

Modélisation : Géométrie différentielle

SINGARIN-SOLE — BELGUIDOUM

Mai 2024

Contents

1	Introduction	2
2	Implémentation de la méthode analytique pour le calcul des courbures	2
2.1	Calcul des 3 courbures caractéristiques pour une caténoïde	2
2.2	Choix la colormap	4
2.3	Structure principale du code	4
2.4	Analyse et résultats	5
3	Implémentation de la méthode des dérivées discrètes pour le calcul des courbures	7
3.1	Explication de la méthode	7
3.2	Analyse et Résultats	10
4	Comparaison des 2 méthodes	10
5	Résultats pour d'autres types de surface	11
5.1	Surface du sinus	11
5.2	Bruit de Perlin	11
6	Conclusion	12
7	Références	12

1 Introduction

Dans ce TP, nous nous proposons d'étudier et de visualiser les courbures de différentes surfaces paramétriques. Les courbures jouent un rôle crucial en géométrie différentielle, offrant des informations précieuses sur la forme locale et globale des surfaces. Plus précisément, nous nous intéressons aux courbures principales, à la courbure de Gauss et à la courbure moyenne, qui sont des indicateurs essentiels des propriétés géométriques des surfaces.

Notre objectif principal est de calculer ces courbures pour diverses surfaces paramétriques classiques telles que la sphère, le paraboloïde hyperbolique, la caténoïde, l'hélicoïde droit et la pseudo-sphère. Ces surfaces présentent des caractéristiques intéressantes en termes de courbures, et leur analyse nous permettra de mieux comprendre les propriétés géométriques associées.

En plus de ces étapes, nous allons également comparer la précision des méthodes analytiques et des méthodes basées sur les dérivées discrètes approchées pour le calcul des courbures. Cette comparaison nous permettra de vérifier l'efficacité et la précision des approches discrètes par rapport aux solutions analytiques, surtout pour des surfaces complexes ou irrégulières.

2 Implémentation de la méthode analytique pour le calcul des courbures

Dans cette partie, nous allons calculer les courbures principales et en déduire la courbure de Gauss et la courbure moyenne de nos différentes surfaces de manière analytique.

En effet, nous calculons au préalable l'expression analytique de nos courbures afin de les implémenter dans le code. Pour cela, nous allons détailler les calculs des courbures de la caténoïde afin de montrer la méthode pour déterminer analytiquement l'expression de ces différents types de courbures.

2.1 Calcul des 3 courbures caractéristiques pour une caténoïde

La caténoïde est paramétrée comme suit :

$$\vec{S}(u, v) = (a \cosh(u) \cos(v), a \cosh(u) \sin(v), au)$$

Les vecteurs tangents à la surface sont donnés en dérivant les coordonnées selon u pour \vec{S}_u et selon v pour \vec{S}_v , et on obtient donc :

$$\begin{aligned}\vec{S}_u &= (\sinh(u) \cos(v), \sinh(u) \sin(v), a) \\ \vec{S}_v &= (-a \cosh(u) \sin(v), a \cosh(u) \cos(v), 0)\end{aligned}$$

Les coefficients de première forme fondamentale est :

$$\begin{aligned}E &= \vec{S}_u \cdot \vec{S}_u = a^2 \cosh^2(u) \\ F &= \vec{S}_u \cdot \vec{S}_v = 0 \\ G &= \vec{S}_v \cdot \vec{S}_v = a^2 \cosh^2(u)\end{aligned}$$

Le vecteur normal est donné par le produit vectoriel de \vec{S}_u et \vec{S}_v qu'on normalise :

$$\vec{n} = \frac{\vec{S}_u \times \vec{S}_v}{|\vec{S}_u \times \vec{S}_v|} = (-\cos(v), -\sin(v), \tanh(u))$$

