Hopfield神经网络求解TSP问题：

1.1核心算法说明

Hopfield 神经网络模型分为：离散型（DHNN）：适用于处理联想记忆问题和连续性（CHNN）：适用于处理组合优化问题，TSP 问题是组合优化，选择用 CHNN 来解决。

1. CHNN算法说明：

（1）对于特定的问题，选择一种合适的表示方法，使得神经网络的输出与问题的解相对应；

（2）构造网络的能量函数，使其最小值对应于问题的最佳解；

（3）将能量函数与 CHNN 算法标准形式相比较，推出神经网络权值与偏流表达式；

（4）推出网络状态更新公式，并利用更新公式迭代求问题的最优解。

其中，标准CHNN模型的状态方程推导如下：

①设电容C两端的电压为Uc，存储的电荷量为Q，则$C=\frac{Q}{U_C}\Rightarrow Q=CU_C$，则经过电容C的电流为$i=\frac{dQ}{dt}\Rightarrow C\frac{dU_c}{dt}$，根据基尔霍夫电流定律，CHNN等效电路的电流关系为$C_i\frac{du_i}{dt}+\frac{u_i}{R_{i0}}=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{R_{ij}}(v_j-u_i)+I_i$（RC 网络电容电流+RC 网络电阻电流=输出电流+偏置电流）。令 Tij 表示神经元之间连接的权值：$T_{ij}=\frac{1}{R_{ij}}$，则电流关系可化简为$C_i\frac{du_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n}T_{ij}v_j-\sum_{j=1}^{n}T_{ij}u_j-T_{i0}u_i+I_i$

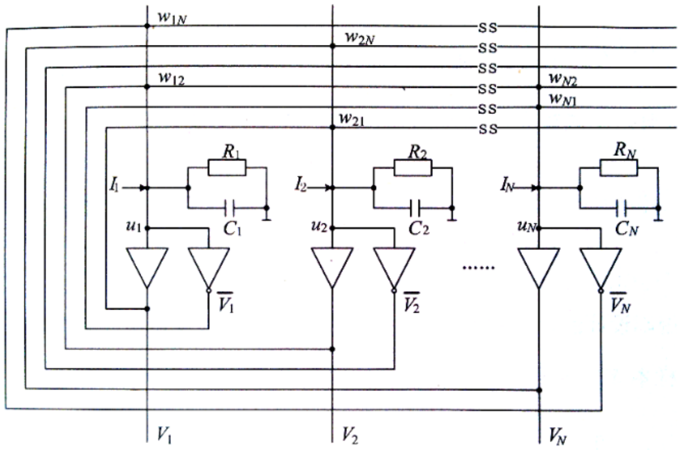
$$\Rightarrow C_i\frac{du_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n}T_{ij}v_j-\frac{u_i}{R_i}+I_i$$

②在Hopfield网络中，由于网络的权重全程保持不变，神经元当前时刻状态和上一个时刻相关，故采用能量函数来衡量 Hopfield 网络的稳定性，由于 CHNN 的能量函数定义为$E=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}T_{ij}v_iv_j-\sum_{i=1}^{n}v_iI_i+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{R_i}\int_0^{u_i}f^{-1}(v_i)dv_i$能量函数E是单调下降的，故Hopfield网络是稳定的。

至此，有了Hopfield网络的CHNN模型的状态方程和能量函数，就可以来尝试抽象和转化TSP问题了。

2．TSP 问题的等效与转化：

将 Hopfield 神经网络等效为放大电子电路：Hopfield 的每一个神经元等效为一个电子放大器元件，每一个神经元的输入和输出，等效为电子元件的输入电压和输出电压；每一个电子元件（神经元）的输出电信号有正负值，正值代表兴奋，负值代表抑制，每一个电子元件（神经元）的输入信息，包含恒定的外部电流输入，和其它电子元件的反馈连接：



问题转化步骤：

（1）对 N 个城市的 TSP 问题，用一个 N×N 的换位矩阵描述旅行路线，换位阵中每行每列有且只有一个元素为 1 ，其余全为 0 。为 1 的元素其横坐标 x 表示城市名，纵坐标 i 表示该城市在访问路线中的位置；

x \ i	1	2	3	4	5
A	0	1	0	0	0
B	0	0	0	1	0
C	1	0	0	0	0
D	0	0	0	0	1
E	0	0	1	0	0

（2）网络的能量函数由四部分组成，分别用来保证换位阵的合法性以及最终路线长度的最短；

$$E=\frac{A}{2}\sum_{x}\sum_{i}\sum_{j\neq i}v_{xi}v_{xj}+\frac{B}{2}\sum_{i}\sum_{x}\sum_{y\neq x}v_{xi}v_{yi}+\frac{C}{2}\left(\sum_{x}\sum_{i}v_{xi}-n\right)^{2}+\frac{D}{2}\sum_{x}\sum_{i}\sum_{y\neq x}d_{xy}v_{xi}\left(v_{y,i+1}+v_{y,i-1}\right)$$

