武汉大学 2012-2013 学年第一学期期末考试

高等数学 B1（A 卷答题卡）

姓名 ____________　　班级 ____________

考生学号												
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

注意事项

1.答题前，考生先将自己的姓名、学号填写清楚，并填涂相应的考号信息点。
2.解答题必须使用黑色墨水的签字笔书写，不得用铅笔或圆珠笔作解答题：字体工整、笔迹清楚。
3.请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答题无效；在草稿纸、试题卷上答题无效。
4.保持卷面清洁，不要折叠、不要弄破。

一、（5 分）若 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$，且在 x_0 的某去心邻域内 $g(x)\neq 0$，$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 必等于 0，为什么？

二、(8 分)设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{ae^x+be^{-x}-c}{\sin^2 x} & ,x\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}),\text{且}x\neq 0,\\ 1 & ,x=0.\end{cases}$ 试确定常数 a,b,c 的一组值，使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

三、（6 分）设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处二阶可导，且 $f(a)=f'(a)=0, f''(a)=1$, 求极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)\sin(x-a)}{(e^x-e^a)^3}$.

四、（5 分）指出 $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ 的间断点及其类型。

五、（5 分）设 u,v 均是 x 的可微函数，$y(x)=\ln\sqrt{u^2+v^2}$，求 dy

六、（5 分）求函数 $I(x)=\int_e^x\dfrac{\ln t}{t^2-2t+1}dt$ 在区间 $[e,e^2]$ 上的最大值.

七、（5 分）求 $\int_{-2}^{-1}\dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

八、（5 分）求微分方程 $y''+3y'=\cos 2x$ 的通解。

九、（5 分）若在 x_0 的某去心邻域内 $|f(x)|\le\alpha(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$，试证明：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$

十、（5 分）设$y=y(x)$由方程$y=f\left[2x+\varphi(y)\right]$所确定,其中$f$与$\varphi$ 都是可导函数,求y'.

十一、（6分）设 $f(x)=\lim\limits_{t\to\infty}x(1+\frac{1}{t})^{4xt}$，求 $f''(x)$.

十二、（6 分）求函数$y=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$的极值

十三、（8分）求由不等式$\sin^3 x\le y\le\cos^3 x, 0\le x\le\frac{\pi}{4}$所确定的区域的面积.

十四、（8 分）设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且 $f(0)=0$，对任意 $x\in(0,1)$有 $f(x)\ne 0$， 证明存在 $c\in(0,1)$使$\frac{nf'(c)}{f(c)}=\frac{f'(1-c)}{f(1-c)}$（$n$为自然数）。

十五、（8 分）设 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$上连续，$0<a<b$.若$\int_0^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$ 收敛，证明：$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=f(0)\ln\frac{b}{a}$.

十六、（10 分）设位于第一象限的曲线 $y=f(x)$ 过点$(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2})$，其上任一点$P(x,y)$处的法线与 y 轴的交点为Q，且线段 PQ 被 x 轴平分。

1) 求曲线 $y=f(x)$ 的方程。2) 已知曲线 $y=\sin x$ 在$[0,\pi]$上的弧长为l，试用l表示曲线 $y=f(x)$ 的弧长。

武汉大学 2012-2013 学年第一学期期末考试高等数学 B1 解答

一、(5 分) 解:　因为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}\cdot g(x) = A\cdot 0 = 0$ 重点

二、(8 分) 解:要使$f(x)$在$x=0$处连续,须$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 1$

即$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ae^x+be^{-x}-c}{\sin^2 x}=1$, 又$x\to 0$时,$\sin^2 x\to 0$, 则$\lim\limits_{x\to 0}(ae^x+be^{-x}-c)=0$, ...(2 分)

即$a+b-c=0$　　(1)

又$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ae^x+be^{-x}-c}{\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ae^x+be^{-x}-c}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ae^x-be^{-x}}{2x}=1$

则$\lim\limits_{x\to 0}(ae^x-be^{-x})=0$,即$a-b=0$　　(2) ...2 分

又$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ae^x+be^x-c}{\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ae^x+be^{-x}}{2}=\dfrac{a+b}{2}=1$, 即$a+b=2$　　(3), ...2 分