Les dérivées secondes sont :

$$\begin{aligned}\vec{S}_{uu} &= (a \cosh(u) \cos(v), a \cosh(u) \sin(v), 0) \\ \vec{S}_{uv} &= (-a \sinh(u) \sin(v), a \sinh(u) \cos(v), 0)\end{aligned}$$

$$\vec{S}_{vv} = (-a \cosh(u) \cos(v), -a \cosh(u) \sin(v), 0)$$

Les coefficients de la seconde forme fondamentale est donnée par :

$$e = \vec{n} \cdot \vec{S}_{uu} = a \cosh(u)$$

$$f = \vec{n} \cdot \vec{S}_{uv} = 0$$

$$g = \vec{n} \cdot \vec{S}_{vv} = -a \cosh(u)$$

Les courbures principales κ_1 et κ_2 sont l'inverse des valeurs propres de la matrice de Weingarten \mathbf{W} définie comme suit :

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\kappa_1 = \frac{1}{a \cosh^2(u)}$$

$$\kappa_2 = -\frac{1}{a \cosh^2(u)}$$

La courbure de Gauss est le produit des valeurs propres de \mathbf{W} :

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = -\frac{1}{a^2 \cosh^4(u)}$$

La courbure moyenne est la moyennes des courbures principales :

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{eG + gE - 2fF}{EG - F^2} \right) = 0$$

En résumé, pour une caténoïde : La courbure de Gauss K est $-\frac{1}{a^2 \cosh^4(u)}$ La courbure moyenne H est 0

2.2 Choix la colormap

Une fois nos courbures calculées, nous souhaitons les mettre en valeur. Pour cela, nous utilisons une colormap qui permet notamment de situer les zéros ou les faibles valeurs pour les surfaces développables et minimales.

Nous implémentons ici 2 colormaps.



Notons qu'il est nécessaire de normaliser nos valeurs de courbures :

$$Courbure_{normalisée} = \frac{Courbure - Courbure_{min}}{Courbure_{max} - Courbure_{min}}$$

Voici un exemple d'utilisation :

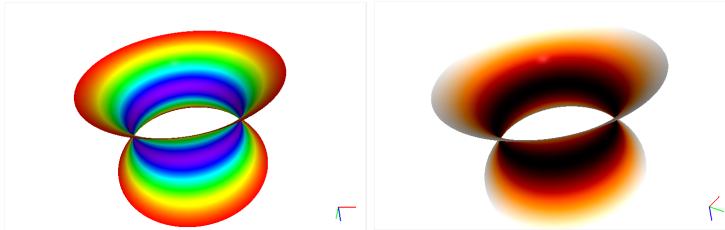


Figure 1: Courbure de gauss pour une caténoïde

Dans la suite, nous utiliserons uniquement la colormap n°1.

2.3 Structure principale du code

Concernant notre code, nous avons opté pour une structure garantissant une simple utilisation.

Dans le fichier SCENE.CPP, nous implémentons chaque type de surface dans une fonction à part. De plus, la plupart de ces fonctions dispose de deux modes de fonctionnement [analytique ou discret] ; selon si l'argument c_{curves} soit true ou false.

Avec cela, une méthode nommée *color_scene* vient effectuer l'affichage de la courbure.

En effet, elle prend en paramètre une chaîne de caractère, [”K”, ”H”, ”R1”, ”R2”] correspondant à [Gauss, moyenne, courbure principale 1, courbure principale 2] et un booléen qui permet de sélectionner la colormap n°1 ou n°2.

Ainsi, la seule méthode à modifier est *build_surface*. On y intègre la fonction calculant notre surface en choisissant son mode de fonctionnement s'il y en a deux et on appelle la méthode *color_scene* qui vient dessiner cette dernière.

