

武汉大学 2018-2019 第一学期高等数学 B1 期末试题 A

- 1、(6 分) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \sin \frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n^2+1}}$
- 2、(6 分) 求极限: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x+x^2)-x}{e^{\cos x}-e}$
- 3、(9 分) 计算反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 \sqrt{1+x^2}} dx$.
- 4、(6 分) 设函数 $y = y(x)$ 有方程 $xy^2 + \sin \frac{\pi}{2} = ye^x$ 所确定, 求 $y'(0)$.
- 5、(10 分) (1) 求齐次线性微分方程 $y''' - y' = 0$ 的通解;
(2) 给出非齐次线性微分方程 $y''' - y' = xe^x + \sin x$ 的特解形式.
- 6、(10 分) 函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & , x < 0 \\ ax + b & , x \geq 0 \end{cases}$ 可导, 其中 a, b 为常数, 求 $a^2 + b^2$.
- 7、(9 分) 考虑参数方程 $\begin{cases} x = \sin t \\ y = t \cos t \end{cases}$, 求 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=0}$.
- 8、(12 分) 设函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ 在 $x=1$ 和 $x=2$ 处取得极值.
(1) 试确定 a 与 b 的值;
(2) 求出函数的拐点;
(3) 证明 $f(2)$ 是极小值.
- 9、(9 分) 设 $f(x) = \int_{x^2}^1 e^{-t^2} dt$, 计算定积分 $\int_0^1 xf(x)dx$.
- 10、(9 分) 已知曲线 $y = \int_0^x \sqrt{\sin t} dt$ ($0 \leq x \leq \pi$). 求该曲线的弧长.
- 11、(9 分) 求由曲线 $y = x^2, y = x, y = 2x$ 所围成的图形的面积.
- 12、(5 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上连续, 在 $(1, 2)$ 内可导, 且 $f(2) = 0$. 证明:
至少存在一点 $\xi \in (1, 2)$ 使得

$$\xi \ln(\xi) f'(\xi) + f(\xi) = 0.$$

武汉大学 2017-2018 第一学期高等数学 B1 期末试题 A 解答

1、(6 分) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \sin \frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n^2+1}}$

解 (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \sin \frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\sqrt{n^2+1} \ln(1 + \sin \frac{1}{n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}} = e$ 6 分

2、(6 分) 求极限: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x+x^2)-x}{e^{\cos x}-e}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x+x^2)-x}{e^{\cos x}-e} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1+2x}{1+x+x^2}-1}{e^{\cos x} \sin x} = -e^{-1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-x^2}{1+x+x^2} = -e^{-1}$ 6 分

另解:

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x+x^2)-x}{e^{\cos x}-e} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x+x^2)-x}{(e^{\cos x}-1)e} = e^{-1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x+x^2)-x}{\cos x-1}$
 $= e^{-1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x+x^2)-x}{-\frac{x^2}{2}}$ 3 分

$= -e^{-1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1+2x}{1+x+x^2}-1}{x} = -e^{-1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-x^2}{1+x+x^2} = -e^{-1}$ 6 分

3、(9 分) 计算反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 \sqrt{1+x^2}} dx$.

解: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 \sqrt{1+x^2}} dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3 \sqrt{1+x^{-2}}} dx$ 5 分
 $= -\frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^{-2}}} d(x^{-2}) = -\sqrt{1+x^{-2}} \Big|_1^{+\infty} = \sqrt{2} - 1$

9 分

另解: 令 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 \sqrt{1+x^2}} dx \stackrel{x=\tan t}{=} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec t}{\tan^2 t} dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin^2 t} dt$ 5 分
 $= -\frac{1}{\sin t} \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -(1 - \sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1$ 9 分

4、(6 分) 设函数 $y = y(x)$ 有方程 $xy^2 + \sin \frac{\pi}{2} = ye^x$ 所确定, 求 $y'(0)$.

解: 方程两边关于 x 求导得 $2xyy' + y^2 = e^x(y + y')$ (1) 4 分

由方程知 $x=0 \Rightarrow y(0)=1$ 由 (1) 得 $y'(0)=0$ 6 分

5、(10 分) (1) 求齐次线性微分方程 $y''' - y' = 0$ 的通解;

(2) 给出非齐次线性微分方程 $y''' - y' = xe^x + \sin x$ 的特解形式。

解: (1) 由 $y''' - y' = 0$ 得其特征方程为 $r^3 - r = 0$, 有特征根: $r_1 = 0, r_2 = 1, r_3 = -1$,
 故方程的通解为 $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x}$ 6 分

(2) 由于 $\lambda=1$ 是齐次方程的特征根, 而 $\lambda=\pm i$ 不是齐次方程的特征根, 因此, 非齐次方程的特解可令为: $y^* = x(Ax + B)e^x + C \sin x + D \cos x$ 10 分

6、(10分) 函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & , x < 0 \\ ax + b & , x \geq 0 \end{cases}$ 可导, 其中 a, b 为常数, 求 $a^2 + b^2$.

