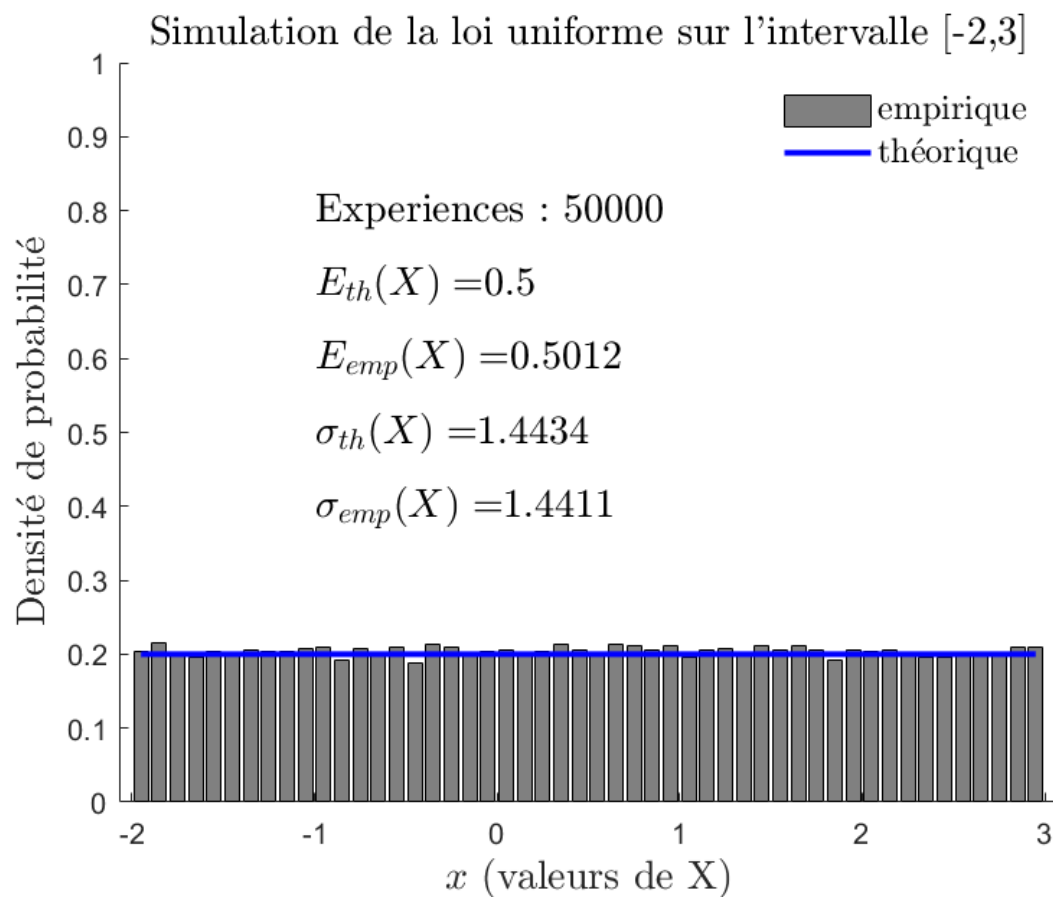


**Exercice 1**

On considère une variable aléatoire continue  $X$  suivant la loi uniforme sur l'intervalle  $[a; b]$  avec  $a = -2$  et  $b = 3$ . On souhaite faire une simulation numérique de cette loi à l'aide de Matlab. Ecrire le code Matlab qui permet de :

- simuler la loi de probabilité de  $X$
- afficher, sur un même graphique, son histogramme empirique et la densité de probabilité théorique (cf. figure ci-dessous)
- calculer et afficher les moyennes (empirique et théorique)
- calculer et afficher les écarts types (empirique et théorique)
- 

**Attention** : votre programme doit être générique de sorte à rester valable lorsqu'on change les valeurs de  $N, a$  et  $b$ .



## Exercice 2 : Simulation de lois continues par la méthode d'inversion

Nous avons vu (et démontré) en cours le théorème suivant :

Soit  $X$  une variable aléatoire continue de fonction de répartition  $F_X$ . Alors la variable aléatoire  $Y$  définie par  $Y = F_X(X)$  suit la loi uniforme sur  $[0, 1]$ .

