武汉大学 2015-2016 学年第二学期期末考试

高等数学 B2（A 卷解答）

1、（9 分）设长方体三条棱长为 $|OA|=5,|OB|=3,|OC|=4$，OM 为对角线，求 $\overline{OA}$ 在 $\overline{OM}$ 上的投影。

解 OM 与棱 OA 的夹角记作 α，又 $|OM|=\sqrt{3^2+4^2+5^2}=5\sqrt{2}$，

有 $\cos\alpha=\dfrac{|OA|}{|OM|}=\dfrac{5}{5\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　故 $\left(\overline{OA}\right)_{\overline{OM}}=\dfrac{\overline{OA}\cdot\overline{OM}}{\left|\overline{OM}\right|}=\dfrac{5}{2}\sqrt{2}$

2、（10 分）设函数 $f(u,v)$ 可微且 $f(1,1)=0$，$z=z(x,y)$ 由方程 $(x+1)z-y^2=x^2f(y,z)$ 所确定，求 $dz\big|_{(0,1)}$ 和 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{(0,1)}$。

解　当 $x=0$，$y=1$，得 $z=1$，方程两边关于 x 求导可得 $(x+1)\dfrac{\partial z}{\partial x}+z=2xf(y,z)+x^2f_v^{'}\dfrac{\partial z}{\partial x}$，（*）

代入 $x=0,y=1,z=1$ 可得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,1)}=-1$，　同理可得 $\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,1)}=2$，则 $dz\big|_{(0,1)}=-dx+2dy$，在（*）两边关于 x 再次求导可得 $(x+1)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial z}{\partial x}=2f(y,z)+4xf_v^{'}\dfrac{\partial z}{\partial x}+x^2f_{vv}^{"}(\dfrac{\partial z}{\partial x})^2+x^2f_v^{'}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，

代入 $x=0,y=1,z=1$ 可得 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{(0,1)}=2$.

3、（7 分）求函数 $u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$ 在点 $A(1,0,1)$ 处沿点 A 指向点 $B(3,-2,2)$ 方向的方向导数。

解　$\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_A=\dfrac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\Big|_A=\dfrac{1}{2}$，　$\dfrac{\partial u}{\partial y}\Big|_A=\dfrac{y}{(x+\sqrt{y^2+z^2})\sqrt{y^2+z^2}}\Big|_A=0,$

$\dfrac{\partial u}{\partial z}\Big|_A=\dfrac{z}{(x+\sqrt{y^2+z^2})\sqrt{y^2+z^2}}\Big|_A=\dfrac{1}{2},$ 而 $\overrightarrow{AB}=(2,-2,1)$ 的方向角为 $\cos\alpha=\dfrac{2}{3},$ $\cos\beta=-\dfrac{2}{3},\ \cos\gamma=\dfrac{1}{3},$ 故 $\dfrac{\partial u}{\partial\overline{AB}}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{2}$

4、（9 分）求函数 $z=2x^2+3y^2+4x-8$ 在闭域 $D{:}\,x^2+y^2\le 4$ 上的最大值和最小值。

解　由 $\begin{cases} z_x=4x+4=0 \\ z_y=6y=0 \end{cases}$，得 D 内驻点(－1，0)

且 $z(-1,0)=-10$

在边界 $x^2+y^2=4$ 上，$z_1=-x^2+4x+4\quad(-2\le x\le 2)$

$z_1'=-2x+4\ge 0\quad,z_1(-2)=-8\quad,z_1(2)=8$

比较后可知，函数 z 在点 $(-1,0)$ 处取最小值 $z(-1,0)=-10$

在点 $(2,0)$ 处取最大值 $z(2,0)=8$。

5、（9 分）设 Ω 是由 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 及 $z=0$ 所围的闭区域，试将 $\iiint\limits_{\Omega}f(x^2+y^2)dV$ 分别化成球面、柱面坐标下的三次积分式。

解　$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^1 f(r^2\sin^2\varphi)r^2\sin\varphi dr=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_0^{\sqrt{1-r^2}}f(r^2)dz$

六、（8 分）计算二重积分 $\iint_D x^2ydxdy$, 其中 D 是由双曲线 $x^2-y^2=1$ 及直线 $y=0,y=1$ 所围成的平面区域。

解：原式 $=\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1+y^2}}^{\sqrt{1+y^2}}x^2ydx=\frac{2}{3}\int_0^1 y(1+y^2)^{\frac{3}{2}}dy=\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}(1+y^2)^{\frac{5}{2}}\Big|_0^1=\frac{2}{15}(4\sqrt{2}-1)$

