《线性代数》(清华版) 部分习题参考答案

赵燕芬
武汉大学数学与统计学院
Email:wangzhaoyanfen@gmail.com

2008.12

目　录

第一章　行列式

计算下列数字元素行列式

10. $$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 8 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 10 \times (-1)^{10+10} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 8 & \cdots & 0 & 0 \\ 9 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = 10 \times (-1)^{\frac{9\times 8}{2}} 9! = 10!.$$

11. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,4]{r_i - r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -8.$$

12. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,4]{r_1 + r_i} \begin{vmatrix} 10 & 10 & 10 & 10 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[i=4,3,2]{c_i - c_{i-1}} 10 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -3 & 1 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{展开}]{\text{按}r_1} 10 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3]{r_1 + r_i} 10 \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[i=1,2]{c_i - c_3} 10 \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 160.$$

14. $$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 6 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_5} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 6 & 5 \\ 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4 - r_1\times 2, r_5 - r_1 \times 3]{r_2 - r_1 \times 2, r_3 - r_1 \times 3} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 7 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 8 & 7 \\ 0 & 3 & 2 & 9 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=3,4,5]{r_i - r_2} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_5 - r_4 \times 2} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -12.$$

16. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3 \leftrightarrow r_5} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$= -(-1)^{3+2} \times (8-18) \times (6-4) = -20$$

17. $$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 8 \end{vmatrix} = (-1)^{3\times 2}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -60.$$

证明下列恒等式

19. 由行列式的线性性质，可将左边的行列式拆分为 4 个行列式的和, 即

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_1x & c_1 \\ a_2 & a_2x & c_2 \\ a_3 & a_3x & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1x & a_1x & c_1 \\ b_2x & a_2x & c_2 \\ b_3x & a_3x & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1x & b_1 & c_1 \\ b_2x & b_2 & c_2 \\ b_3x & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$
$$= 0 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1x & b_1x & c_1 \\ a_2x & b_2x & c_2 \\ a_3x & b_3x & c_3 \end{vmatrix} + 0 = (1-x^2)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \text{右边}.$$

20. $$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+x & 1+0 & 1+0 & 1+0 \\ 1+0 & 1-x & 1+0 & 1+0 \\ 1+0 & 1+0 & 1+y & 1+0 \\ 1+0 & 1+0 & 1+0 & 1-y \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & y & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -x & 0 & 1 \\ 0 & 0 & y & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -y \end{vmatrix}$$
$$= xy^2 - xy^2 + x^2y - x^2y + x^2y^2 = x^2y^2.$$

20. 另证：若 $x=0$ 或 $y=0$, 等式显然成立. 当 $xy \neq 0$ 时,

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,4,5]{r_i - r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -x & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & y & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -y \end{vmatrix}$$
$$\xlongequal[\substack{c_1+\frac{1}{y}c_4 \\ c_1+\frac{1}{-y}c_5}]{\substack{c_1+\frac{1}{x}c_2 \\ c_1+\frac{1}{-x}c_3}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -y \end{vmatrix} = x^2y^2.$$

21. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} \xlongequal[c_3-c_1]{c_2-c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^3 & b^3-a^3 & c^3-a^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c^3-a^3) - (c-a)(b^3-a^3)$$
$$= (b-a)(c-a)(c^2+ac+a^2-b^2-ab-a^2) = (b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c).$$

22. $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \\ 0 & c^2-a^2 & c^3-a^3 \end{vmatrix} = (b^2-a^2)(c^3-a^3)-(c^2-a^2)(b^3-a^3)$

$= (b-a)(c-a)[(b+a)(c^2+ac+a^2)-(c+a)(b^2+ab+a^2)] = (b-a)(c-a)[bc^2+ac^2-b^2c-ab^2]$

$= (b-a)(c-a)(c-b)(ab+bc+ca) = (ab+bc+ca)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$

计算下列各题

23. $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 2 & 0 & b & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = d\times(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} 0 & 2 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 4 & 5 \end{vmatrix} = -d\times c\times(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & a \\ b & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -dc\times(0-ab) = abcd.$$

24. $$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} b & 1 & 0 \\ -1 & c & 1 \\ 0 & -1 & d \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \\ 0 & -1 & d \end{vmatrix}$$

$$= a(bcd+b+d)-(-cd) = abcd+ab+ad+cd.$$

25. $$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} \xlongequal[i=4,3,2]{c_i-c_{i-1}} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2a+3 & 2a+5 \\ b^2 & 2b+1 & 2b+3 & 2b+5 \\ c^2 & 2c+1 & 2c+3 & 2c+5 \\ d^2 & 2d+1 & 2d+3 & 2d+5 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=3,4]{c_i-c_2} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 4 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 4 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 4 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