2.4 Analyse et résultats

	Courbure de Gauss	Courbure moyenne	R1	R2
Sphère				
Ellipsoïde				
Caténoïde				
Paraboloïde hyperbolique				
Hélicoïde droit				
Pseudo-sphère				

Table 1: Tableau des courbures et des rayons principaux pour différentes surfaces

Surface	Commentaires
Sphère	<p>L'image obtenue montre une sphère uniformément colorée en rouge, ce qui indique une distribution uniforme des courbures. Pour une sphère parfaite, les courbures principales et les courbures de Gauss et moyenne sont constantes en tout point de la surface.</p> <p>Les courbures principales sont égales et positives, et la courbure de Gauss est positive et uniforme, tandis que la courbure moyenne est également constante. La couleur uniforme sur la sphère confirme ces propriétés géométriques attendues, démontrant que les calculs des courbures sont corrects pour cette surface.</p>
Ellipsoïde	<p>Les variations de la courbure moyenne sur l'ellipsoïde sont régulières et symétriques le long des axes principaux.</p> <p>Cette symétrie se manifeste par des bandes de couleurs continues, montrant des changements de courbure uniformes avec des valeurs maximales aux extrémités et minimales aux points d'intersection des axes.</p> <p>Pour les courbures principales, les images montrent une répartition régulière et attendue des courbures principales pour une ellipsoïde. On observe une transition douce des couleurs, indiquant une variation graduelle des courbures principales, ce qui est cohérent avec les propriétés géométriques de l'ellipsoïde.</p>
Caténoïde	<p>La courbure de Gauss varie le long de la surface, passant par des valeurs négatives, ce qui est visible par les bandes de couleurs allant du bleu au rouge. Cela reflète la nature hyperbolique de la caténoïde, avec une courbure gaussienne négative qu'on observe avec la couleur bleu.</p> <p>La caténoïde est une surface de courbure moyenne nulle, ce qui est confirmé par l'image uniforme en rouge. Cela indique que la courbure moyenne est constante et égale à zéro sur toute la surface. Une surface est minimale si sa courbure moyenne est nulle partout. Les surfaces minimales ont une courbure gaussienne négative. La caténoïde est une surface minimale.</p> <p>Les deux courbures principales de la caténoïde montrent des variations opposées en raison de leurs signes opposés ce qui entraîne des bandes de couleur inversées.</p>

Table 2: Commentaires pour chaque surface

Paraboloïde hyperbolique	Résultats cohérents. Pour la courbure de Gauss, par exemple, on observe une couleur bleue dans la zone concave et aux extrémités une couleur rouge où la zone devient convexe.
Hélicoïde droit	Nous n'avons pas les formules analytiques exactes de l'hélicoïde droit, nous utiliserons donc la méthode discrète pour comparer les résultats.

Table 3: Commentaires pour la surface du sinus

3 Implémentation de la méthode des dérivées discrètes pour le calcul des courbures

Maintenant, nous remarquons que la méthode analytique est très précise mais n'est pas toujours possible. Pour une surface quelconque, on souhaite tout de même calculer les courbures associées.

Nous implémentons donc ici une dérivée discrète s'obtenant par différences finies.

3.1 Explication de la méthode

Les dérivées discrètes sont des approximations des dérivées continues et sont couramment utilisées en analyse numérique et en traitement des signaux. Elles permettent d'estimer la variation d'une fonction discrète en fonction de ses valeurs aux points adjacents.

Dérivées Premières Discrètes :

Pour une fonction discrète f définie sur une grille de points x_i avec un pas h , la dérivée première discrète peut être approximée de différentes manières.

La différence finie avancée utilise la valeur du point courant et du point suivant :

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} \quad (1)$$

La différence finie centrée utilise les valeurs des points adjacents :

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} \quad (2)$$

Conditions aux Bords : Pour traiter les bords de la grille, on peut utiliser les différences finies avancées et retardées :

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h} \quad (3)$$

$$f'(x_{N-1}) \approx \frac{f(x_{N-1}) - f(x_{N-2})}{h} \quad (4)$$

Les dérivées secondes discrètes peuvent également être approximées en utilisant des différences finies.

