Mouvement de Kepler

SINGARIN-SOLE | BELGUIDOUM

Sommaire

Troisième loi de Kepler

Démonstration :

Force gravitationnelle : $F = \dfrac{GMm}{r^2}$

Force centripète : $F = \dfrac{mv^2}{r}$

Équilibre entre les forces : $\dfrac{mv^2}{r} = \dfrac{GMm}{r^2}$

Lien entre la vitesse orbitale et le demi-grand axe : $v = \dfrac{2\pi a}{T}$

$$\Rightarrow \left(\frac{2\pi a}{T}\right)^2 = \frac{GM}{r}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2\pi a}{T}\right)^2 = \frac{GM}{a}$$

$$\Rightarrow a^3 = \frac{GMT^2}{4\pi^2}$$

$$\Rightarrow \frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

Présentation du problème

On souhaite résoudre ces 2 équations différentielles non linéaires d'ordre 2 qui modélisent la trajectoire d’un astre orbitant autour d’une étoile afin de mettre en évidence la 3ème loi de Kepler :

$$\begin{cases} x''(t) + \mathcal{G}M \dfrac{x(t)}{[x(t)^2 + y(t)^2]^{3/2}} = 0 \\ \\ y''(t) + \mathcal{G}M \dfrac{y(t)}{[x(t)^2 + y(t)^2]^{3/2}} = 0 \end{cases}$$

Méthode Euler explicite

Principe de cette méthode :

$$\begin{cases} \text{Condition initiale : } y(t=0) = y_0 \\ \text{Equation différentielle : } \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(t,y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(t=0) = y_0 \\ y_1 = y_0 + f(t_0,y_0) \times \mathrm{d}t \\ y_2 = y_1 + f(t_1,y_1) \times \mathrm{d}t \\ \cdot \;\cdot\; \cdot \\ y_{n+1} = y_n + f(t_n,y_n) \times \mathrm{d}t \end{cases}$$

Cela signifie que l'on évalue la valeur de la fonction y à l'instant n + 1 en calculant la pente de celle-ci (dy/dt) à l'instant n.

Démarche adoptée dans le cas de nœtre problème

Afin de résoudre notre problème, on effectue le changement de variable :

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = v_x \\ \dfrac{dy}{dt} = v_y \end{array} \right.$$

Donc :

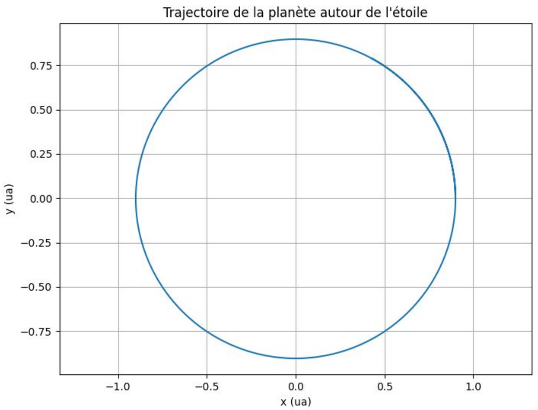
$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{dv_x}{dt} = -\dfrac{Gx}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\ \dfrac{dv_y}{dt} = -\dfrac{Gy}{(x^2+y^2)^{3/2}} \end{array} \right.$$

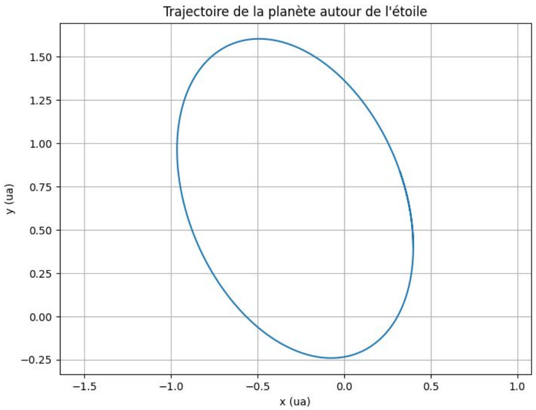
On peut maintenant appliquer simultanément la méthode d'Euler sur les équations :

