武汉大学数学与统计学院
2012-2013 学年二学期《高等数学 B2》期末试卷(A 卷)参考解答

一、(9 分)解：首先$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，而$\vec{a}\perp\vec{c},\vec{b}\perp\vec{c}$ 可知$\vec{c}\parallel\vec{a}\times\vec{b}$，所以$\vec{c}$与$\vec{a}\times\vec{b}$ 的夹角为 0 或π，所以$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=|\vec{a}\times\vec{b}||\vec{c}|\cos(\widehat{\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}})=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times3\times(\pm1)=\pm\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

二、(9 分)解 π 法向量为$\vec{n}=\{A,B,6\}$，l 方向向量为$\vec{S}=\{2,-4,3\}$，l 与 π 垂直，$\vec{n}//\vec{S}$，故 $\dfrac{A}{2}=\dfrac{B}{-4}=\dfrac{6}{3}$，解得：$A=4,\qquad B=-8$

三、(9 分)解 (1) $xdx-ydy=dz-\varphi'(x+y-z)\cdot(dx+dy-dz)$，$\quad dz=\dfrac{(x+\varphi')dx+(\varphi'-y)dy}{\varphi'+1}$，

(2) $\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x+y}{1+\varphi'(x+y-z)}$，$u(x,y)=\dfrac{1}{x+y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=\dfrac{1}{1+\varphi'(x+y-z)}$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-\varphi''(1+\frac{\partial z}{\partial x})}{(1+\varphi')^2}=\frac{-\varphi''(1+\frac{x+\varphi'}{1+\varphi'})}{(1+\varphi')^2}=\frac{-\varphi''(1+x+2\varphi')}{(1+\varphi')^3}$$

四、(9 分)解：因为$\max\{x^2,y^2\}=\begin{cases}x^2,x\ge y\\ y^2,x\le y\end{cases},(x,y)\in D,$ 于是用 $y=x$ 将区域分成两块：

$$I=\iint_{D_1}e^{x^2}dxdy+\iint_{D_2}e^{y^2}dxdy=2\iint_{D_1}e^{x^2}dxdy=2\int_0^1 dx\int_0^x e^{x^2}dy=2\int_0^1 xe^{x^2}dx=e-1$$

五、(9 分) $\iiint\limits_{\Omega}zdv=\int_0^2dx\int_0^{2-x}dy\int_0^{2-x-y}zdz=\dfrac{2}{3}$

六、(9 分)解 由$\dfrac{\partial p}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，得$\varphi'(x)y=2xy[\varphi(x)+1]$，$\quad\ln[\varphi(x)+1]=x^2+C_1$，

即$\varphi(x)=e^{x^2+C_1}-1=Ce^{x^2}-1$ ，所以有 $\int_{(0,0)}^{(1,1)}(Ce^{x^2}-1)ydy+Cxy^2e^{x^2}dx=\dfrac{1}{2}$

$\int_{(0,0)}^{(1,1)}(Ce^{x^2}-1)ydy+Cxy^2e^{x^2}dx=\int_0^1(Ce-1)ydy=\dfrac{1}{2}(Ce-1)$．故有$(Ce-1)=1$，即$C=\dfrac{2}{e}$

所以有 $\varphi(x)=2e^{x^2-1}-1$

七、(9 分)解： $dS=\sqrt{1+\dfrac{x^2}{x^2+y^2}+\dfrac{y^2}{x^2+y^2}}dxdy=\sqrt{2}dxdy$，因为积分区域关于 xoz 平面对称，xy 关于 y 是奇函数，所以

$$I=\iint_{\Sigma}(xy+z)dS=\iint_{\Sigma}zdS=\iint_{D_{xy}}\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{2}dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}r^2dr$$

$$=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{8}{3}\cos^3\theta d\theta=\frac{32\sqrt{2}}{9}$$

八、(7 分)解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\cdot4^n}{(n+1)\cdot4^{n+1}}=\dfrac{1}{4}$，$\therefore$收敛半径为$R=4$,当$x=-4$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4}{n}$发散;

当 $x=4$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot 4}{n}$ 收敛，收敛域为 $(-4,4]$，设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 4^n}x^{n+1}=x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n\cdot 4^n}$

$$=x\int_0^x[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{t^n}{n\cdot 4^n}]'dt=\frac{x}{4}\int_0^x[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(\frac{t}{4})^{n-1}]dt=\frac{x}{4}\int_0^x\frac{1}{1+\frac{t}{4}}dt=x\ln(1+\frac{x}{4}),\ x\in(-4,4]$$

九、（9 分）解：设切点 $P(x_0,y_0,z_0)$，由已知条件得：$\frac{2x_0}{1}=\frac{4y_0}{4}=\frac{6z_0}{6}:=\lambda$ ，得到 $x_0=\frac{1}{2}\lambda, y_0=\lambda, z_0=\lambda,$ 代入曲面方程解得 $\lambda=\pm 2,\quad x_0=\pm 1, y_0=\pm 2, z_0=\pm 2.$ 切平面方程为 $(x\pm 1)+4(y\pm 2)+6(z\pm 2)=0$，即 $x+4y+6z=\pm 21$

十、（7 分）解：$\iint_S 2x^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+2y^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+3(z^2-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\ S: z=1-x^2-y^2\quad(z\geq 0)$不封闭

补充 S_1：$z=0\ \ (x^2+y^2\leq 1)$下侧，则 $S+S_1$封闭，取外侧.

$$I=\iint_S 2x^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+2y^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+3(z^2-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=(\oiint_{S+S_1}-\iint_{S_1})[2x^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+2y^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+3(z^2-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y]$$

由高斯公式，得 $\oiint_{S+S_1}2x^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+2y^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+3(z^2-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iiint_{\Omega}6(x^2+y^2+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

$=6\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\,\mathrm{d}\rho\int_0^{1-\rho^2}(\rho^2+z)\,\mathrm{d}z=2\pi$ 而 $\iint_{S_1}2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_{x^2+y^2\leq 1}(-3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\pi$

因此 $\quad I=2\pi-3\pi=-\pi$

十一、（8 分）解：由曲面 S 的方程为 $\quad 2x^2+y^2+z^2=1$，给定的方向 $\vec{l}^{\,0}=(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0)$

方向导数函数 $\quad \frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma=\sqrt{2}(x-y)$

设 $L=\sqrt{2}(x-y)+\lambda(2x^2+y^2+z^2-1)$， 令 $\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x}=\sqrt{2}+4\lambda x=0\\ \frac{\partial L}{\partial y}=-\sqrt{2}+2\lambda y=0\\ \frac{\partial L}{\partial z}=2\lambda z=0\\ 2x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$，解之得 $\begin{cases}x=-\frac{\sqrt{2}}{4\lambda}\\ y=\frac{\sqrt{2}}{2\lambda}\\ z=0\end{cases}$

$\lambda=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，$\lambda=\frac{\sqrt{3}}{2}$，得 S 上的点为 $(-\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3},0)$，此时 $\frac{\partial f}{\partial l}=-\sqrt{3}$

$\lambda=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，得 S 上的点为 $(\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{3},0)$，此时 $\frac{\partial f}{\partial l}=\sqrt{3}$，所以，所求的 S 上的点为 $(\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{3},0)$

十二、（6 分）解：因为 $\{a_n\}$ 单调下降且有下界 0，所以 $\lim_{n\to\infty}a_n=a\geq 0.$ 若 $a=0,$ 由莱布尼茨法则交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛，与假设矛盾，所以 $a>0.$ 因此由根值判别法，$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n}=\frac{1}{a+1}<1,$ 所以原级数收敛。