(1 + \frac{1}{5}\xi\beta \right)^{1/2} (1 - \xi\beta)} \quad (23)$$

$$\tilde{R}_{90} = \frac{(3\xi)^{1/2} (1 + \beta^{1/2})}{\left(1 + \frac{1}{5}\xi\beta \right)^{1/2} (1 - \xi\beta)} \quad (24)$$

Siendo que el choque de proa en nuestro modelo genérico es simétrico, entonces la forma $R(\theta)$ debe ser una función par, por tanto podemos hacer la siguiente expansión en serie:

$$R(\theta) \simeq R_0 \left(1 + \gamma \theta^2 + \Gamma \theta^4 + \dots + \dots \right) \quad (25)$$

De esta forma el radio de curvatura para $\theta = 0$ queda como sigue (ver apéndice):

$$\tilde{R}_c = (1 - 2\gamma)^{-1} \quad (26)$$

Para encontrar el coeficiente de segundo orden γ hacemos una expansión en serie de las ecuaciones (3.24) y (3.23) para ángulos pequeños, mostrando a continuación la expansión de cada término para al final hacer la reducción algebraica:

$$\theta_1 \cot \theta_1 - 1 \simeq -\frac{\theta_1^2}{3} \left(1 + \frac{\theta_1^2}{15} \right) \quad (27)$$

$$\cos^k \theta \simeq \left(1 - \frac{\theta^2}{2} \right)^k \simeq \left(1 - \frac{k\theta^2}{2} \right) \quad (28)$$

$$\sin^2 \theta \simeq \theta^2 \left(1 - \frac{\theta^2}{6} \right)^2 \simeq \theta^2 \left(1 - \frac{\theta^2}{3} \right) \quad (29)$$

$$\Rightarrow \cos^k \theta \sin \theta \simeq \theta^2 - \left(\frac{1}{3} + \frac{k}{2} \right) \theta^4 \quad (30)$$

$$\Rightarrow I_k(\theta) \simeq \frac{\theta^3}{3} \left[1 - \frac{1}{10} (3k + 2) \theta^2 \right] \quad (31)$$

$$\cot \theta \simeq \theta^{-1} \left(1 - \frac{\theta^2}{3} \right) \quad (32)$$

$$\Rightarrow 2\beta I_k(\theta) \cot \theta \simeq \frac{2}{3} \beta \theta^2 \left[1 - \frac{1}{30} (9k + 16) \theta^2 \right] \quad (33)$$

$$-\frac{2\beta}{k+2} (1 - \cos^{k+2} \theta) \simeq \beta \theta^2 \left[1 - \frac{1}{12} (3k + 4) \theta^2 \right] \quad (34)$$

$$(35)$$

Sustituyendo las expansiones anteriores en (3.24) obtenemos lo siguiente:

$$\theta_1^2 \left(1 + \frac{\theta_1^2}{15} \right) \simeq \beta \theta^2 \left[1 + \frac{1}{60} (4 - 9k) \theta^2 \right] \quad (36)$$

La solución a primer orden (ignorando el término cuártico) es $\theta_1^2 \simeq \beta\theta^2$. Sustituimos esta solución en el término correctivo y resolvemos para θ_1^2 :

$$\theta_1^2 \simeq \beta\theta^2 \left[1 + \frac{1}{60} (4 - 9k) \theta^2 \right] \left(1 + \frac{\beta\theta^2}{15} \right)^{-1} \quad (37)$$

$$\theta_1^2 \simeq \beta\theta^2 \left[1 + \frac{1}{60} (4 - 9k) \theta^2 \right] \left(1 - \frac{\beta\theta^2}{15} \right) \quad (38)$$

$$\Rightarrow \theta_1^2 \simeq \beta\theta^2 (1 + 2C_{k\beta}\theta^2) \quad (39)$$

$$\text{Donde : } C_{k\beta} = \frac{1}{2} \left(A_k - \frac{\beta}{15} \right) \quad (40)$$