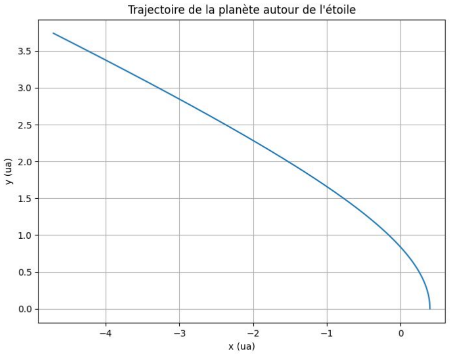
$$\left| \begin{array}{l} x_{n+1} = x_n + v_{x_n} \cdot \Delta t \\ y_{n+1} = y_n + v_{y_n} \cdot \Delta t \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} v_{x_{n+1}} = v_{x_n} - \left(\dfrac{G \cdot x_n}{(x_n^2 + y_n^2)^{3/2}} \right) \cdot \Delta t \\ v_{y_{n+1}} = v_{y_n} - \left(\dfrac{G \cdot y_n}{(x_n^2 + y_n^2)^{3/2}} \right) \cdot \Delta t \end{array} \right.$$

Résultats







Dans le cas y[0] = 0

	vitesse
Trajectoire circulaire	$v_y = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M}{r}}$
Trajectoire elliptique	$v_y < \sqrt{(2GM/r)}$
Trajectoire hyperbolique	$v_y > \sqrt{(2GM/r)}$ $v_y < \sqrt{\frac{\mathcal{G}M}{r}}$

Méthode Runge-Kutta d'ordre 2

Principe :

On réalise une moyenne pondérée des pentes de la solution aux points t_n et $t_n + h/2$ß

Calcul des pentes initiales

- $k1x = v_x$
- $k1y = v_y$
- $k1vx = -\frac{GMx}{(x^2+y^2)^{3/2}}$
- $k1vy = -\frac{GMy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

Estimation au point du milieu

- $x_{\text{mid}} = x + \frac{\Delta t}{2} k1x$
- $y_{\text{mid}} = y + \frac{\Delta t}{2} k1y$
- $vx_{\text{mid}} = vx + \frac{\Delta t}{2} k1vx$
- $vy_{\text{mid}} = vy + \frac{\Delta t}{2} k1vy$

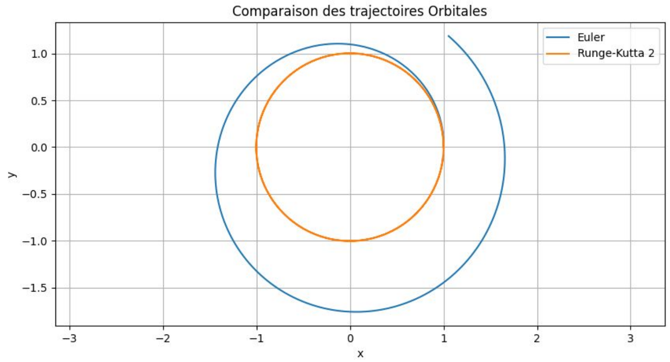
Pente du milieu

- $k2x = vx_{\text{mid}}$
- $k2y = vy_{\text{mid}}$
- $k2vx = -\frac{GMx_{\text{mid}}}{(x_{\text{mid}}^2+y_{\text{mid}}^2)^{3/2}}$
- $k2vy = -\frac{GMy_{\text{mid}}}{(x_{\text{mid}}^2+y_{\text{mid}}^2)^{3/2}}$