26. $$\begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ \frac{b+c}{2} & \frac{c+a}{2} & \frac{a+b}{2} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ \frac{b+c}{2} & \frac{c+a}{2} & \frac{a+b}{2} & \frac{1+1}{2} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ b & c & a & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ c & a & b & 1 \end{vmatrix}\right] = 0.$$

$$27.\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2 \leftrightarrow c_4} -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 \\ b_4 & a_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_4} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ b_4 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_4 & a_4 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} = (a_1a_4 - b_1b_4)(a_2a_3 - b_2b_3).$$

$$28.\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n-1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & n \end{vmatrix} \xlongequal[i=1,3,4,\cdots,n]{r_i - r_2} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)\begin{vmatrix} 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n-3 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n-2 \end{vmatrix} = -2(n-2)!$$

$$29.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & a-1 & a-2 & \cdots & a-n \\ a^2 & (a-1)^2 & (a-2)^2 & \cdots & (a-n)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a^n & (a-1)^n & (a-2)^n & \cdots & (a-n)^n \end{vmatrix} \xlongequal[\text{行列式}]{n+1\text{阶}vandermonde} \prod_{0 \le i < j \le n} [(a-j)-(a-i)]$$

$$= (-1)^{1+2+\cdots+n} 1!2!3!\cdots n! = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{k=1}^{n} k!$$

$$30.\begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & a_1^{n-2}b_1^2 & \cdots & a_1b_1^{n-1} & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & a_2^{n-2}b_2^2 & \cdots & a_2b_2^{n-1} & b_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2}b_{n+1}^2 & \cdots & a_{n+1}b_{n+1}^{n-1} & b_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[a_i^n]{\text{第}i\text{行提取}} a_1^n a_2^n \cdots a_{n+1}^n \begin{vmatrix} 1 & \frac{b_1}{a_1} & (\frac{b_1}{a_1})^2 & \cdots & (\frac{b_1}{a_1})^n \\ 1 & \frac{b_2}{a_2} & (\frac{b_2}{a_2})^2 & \cdots & (\frac{b_2}{a_2})^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} & (\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}})^2 & \cdots & (\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}})^n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{行列式}]{n+1\text{阶}vandermonde} \prod_{i=1}^{n+1} a_i^n \prod_{1 \le i < j \le n+1} \left(\frac{b_j}{a_j} - \frac{b_i}{a_i} \right) = \prod_{1 \le i < j \le n+1} (a_ib_j - a_jb_i).$$

36. 证明下列等式

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} = (1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})\prod_{i=1}^{n} a_i.$$

方法一:

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n+1]{r_i-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,\cdots,n+1]{c_1+c_i\times\frac{1}{a_{i-1}}} \begin{vmatrix} 1+\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$= (1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})\prod_{i=1}^{n} a_i.$$

方法二:

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i-r_1} \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ -a_1 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_1 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1+c_i\times\frac{a_1}{a_i}} \begin{vmatrix} 1+a_1+\sum_{i=2}^{n}\frac{a_1}{a_i} & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = (1+a_1+\sum_{i=2}^{n}\frac{a_1}{a_i})a_2\cdots a_n = a_1a_2\cdots a_n(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}).$$

方法三:

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} \xlongequal[i=1,2,\cdots,n]{r_i\text{提取}a_i} a_1a_2\cdots a_n \begin{vmatrix} 1+\frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_1} & \cdots & \frac{1}{a_1} \\ \frac{1}{a_2} & 1+\frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n} & \frac{1}{a_n} & \cdots & 1+\frac{1}{a_n} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_1+r_i} a_1a_2\cdots a_n \begin{vmatrix} 1+\sum\limits_{i=1}^n \frac{1}{a_i} & 1+\sum\limits_{i=1}^n \frac{1}{a_i} & \cdots & 1+\sum\limits_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \\ \frac{1}{a_2} & 1+\frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n} & \frac{1}{a_n} & \cdots & 1+\frac{1}{a_n} \end{vmatrix}$$

$$= a_1a_2\cdots a_n(1+\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{1}{a_2} & 1+\frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n} & \frac{1}{a_n} & \cdots & 1+\frac{1}{a_n} \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{c_i-c_1} a_1a_2\cdots a_n(1+\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{a_2} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n} & \frac{1}{a_n} & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= a_1a_2\cdots a_n(1+\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}).$$