解(1)(2)(3)$a=b=1,c=2$即$a=b=1,c=2$时,$f(x)$在$x=0$处连续 ...2 分

三、(5 分) 解: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)\sin(x-a)}{(e^x-e^a)^3}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)\sin(x-a)}{e^{3a}(e^{x-a}-1)^3}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{e^{3a}(x-a)^2}$ ... 3 分

$=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{e^{3a}}\dfrac{f'(x)}{2(x-a)}=\dfrac{1}{2e^{3a}}\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)-f'(a)}{x-a}=\dfrac{1}{2e^{3a}}f''(a)=\dfrac{1}{2e^{3a}}$ ... 2 分

四、(5 分) 因为

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0$, 。。。2分

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=1$, 。。。2分

所以 $x=0$ 是跳跃间断点。。。1 分

五、(5 分) 解: $dy=y'(x)dx$ ... 2 分 $=\dfrac{u\cdot u'+v\cdot v'}{u^2+v^2}\mathrm{d}x$ ... 3 分 Dx勿忘

六、(5 分) 解: 由$I'(x)=\dfrac{\ln x}{x^2-2x+1}=\dfrac{\ln x}{(1-x)^2}>0$, $x\in\left[e,\ e^2\right]$

知$I'(x)$在$\left[e,\ e^2\right]$上单调增加, ... 2 分

故 $\max\limits_{e\le x\le e^2} I(x)=\int_e^{e^2}\dfrac{\ln t}{(t-1)^2}dt=-\int_e^{e^2}\ln t\,d\left(\dfrac{1}{t-1}\right)$　　... 2 分

$=-\dfrac{\ln t}{t-1}\Big|_e^{e^2}+\int_e^{e^2}\dfrac{1}{(t-1)t}dt=\dfrac{1}{e-1}-\dfrac{2}{e^2-1}+\ln\dfrac{t-1}{t}\Big|_e^{e^2}=\dfrac{1}{e+1}+\ln\dfrac{e+1}{e}$

$=\ln(1+e)-\dfrac{e}{1+e}\cdots$ 1分

七、令 $x=\dfrac{1}{t}$，… 1分

原式 $=\int_{-\frac{1}{2}}^{-1}\dfrac{t}{\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}}\left(-\dfrac{1}{t^2}\right)dt\cdots$ 2分

$=\int_{-\frac{1}{2}}^{-1}\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\arcsin t\Big|_{-\frac{1}{2}}^{-1}=-\dfrac{\pi}{3}\cdots$ 2分 去根号时要注意

八、解 特征方程 $r^2+3r=0$ 的根为 $r_1=0$，$r_2=-3$，对应齐次方程的通解为

$y_C=C_1+C_2e^{-3x}$，… 2分

设特解为 $y_p=A\cos 2x+B\sin 2x$，… 1分

代入方程得 $y_p=-\dfrac{1}{13}\cos 2x+\dfrac{3}{26}\sin 2x$，故所求通解为

$y=C_1+C_2e^{-3x}-\dfrac{1}{13}\cos 2x+\dfrac{3}{26}\sin 2x\cdots$ 2分 注意阶数

九、（5分）证：因 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$ 故 $\lim\limits_{x\to x_0}[-\alpha(x)]=0\cdots$ 2分

又因 $-\alpha(x)\le f(x)\le\alpha(x)\cdots$ 2分

从而 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0\cdots$ 1分 夹逼

十、（5分）解：$y'=f'[2x+\varphi(y)]\cdot[2+\varphi'(y)y']$， … 3分

$y'=\dfrac{2f'[2x+\varphi(y)]}{1-f'[2x+\varphi(y)]\cdot\varphi'(y)}\cdots$ 2分

十一、（6分）$f(x)=x\lim\limits_{t\to\infty}\left[(1+\dfrac{1}{t})^t\right]^{4x}=xe^{4x}\cdots$ 2分

所以 $f'(x)=e^{4x}+4xe^{4x}\cdots$ 2分

$f''(x)=4e^{4x}+4e^{4x}+16xe^{4x}=8e^{4x}(1+2x)\cdots$ 2分

十二、（8分）解：定义域：$(-\infty,+\infty)$，连续，$y'=\dfrac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}$ $(x\ne 0)$