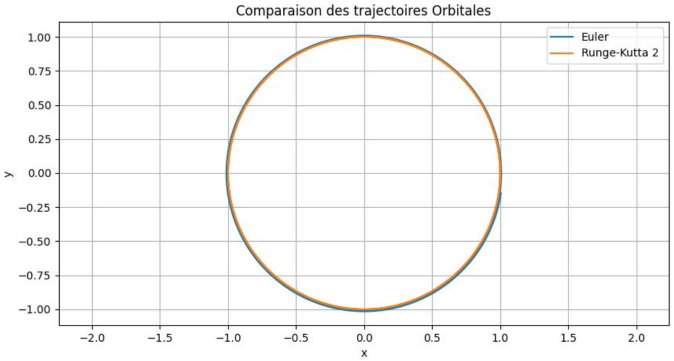
Mise à jour des variables

- $x(t+\Delta t) = x + \Delta t \cdot k2x$
- $y(t+\Delta t) = y + \Delta t \cdot k2y$
- $vx(t+\Delta t) = vx + \Delta t \cdot k2vx$
- $vy(t+\Delta t) = vy + \Delta t \cdot k2vy$

Comparaison avec Euler explicite



dt = 0,01



dt = 0.0001

<u>Euler :</u> Chaque pas dt, une erreur de l'ordre de O(dt^2). Donc erreur globale O(dt).

<u>Runge-kutta :</u> erreur global O(dt^2).

<u>Conclusion :</u> RK2 intrinsèquement plus précis

Méthode de Verlet

La méthode de Verlet est basée sur une approximation de la dérivée seconde d’une fonction à un instant t en utilisant les valeurs de la fonction à t, t − Δt et t + Δt.

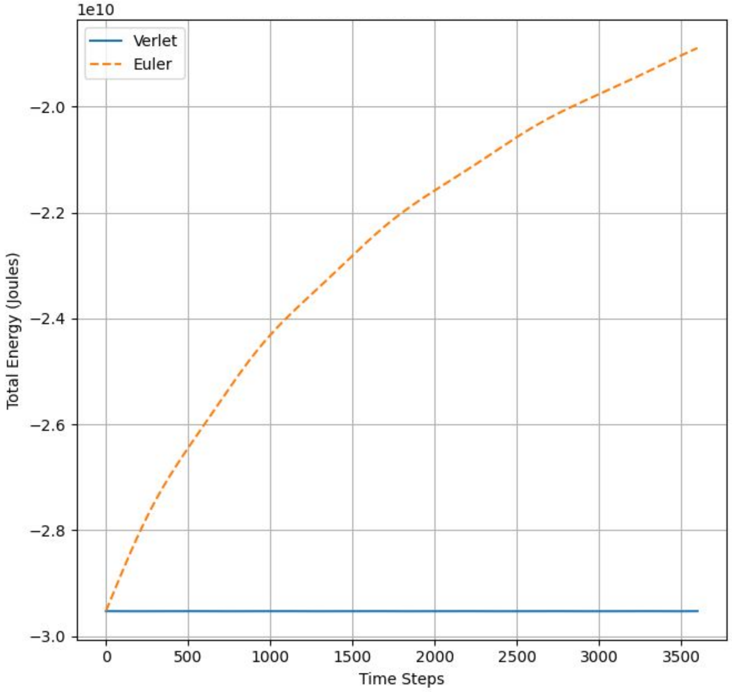
Ainsi, avec les mêmes notations que précédemment :

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n - x_{n-1} + \left(\dfrac{Gx_n}{(x_n^2 + y_n^2)^{3/2}}\right) \cdot \Delta t^2 \\ y_{n+1} = 2y_n - y_{n-1} + \left(\dfrac{Gy_n}{(x_n^2 + y_n^2)^{3/2}}\right) \cdot \Delta t^2 \end{cases}$$