方法 4：

$$\begin{aligned}
D_n &= \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1+0 & 1+0 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} + a_n \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_{n-1} \end{vmatrix} \\
&= a_1a_2\cdots a_{n-1} + a_nD_{n-1} = \frac{1}{a_n}\prod_{i=1}^n a_i + a_nD_{n-1} \\
&= \frac{1}{a_n}\prod_{i=1}^n a_i + a_n\left[\frac{1}{a_{n-1}}\prod_{i=1}^{n-1} a_i + a_{n-1}D_{n-2}\right] \\
&= \left(\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n-1}}\right)\prod_{i=1}^n a_i + a_na_{n-1}D_{n-2} \\
&= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&= \left(\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n-1}}+\cdots+\frac{1}{a_2}\right)\prod_{i=1}^n a_i + a_na_{n-1}\cdots a_2D_1 \\
&= \left(\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n-1}}+\cdots+\frac{1}{a_2}\right)\prod_{i=1}^n a_i + a_na_{n-1}\cdots a_2(1+a_1) \\
&= \left(1+\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}\right)a_1a_2\cdots a_n.
\end{aligned}$$

方法 5：

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1+0 & \cdots & 1+0 \\ 1+0 & 1+a_2 & \cdots & 1+0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1+0 & 1+0 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & 1 & \cdots & \\ 0 & 1 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & a_n \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$
$$= a_2a_3\cdots a_n + a_1a_3\cdots a_n + \cdots + a_1a_2\cdots a_{n-1} + a_1a_2\cdots a_n$$
$$= \left(1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)a_1a_2\cdots a_n.$$

37. 证明 $\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} = x^n + \sum\limits_{k=1}^{n} a_k x^{n-k}.$

方法一: 从最后一列起, 依次将后一列的 x 倍加到前一列:

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ a_n+a_{n-1}x+\cdots+x^n & \bigstar & \bigstar & \cdots & a_2+x(x+a_1) & x+a_1 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ a_n+a_{n-1}x+\cdots+x^n & \bigstar & \bigstar & \cdots & a_2+x(x+a_1) & x+a_1 \end{vmatrix}$$
$$\xlongequal[\text{展开}]{\text{按}c_1} (a_n+a_{n-1}x+\cdots+a_1x^{n-1}+x^n)(-1)^{n+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}$$
$$= (a_n+a_{n-1}x+\cdots+a_1x^{n-1}+x^n)(-1)^{n+1}(-1)^{n-1} = \text{右边}.$$

方法二: 按 c_1 展开

$$\text{左边} = D_n = xD_{n-1} + (-1)^{n+1}a_n \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix} = xD_{n-1} + (-1)^{n+1}a_n(-1)^{n-1} = xD_{n-1} + a_n$$
$$= x[xD_{n-2}+a_{n-1}] + a_n = x^2D_{n-2} + a_{n-1}x + a_n = \cdots\cdots\cdots = x^{n-2}D_2 + a_3x^{n-3} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

再将 $D_2=\begin{vmatrix} x & -1 \\ a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}=x^2+a_1x+a_2$ 代入

$$x^{n-2}D_2+a_3x^{n-3}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

即可.

计算下列行列式：

40. $\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{5}{2} & \frac{2}{5} & \frac{3}{2} \\ 3 & -\frac{1}{2} & \frac{21}{5} & 15 \\ \frac{2}{3} & -\frac{9}{2} & \frac{4}{5} & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{vmatrix} \xlongequal{r_3-2r_1} \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{5}{2} & \frac{2}{5} & \frac{3}{2} \\ 3 & -12 & \frac{21}{5} & 15 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{vmatrix} \xlongequal{c_4+c_1} \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{5}{2} & \frac{2}{5} & -1 \\ 3 & -12 & \frac{21}{5} & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{5}{7} \end{vmatrix}$

$=\frac{1}{2}\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{5} & -1 \\ 3 & \frac{21}{5} & 3 \\ -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{5}{7} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\times\frac{1}{15}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{7}\begin{vmatrix} 5 & 6 & -15 \\ 15 & 21 & 15 \\ -1 & -1 & 5 \end{vmatrix}$