其中 A、B、C、D 为惩罚因子。

① $\frac{A}{2}\sum_{x}\sum_{i}\sum_{j\neq i} v_{xi}v_{xj}$ 当所有城市最多被访问一次时取最小值 0；

② $\frac{B}{2}\sum_{i}\sum_{x}\sum_{y\neq x} v_{xi}v_{yi}$ 当每次最多只访问一个城市时取最小值 0；

③ $\frac{C}{2}(\sum_{x}\sum_{i} v_{xi}-n)^2$ 当所有 n 个城市一共被访问 n 次时取最小值 0；

④ $\frac{D}{2}\sum_{x}\sum_{i}\sum_{y\neq x} d_{xy}v_{xi}(v_{y,i+1}+v_{y,i-1})$ 当前路线总长度；

（3）将能量函数与标准形式相比较，得到网络权值与偏流表达式为：

$$\begin{cases} W_{xi,yj} = -A\delta_{xy}(1-\delta_{ij}) - B\delta_{ij}(1-\delta_{xy}) - C - Dd_{xy}(\delta_{j,i+1}+\delta_{j,i-1}) \\ I_{xi} = C\cdot n \end{cases}$$

故网络更新公式为：

$$\begin{cases} \dfrac{du_{xi}}{dt} = -\dfrac{u_{xi}}{\tau} - A\sum_{j\neq i} v_{xj} - B\sum_{y\neq x} v_{yi} - C(\sum_{x}\sum_{i} v_{xi} - n) - D\sum_{y\neq x} d_{xy}(v_{y,i+1}+v_{y,i-1}) \\ v_{xi} = g(u_{xi}) = \dfrac{1}{2}\cdot[1+\tanh(u_{xi}/u_0)] \end{cases}$$