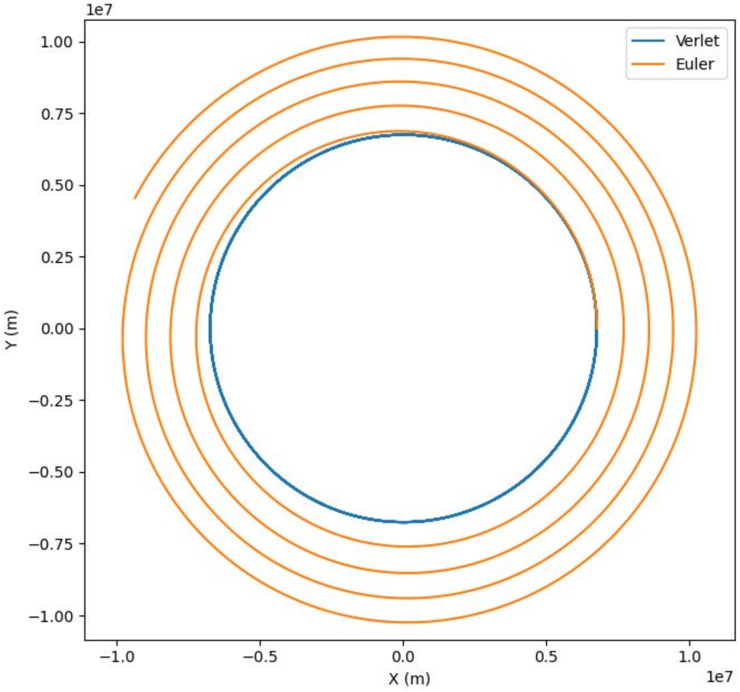
$$\begin{cases} v_{x_{n+1}} = \dfrac{x_{n+1} - x_{n-1}}{2\Delta t} \\ v_{y_{n+1}} = \dfrac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2\Delta t} \end{cases}$$