七、（10 分）将函数 $f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le h,\\ 0, & h<x\le\pi,\end{cases}$ 分别展开成正弦级数和余弦级数。

解：为求正弦级数，对函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上进行奇延拓，则 $a_n=0,$

$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{2}{\pi}[\int_0^h\sin nxdx+\int_h^{\pi}0\cdot\sin nxdx]=\frac{2}{n\pi}-\frac{2\cos nh}{n\pi}$,

所以 $f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos nh}{n}\sin nx, x\in(0,h)\cup(h,\pi)$， $x=0,h$ 时级数收敛于 0 及 $\frac{1}{2}$， $x=\pi$ 时级数收敛于 0.

为求余弦级数，对函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上进行偶延拓，则 $b_n=0,\ \ a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{2h}{\pi}$,

$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}[\int_0^h\cos nxdx+\int_h^{\pi}0\cdot\cos nxdx]=\frac{2}{n\pi}\sin nh$,

所以 $f(x)=\frac{h}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nh}{n}\cos nx, x\in[0,h)\cup(h,\pi]$， $x=h$ 时级数收敛于 $\frac{1}{2}$ 。

八、（9 分）求曲线 $\begin{cases}y^2+z^2=20\\ -2x^2-2y^2+z^2=-10\end{cases}$ 在点 $(-3,2,4)$ 处的切线及法平面方程。

解　由 $\begin{cases}2yy'+2zz'=0\\ -4x-4yy'+2zz'=0\end{cases}$ 代入点 $(-3,2,4)$　解得 $y'\big|_{(-3,2,4)}=1$　　$,z'\big|_{(-3,2,4)}=-\frac{1}{2}$

对应的切线方向向量　　$\vec{S}=\left\{1,1,-\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{2}\{2,2,-1\}$

切线方程为　　$\frac{x+3}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-4}{-1}$

法平面方程为　$2(x+3)+2(y-2)-(z-4)=0$　或　$2x+2y-z+6=0$

九、（7 分）计算曲面积分 $I=\iint_S(y^2-z)dydz+(z^2-x)dzdx+(x^2-y)dxdy$，其中 S 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(0\le z\le h)$ 的外侧。

解　由 Gauss 公式，补 $S_1:z=h(x^2+y^2\le h^2)$，方向取上侧，

$\oiint_{S+S_1}(y^2-z)dydz+(z^2-x)dzdx+(x^2-y)dxdy=0$，所以

$$I=-\iint_{S_1}(y^2-z)dydz+(z^2-x)dzdx+(x^2-y)dxdy=-\iint_{S_1}(x^2-y)dxdy$$

$$=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^h(r^2\cos^2\theta-r\sin\theta)rdr=-\frac{\pi}{4}h^4$$

十、（7 分）试求函数 $f(x)=\arctan x$ 在点 $x_0=0$ 的泰勒级数展开式，并求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{3}{4}\right)^n$ 之值。

解　由于　$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\qquad x\in(-1,\ 1)$$

所以　$$f(x)=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\qquad x\in[-1,\ 1]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{3}{4}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}=-\frac{\sqrt{3}}{2}f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

十一、（9 分）求二元可微函数 $\varphi(x,y)$，满足 $\varphi(0,1)=1$，并使曲线积分
$I_1=\int_L(3xy^2+x^3)dx+\varphi(x,y)dy$ 及 $I_2=\int_L\varphi(x,y)dx+(3xy^2+x^3)dy$ 都与积分路径无关。

解　由I_1与积分路径无关，得　$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=6xy$,得$\varphi(x,y)=3x^2y+C(y)$.

又由 I_2 与积分路径无关，得　$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=3x^2+C'(y)=3y^2+3x^2$,　得 $C(y)=y^3+C_1$.

故$\varphi(x,y)=3x^2y+y^3+C_1$.由$\varphi(0,1)=1$,知$C_1=0$.故$\varphi(x,y)=3x^2y+y^3$.

12、（6 分）若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(a_n>0)$ 收敛，试证明当 $\alpha>1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{a_n}{n^{\alpha}}}$ 也收敛。

证明　当 $c>0,d>0$ 时，有 $\frac{c+d}{2}\ge\sqrt{cd}$　　故而 $\sqrt{\frac{a_n}{n^{\alpha}}}\le\frac{1}{2}(a_n+\frac{1}{n^{\alpha}})$

又级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，当 $\alpha>1$ 时，　$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ 收敛　　故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{a_n}{n^{\alpha}}}$ 收敛。