Ainsi, quelle que soit la loi de probabilité, lorsqu'on transforme une variable aléatoire  $X$  par sa propre fonction de répartition  $F_X$ , on obtient une variable aléatoire  $Y$  qui suit la loi uniforme sur  $[0, 1]$ . Donc toute variable aléatoire  $X$  peut être simulée à partir d'une autre variable aléatoire  $Y$  distribuée de façon uniforme sur  $[0, 1]$  par la formule :

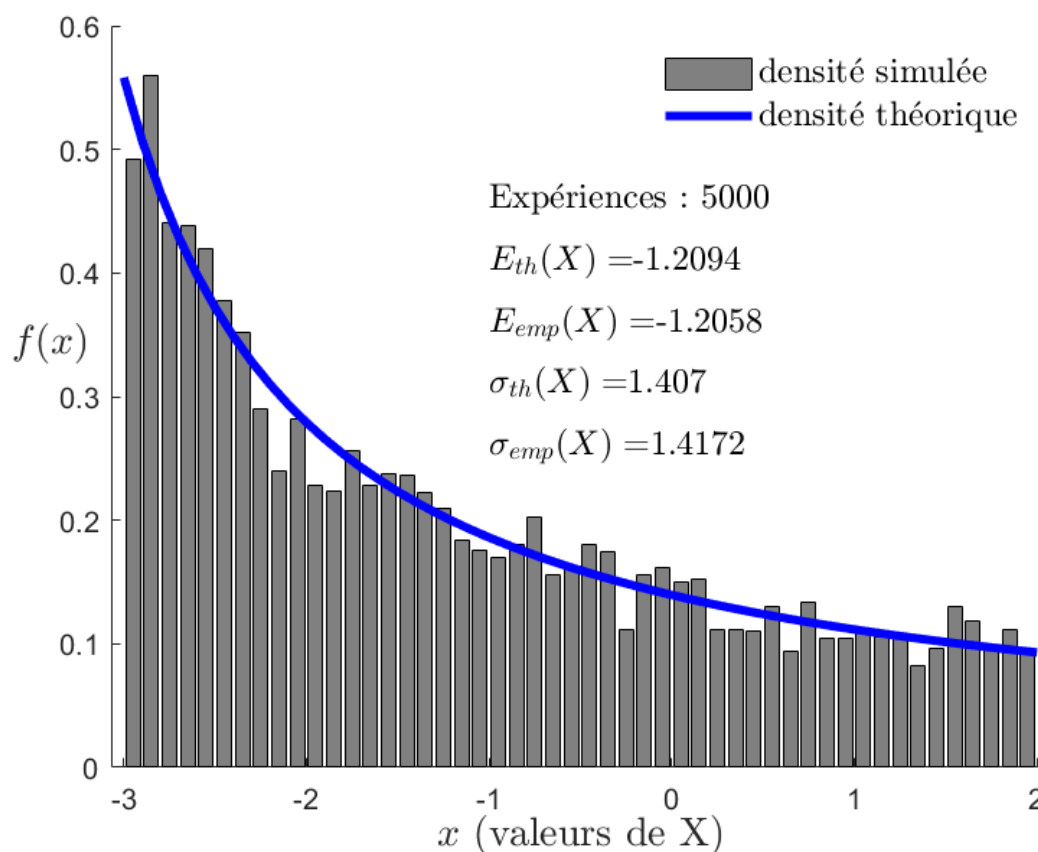
$$X = F_X^{-1}(Y)$$

1) On considère la variable aléatoire  $X$  de densité de probabilité :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x+4}, & -3 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

En vous aidant des résultats obtenus à l'exercice 5 du chapitre I du cours de probabilités continues, écrire un programme Matlab permettant de :

- simuler la loi de  $X$  à l'aide de la méthode d'inversion (on prendra un échantillon de taille  $n = 5000$  dans un premier temps puis on augmentera cette valeur pour affiner les résultats).
- tracer, à l'aide de Matlab et sur un même graphique :
  - l'histogramme de la « densité » correspondant à la loi simulée
  - la courbe de la densité théorique.
- ajouter dans le graphique précédent les valeurs empiriques (commandes `mean` et `std`) et théoriques de l'espérance mathématique et de l'écart type de  $X$  (voir figure ci-dessous).



2) Faire une simulation de la loi de probabilité continue définie par la densité :

$$f_X(x) = \frac{1}{4} \begin{cases} x, & x \in [0, 2[ \\ 4 - x, & x \in [2, 4[ \end{cases}$$

Se reporter à la section 2 du chapitre I du cours de probabilités continues dans laquelle cette loi a été entièrement étudiée. Attention, vous constaterez que l'expression de la fonction de répartition est différente selon que  $x \in [0, 2[$  ou  $x \in [2, 4[$ .

Quelques indications sur le programme Matlab :

```
clear variables; close all;
n=100000; % nombre d'expériences
Y1= % VA uniforme sur [0,1/2]
Y2= % VA uniforme sur [1/2,1]
X1= % simulation de la VA X sur [0,2[
X2= % simulation de la VA X sur [2,4[
X= % concaténation des VA X1 et X2
% histogramme de X
mu_emp= % moyenne empirique
sigma_emp= % écart type empirique
mu_th= % moyenne théorique
sigma_th= % écart type théorique
fprintf('Moyenne empirique : %f,\t Moyenne théorique : %f\n',mu_emp,mu_th);
fprintf('Ecart type empirique : %f,\t Ecart type théorique : %f\n',sigma_emp,sigma_th);
```

L'exécution de votre programme doit donner :

```
Moyenne empirique : 2.000004, Moyenne théorique : 2.000000
Ecart type empirique : 0.817743, Ecart type théorique : 0.816497
```