解: 要使 $f(x)$ 在 $x = 0$ 可导, 首先须在 $x = 0$ 连续即 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = b$

$$\text{即 } b = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0, \quad 4 \text{ 分}$$

要使 $f(x)$ 在 $x = 0$ 可导, 须 $f'_-(0) = f'_+(0)$,

$$\begin{aligned} \text{即 } f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = 0 \\ f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax}{x} = a, \end{aligned}$$

则 $a = b = 0$ 时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 可导, 从而处处可导, 故 $a^2 + b^2 = 0$. 9 分

7、(9分) 考虑参数方程 $\begin{cases} x = \sin t \\ y = t \cos t \end{cases}$, 求 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=0}$.

$$\text{解: 由 } \frac{dy}{dt} = \cos t - t \sin t, \quad \frac{dx}{dt} = \cos t \quad \text{故有 } \frac{dy}{dx} = \frac{\cos t - t \sin t}{\cos t} = 1 - t \tan t \quad 5 \text{ 分}$$

$$\text{此外, } \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} (1 - t \tan t) = -\tan t - t \sec^2 t \quad \text{所以有}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \frac{dt}{dx} = \frac{-\tan t - t \sec^2 t}{\cos t}, \quad \text{代入 } t = 0 \text{ 得 } \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=0} = 0. \quad 9 \text{ 分}$$

8、(12分) 设函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ 在 $x = 1$ 和 $x = 2$ 处取得极值.

- (1) 试确定 a 与 b 的值;
- (2) 求出函数的拐点;
- (3) 证明 $f(2)$ 是极小值.

解 (1) 函数 $f(x)$ 处处可导, 有导函数 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$. 由设函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 和 $x = 2$ 处取得极值可知 $f'(1) = f'(2) = 0$,

$$\text{即 } f'(x) = 3(x-1)(x-2) = 3x^2 - 9x + 6 = 3x^2 + 2ax + b, \quad \text{因此 } a = -\frac{9}{2}, b = 6. \quad 4 \text{ 分}$$

$$(2) f''(x) = 6x - 9, \quad \text{得 } f''\left(\frac{3}{2}\right) = 0$$

当 $x < \frac{3}{2}$ 时, $f''(x) < 0$, 当 $x > \frac{3}{2}$ 时, $f''(x) > 0$, (或 $f'''\left(\frac{3}{2}\right) = 6 \neq 0$)

故曲线 $y = f(x)$ 有拐点 $\left(\frac{3}{2}, f\left(\frac{3}{2}\right)\right)$ (或 $\left(\frac{3}{2}, \frac{17}{4}\right)$) 改变符号 8 分

(3) 因为 $f'(2) = 0$, 且 $f''(2) = 3 > 0$ (或当 $x < 2$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x > 2$ 时, $f'(x) > 0$), 因此, $f(2)$ 是极小值. 12 分

9、(9分) 设 $f(x) = \int_{x^2}^1 e^{-t^2} dt$, 计算定积分 $\int_0^1 xf(x)dx$.

$$\text{解: } \int_0^1 xf(x)dx = \frac{1}{2} \int_0^1 f(x)d(x^2) = \frac{1}{2} x^2 \int_{x^2}^1 e^{-t^2} dt \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 2x^3 e^{-x^4} dx \quad 6 \text{ 分}$$

$$= -\frac{1}{4} \int_0^1 e^{-x^4} d(-x^4) = -\frac{1}{4} e^{-x^4} \Big|_0^1 = \frac{1}{4} (1 - e^{-1}) \quad 9 \text{ 分}$$

10、(9分) 已知曲线 $y = \int_0^x \sqrt{\sin t} dt$ ($0 \leq x \leq \pi$). 求该曲线的弧长.

解 由弧长公式知该曲线的弧长为

$$l = \int_0^{\pi} \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \sin x} dx = \int_0^{\pi} \sqrt{\sin^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} dx \quad 6 \text{ 分}$$

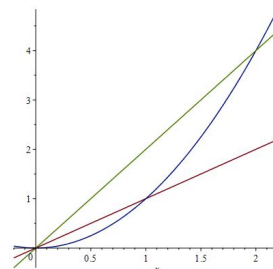
$$\int_0^{\pi} (\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}) dx = 2(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}) \Big|_0^{\pi} = 4 \quad 9 \text{ 分}$$

11、(9 分) 求由曲线 $y = x^2$, $y = x$, $y = 2x$ 所围成的图形的面积.

解: 易求得三条曲线有三个焦点 $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,2)$, 如图. 由此可得的图形面积的积分表示:

$$S = \int_0^1 (2x - x) dx + \int_1^2 (2x - x^2) dx \quad 2 \text{ 分}$$

$$= \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 + \left(x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^2 = \frac{7}{6} \quad 9 \text{ 分}$$



12、(5 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上连续, 在 $(1,2)$ 内可导, 且 $f(2)=0$. 证明: 至少存在一点 $\xi \in (1,2)$ 使得

$$\xi \ln(\xi) f'(\xi) + f(\xi) = 0.$$

证明: 做辅助函数 $\varphi(x) = \ln x f(x)$, 显然 $\varphi(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上连续, 在 $(1,2)$ 内可导, 且有 $\varphi(1) = \varphi(2) = 0$. 由罗尔定理, 至少存在一点 $\xi \in (1,2)$ 使得 $\varphi'(\xi) = 0$, 即

$$\ln(\xi) f'(\xi) + \frac{1}{\xi} f(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi \ln(\xi) f'(\xi) + f(\xi) = 0.$$