CPE Lyon 4ETI 2023-2024

Probabilités discrètes : TP3

Exercice 1 : Bombardements et simulation de la loi de Poisson (Siméon-Denis Poisson : 1781-1840)

Pendant la seconde guerre mondiale le sud de Londres a été bombardé de 537 impacts de bombes. L'Etat Major se pose alors la question : ces impacts sont-ils le fruit du hasard ? ou certaines zones sont-elles spécifiquement visées ? Pour le savoir, on peut découper la surface bombardée en N zones (cases) de même aire et on compte le nombre de surfaces ayant reçu 0 impact, 1 impact, 2 impacts, etc …, on affiche alors l'histogramme représentant le nombre de cases en fonction du nombre d'impacts. Si l'histogramme obtenu est proche de celui d'une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 537/N$ (nombre moyen d'impacts par zone) alors cela signifie que les bombardements ont été faits au hasard.

Objectif : simuler avec Matlab un bombardement aléatoire de 537 impacts sur une surface carrée contenant $24 \times 24 = 576$ cases.

Indications :

a) création de la zone de bombardements : copier le code suivant

```
n_cases=24;
cx=[0:n_cases];
cy=[0:n_cases];
[CX,CY]=meshgrid(cx,cy);
mesh(CX,CY,zeros(n_cases+1,n_cases+1));
```

b) Bombardements :

- initialiser à zéros une matrice M (matrice des impacts) de dimensions `n_cases` × `n_cases`.
- dans une boucle `for` allant de 1 à `n_impacts`=537 générer deux nombres aléatoires représentant les coordonnées du point d'impact et incrémenter le nombre d'impacts dans la matrice des impacts `M`.
- après la boucle `for`, taper `M=M(:)` et commenter le résultat obtenu.
- afficher alors l'histogramme (commande `histogram`) représentant le nombre de cases en fonction du nombre d'impacts (voir Fig. 1, histogramme bleu).
- afficher les impacts (commande `plot`) dans la zone de bombardements (voir Fig. 2).

c) Comparaison avec la loi de Poisson théorique :

- afficher l'histogramme théorique de la loi de Poisson (commande `bar`) dont le paramètre est égal au nombre moyen d'impacts par case (voir Fig. 1, histogramme vert).
- commenter le résultat.
- donner l'écart type de la loi théorique.
- vérifier alors que l'écart type empirique (commande `std`) est proche de celui de la loi théorique.

d) Modifier votre code pour faire en sorte que les points d'impact ne soient plus tout à fait le fruit du hasard puis commenter le résultat obtenu.

Attention à ne pas se tromper dans l'interprétation de cette simulation ; nous sommes en présence ici de deux lois de probabilité : une loi uniforme et une loi de Poisson. En effet, la probabilité d'impact est partout la même (loi uniforme), mais cela a pour conséquence que la variable aléatoire qui représente le nombre d'impacts suit, elle, une loi de Poisson.

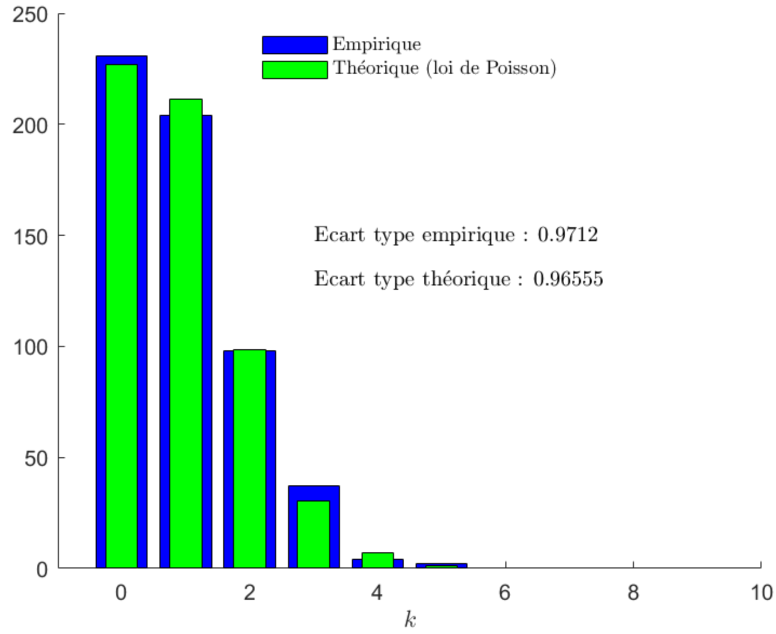

Fig. 1 : Loi de probabilité (empirique et théorique) suivi par la variable aléatoire égale au nombre d'impacts. Attention, ici l'axe des ordonnées représente des effectifs (à préciser) et non des probabilités.

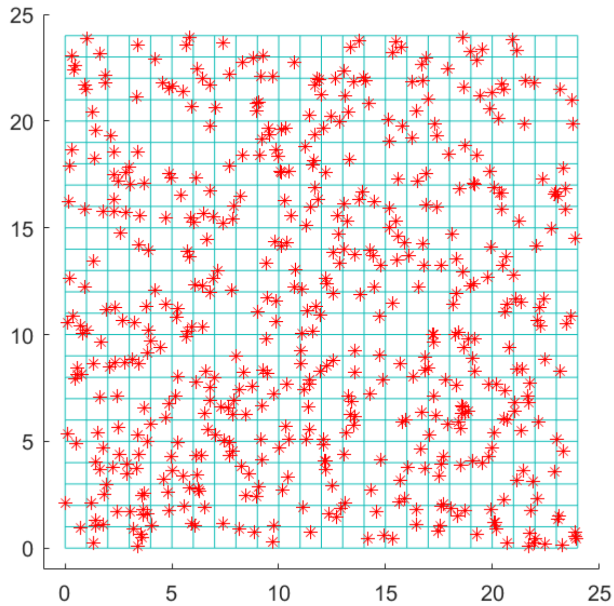

Fig. 2 : Impacts

Exercice 2

1) Soit $X \sim Geo(\lambda)$ et $Y \sim Geo(\mu)$ deux variables aléatoires indépendantes. Montrer que la variable aléatoire $Z = \min(X, Y)$ suit également une loi géométrique de paramètre p que l'on exprimera en fonction de λ et μ.
2) Vérifier ce résultat à l'aide d'une simulation Matlab. On pourra procéder de la façon suivante :
   - Simuler la loi de X, c'est-à-dire une loi géométrique de paramètre $\lambda = 0{,}3$ (par exemple), afficher son histogramme (ainsi que l'histogramme théorique, en superposition)
   - Simuler la loi de Y, c'est-à-dire une loi géométrique de paramètre $\mu = 0{,}5$ (par exemple), afficher son histogramme (ainsi que l'histogramme théorique, en superposition)
   - Simuler la loi de $Z = \min(X, Y)$, c'est-à-dire une loi géométrique de paramètre p, afficher son histogramme (ainsi que l'histogramme théorique, en superposition)
   - L'exécution de votre code doit donner :