武汉大学数学与统计学院

2019-2020 学年第二学期

《高等数学 B2》期末考试

本页为考试说明页

1、请遵守考试纪律，严禁与他人交流，详细要求参考《公共数学期末考试的操作说明》。

2、解答题无求解过程不给分。

3、考试答卷书写及提交要求：

(1) 答题纸学生自行准备，要求规格大小一致（A4 打印纸最佳）

(2) 答卷纸上标注：学号、姓名、考试科目、所在学院、页码

(3) 考试作答时，写明题号及试题（题目文字较多时，可省略）

(4) 答卷用手机 CS 全能扫描王 APP，扫描生成 PDF 文档，要求干净、清晰、不缺省（黑白模式），**生成的 PDF 文档**，请命名为：**学号+姓名+科目**.pdf

如：2019302020999+李四+高等数学 B2.pdf；(带有“+”)

4、请在首页画好打分表，每个题写清楚题号，并在题与题之间留下一定空白，首页式样如下：

学号：2019302020999　姓名：李　四　科目：高等数学 B2

学院：资源与环境科学学院

<table>
<tr><td rowspan="4">总 分</td><td>一</td><td>二</td><td>三</td><td>四</td><td>五</td><td>六</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>七</td><td>八</td><td>九</td><td>十</td><td>十一</td><td>十二</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

武汉大学数学与统计学院

2019-2020 学年第二学期

《高等数学 B2》期末考试试题 A 卷

考试时间：2020 年 6 月 11 日 14:30-16:30

一、（10 分）设$\vec{a}=(1,-2,1),\vec{b}=(1,2,-2)$，求$m$使得$\vec{a}+m\vec{b}$在$\vec{b}$上的投影为$0$.

二、（10 分）设曲面Σ：$x^2+2y^2+3z^2=6$及点$P(1,1,1)$：

1）求点$P(1,1,1)$处曲面Σ的切平面方程;

2）若$\vec{n}$是曲面Σ在点$P(1,1,1)$处指向内侧的法向量，求$\vec{n}$的方向余弦.

三、（8 分）设函数$z=z(x,y)$由方程$(x+1)^2 z-\cos^2 y=x^3(z+\sin y)$所确定，求$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}$及$\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(0,0)}$.

四、（10 分）设$D=\{(x,y)\,\big|\,|x|\le 1, 0\le y\le 1\}$，计算二重积分$\iint\limits_D |y-x^2|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

五、（8 分）计算对面积的曲面积分$\iint\limits_S (y+z)\,\mathrm{d}S$，其中$S$为圆柱面$x^2+y^2=R^2$介于平面$z=0$及$z=1$之间的部分.

六、（8 分）设有曲线Γ:$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6, \\ x^2-y^2=3z, \end{cases}$及曲线上一点$M(2,1,1)$：

1）求曲线Γ在点M处的切线L的方程;

2）验证Γ与L在zOx面上的投影在点$M'(2,0,1)$处相切.

七、(8 分)求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n+(-3)^n}{n}x^n$的和函数及收敛域.

八、（10 分）1)确定常数a，使得对平面上任意分段光滑闭曲线L，均有$\oint\limits_L (2xy-y^4+5)\,\mathrm{d}x+(x^2-axy^3)\,\mathrm{d}y=0$.

2)对于该常数，求二元函数$u(x,y)$，使得 $\mathrm{d}u(x,y)=(2xy-y^4+5)\,\mathrm{d}x+(x^2-axy^3)\,\mathrm{d}y$，且$u(0,0)=0$.

九、（8 分）计算曲面积分$I=\iint_S (x^3+2zx)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(2y^3+3xy)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(3z^3+4yz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$S$是球面$x^2+y^2+z^2=1$的**内**侧.

十、(8 分)将函数$f(x)=x\arctan x$展开成x的幂级数，并写出该幂级数的收敛域.

十一、（8 分）设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(y-x)x^4}{(y-x)^4+x^6}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$ 考虑如下问题：

1）计算该函数在点 $O(0,0)$ 处沿方向 $\vec{l}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 的方向导数；

2）证明该函数在点 $O(0,0)$ 处不连续.

十二、（4 分）**阅读如下材料**：利用指数函数的幂级数展开式 $\mathrm{e}^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}\,(x\in\mathbb{R})$ 可以拓展到复数域上的结论，即

$\mathrm{e}^z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{n!}\,(z\in\mathbb{C}$，即z为复数$)$. 并且对于复数 $z=a+ib$，依然有 $\mathrm{e}^{a+ib}=\mathrm{e}^a\,\mathrm{e}^{ib}$ 以及 $\left(\mathrm{e}^{a+ib}\right)^n=\mathrm{e}^{n(a+ib)}$，而且有被称为欧拉公式的如下等式：$\mathrm{e}^{ix}=\cos x+i\sin x$，$\mathrm{e}^{-ix}=\cos x-i\sin x$.

问题：若将函数 $\mathrm{e}^x\cos x$ 展开成幂级数 $\mathrm{e}^x\cos x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n,(x\in\mathbb{R})$，试给出 a_n 的表达式.