Comparaison avec les autres méthodes

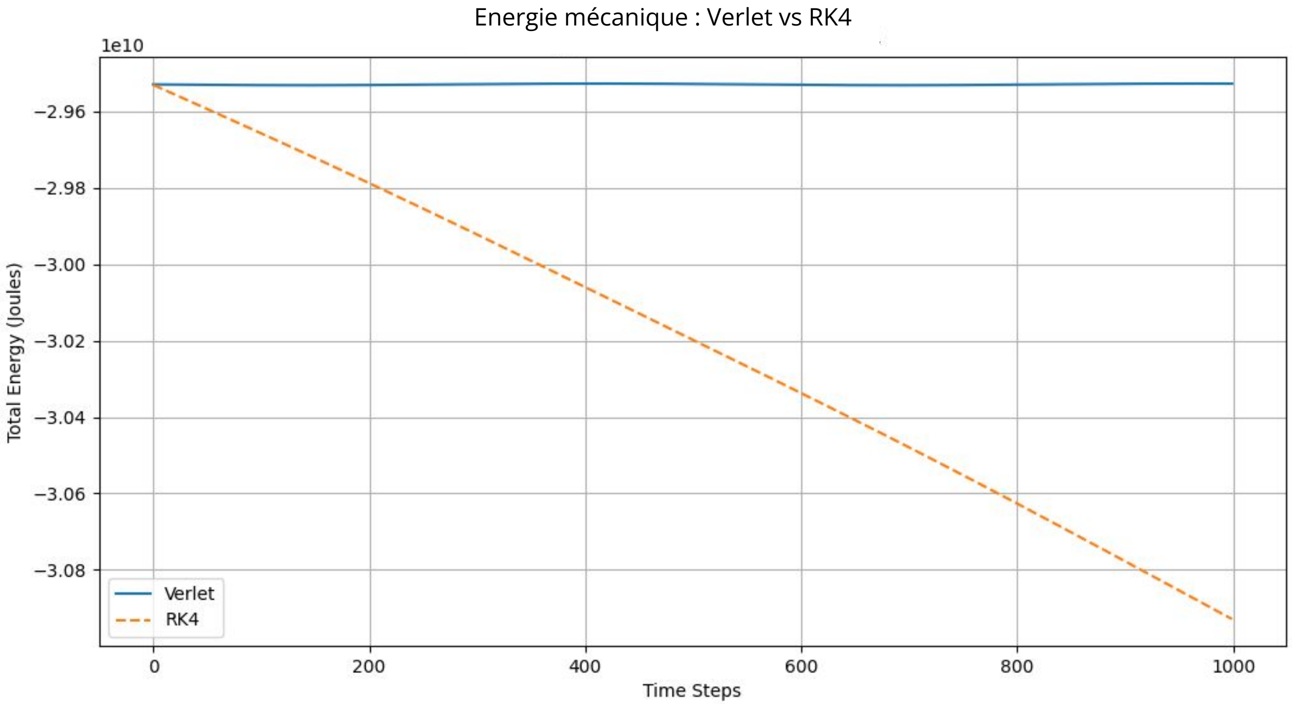
Energie mécanique



Trajectoire de l'orbite

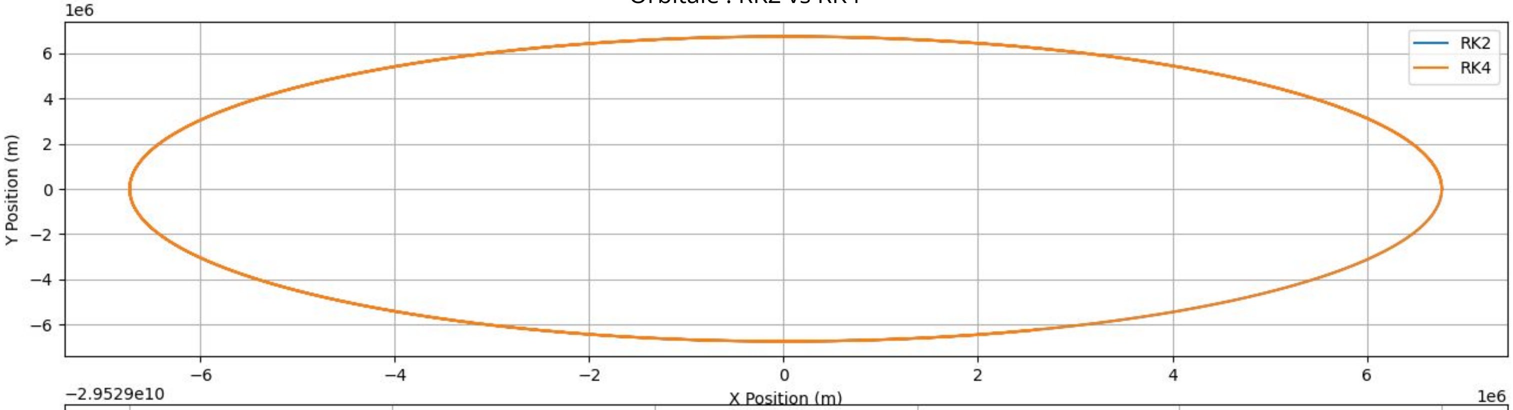


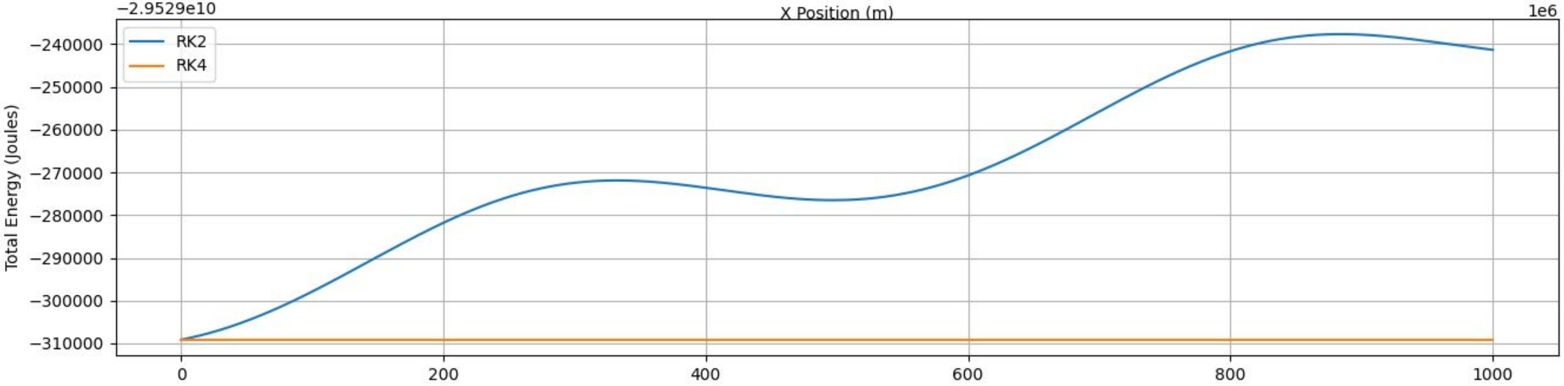
Comparaison avec les autres méthodes



Comparaison avec les autres méthodes

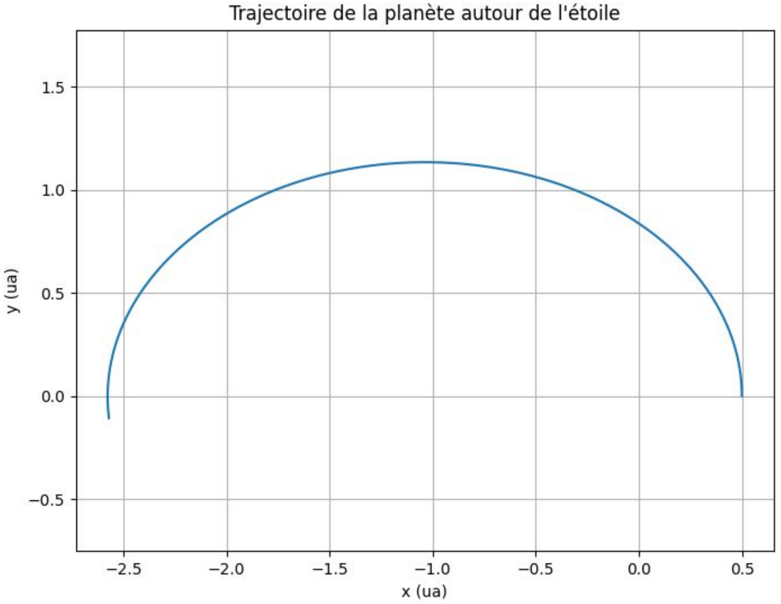
