课程编号：A073003　　　　北京理工大学 2007-2008 学年第一学期

2006 级线性代数试题 B 卷

班级 ________ 学号 ________ 姓名 ________ 成绩 ________

一、（10 分）已知 $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 3\\ 3 & 4 & -10\end{pmatrix}$，求行列式 $\begin{vmatrix}2A^T & 0\\ 0 & A^{-1}\end{vmatrix}$。

解: $\begin{vmatrix}2A^T & 0\\ 0 & A^{-1}\end{vmatrix} = |2A^T|\,|A^{-1}| = 2^3|A^T|\cdot|A|^{-1} = 2^3|A|\,|A|^{-1} = 8$

二、（15 分）已知矩阵 X 满足 $X\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 3\\ 3 & 3 & -1\end{pmatrix}=2X+\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$，求 X。

解 化简得 $X\begin{pmatrix}-3 & 2 & 3\\ 2 & -2 & 3\\ 3 & 3 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$，转置得 $\begin{pmatrix}-3 & 2 & 3\\ 2 & -2 & 3\\ 3 & 3 & -3\end{pmatrix}X^T=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc}-3 & 2 & 3 & 1 & -1\\ 2 & -2 & 3 & 0 & 2\\ 3 & 3 & -3 & 2 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}1 & 0 & -6 & -1 & -1\\ 0 & -2 & 15 & 2 & 4\\ 0 & 3 & 15 & 5 & 4\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 6 & -1 & -1\\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{30} & \cancel{7} & \cancel{8}\\ 0 & 0 & 75 & 8 & 10\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc}1 & 0 & -6 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 30 & 7 & 8\\ 0 & 0 & 1 & \frac{16}{75} & \frac{20}{75}\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|cc}1 & 0 & 0 & \frac{7}{25} & \frac{3}{5}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{5} & 0\\ 0 & 0 & 1 & \frac{16}{75} & \frac{4}{15}\end{array}\right)$$

$$X=\begin{pmatrix}\frac{7}{25} & \frac{3}{5} & \frac{16}{75}\\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{15}\end{pmatrix}$$

三、（10 分）求下列线性方程组的通解

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=1\\ x_1+2x_2+2x_3+2x_4=2\\ -x_1+x_2+x_3+x_4=1\\ x_2+x_3+x_4=1\end{cases}$$

（要求用导出组的基础解系表示通解）

$$\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 8\end{pmatrix}+a\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$$

a.b 为任意数

四、（10 分）已知 $\alpha_1=(2,1,3),\alpha_2=(3,-1,2),\alpha_3=(5,0,5),\alpha_4=(-1,2,1),\alpha_5=(1,1,1)$

（1）求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的秩和一个极大无关组；

（2）用所求极大无关组线性表出其它向量。

解: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & -5 & -1 \\ 0 & 5 & 5 & -5 & -2 \end{pmatrix}$

$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(1) 秩为 3. $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_5$ 为一个极大无关组.

(2). 显然 $\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2 \quad \alpha_4=\alpha_1-\alpha_2$

五、（10 分）设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 与 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 是 4 维向量空间 V 的两个基，从 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 到 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 的过渡矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$。已知向量 γ 关于基 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 的坐标为 $(1,-1,2,-2)$，求 γ 关于基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的坐标。

$(2,1,2\ -6)$

六、（15 分）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 是对角矩阵。

解. $|\lambda I-A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & -3 \\ 0 & \lambda+1 & 0 \\ -3 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda+1)\left((\lambda-2)^2-9\right) = (\lambda+1)(\lambda-5)(\lambda+1)$

特征值为 $-1, 5.$

$A+I=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. 特征向量为 $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$,

$A-5I=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & -6 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 特征向量为 $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1}AP=\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$

七、（10 分）已知向量$\alpha_1=(2,1,3),\alpha_2=(1,1,-1)$，求与向量$\alpha_1,\alpha_2$都正交的向量$\alpha_3$，并把$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$化为欧氏空间$R^3$的一个标准正交基。

解: $\alpha_1\perp\alpha_3$, $\alpha_2\perp\alpha_3$ 得 $\begin{pmatrix}2&1&3\\1&1&-1\end{pmatrix}\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ 由于3个未知数

$\begin{pmatrix}2&1&3\\1&1&-1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-1&5\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&4\\0&1&-5\end{pmatrix}$ $\left[\begin{pmatrix}1&0&4\\0&1&-5\\0&0&0\end{pmatrix}\right.$ 可加一行0 得3行$\left.\right]$

$\alpha_3=(4,-5,-1)$

$(1,0,0)$. $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ 是R^3的一个标准正交基

八、（10 分）求可逆线性替换，把实二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=-x_1^2-x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2$$

化为规范形。

$f=-(x_1-2x_2)^2+3x_2^2-3x_3^2=-y_1^2+3y_2^2-3y_3^2=z_1^2-z_2^2-z_3^2$

解: $\begin{cases}y_1=x_1-2x_2\\y_2=x_2\\y_3=x_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=y_1+2y_2\\x_2=y_2\\x_3=y_3\end{cases}$, $\begin{cases}z_1=\sqrt{3}y_2\\z_2=y_1\\z_3=\sqrt{3}y_3\end{cases}$ $\begin{cases}x_1=z_2+\frac{2\sqrt{3}}{3}z_1\\x_2=\frac{\sqrt{3}}{3}z_1\\x_3=\frac{\sqrt{3}}{3}z_1\end{cases}$.

九、（10 分）设A是n阶方阵，证明：若存在n阶正交矩阵Q，使得$Q^{-1}AQ$是对角矩阵，则A是对称矩阵。

证明: $Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}a_1&&\\&\ddots&\\&&a_n\end{pmatrix}$ 则$A=Q\begin{pmatrix}a_1&&\\&\ddots&\\&&a_n\end{pmatrix}Q^{-1}$

$A^T=(Q^{-1})^T\begin{pmatrix}a_1&&\\&\ddots&\\&&a_n\end{pmatrix}Q^T=Q\begin{pmatrix}a_1&&\\&\ddots&\\&&a_n\end{pmatrix}Q^{-1}=A$. $(Q^{-1}=Q^T)$

故A是对称矩阵.

十、（10 分）举例说明，若A是可相似对角化的矩阵，则不一定存在正交矩阵Q，使得$Q^{-1}AQ$是对角矩阵。

证明: 设$A=\begin{pmatrix}1&2\\0&2\end{pmatrix}$ 则易证 A可相似对角化. 若存在正交矩阵Q使得 $Q^{-1}AQ$是对角矩阵由9知 A是对称矩阵. 矛盾 证毕