La différence finie centrée pour la dérivée seconde est donnée par :

$$f''(x_i) \approx \frac{f(x_{i-1}) - 2f(x_i) + f(x_{i+1})}{h^2} \quad (5)$$

Pour les dérivées secondes aux bords, on peut utiliser des approximations unilatérales :

$$f''(x_0) \approx \frac{f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)}{h^2} \quad (6)$$

$$f''(x_{N-1}) \approx \frac{f(x_{N-3}) - 2f(x_{N-2}) + f(x_{N-1})}{h^2} \quad (7)$$

Pour une surface paramétrique définie par $\mathbf{S}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, nous pouvons calculer les dérivées discrètes par rapport aux paramètres u et v .

Les dérivées premières de la surface par rapport à u et v sont données par :

$$\mathbf{S}_u \approx \frac{\mathbf{S}(u+h, v) - \mathbf{S}(u-h, v)}{2h} \quad (8)$$

$$\mathbf{S}_v \approx \frac{\mathbf{S}(u, v+h) - \mathbf{S}(u, v-h)}{2h} \quad (9)$$

Les dérivées secondes de la surface par rapport à u et v sont données par :

$$\mathbf{S}_{uu} \approx \frac{\mathbf{S}(u-h, v) - 2\mathbf{S}(u, v) + \mathbf{S}(u+h, v)}{h^2} \quad (10)$$

$$\mathbf{S}_{vv} \approx \frac{\mathbf{S}(u, v-h) - 2\mathbf{S}(u, v) + \mathbf{S}(u, v+h)}{h^2} \quad (11)$$

La dérivée croisée est donnée par :

$$\mathbf{S}_{uv} \approx \frac{\mathbf{S}(u+h, v+h) - \mathbf{S}(u+h, v-h) - \mathbf{S}(u-h, v+h) + \mathbf{S}(u-h, v-h)}{4h^2} \quad (12)$$

Maintenant, nous pouvons calculer les courbures de n'importe qu'elle surface avec la méthode utilisée précédemment pour la caténoïde.

	Courbure de Gauss	Courbure moyenne	R1	R2
Sphère				
Ellipsoïde				
Caténoïde				
Paraboloïde hyperbolique				
Hélicoïde droit				
Pseudo-sphère				

Table 4: Tableau des courbures et des rayons principaux pour différentes surfaces

3.2 Analyse et Résultats

Surface	Commentaires
Sphère	Les résultats semblent cohérents avec ceux obtenus analytiquement. De plus, les courbures principales sont égales, ce qui est observé dans l'allure de R_1 et R_2 .
Ellipsoïde	Les résultats de la courbure de Gauss et de la courbure moyenne sont cohérents avec ceux obtenus analytiquement. En revanche, les images des courbures principales présentent des anomalies visibles le long des lignes diagonales, indiquant des artefacts numériques dus aux approximations discrètes. Cela montre que la méthode discrète n'est pas aussi précise pour capturer les variations de courbure sur des surfaces lisses et régulières comme l'ellipsoïde.
Caténoïde	On pourrait penser que le résultat est cohérent, mais il ne l'est pas. En effet, ici, ce qui est important de souligner, ce sont les valeurs min et max de la courbure qui sont très proches. Donc, la courbure est constante, ce qui n'est pas cohérent avec la formule analytique.
Paraboloïde hyperbolique	Les résultats ne sont pas du tout cohérents en raison du fait que la surface présente des courbures opposées le long de ses deux axes principaux, ce qui peut créer des variations rapides de courbure et des points de singularité. Cela entraîne alors des erreurs de calcul.
Hélicoïde droit	La méthode discrète nous a permis d'obtenir les courbes principales que nous n'avions pas de façon analytique.
Pseudo-sphère	Les résultats sont plus ou moins cohérents. En effet le calcul pour la courbure moyenne semble légèrement imprécis

Table 5: Commentaires pour chaque surface

4 Comparaison des 2 méthodes

Les méthodes analytiques de calcul des courbures offrent une précision élevée mais peuvent être compliquées à mettre en œuvre pour des surfaces complexes. En revanche, les méthodes discrètes permettent une généralisation mais peuvent introduire des erreurs dues aux approximations numériques. Les surfaces avec des variations rapides de courbure ou des singularités, comme les sinusoïdes et les surfaces gaussiennes, mettent en évidence les limites des approches discrètes, car les approximations peuvent ne pas capturer fidèlement les changements brusques ou les points de singularité.

