课程编号：A073003　　北京理工大学 2012-2013 学年第一学期

线性代数 B 试题 B 卷

班级 ________ 学号 _________ 姓名 __________ 成绩 ___________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
签名											

一、（10 分）已知 $A=\begin{pmatrix}0&2&5\\0&1&3\\-1&0&0\end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix}3&0&2\\4&0&4\\2&1&3\end{pmatrix}$，求行列式 $\begin{vmatrix}A^*&0\\0&2B^{-1}\end{vmatrix}$ 的值,其中 A^* 为 A 的伴随矩阵。

二、（10 分） 例设矩阵 X 满足 $AX=A+2X$， 其中 $A=\begin{pmatrix}4&2&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}$。

（1）证明 $A-2I$ 可逆；　（2）求 X 。

三、（10 分）对下列线性方程组

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = a \\ x_1 + x_2 + ax_3 = a^2 \end{cases}$$

试讨论：当 a 取何值时，它有唯一解？无解？有无穷多解？并在有无穷多解时求其通解。（用导出组的基础解系表示通解）。

四、（10 分）已知

$\alpha_1=(1,0,1)^T,\alpha_2=(0,1,0)^T,\alpha_3=(1,2,2)^T$， $\beta_1=(1,0,0)^T,\beta_2=(1,1,0)^T,\beta_3=$ ，

(1) 求基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵;

(2) 求向量 $\gamma=(1,3,0)^T$ 关于基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的坐标。

五、（10 分）已知

$$\alpha_1=(0,4,2)^T,\quad \alpha_2=(1,1,0)^T,\quad \alpha_3=(-2,4,3)^T,\quad \alpha_4=(-1,1,1)^T$$

求生成子空间 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 的维数和一组基。

六、（10 分）已知 $\alpha_1=(1,1,-1)^T,\alpha_2=(0,1,0)^T,\alpha_3=(1,0,1)^T$，把 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 化为欧氏空间 R^3 的标准正交基。

七、（10 分）设 A 与 B 是同阶方阵，且 A、B、$A+B$ 都可逆，证明：$\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 也可逆。

八、（10 分）实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$，其中已知 $A=\begin{bmatrix}2 & -2 & 0\\ -2 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 0\end{bmatrix}$。

(1) 求一正交变换 $X=QY$，将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形;

(2) 判断二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 是否正定。

九、（10 分）已知 A,B 都是 4 阶矩阵， $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1]$、 $B=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_2]$

且 $|A|=3,|B|=-1$，求行列式$|A+B|$的值。

十、（10 分）设 A 是 3 阶矩阵，α 是 3 元列向量，已知向量组$\alpha,\ A\alpha,\ A^2\alpha$ 线性无关，

且 $A^3\alpha=3A\alpha-2A^2\alpha$.

(1) 记 $P=(\alpha,A\alpha,A^2\alpha)$，求矩阵 B，使得 $A=PBP^{-1}$；

(2) 证明：矩阵 $C=(\alpha,A\alpha,A^4\alpha)$ 可逆；

(3) 证明：矩阵 CC^T 正定。