$$A_k = \frac{1}{15} - \frac{3k}{20} \quad (41)$$

Utilizamos esta solución para θ_1 en la ecuación (3.23), ignorando términos de orden superior al cuártico dentro de los corchetes:

$$\theta_1 \simeq \beta^{1/2} \theta \left(1 + 2C_{k\beta} \theta^2\right)^{1/2} \quad (42)$$

$$\Rightarrow \theta + \theta_1 \simeq \theta \left[1 + \beta^{1/2} \left(1 + 2C_{k\beta} \theta^2\right)^{1/2}\right] \simeq \theta \left[1 + \beta^{1/2} \left(1 + C_{k\beta} \theta^2\right)\right] \quad (43)$$

$$\sin \theta_1 \simeq \theta_1 \left(1 - \frac{\theta_1^2}{6}\right) \quad (44)$$

$$\simeq \beta^{1/2} \theta \left(1 + 2C_{k\beta} \theta^2\right)^{1/2} \left[1 - \frac{\beta \theta^2 \left(1 + 2C_{k\beta} \theta^2\right)}{6}\right] \quad (45)$$

$$\simeq \beta^{1/2} \theta \left(1 + C_{k\beta} \theta^2\right) \left[1 - \frac{\beta \theta^2 \left(1 + 2C_{k\beta} \theta^2\right)}{6}\right] \quad (46)$$

$$\simeq \beta^{1/2} \theta \left[\left(1 + C_{k\beta} \theta^2\right) - \frac{\beta \theta^2 \left(1 + 2C_{k\beta} \theta^2\right) \left(1 + C_{k\beta} \theta^2\right)}{6} \right] \quad (47)$$

$$\Rightarrow \sin \theta_1 \simeq \beta^{1/2} \theta \left[1 + \left(C_{k\beta} - \frac{\beta}{6}\right) \theta^2\right] \quad (48)$$

$$\sin (\theta + \theta_1) \simeq (\theta + \theta_1) \left[1 - \frac{(\theta + \theta_1)^2}{6}\right] \quad (49)$$

$$\simeq \theta \left[1 + \beta^{1/2} \left(1 + C_{k\beta} \theta^2\right)\right] \left[1 - \frac{\theta^2 \left(1 + \beta^{1/2} \left(1 + C_{k\beta} \theta^2\right)\right)^2}{6}\right] \quad (50)$$

$$\simeq \theta \left[1 + \beta^{1/2} \left(1 + C_{k\beta} \theta^2\right)\right] \left[1 - \frac{\theta^2}{6} \left(1 + \beta^{1/2}\right)^2 \left(1 + \frac{2\beta}{1 + \beta^{1/2}} C_{k\beta} \theta^2\right)\right] \quad (51)$$

$$\simeq \theta \left[1 + \beta^{1/2} - \frac{1}{6} \left(1 + \beta^{1/2}\right)^3 \theta^2 + \beta^{1/2} C_{k\beta} \theta^2\right] \quad (52)$$

$$\simeq \theta \left(1 + \beta^{1/2}\right) \left[1 + \left(\frac{\beta^{1/2} C_{k\beta}}{1 + \beta^{1/2}} - \frac{1}{6} \left(1 + \beta^{1/2}\right)^2 \theta^2\right)\right] \quad (53)$$

$$\Rightarrow \frac{R}{D} \simeq \frac{\beta^{1/2}}{1 + \beta^{1/2}} \left[1 + \left(C_{k\beta} - \frac{\beta}{6}\right) \theta^2\right] \left[1 + \left(\frac{\beta^{1/2} C_{k\beta}}{1 + \beta^{1/2}} - \frac{\left(1 + \beta^{1/2}\right)^2}{6}\right)\right]^{-1} \quad (54)$$

$$\simeq \frac{\beta^{1/2}}{1 + \beta^{1/2}} \left[1 + \left(C_{k\beta} - \frac{\beta}{6}\right) \theta^2\right] \left[1 - \left(\frac{\beta^{1/2} C_{k\beta}}{1 + \beta^{1/2}} - \frac{\left(1 - \beta^{1/2}\right)^2}{6}\right)\right] \quad (55)$$