1.2 程序实现

1、初始化网络基本参数和惩罚因子；

2、生成城市点矩阵和距离矩阵；

3、迭代开始：

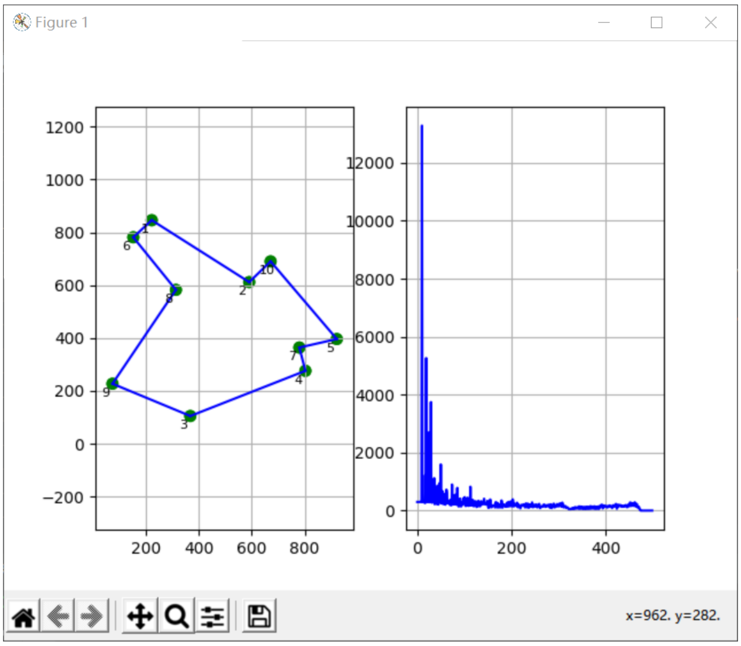
（1）用随机数初始化换位阵及状态阵；

（2）对状态阵及换位阵，进行设置迭代次数的同步更新，得最终换位阵的解 V；

（3）判断所得 V 的合法性，若为合法解，输出访问次序，旅行路线图及路线总长度，程序结束；否则，转到（1）。

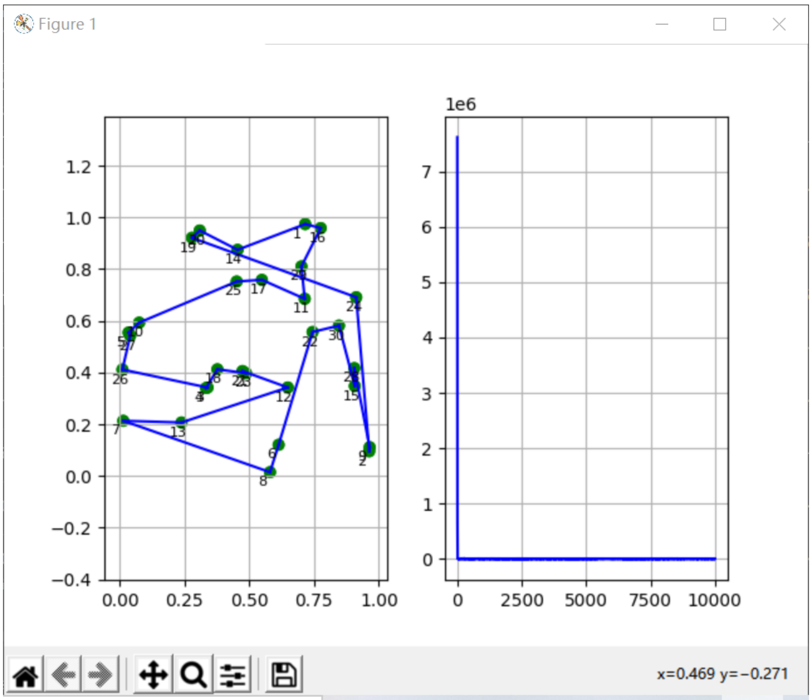
1.3 实验结果

1、当城市个数为 10 个时



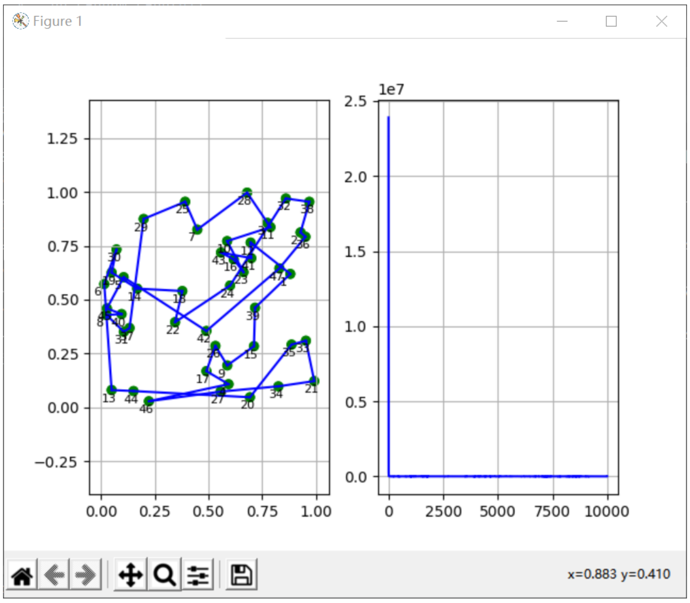

```
第185次迭代找到的次优解距离为：2773.824248353564，能量为：210.95564859786924，路径为：
1->6->8->9->3->4->5->7->10->2->1
第244次迭代找到的次优解距离为：2773.8242483535637，能量为：285.2499106266979，路径为：
6->8->9->3->4->5->7->10->2->1->6
第317次迭代找到的次优解距离为：2738.208403547726，能量为：107.94526869448835，路径为：
8->9->3->4->7->5->10->2->1->6->8
运行时间：0.4198722839355469 秒
```

