武汉大学 2019-2020 第一学期高等数学 B1 期末试题 A

1、（6 分）求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1-\dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)$.

2、（8 分） 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}+\dfrac{\sin x}{x}\right)$.

3、（10 分）设隐函数 $y(x)$ 满足 $y(1)=1$，由方程 $\arctan\dfrac{x}{y}=\ln\sqrt{x^2+y^2}-\dfrac{1}{2}\ln 2+\dfrac{\pi}{4}$ 确定，

1）计算 $y'\big|_{x=1}, y''\big|_{x=1}$；

2）函数 $y(x)$ 在 $x=1$ 处是否取极值，若是，是极大值还是极小值？

4、（8 分）计算不定积分 $\displaystyle\int\frac{2x}{(x^2+1)(x+1)}\mathrm{d}\,x$.

5、（10 分）已知曲线 $\begin{cases} x=\mathrm{e}^t+t^3 \\ y=\cos t^3+\sin t \end{cases}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}\Big|_{t=0}$ 以及 $t=0$ 对应的点处此曲线的切线方程.

6、（9 分）计算抛物线 $y=x(2-x)$ 与 x 轴所围成的图形绕 x 轴旋转一周而成的立体体积.

7、（9 分）已知如下常微分方程 $y''-4y'+5y=f(x)$ 有特解 $y^*=\mathrm{e}^x$，求此方程的通解.

8、（7 分）设可微函数 $y=f(x)$ 满足 $f(x)-2\int_0^x tf(t)\mathrm{d}\,t=\mathrm{e}^{x^2}$，求函数 $f(x)$.

9、（10 分）设 $f(x)=x^4+2kx^3+6x^2+ax+b$，其中 $k,a,b\in\mathbb{R}$ 为常数：

1) 讨论曲线 $y=f(x)$ 的凸性；

2) 证明：当 $k\in[-2,2]$ 时，对任意 $t,s\in\mathbb{R}$ 有 $f(t)+f(s)\ge 2f\left(\dfrac{t+s}{2}\right)$.

10、（7 分）计算反常积分 $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}\mathrm{d}\,x$.

11、（5 分）计算定积分 $\displaystyle\int_{-1}^1\frac{x^2+\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}\,x$.

12、（6 分）1）已知 $f(x)=\ln(1-x^4)$，计算 $f^{(2020)}(0)$.

2）已知 $g(x)=\ln(1+x+x^2+x^3)$，计算 $g^{(2020)}(0)$.

13、（5 分）设函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内 $f(x)$ 可导，且 $f(0)=f(1)=0$. 证明：至少存在一点 $\xi\in(0,1)$ 使得

$$f'(\xi)+g(\xi)f(\xi)=0.$$

武汉大学 2019-2020 第一学期高等数学 B1 期末试题 A 解答

1、（6 分）求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1-\dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)$.

解： $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1-\dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{2^{\frac{1}{n}}-1}{\sqrt[n]{2}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty} n\dfrac{\ln 2}{n}=\ln 2$ 6 分

2、（8 分） 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}+\dfrac{\sin x}{x}\right)$.

解： $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}+\dfrac{\sin x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}\right)+0$ 4 分

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+1}}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1-x^{-1}}{\sqrt{1+x^{-1}}+\sqrt{1+x^{-2}}}\right)=\dfrac{1}{2}$ 8 分

3、（10 分）设隐函数 $y(x)$ 满足 $y(1)=1$，由方程 $\arctan\dfrac{x}{y}=\ln\sqrt{x^2+y^2}-\dfrac{1}{2}\ln 2+\dfrac{\pi}{4}$ 确定，

1） 计算 $y'\big|_{x=1}, y''\big|_{x=1}$；

2） 函数 $y(x)$ 在 $x=1$ 处是否取极值，若是，是极大值还是极小值？

解：1） 对方程两边求导得

$$\frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}\frac{y-xy'}{y^2}=\frac{1}{2}\frac{2x+2yy'}{x^2+y^2}=\frac{x+yy'}{x^2+y^2}$$ 4 分