Orbitale : RK2 vs RK4



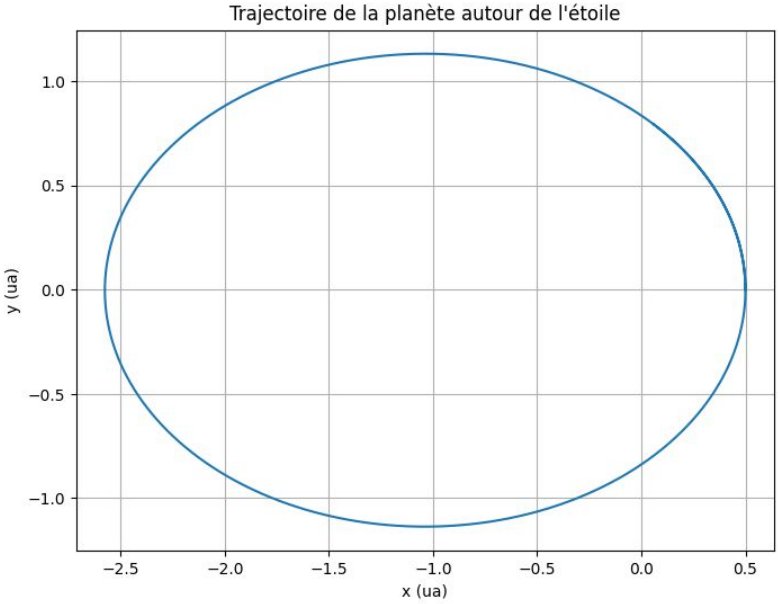


Energie mécanique : RK2 vs RK4

Influence du paramètre T



T = 1



T = 2

Conclusion

	Précision	Simplicité	Accumulation d’erreurs	Conservation de l’énergie
Euler	_	+++	_ _	_ _
RK2	+	++	+	_
RK4	++	+	++	+
Verlet	++	_	++	+++