Bibliografía

Canto J., Raga A. C., Wilkin F. P., 1996, , [469](#), [729](#)

Churchwell E., Felli M., Wood D. O. S., Massi M., 1987, , [321](#), [516](#)

Henney W. J., Arthur S. J., 1998, , [116](#), [322](#)

Johnstone D., Hollenbach D., Bally J., 1998, , [499](#), [758](#)

Laques P., Vidal J. L., 1979, , [73](#), [97](#)

O'dell C. R., Wen Z., Hu X., 1993, , [410](#), [696](#)

.1. Derivación Matemática del Radio de Curvatura

Tomamos una curva genérica $\vec{\sigma}(t) \equiv x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y}$ continua y suave para todo valor de t real y finito. Sus derivadas se denotan como $\vec{\sigma}'(t)$ y $\vec{\sigma}''(t)$. Su longitud de arco está dada por:

$$s(t) = \int_0^t \|\vec{\sigma}'(t')\| dt' \quad (58)$$

Reparametrizamos la trayectoria $\vec{\sigma}(t)$ con la longitud de arco y diferenciando respecto a ésta obtenemos lo siguiente:

$$\frac{d\vec{\sigma}}{ds} = \frac{\vec{\sigma}'(t)}{\|\vec{\sigma}'(t)\|} \equiv \vec{T}(s) \quad (59)$$

Esta última expresión se logró diferenciando la ecuación (57) y aplicando la regla de la cadena al diferenciar $\frac{d\vec{\sigma}}{ds}$. $\vec{T}(s)$ es el vector tangente a la trayectoria $\vec{\sigma}(s)$.

La curvatura κ se define como la magnitud de la derivada del vector tangente respecto a la longitud de arco, o bien, como la segunda derivada de la trayectoria $\vec{\sigma}(s)$:

$$\kappa \equiv \|\vec{T}'(s)\| = \|\vec{\sigma}''(s)\| \quad (60)$$

El radio de curvatura se define como el radio de un círculo que ajusta localmente a la trayectoria, y se calcula como el inverso multiplicativo de la curvatura:

$$R_c = \frac{1}{\kappa} \quad (61)$$

Aplicando la regla de la cadena encontramos la siguiente expresión para la curvatura:

$$\kappa = \left\| \frac{\vec{\sigma}''(t)}{\|\vec{\sigma}'(t)\|^2} - \frac{\vec{\sigma}'(t)}{\|\vec{\sigma}'(t)\|^4} \vec{\sigma}'(t) \cdot \vec{\sigma}''(t) \right\| \quad (62)$$

Escribimos las componentes de las derivadas de $\vec{\sigma}(t)$ para calcular los factores que intervienen en la ecuación (61):

$$\vec{\sigma}'(t) = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} \quad (63)$$

$$\vec{\sigma}''(t) = \ddot{x}\hat{x} + \ddot{y}\hat{y} \quad (64)$$

$$\Rightarrow \vec{\sigma}'(t) \cdot \vec{\sigma}''(t) = \dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} \quad (65)$$

De esta forma, calculamos la curvatura como sigue:

$$\kappa = \left[\left(\frac{\ddot{x}}{\|\vec{\sigma}'\|^2} - \frac{\dot{x}(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y})}{\|\vec{\sigma}'\|^4} \right)^2 + \left(\frac{\ddot{y}}{\|\vec{\sigma}'\|^2} - \frac{\dot{y}(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y})}{\|\vec{\sigma}'\|^4} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (66)$$

$$\kappa = \|\vec{\sigma}'\|^{-2} \left[\left(\ddot{x}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \dot{x}(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}) \right)^2 + \left(\ddot{y}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \dot{y}(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}) \right)^2 \right]^{1/2} \quad (67)$$

$$\kappa = \|\vec{\sigma}'\|^{-2} \left[\left(\ddot{x}\dot{y}^2 - \dot{x}\dot{y}\ddot{y} \right)^2 + \left(\ddot{y}\dot{x}^2 - \dot{y}\dot{x}\ddot{x} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (68)$$

$$\kappa = \|\vec{\sigma}'\|^{-3} \left[\ddot{x}^2\dot{y}^2 + \ddot{y}^2\dot{x}^2 - 2\ddot{x}\ddot{y}\dot{x}\dot{y} \right]^{1/2} \quad (69)$$

$$\kappa = \frac{|\ddot{x}\dot{y} - \ddot{y}\dot{x}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} \quad (70)$$