整理解得： $y'\big|_{x=1}=\dfrac{y-x}{y+x}\Bigg|_{(x,y)=(1,1)}=0$ 6 分

再次求导可得令 $y''\big|_{x=1}=\dfrac{(y'-1)(y+x)-(y-x)(y'+1)}{(y+x)^2}\Bigg|_{x=1}=-\dfrac{1}{2}$ 8 分

2） 由 $y'\big|_{x=1}=0,\ y''\big|_{x=1}=-\dfrac{1}{2}<0$ 可知 $x=1$ 为函数的极值点，取极大值 $y(1)=1$. 10 分

4、（8 分）计算不定积分 $\displaystyle\int\frac{2x}{(x^2+1)(x+1)}\mathrm{d}x$.

解： $\displaystyle\int\frac{2x}{(x^2+1)(x+1)}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{x+1}{x^2+1}-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\int\frac{x+1}{x^2+1}\mathrm{d}x-\int\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x$ 4 分

$$=\int\frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x+\int\frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x-\int\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x$$

$=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)-\arctan x-\ln(x+1)+C$ 8 分

5、（10 分）已知曲线 $\begin{cases}x=\mathrm{e}^t+t^3\\ y=\cos t^3+\sin t\end{cases}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Bigg|_{t=0}$ 以及 $t=0$ 对应的点处此曲线的切线方程.

解：由 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\mathrm{e}^t+3t^2,\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-3t^2\sin t^3+\cos t$ 可得： 4 分

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}=\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=\left.\frac{-3t^2\sin t^3+\cos t}{\mathrm{e}^t+3t^2}\right|_{t=0}=1.$$ 8 分

因此，$t=0$ 对应的点 $(1,1)$ 处此曲线的切线方程为： $y=x$. 10 分

6、（9 分）计算抛物线 $y=x(2-x)$ 与 x 轴所围成的图形绕 x 轴旋转一周而成的立体体积.

解：显然抛物线 $y=x(2-x)$ 与 x 轴的焦点为 $(0,0)$ 与 $(2,0)$，因而所求体积为： 2 分

$$V=\int_0^2\pi y^2(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^2\pi x^2(2-x)^2\,\mathrm{d}x$$ 6 分

$$=\int_0^2\pi(x^4-4x^3+4x^2)\,\mathrm{d}x=\pi\left.\left(\frac{x^5}{5}-x^4+\frac{4x^3}{3}\right)\right|_0^2=\frac{16}{15}\pi$$ 9 分

7、（9 分）已知如下常微分方程 $y''-4y'+5y=f(x)$ 有特解 $y^*=\mathrm{e}^x$，求此方程的通解.

解：该方程为常系数线性微分方程，其特征方程为：

$$\lambda^2-4\lambda+5=0,$$ 4 分

有特征根：$\lambda=2\pm i$. 因此，对应齐次方程的通解为： $Y=\mathrm{e}^{2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$ 7 分

由于非齐次方程已有特解 $y^*=\mathrm{e}^x$，因此原方程的通解为： $y=\mathrm{e}^{2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+\mathrm{e}^x$. 9 分

8、（7 分）设可微函数 $y=f(x)$ 满足 $f(x)-2\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{x^2}$，求函数 $f(x)$.

解：由等式 $f(x)-2\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{x^2}$ 可知 $f(0)=1$，对原等式两边求导可得：

$$f'(x)-2xf(x)=2x\mathrm{e}^{x^2}$$ 3 分

此等式为一阶线性微分方程，由其求解公式可得：

$$f(x)=\mathrm{e}^{\int 2x\,\mathrm{d}x}\left(\int\mathrm{e}^{-\int 2x\,\mathrm{d}x}(2x\mathrm{e}^{x^2})\,\mathrm{d}x+C\right)$$

$$=\mathrm{e}^{x^2}\left(\int\mathrm{e}^{-x^2}\,2x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^{x^2}\left(x^2+C\right)$$ 5 分

由 $f(0)=1$ 可知 $C=1$，即有 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}(x^2+1)$. 7 分

9、（10 分）设 $f(x)=x^4+2kx^3+6x^2+ax+b$，其中 $k,a,b\in\mathbb{R}$ 为常数：

1) 判断曲线 $y=f(x)$ 的凸性；

2) 证明：当 $k\in[-2,2]$ 时，对任意 $t,s\in\mathbb{R}$ 有 $f(t)+f(s)\ge 2f\left(\dfrac{t+s}{2}\right)$.