$\xlongequal{r_2+r_1} -\frac{1}{2}\times\frac{1}{15}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{7}\begin{vmatrix} 5 & 6 & -15 \\ 20 & 27 & 0 \\ -1 & -1 & 5 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1+3r_3} -\frac{1}{2}\times\frac{1}{15}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{7}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 20 & 27 & 0 \\ -1 & -1 & 5 \end{vmatrix}$

$=-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{15}\times\dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{7}\times 5\times(54-60)=\dfrac{1}{35}.$

41.方法一: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & -n \\ 1 & 1 & \cdots & -n & 1 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 1 & -n & \cdots & 1 & 1 \\ -n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & -n \\ 0 & 0 & \cdots & -n-1 & 1+n \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -n-1 & \cdots & 0 & 1+n \\ -n-1 & 0 & \cdots & 0 & 1+n \end{vmatrix}$

$\xlongequal[i=1,2,\cdots,n-1]{c_n+c_i} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & -n-1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ -n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\times(-1)^n\times(n+1)^{n-1}$

$=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(n+1)^{n-1}.$

方法二: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & -n \\ 1 & 1 & \cdots & -n & 1 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 1 & -n & \cdots & 1 & 1 \\ -n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_1+r_i} \begin{vmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & \cdots & -n & 1 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 1 & -n & \cdots & 1 & 1 \\ -n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i+r_1} \begin{vmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & -n-1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ -n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \times (-1)^n \times (n+1)^{n-1}$

$= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(n+1)^{n-1}.$

42.方法一: $\begin{vmatrix} a_1+\lambda_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+\lambda_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+\lambda_3 & \vdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+\lambda_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1+\lambda_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & a_2+\lambda_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3+\lambda_3 & \vdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+\lambda_n \end{vmatrix}$

$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n+1]{r_i-r_1} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ -1 & \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & \\ -1 & 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \lambda_3 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,\cdots,n+1]{c_1+c_i\times\frac{1}{\lambda_{i-1}}} \begin{vmatrix} 1+\frac{1}{\lambda_1}+\cdots+\frac{1}{\lambda_n} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix}$

$= (1+\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{\lambda_i})\prod\limits_{i=1}^{n}\lambda_i.$

方法二: $\begin{vmatrix} a_1+\lambda_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+\lambda_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+\lambda_3 & \vdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+\lambda_n \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i-r_1} \begin{vmatrix} a_1+\lambda_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ -\lambda_1 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -\lambda_1 & 0 & \lambda_3 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix}$

$\xlongequal{c_1+c_i\times\frac{\lambda_1}{\lambda_i}} \begin{vmatrix} a_1+\lambda_1+\sum\limits_{i=2}^{n}\frac{\lambda_1}{\lambda_i} & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix} = (a_1+\lambda_1+\sum\limits_{i=2}^{n}\frac{\lambda_1}{\lambda_i})\lambda_2\cdots\lambda_n = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n(1+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}).$

43. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix} \xlongequal[i=n-1,n-2,\cdots,2]{r_{i+1}-r_i} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{c_i-c_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & -n & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1+c_i\times\frac{1}{n}} \begin{vmatrix} 1+\sum\limits_{i=1}^{n-1}\frac{i}{n} & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -n & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{展开}]{\text{按}c_1} \frac{1}{2}(n+1)\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -n \\ 0 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & -n & \cdots & 0 & 0 \\ -n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$= \frac{1}{2}(n+1)(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}(-n)^{n-1} = \frac{1}{2}(n+1)(-1)^{\frac{n(n-1)}{n}}\frac{1}{2}(n+1)n^{n-1}.$$

方法二:

$$\text{原式} \xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{c_1+c_i} \begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ \frac{n(n+1)}{2} & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ \frac{n(n+1)}{2} & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{n(n+1)}{2} & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \frac{n(n+1)}{2} & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix} = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 1 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=n-1,\cdots,2]{r_{i+1}-r_i} \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{展开}]{\text{按}r_1} \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n-1]{c_1+c_i} \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} -1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ -1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}_{n-1} \xlongequal[i=2,3,\cdots,n-1]{c_i+c_1} \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & -n \\ -1 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & -n & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$\xlongequal[\text{展开}]{\text{按}c_{n-1}} \frac{n(n+1)}{2}(-1)^{1+(n-1)}(-1) \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & -n \\ 0 & \cdots & -n & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ -n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}_{n-1} = \frac{n(n+1)}{2}(-1)^n(-1)(-1)^{\frac{(n-2)(n-3)}{2}}(-n)^{n-2}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{n+1}{2} n^{n-1}.$$