2、当城市个数为 30 时



```
[[0.7156171507528645, 0.9740377548439833], [0.9629251802548917, 0.09540326677621624], [0.3383052797212972, 0.34194922
第489次迭代找到的次优解距离为：11.70500774829895，能量为：1991.433605463981，路径为：
13->4->8->7->3->24->1->15->9->28->22->25->5->27->11->20->17->30->29->16->26->19->18->10->14->21->23->12->2->6->13
第680次迭代找到的次优解距离为：11.105280911207288，能量为：1915.511233586638，路径为：
13->4->8->7->18->24->1->15->9->28->22->27->5->14->11->20->17->30->29->16->26->19->25->10->3->21->23->12->2->6->13
第1721次迭代找到的次优解距离为：8.254400296951466，能量为：3049.888104576284，路径为：
26->7->8->28->30->24->15->2->9->22->20->25->14->1->11->16->17->29->19->5->27->4->10->3->18->21->23->12->6->13->26
第1910次迭代找到的次优解距离为：7.899131536573137，能量为：1049.5964109121544，路径为：
26->7->8->28->30->24->9->2->15->22->20->25->14->1->16->17->11->29->19->5->27->4->10->3->18->21->23->12->6->13->26
第2172次迭代找到的次优解距离为：7.293853984451747，能量为：4603.129735162366，路径为：
26->7->8->28->30->24->9->2->15->22->20->25->14->1->16->17->11->29->19->5->27->10->18->3->4->21->23->12->6->13->26
第4894次迭代找到的次优解距离为：7.0880819868161，能量为：2130.765874082563，路径为：
8->15->30->22->9->2->28->24->19->20->25->14->1->16->11->29->17->10->5->26->27->4->18->3->23->21->12->6->7->13->8
第5176次迭代找到的次优解距离为：7.042645142045512，能量为：2612.5677980832065，路径为：
12->15->30->22->9->2->28->24->19->20->25->16->1->11->29->17->14->10->5->26->27->4->18->3->23->21->6->8->7->13->12
第7586次迭代找到的次优解距离为：6.926006682462177，能量为：2852.877637801761，路径为：
15->30->22->28->9->2->24->19->20->14->1->16->29->11->17->25->27->10->5->26->3->4->18->23->21->8->12->7->13->6->15
第8694次迭代找到的次优解距离为：6.31109859969402，能量为：4129.740671112243，路径为：
22->30->15->28->9->2->24->19->20->14->1->16->29->11->17->25->10->5->27->26->3->4->18->23->21->12->13->7->8->6->22
运行时间：25.554706811904907 秒
```

3、城市个数为 47 个时




```
第838次迭代找到的次优解距离为：13.838510204796183，能量为：3012.440464286913，路径为：
6->14->8->31->15->41->38->11->32->16->39->22->5->30->25->3->13->37->26->33->35->21->34->4->46->44->27->9->20->17->2->1->12->23->24->47->42->18->36->
第2925次迭代找到的次优解距离为：10.941004531621209，能量为：3794.402793498662，路径为：
6->14->47->1->36->32->2->11->42->18->22->19->5->7->8->44->13->35->33->34->21->27->46->4->17->26->20->9->15->39->41->12->16->23->24->10->43->3->38->2
第6062次迭代找到的次优解距离为：9.805069601380538，能量为：3698.84390561264，路径为：
14->42->47->36->32->38->2->43->18->22->19->30->5->13->44->20->39->35->21->34->4->27->46->17->26->9->15->33->1->12->41->24->16->23->10->11->3->28->7->
第7557次迭代找到的次优解距离为：9.493062981674512，能量为：3714.567885530222，路径为：
42->47->36->2->38->32->24->22->18->14->19->30->6->13->44->20->35->33->21->34->27->46->4->17->26->9->15->39->1->12->41->43->16->23->10->11->3->28->7->
运行时间：40.99740815162659 秒
```

1.4 参数影响分析

1、惩罚因子的大小

惩罚因子 A、B、C、D 的相对大小可以反映对解的要求。根据上面的能量计算说明知道：其中 A、B、C 是为了保证合法解的项的权系数：A 是保证每行最多

一个 1 的权系数；B 是保证每列最多一个 1 的权系数；C 是保证共有 N 个 1；D 是保证路线总长度最短的项的权系数。

通过不断地调整参数实验发现：当 C 相对于 A 和 B 较小时，实验很难出现合法解，多数解都有两列全为 0，程序往往陷入死循环。这说明，解的合法性的第三项没有得到足够的重视。因此，逐渐加大 C 并观察实验结果，发现 C 较大时出现合法解的频率明显提高，同时 C 较大时路线最短项的权系数 D 相对较小，因此，出现最优解的频率将有所下降。

D 较小时，相对更强调解的合法性，因此出现合法解的频率较大，但路线长度很大；D 较大时，出现合法解的频率有所降低，但路线长度明显变小，出现最优解的可能性相对增加；而当 D 过大时，由于过度强调路线长度，很难出现合法解，因此程序易冻结。

2、步长 step

step 较大时，状态矩阵变化较大，会提高出现合法解的频率；但 step 过大时状态矩阵会由于变化剧烈而难以出现合法解； step 较小时会导致更新速度过慢甚至冻结。

3、初值 μ_0

μ_0 较小，激励函数趋近于离散值，缩短出现寻优时间，但不易出现最优解；μ_0 较大，激励函数过于平坦，不利于收敛。