Utilizando coordenadas polares, la expresión para el radio de curvatura queda como sigue:

$$R_c = R \frac{(1 + \omega^2)^{3/2}}{|1 + \omega^2 - \dot{\omega}|} \quad (71)$$

Donde $\omega \equiv \frac{1}{R} \frac{dR}{d\theta}$ (ver sección 2.7)

.1.1. Radio de curvatura para un polinomio de grado n

.2. Derivación paso a paso de los Radios Característicos en la aproximación hipersónica del modelo de interacción de dos vientos

.2.1. R_0

Podemos determinar el radio característico R_0 a partir de la condición de que el choque es estacionario. En este caso, los momentos de los dos vientos son iguales en la posición del choque. Por tanto, utilizando la ecuación de momento en $\theta = 0$ obtenemos lo siguiente:

$$\rho_{ws} v_w^2 = \rho_{ws1} v_{w1}^2 \quad (72)$$

Donde ρ_{ws} y ρ_{ws1} son las densidades de los dos vientos en la posición del choque. Por otro lado, como la tasa de pérdida de masa es constante para un ángulo θ dado, entonces podemos hacer lo siguiente:

$$\frac{\dot{M}_w^0}{4\pi R^2 v_w} v_w^2 = \frac{\dot{M}_{w1}^0}{4\pi (D - R)^2 v_{w1}} v_{w1}^2 \quad (73)$$

En esta última ecuación hemos sustituido $\dot{M}_w^0 = 4\pi R_0^2 v_w \rho_{ws}$ y $\dot{M}_{w1}^0 = 4\pi (D - R_0)^2 v_{w1} \rho_{ws1}$ aprovechando que dichas cantidades deben conservarse.

Reduciendo la ecuación (71) encontramos una expresión para R_0 :

$$\frac{R_0}{D} = \frac{\beta^{1/2}}{1 + \beta^{1/2}} \quad (74)$$

2.2. \tilde{R}_{90}

R_{90} puede determinarse a partir de evaluar las ecuaciones (3.23) y (3.24) en $\theta = \frac{\pi}{2}$ como sigue:

$$\frac{R_{90}}{D} = \tan \theta_{1,90} \quad (75)$$

$$\theta_{1,90} \cot \theta_{1,90} - 1 = -\frac{2\beta}{k+2} \quad (76)$$

Donde $\theta_{1,90} = \theta_1 \left(\frac{\pi}{2} \right)$. Introducimos un nuevo parámetro $\xi \equiv \frac{2}{k+2}$ de modo que combinando las dos ecuaciones anteriores obtenemos lo siguiente:

$$\frac{R_{90}}{D} = \tan \theta_{1,90} = \frac{\theta_{1,90}}{1 - \xi \beta} \quad (77)$$

Hacemos una expansión en serie para el lado izquierdo de la ecuación y reducimos:

$$\theta_{1,90}^2 \left(1 + \frac{\theta_{1,90}^2}{15} \right) \simeq 3\beta\xi \quad (78)$$

Tomamos la solución a primer orden $\theta_{1,90} = 3\beta\xi$, sustituimos este valor en el término correctivo y resolvemos para $\theta_{1,90}$:

$$\theta_{1,90} = \left(\frac{3\xi\beta}{1 + \frac{1}{5}\xi\beta} \right)^{1/2} \quad (79)$$

