武汉大学 2013-2014 学年第二学期期末考试

高等数学 B2 试题解答

一、（8 分）利用二重积分的性质，比较积分 $I_1=\iint\limits_D \ln(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$ 与 $I_2=\iint\limits_D \left[\ln(x^2+y^2)\right]^2\mathrm{d}\sigma$ 的大小，其中 $D: e\le x^2+y^2\le 2e$.

解 $\because 1\le \ln(x^2+y^2)\le 1+\ln 2,$ ……4 分

$\ln(x^2+y^2)\le\left[\ln(x^2+y^2)\right]^2$，$\therefore I_1<I_2$ ……4 分

二、（8 分）设 $z=f(xy,\dfrac{x}{y})+\sin y$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=(f_1'\cdot y+f_2'\cdot\dfrac{1}{y})+0=yf_1'+\dfrac{1}{y}f_2'$， ……4 分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'+y[f_{11}''\cdot x+f_{12}''\cdot(-\frac{x}{y^2})]-\frac{1}{y^2}f_2'+\frac{1}{y}[f_{21}''\cdot x+f_{22}''\cdot(-\frac{x}{y^2})]$$

$$=f_1'+xyf_{11}''-\frac{1}{y^2}f_2'-\frac{x}{y^3}f_{22}''.$$ ……..4 分

三、（8 分）求过点 $M(1,-2,3)$ 的平面，使它与平面 $\pi: x+y-z-3=0$ 垂直，且与直线 $L: x=y=z$ 平行.

解 因为已知直线与已知平面不平行，故所求平面得法向量为

$\vec{n}=(1,1,-1)\times(1,1,1)=(2,-2,0)$， ……4 分

故平面方程为 $(x-1)-(y+2)=0$，即 $x-y-3=0$。 ……4 分

四、（8 分）设函数 $z=z(x,y)$ 是由方程 $xyz=\arctan(x+y+z)$ 所确定的隐函数，求全微分 dz 在点 $(0,1,-1)$ 处的值..

解 $yzdx+xzdy+xydz=\dfrac{dx+dy+dz}{1+(x+y+z)^2}$， ……4 分

$\mathrm{d}z=\dfrac{yz[1+(x+y+z)^2]-1}{1-xy[1+(x+y+z)^2]}dx+\dfrac{xz[1+(x+y+z)^2]-1}{1-xy[1+(x+y+z)^2]}dy$，故 $dz\big|_{(0,1,-1)}=-2dx-dy$ ……4 分

五、（10 分）计算曲线积分 $\int_L (2a-y)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$，式中 L 是从原点 $O(0,0)$ 沿曲线 $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$（$a>0$）到点 $A(2\pi a,0)$ 的弧段.

解 $O(0,0)$ 对应 $t=0$，$A(2\pi a,0)$ 对应 $t=2\pi$。

原式 $=\int_0^{2\pi} a\ (1+\cos t)\cdot a(1-\cos t)\,\mathrm{d}t+a(t-\sin t)a\sin t\,\mathrm{d}t$ ……6 分

$$=\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos^2 t-\sin^2 t+t\sin t)\,\mathrm{d}\,t=a^2\int_0^{2\pi} t\quad \sin t\,\mathrm{d}\,t=-2\pi\, a^2$$ ……4 分

六、(10 分)设 Ω 是由曲面 $\boldsymbol{z^2=x^2+y^2, z=2}$ 所围的闭区域，试计算 $\iiint\limits_{\Omega} z^2\mathrm{d}V$.

解 $\iiint\limits_{\Omega} z^2dV=\int_0^2 z^2dz\iint\limits_{x^2+y^2\le z^2} dxdy$ ……6 分

$=\int_0^2 \pi z^4dz=\dfrac{32}{5}\pi$ ……4 分

七、(10 分)计算曲面积分 $\iint_S (x^3+z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+x^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 S 是上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的上侧.

解　添加平面 $S_1: x^2+y^2\le 1(z=0)$ **的下侧，记** $S+S_1$ **所围的区域为** V, **则**利用高斯公式得,

原式 $=3\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dV-\iint\limits_{S_1} y^2dxdy-0$ ……6 分

$=3\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^1 r^4\sin\varphi dr+\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1 \rho^3\sin^2\theta d\rho=\dfrac{29}{20}\pi$ ……4 分

八、(8 分)求曲线 $\boldsymbol{x=\sin^2 t}$， $\boldsymbol{y=\sin t\cos t}$， $\boldsymbol{z=\cos^2 t}$ 在对应于 $\boldsymbol{t=\frac{\pi}{4}}$ 的点处的切线和法平面方程.

解　点 $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$, 当 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 时, $\vec{\tau}=(x',y',z')\big|_{t=\frac{\pi}{4}}=(1,0,-1)$ 。……4 分

切线　$\dfrac{x-\frac{1}{2}}{1}=\dfrac{y-\frac{1}{2}}{0}=\dfrac{z-\frac{1}{2}}{-1}$, 法平面, $x-z=0$……4 分

九、(8 分)设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为 $\boldsymbol{f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\le x<0,\\ 1, & 0\le x<\pi,\end{cases}}$ ，将它展开成 Fourier 级数，并求数项级数 $\boldsymbol{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}}$ 的和。

解

取 $x=\dfrac{\pi}{2}$ **可得** $\boldsymbol{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\dfrac{\pi}{4}}$ 。

十、(9 分)设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1-x)}{x} & x\ne 0\\ -1 & x=0\end{cases}$ ，试将 $f(x)$ 展开成 $\boldsymbol{x}$ 的幂级数并利用其求 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 。

解　由　$\ln(1-x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(-x)^n}{n}=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}, x\in[-1,1)$　因 此 当　$x\ne 0$　时 ， 有

$\dfrac{\ln(1-x)}{x}=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n-1}}{n}$, ……5 分

当 $x=0$ 时，$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}=-1=f(0)$，所以　$f(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}$， $x\in[-1,1]$

$\int_0^x f(t)dt=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}\quad x\in[-1,1]$ ……4 分

十一、（6 分）设 $a_n\ge 0(n=1,2,\ldots)$, 且数列 $\{na_n\}$ 有界，证明：$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛。

证明：因为数列 $\{na_n\}$ 有界，则 $\exists M>0$, 使得 $0\le na_n\le M$，因此 $0\le a_n\le\frac{M}{n}$， ……3 分

于是 $0\le a_n^2\le\frac{M^2}{n^2}$，由比较判别法可知 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛。 ……3 分

十二、（7 分）求二元函数 $f(x,y)=\cos^2 x+\cos^2 y$ 在限制条件 $x-y=\frac{\pi}{4}$ 下的极值.

解 设 $F(x,y,\lambda)=\cos^2 x+\cos^2 y+\lambda(x-y-\frac{\pi}{4})$，求驻点。由 $F_x=-2\sin x\cos x+\lambda=0,$

$F_y=-2\sin y\cos y-\lambda=0,\ x-y=\frac{\pi}{4}$ 可得驻点为 $(\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2})$。 ……4 分

极大值为 $z(\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2})=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$，$k$ 为偶数；极小值为 $z(\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2})=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$k$ 为奇数。 ……3 分