课程编号：A073003　　北京理工大学 2012-2013 学年第一学期

线性代数 B 试题 A 卷

班级 ________ 学号 _________ 姓名 __________ 成绩 ___________

一、（10 分）已知 $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$，求行列式 $\begin{vmatrix} 0 & A^* \\ 2B & 0 \end{vmatrix}$ 的值。

二、（10 分）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，矩阵 X 满足 $AXA^{-1}=2XA^{-1}+I$，其中 I 为 3 阶单位矩阵，求 X。

三、（10 分）问 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为何值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_2+2x_3+2x_4=1 \\ -x_2+(a-3)x_3-2x_4=b \\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1 \end{cases}$$

有唯一解？无解？有无穷多解？并求出有无穷多解时的通解(用导出组的基础解系表示通解).

四、（10 分）已知

$$\alpha_1=(1,0,1,0)^T，\ \alpha_2=(1,1,1,0)^T，\ \alpha_3=(0,1,0,1)^T，\ \alpha_4=(2,1,2,-1)^T$$

(1) 求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩和一个极大无关组;

(2) 用所求的极大无关组线性表出剩余向量。

五、（10 分）已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是向量空间 $\boldsymbol{R}^3$ 的一个基, $\beta_1=2\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_1+\alpha_2,\beta_3=\alpha_3$.

(1) 证明 β_1,β_2,β_3 为 $\boldsymbol{R}^3$ 的一个基;

(2) 求基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵;

(3) 求向量 $\gamma=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ 关于基 β_1,β_2,β_3 的坐标。

六、（10 分）已知向量 $\alpha_1=(2,1,3)^T,\alpha_2=(1,1,1)^T$，求与向量 α_1,α_2 都正交的向量 α_3，并把 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 化为欧氏空间 $\boldsymbol{R}^3$ 的一个标准正交基。

七、（10 分）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，

(1) 求 A 的特征值和特征向量;

(2) 判断 A 是否可以相似对角化。

八、（10 分）已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$，其中 $A=\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$。

(1) 求一正交变换 $X=QY$，将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形;

(2) 判断二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 是否正定。

九、（10 分）已知 A, B 都是 3 阶矩阵，$A=[\alpha,\beta,\gamma], B=[\alpha,\beta,\delta]$，$|A|=2, |B|=3$，求行列式 $|A+B|$ 的值。

十、（10 分）设 A 是 3 阶矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是线性无关的 3 元列向量组，并且满足

$$A\alpha_1=2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3,\ A\alpha_2=\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3,\ A\alpha_3=-\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3$$

(1) 计算行列式 $|A+I|$ 的值；

(2) 求 A 的特征值；

(3) 求可逆矩阵 P 和对角矩阵 Λ，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$。