44. 证明 $v_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & x_3^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \left(\sum_{i=1}^n x_i\right) \prod_{1\le j<i\le n} (x_i - x_j).$

证: 考虑行列式 $n+1$ 阶 Vandermonde 行列式

$$V_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n & y \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 & y^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} & y^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & y^{n-1} \\ x_1^n & x_2^n & x_3^n & \cdots & x_n^n & y^n \end{vmatrix}$$

一方面, 由 Vandermonde 行列式的结果可知:

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= (y-x_1)(y-x_2)\cdots(y-x_n)\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j) \\ &= [y^n-(x_1+x_2+\cdots+x_n)y^{n-1}+\cdots+(-1)^n x_1x_2\cdots x_n]\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j). \end{aligned} \tag{1.1}$$

另一方面, 将 V_{n+1} 按第 $n+1$ 列展开得:

$$V_{n+1}=1\times A_{1,n+1}+y\times A_{2,n+1}+\cdots+y^{n-1}\times A_{n,n+1}+y^n\times A_{n+1,n+1}. \tag{1.2}$$

1.1 和 1.2 是关于 y 的恒等的多项式, 因此对应项的系数相等, 从而有:

$$A_{n,n+1}=-(x_1+x_2+\cdots+x_n)\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j).$$

注意到 $A_{n,n+1}=(-1)^{2n+1}V_n=-V_n$, 所以:

$$V_n=\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j).$$

45. 用数学归纳法证明导数关系式

$$\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^n \begin{vmatrix} a_{11}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}a_{1j}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}a_{2j}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}a_{nj}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

证: 用数学归纳法：当 $n=2$ 时,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{vmatrix} &= \frac{d}{dt}[a_{11}(t)a_{22}(t)-a_{12}(t)a_{21}(t)] \\ &= a_{22}(t)\frac{d}{dt}a_{11}(t)+a_{11}(t)\frac{d}{dt}a_{22}(t)-a_{21}(t)\frac{d}{dt}a_{12}(t)-a_{12}(t)\frac{d}{dt}a_{21}(t) \\ &= \begin{vmatrix} \frac{d}{dt}a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ \frac{d}{dt}a_{21}t & a_{22}t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}(t) & \frac{d}{dt}a_{12}(t) \\ a_{21}t & \frac{d}{dt}a_{22}t \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

结论成立.

假设结论对 $n-1$ 阶行列式成立, 那么对于 n 阶行列式 D , 首先将 D 按第一列展开:

$$D=a_{11}(t)A_{11}(t)+a_{21}(t)A_{21}(t)+\cdots+a_{n1}(t)A_{n1}(t).$$

由求导法则有:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}D &= \frac{d}{dt}a_{11}(t)A_{11}(t)+\frac{d}{dt}a_{21}(t)A_{21}(t)+\cdots+\frac{d}{dt}a_{n1}(t)A_{n1}(t) \\ &\quad +a_{11}(t)\frac{d}{dt}A_{11}(t)+a_{21}(t)\frac{d}{dt}A_{21}(t)+\cdots+a_{n1}(t)\frac{d}{dt}A_{n1}(t) \end{aligned}$$

其中

$$\frac{d}{dt}a_{11}(t)A_{11}(t)+\frac{d}{dt}a_{21}(t)A_{21}(t)+\cdots+\frac{d}{dt}a_{n1}(t)A_{n1}(t)=\begin{vmatrix} \frac{d}{dt}a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \frac{d}{dt}a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{d}{dt}a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{vmatrix} \tag{1.3}$$