驻点 $x_1=\dfrac{2}{5}$，导数不存在点 $x_2=0$，… 2分

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\frac{2}{5})$	$\frac{2}{5}$	$(\frac{2}{5},+\infty)$

$f'(x)$	+		−	0	+
$f(x)$	↑		↓		↑

… 4 分

故函数有极大值$y(0)=0$,极小值$y\left(\frac{2}{5}\right)=-\frac{3}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^{2/3}$ … 2 分

十三、(8分) 解:$S=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos^3 x-\sin^3 x)dx$ … 2分

$=\int_0^{\pi/4}(1-\sin^2 x)d\sin x+\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos^2 x)d\cos x$ … 2分

$=(\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+\cos x-\frac{1}{3}\cos^3 x)\Big|_0^{\pi/4}$ … 2 分

$=\frac{2}{\sqrt{2}}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}-1+\frac{1}{3}=\frac{5\sqrt{2}}{6}-\frac{2}{3}$. … 2 分

十四、(8 分) 证明:令$F(x)=f^n(x)f(1-x)$,(n为自然数), … 3 分
则$F(x)$在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导,因$f(0)=0$,则$F(0)=F(1)=0$, 即$F(x)$在$[0,1]$上满足罗尔定理条件,

则至少存在$c\in(0,1)$使$F'(c)=0$, … 2 分

而$F'(x)=nf^{n-1}(x)\cdot f'(x)\cdot f(1-x)-f^n(x)f'(1-x)$, 且因对任意$\xi x\in(0,1)$有$f(x)\neq 0$
则由$nf^{n-1}(c)\cdot f'(c)\cdot f(1-x)-f^n(c)f'(1-c)=0$,

… 3 分

得到$\frac{nf'(c)}{f(c)}=\frac{f'(1-c)}{f(1-c)}$ $(c\in(0,1))$ … 1 分 妙不可言

十五、(8 分) 由于$\int_0^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$ 收敛, 故$\forall\varepsilon>0$有$\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{f(ax)}{x}dx=\int_{\varepsilon a}^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$, … 2 分

$\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\int_{\varepsilon a}^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx-\int_{\varepsilon b}^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx=\int_{\varepsilon a}^{\varepsilon b}\frac{f(x)}{x}dx=\int_a^b\frac{f(\varepsilon x)}{x}dx$, … 2 分

由积分中值定理知存在$\xi\in[a,b]$使得$\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=f(\varepsilon\xi)\int_a^b\frac{1}{x}dx$, … 2 分

令$\varepsilon\to 0$,则有$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=f(0)\ln\frac{b}{a}$. … 2 分

解法 2: 由于$\int_0^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$ 收敛, 所以

$\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)}{ax}d(ax)-\int_0^{+\infty}\frac{f(bx)}{bx}dx=0$ (6 分)

十六、（10 分）1）曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x,y)$ 处的法线方程为 $Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x)$，令

$X=0$，则 $Y=y+\frac{x}{y'}$，故点 Q 的坐标为 $(0,y+\frac{x}{y'})$，。。。2 分

由题设知 $y+y+\frac{x}{y'}=0$，即 $2ydy+xdx=0$，积分得 $x^2+2y^2=C$，。。。2 分

由初值条件可得 $C=1$，所以曲线方程为 $x^2+2y^2=1$。。。。2 分

2）曲线 $y=\sin x$ 在 $[0,\pi]$ 上的弧长为 $l=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos^2 x}dx$，。。。1 分

曲线 $y=f(x)$ 的参数方程为 $\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta \end{cases}$，

故 $s=\int_0^{\pi/2}\sqrt{\sin^2\theta+\frac{1}{2}\cos^2\theta}\,d\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\sin^2\theta}\,d\theta$ 。。。。2 分

令 $\theta=\frac{\pi}{2}-t$。则 $s=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sqrt{1+\cos^2 t}\,d(-t)=\frac{\sqrt{2}}{4}l$ 。。。。1 分