解： 1） $f'(x)=4x^3+6kx^2+12x+a$， $f''(x)=12x^2+12kx+12$， 4 分

a) 当 $k^2>4$ 时， $f''(x)=0$ 有根 $x_1=\dfrac{-k-\sqrt{k^2-4}}{2}$， $x_2=\dfrac{-k+\sqrt{k^2-4}}{2}$，

在区间 $(-\infty,x_1)$ 及区间 $(x_2,+\infty)$ 内 $f''(x)>0$，因此在区间 $(-\infty,x_1]$ 及区间 $[x_2,+\infty)$ 上 $y=f(x)$ 下凸；在区间 (x_1,x_2) 内 $f''(x)<0$，因此在区间 $[x_1,x_2]$ 上 $y=f(x)$ 上凸.

b) 当$k^2 \le 4$时， $f''(x) \ge 0$，因此在区间$(-\infty,+\infty)$上$y=f(x)$下凸. 8 分

2) 由于当$k \in [-2,2]$时，在区间$(-\infty,+\infty)$上$y=f(x)$下凸，由下凸的定义可知：

$$\frac{f(t)+f(s)}{2} \ge f\left(\frac{t+s}{2}\right),$$

从而要证明的不等式成立. 10 分

10、（7 分）计算反常积分$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}\mathrm{d}x$.

解：
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}\mathrm{d}(2x-1)$$ 4 分

$$= \arcsin(2x-1)\Big|_{0^+}^{1^-} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$ 7 分

11、（5 分）计算定积分$\int_{-1}^1 \frac{x^2+\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$.

解：容易验证 $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$为奇函数，因此$\int_{-1}^1 \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x = 0$ 3 分

所以，
$$\int_{-1}^1 \frac{x^2+\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x - 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$$

$$= (x\sqrt{1+x^2} - \ln(x+\sqrt{1+x^2}))\Big|_0^1 = \sqrt{2} - \ln(1+\sqrt{2})$$ 5 分

12、（6 分）1）已知$f(x)=\ln(1-x^4)$，计算$f^{(2020)}(0)$.

2）已知$g(x)=\ln(1+x+x^2+x^3)$，计算$g^{(2020)}(0)$.

解：由麦克劳林公式可知，

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n).$$ 2 分

另一方面，利用$\ln(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{1}{k}u^k + o(u^k)$可得

$$\ln(1-x^4) = -x^4 - \frac{1}{2}x^8 - \cdots - \frac{1}{k}x^{4k} + o(x^{4k}).$$

比较x^{2020}的系数可得：$\frac{f^{(2020)}(0)}{2020!} = \frac{-1}{505}$，即得$f^{(2020)}(0) = -4\cdot 2019!$. 4 分

2）由于$g(x)=\ln(1+x+x^2+x^3)=\ln(1-x^4)-\ln(1-x)$，因此

$$g^{(2020)}(0)=f^{(2020)}(0)+2019!=-3\cdot 2019!$$ 6 分

13、（5 分）设函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内 $f(x)$ 可导，且 $f(0)=f(1)=0$. 证明：至少存在一点 $\xi\in(0,1)$ 使得

$$f'(\xi)+g(\xi)f(\xi)=0.$$

证明：因为 $g(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，因此 $g(x)$ 在该区间上存在原函数 $G(x)$ (如 $G(x)=\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$)，有 $G'(x)=g(x)$. 做辅助函数 $\varphi(x)=f(x)\mathrm{e}^{G(x)}$. 3 分

显然 $\varphi(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且有 $\varphi(0)=\varphi(1)=0$. 由罗尔定理， 至少存在一点 $\xi\in(0,1)$ 使得 $\varphi'(\xi)=0$，即

$$f'(\xi)\mathrm{e}^{G(\xi)}+f(\xi)\mathrm{e}^{G(\xi)}G'(\xi)=0\Leftrightarrow f'(\xi)+g(\xi)f(\xi)=0.$$ 5 分