武汉大学 2010-2011 学年第一学期

《高等数学 B1》考试试卷（A 卷）

一、 计算题：（每题 7 分，共 56 分）

1. 求由方程 $\ln xy = e^{x+y}$ 所确定的隐函数 $y = y(x)$ 的导数 $\dfrac{dy}{dx}$.

2. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1+x^2}-1}$.　　3. 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3 dt}{\int_0^x \cos t^2 dt}$.

4. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left[\left(x+\dfrac{2}{n}\right)+\left(x+\dfrac{4}{n}\right)+\cdots+\left(x+\dfrac{2n}{n}\right)\right]$.

5. 求不定积分 $\int \dfrac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}dx$.

6. 求定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(1-\sin x)dx$.

7. 求方程 $y'+2xy = xe^{-x^2}$ 的通解.

8. 设 $f'(x)=e^{-x^2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, 求 $\int_0^{+\infty} x^2 f(x)dx$.

二、(7 分) 证明当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\sin x > \dfrac{2}{\pi}x$.

三、(10 分) 设抛物线 $y = ax^2+bx+c$ 过原点，当 $0\le x\le 1$ 时，$y\ge 0$. 又已知该抛物线与 x 轴及直线 $x=1$ 所围成的图形的面积为 $\dfrac{1}{3}$，试确定 a,b,c, 使此图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积 V 最小。

四、(7 分) 试判断函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}-1}{x^{2n}+1}$ 的间断点及其类型。

五、(10 分) 设函数 $f(x), g(x)$ 满足 $f'(x)=g(x)$, $g'(x)=2e^x - f(x)$, 且 $f(0)=0$, $g(0)=2$, 求 $f(x), g(x)$ 的表达式。

六、(10 分)设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内可导，且 $f(0)+f(1)+f(2)=3$, $f(3)=1$，试证：必存在 $\xi\in(0,3)$, 使 $f'(\xi)=0$.

得最大值大于等于1，最小值小于等于1，故得一值等于一且处于1到2之间

武汉大学 2010-2011 学年第一学期

《高等数学 B1》标准答案（A 卷）

一、1、$\dfrac{y(xe^{x+y}-1)}{x(1-ye^{x+y})}$；2、$\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$；3、 0； 4、 $x+1$；

5、$\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{\sqrt{1+e^{2x}}+1}+C$；6、$\dfrac{\pi^2}{8}-1$；7、$y=(\dfrac{1}{2}x^2+C)e^{-x^2}$；

8、$\int_0^{+\infty} x^2 f(x)dx=\dfrac{1}{3}x^3 f(x)\Big|_0^{+\infty}-\dfrac{1}{3}\int_0^{+\infty} x^3 f'(x)dx$

$=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^{-3}}+\dfrac{1}{6}(x^2e^{-x^2}+e^{-x^2}-1)\Big|_0^{+\infty}=-\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{-3x^{-4}}=-\dfrac{1}{6}$

二、证明：设 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$，则 $f'(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\dfrac{\cos x}{x^2}(x-\tan x)<0$，所以在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 内 $f(x)$ 单调递减，故 $f(x)>f(\dfrac{\pi}{2})=\dfrac{2}{\pi}$.即证得结论。

三、$a=-\dfrac{5}{4},b=\dfrac{3}{2},c=0$

四、$f(x)=\begin{cases}-1, & |x|<1, x=-1,\\ 0, & x=1\\ \dfrac{1}{x}, & |x|>1\end{cases}$，$x=1$ 是第一类间断点。

五、$f(x)=\sin x-\cos x+e^x, g(x)=\cos x+\sin x+e^x$

六、证明：因为 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，所以在 $[0,2]$ 上存在最大值 M 和最小值 m.于是 $m\le f(0)\le M$, $m\le f(1)\le M$, $m\le f(2)\le M$, 故 $m\le\dfrac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}\le M$, 由介值定理知，至少存在一点 $c\in[0,2]$ 使得 $f(c)=\dfrac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}=1$, 因为 $f(c)=1=f(3)$，且 $f(x)$ 在 $[c,3]$ 上连续，在 $(c,3)$ 内可导，所以由罗尔定理知，必存在 $\xi\in(c,3)\subset(0,3)$, 使 $f'(\xi)=0.$