C'est ce qu'on observe sur la paraboloïde hyperbolique par exemple. Cette surface présente des courbures opposées le long de ses deux axes principaux, ce qui peut créer des variations rapides de courbure et des points de singularité.

5 Résultats pour d'autres types de surface

On va maintenant s'intéresser à d'autres surfaces.

5.1 Surface du sinus

La surface du sinus peut être définie par les équations suivantes :

$$\begin{aligned}x &= \sin(u) \\y &= \sin(v) \\z &= \sin(u + v)\end{aligned}$$

où u et v sont des paramètres qui définissent la position sur la surface.

Les équations ci-dessus décrivent comment les coordonnées x , y et z varient en fonction des paramètres u et v . Lorsque les valeurs de u et v changent, les points sur la surface se déplacent le long des courbes sinusoïdales dans l'espace tridimensionnel.

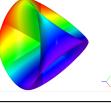
	Courbure de Gauss	Courbure moyenne	R1	R2
Surface du sinus				

Table 6: Tableau des courbures et des rayons principaux pour la surface du sinus

Surface	Commentaires
Surface du sinus	<p>Pour cette surface sinusoïdale, on observe des variations régulières et périodiques des courbures, ce qui est cohérent avec la nature ondulatoire de la sinusoïde.</p> <p>Ces variations périodiques sont visualisées sous forme de bandes alternées sur les cartes de courbure de Gauss et de courbure moyenne</p>

Table 7: Commentaires pour la surface du sinus

5.2 Bruit de Perlin

Le bruit de Perlin est une méthode pour générer des valeurs aléatoires lisses et cohérentes, souvent utilisée en graphisme pour créer des textures réalistes. Imaginons-le comme une sorte de "nuage de points" dans un espace bidimensionnel, où chaque point a une valeur de "hauteur".

$$\begin{aligned}B(s, t) &= \text{La hauteur du point à la position } (s, t) \\&= \text{Combinaison de valeurs de hauteur voisines}\end{aligned}$$

Pour calculer la hauteur d'un point (s, t) , nous regardons les points voisins les plus proches, chacun ayant sa propre hauteur représentée par \mathbf{g}_{ij} . Ensuite, nous combinons ces hauteurs pondérées par des fonctions $\omega_{ij}(s, t)$ qui dépendent de la distance entre (s, t) et les points voisins.

$$B(s, t) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \omega_{ij}(s, t) \cdot \mathbf{g}_{ij}$$

Ainsi, la hauteur d'un point est une combinaison lisse des hauteurs de ses voisins, donnant une apparence de continuité et de cohérence. Cela permet de générer des textures naturelles, telles que des paysages ou des motifs organiques, dans les graphiques générés par ordinateur.

	Courbure de Gauss	Courbure moyenne	R1	R2
Surface de Perlin				

Table 8: Tableau des courbures et des rayons principaux pour la surface de Perlin

Surface	Commentaires
Surface de Perlin	On s'attend à voir des zones de courbure positive (convexe) et négative (concave) distribuées de manière aléatoire sur toute la surface, reflétant les propriétés aléatoires du bruit de Perlin mais ce n'est pas vraiment le cas ici

Table 9: Commentaires pour la surface de Perlin

6 Conclusion

En définitive, ce TP sur la modélisation en géométrie différentielle nous a ouvert de nouvelles perspectives sur le contenu du cours. En explorant les propriétés des surfaces paramétriques à travers des méthodes analytiques et numériques, nous avons approfondi notre compréhension des concepts fondamentaux et le tout de manière plutôt ludique.

7 Références

References

- [1] Math Curve, *Caractéristiques de différentes surfaces*
- [2] Choix de la colormap, github/kibini