Finalmente sustituimos (77) en (75) para obtener R_{90} :

$$\frac{R_{90}}{D} = \frac{(3\xi\beta)^{1/2}}{\left(1 + \frac{1}{5}\xi\beta \right)^{1/2} (1 - \xi\beta)} \quad (80)$$

$$\tilde{R}_{90} = \frac{(3\xi)^{1/2} (1 + \beta^{1/2})}{\left(1 + \frac{1}{5}\xi\beta \right)^{1/2} (1 - \xi\beta)} \quad (81)$$

Siendo que el choque de proa en nuestro modelo genérico es simétrico, entonces la forma $R(\theta)$ debe ser una función par, por tanto podemos hacer la siguiente expansión en serie:

$$R(\theta) \simeq R_0 \left(1 + \gamma\theta^2 + \Gamma\theta^4 + \dots + \dots \right) \quad (82)$$

De esta forma el radio de curvatura para $\theta = 0$ queda como sigue (ver apéndice):

$$\tilde{R}_c = (1 - 2\gamma)^{-1} \quad (83)$$

Para encontrar el coeficiente de segundo orden γ hacemos una expansión en serie de las ecuaciones (3.24) y (3.23) para ángulos pequeños, mostrando a continuación la expansión de cada término para al final hacer la reducción algebraica:

$$\theta_1 \cot \theta_1 - 1 \simeq -\frac{\theta_1^2}{3} \left(1 + \frac{\theta_1^2}{15} \right) \quad (84)$$

$$\cos^k \theta \simeq \left(1 - \frac{\theta^2}{2} \right)^k \simeq \left(1 - \frac{k\theta^2}{2} \right) \quad (85)$$

$$\sin^2 \theta \simeq \theta^2 \left(1 - \frac{\theta^2}{6} \right)^2 \simeq \theta^2 \left(1 - \frac{\theta^2}{3} \right) \quad (86)$$

$$\Rightarrow \cos^k \theta \sin \theta \simeq \theta^2 - \left(\frac{1}{3} + \frac{k}{2} \right) \theta^4 \quad (87)$$

$$\Rightarrow I_k(\theta) \simeq \frac{\theta^3}{3} \left[1 - \frac{1}{10} (3k + 2) \theta^2 \right] \quad (88)$$

$$\cot \theta \simeq \theta^{-1} \left(1 - \frac{\theta^2}{3} \right) \quad (89)$$

$$\Rightarrow 2\beta I_k(\theta) \cot \theta \simeq \frac{2}{3} \beta \theta^2 \left[1 - \frac{1}{30} (9k + 16) \theta^2 \right] \quad (90)$$

$$-\frac{2\beta}{k+2} (1 - \cos^{k+2} \theta) \simeq \beta \theta^2 \left[1 - \frac{1}{12} (3k + 4) \theta^2 \right] \quad (91)$$

$$(92)$$

Sustituyendo las expansiones anteriores en (3.24) obtenemos lo siguiente:

$$\theta_1^2 \left(1 + \frac{\theta_1^2}{15} \right) \simeq \beta \theta^2 \left[1 + \frac{1}{60} (4 - 9k) \theta^2 \right] \quad (93)$$

La solución a primer orden (ignorando el término cuártico) es $\theta_1^2 \simeq \beta \theta^2$. Sustituimos esta solución en el término correctivo y resolvemos para θ_1^2 :

$$\theta_1^2 \simeq \beta \theta^2 \left[1 + \frac{1}{60} (4 - 9k) \theta^2 \right] \left(1 + \frac{\beta \theta^2}{15} \right)^{-1} \quad (94)$$

$$\theta_1^2 \simeq \beta \theta^2 \left[1 + \frac{1}{60} (4 - 9k) \theta^2 \right] \left(1 - \frac{\beta \theta^2}{15} \right) \quad (95)$$

$$\Rightarrow \theta_1^2 \simeq \beta \theta^2 (1 + 2C_{k\beta} \theta^2) \quad (96)$$

$$\text{Donde : } C_{k\beta} = \frac{1}{2} \left(A_k - \frac{\beta}{15} \right) \quad (97)$$

$$A_k = \frac{1}{15} - \frac{3k}{20} \quad (98)$$

Utilizamos esta solución para θ_1 en la ecuación (3.23), ignorando términos de orden superior al cuártico dentro de los corchetes:

$$\theta_1 \simeq \beta^{1/2} \theta \left(1 + 2C_{k\beta} \theta^2\right)^{1/2} \quad (99)$$

$$\Rightarrow \theta + \theta_1 \simeq \theta \left[1 + \beta^{1/2} \left(1 + 2C_{k\beta} \theta^2\right)^{1/2}\right] \simeq \theta \left[1 + \beta^{1/2} \left(1 + C_{k\beta} \theta^2\right)\right] \quad (100)$$

$$\sin \theta_1 \simeq \theta_1 \left(1 - \frac{\theta_1^2}{6}\right) \quad (101)$$

$$\simeq \beta^{1/2} \theta \left(1 + 2C_{k\beta} \theta^2\right)^{1/2} \left[1 - \frac{\beta \theta^2 \left(1 + 2C_{k\beta} \theta^2\right)}{6}\right] \quad (102)$$

$$\simeq \beta^{1/2} \theta \left(1 + C_{k\beta} \theta^2\right) \left[1 - \frac{\beta \theta^2 \left(1 + 2C_{k\beta} \theta^2\right)}{6}\right] \quad (103)$$

$$\simeq \beta^{1/2} \theta \left[\left(1 + C_{k\beta} \theta^2\right) - \frac{\beta \theta^2 \left(1 + 2C_{k\beta} \theta^2\right) \left(1 + C_{k\beta} \theta^2\right)}{6} \right] \quad (104)$$

$$\Rightarrow \sin \theta_1 \simeq \beta^{1/2} \theta \left[1 + \left(C_{k\beta} - \frac{\beta}{6}\right) \theta^2\right] \quad (105)$$

$$\sin (\theta + \theta_1) \simeq (\theta + \theta_1) \left[1 - \frac{(\theta + \theta_1)^2}{6}\right] \quad (106)$$

$$\simeq \theta \left[1 + \beta^{1/2} \left(1 + C_{k\beta} \theta^2\right)\right] \left[1 - \frac{\theta^2 \left(1 + \beta^{1/2} \left(1 + C_{k\beta} \theta^2\right)\right)^2}{6}\right] \quad (107)$$

$$\simeq \theta \left[1 + \beta^{1/2} \left(1 + C_{k\beta} \theta^2\right)\right] \left[1 - \frac{\theta^2}{6} \left(1 + \beta^{1/2}\right)^2 \left(1 + \frac{2\beta}{1 + \beta^{1/2}} C_{k\beta} \theta^2\right)\right] \quad (108)$$

$$\simeq \theta \left[1 + \beta^{1/2} - \frac{1}{6} \left(1 + \beta^{1/2}\right)^3 \theta^2 + \beta^{1/2} C_{k\beta} \theta^2\right] \quad (109)$$

$$\simeq \theta \left(1 + \beta^{1/2}\right) \left[1 + \left(\frac{\beta^{1/2} C_{k\beta}}{1 + \beta^{1/2}} - \frac{1}{6} \left(1 + \beta^{1/2}\right)^2 \theta^2\right)\right] \quad (110)$$

$$\Rightarrow \frac{R}{D} \simeq \frac{\beta^{1/2}}{1 + \beta^{1/2}} \left[1 + \left(C_{k\beta} - \frac{\beta}{6}\right) \theta^2\right] \left[1 + \left(\frac{\beta^{1/2} C_{k\beta}}{1 + \beta^{1/2}} - \frac{\left(1 + \beta^{1/2}\right)^2}{6}\right)\right]^{-1} \quad (111)$$

$$\simeq \frac{\beta^{1/2}}{1 + \beta^{1/2}} \left[1 + \left(C_{k\beta} - \frac{\beta}{6}\right) \theta^2\right] \left[1 - \left(\frac{\beta^{1/2} C_{k\beta}}{1 + \beta^{1/2}} - \frac{\left(1 + \beta^{1/2}\right)^2}{6}\right)\right] \quad (112)$$