由归纳假设，

$$\begin{aligned}
&a_{11}(t)\frac{d}{dt}A_{11}(t)+a_{21}(t)\frac{d}{dt}A_{21}(t)+\cdots+a_{n1}(t)\frac{d}{dt}A_{n1}(t)\\
&=a_{11}(t)\frac{d}{dt}M_{11}(t)+(-1)^{2+1}a_{21}(t)\frac{d}{dt}M_{21}(t)+\cdots+(-1)^{n+1}a_{n1}(t)\frac{d}{dt}M_{n1}(t)\\
&=a_{11}(t)\left[\begin{vmatrix} \frac{d}{dt}a_{22}(t) & a_{23}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \frac{d}{dt}a_{32}(t) & a_{33}(t) & \cdots & a_{3n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{d}{dt}a_{n2}(t) & a_{n3}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} a_{22}(t) & a_{23}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}a_{2n}(t) \\ a_{32}(t) & a_{33}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}a_{3n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2}(t) & a_{n3}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}a_{nn}(t) \end{vmatrix}\right]\\
&+(-1)^{1+2}a_{21}(t)\left[\begin{vmatrix} \frac{d}{dt}a_{12}(t) & a_{13}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \frac{d}{dt}a_{32}(t) & a_{33}(t) & \cdots & a_{3n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{d}{dt}a_{n2}(t) & a_{n3}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} a_{12}(t) & a_{13}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}a_{1n}(t) \\ a_{32}(t) & a_{33}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}a_{3n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2}(t) & a_{n3}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}a_{nn}(t) \end{vmatrix}\right]\\
&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+(-1)^{n+1}a_{n1}(t)\left[\begin{vmatrix} \frac{d}{dt}a_{22}(t) & a_{23}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \frac{d}{dt}a_{32}(t) & a_{33}(t) & \cdots & a_{3n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{d}{dt}a_{n-1,2}(t) & a_{n-1,3}(t) & \cdots & a_{n-1,n}(t) \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} a_{22}(t) & a_{23}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}a_{2n}(t) \\ a_{32}(t) & a_{33}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}a_{3n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,2}(t) & a_{n-1,3}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}a_{n-1,n}(t) \end{vmatrix}\right]\\
&=\begin{vmatrix} a_{11}(t) & \frac{d}{dt}a_{12}(t) & a_{13}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \frac{d}{dt}a_{22}(t) & a_{23}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \frac{d}{dt}a_{n2}(t) & a_{n3}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \frac{d}{dt}a_{13}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \frac{d}{dt}a_{23}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \frac{d}{dt}a_{n3}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{vmatrix}\\
&+\cdots\cdots\cdots\cdots+\begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & a_{n3}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}a_{nn}(t) \end{vmatrix}
\end{aligned} \tag{1.4}$$

$$1.3+1.4=\sum_{j=1}^{n}\begin{vmatrix} a_{11}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}a_{1j}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}a_{2j}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}a_{nj}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

.

结论得证!

46. 设 3 个点 $P_1(x_1,\ y_1), P_2(x_2,\ y_2), P_3(x_3,\ y_3)$ 不在一条直线上, 求过点 P_1, P_2, P_3 的圆的方程.

解: 设所求圆的方程为

$$a(x^2+y^2)+bx+cy+d=0(a\neq 0) \tag{1.5}$$

因为圆过点 P_1, P_2, P_3, 所以

$$\begin{cases} a(x_1^2+y_1^2)+bx_1+cy_1+d=0 \\ a(x_2^2+y_2^2)+bx_2+cy_2+d=0 \\ a(x_3^2+y_3^2)+bx_3+cy_3+d=0 \end{cases} \tag{1.6}$$

联立 1.5 和 1.6 得到一个关于 a, b, c, d 的齐次线性方程组, 且该方程组有非零解, 故

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & d \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & d \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & d \end{vmatrix}=0$$

此即为所求圆的方程.

47. 求使 3 点 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) 位于一直线上的充分必要条件.

解: 设这 3 点位于直线 $ax+by+c=0$ 上, 其中 a, b, c 不同时为 0，即有

$$\begin{cases} ax_1+by_1+c=0 \\ ax_2+by_2+c=0 \\ ax_3+by_3+c=0 \end{cases}$$

3 点位于直线等价于上述关于 a, b, c 的齐次线性方程组有非零解, 其充分必要条件是:

$$D=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

48. 写出通过 3 点 $(1,1,1)$, $(2,3,-1)$, $(3,-1,-1)$ 的平面方程.

解: 设通过这三点的平面方程为: $ax+by+cz=d$, 其中 a, b, c, d 不同时为 0, 由条件可得:

$$\begin{cases} a+b+c & =d \\ 2a+3b-c & =d \\ 3a-b-c & =d \end{cases}$$

因为

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&-1\\3&-1&-1\end{vmatrix}\xlongequal[r_3+r_1]{r_2+r_1}\begin{vmatrix}1&1&1\\3&4&0\\4&0&0\end{vmatrix}=-16$$

$$D_1=\begin{vmatrix}d&1&1\\d&3&-1\\d&-1&-1\end{vmatrix}\xlongequal[r_3+r_1]{r_2+r_1}\begin{vmatrix}d&1&1\\2d&4&0\\2d&0&0\end{vmatrix}=-8d$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1&d&1\\2&d&-1\\3&d&-1\end{vmatrix}\xlongequal[r_3+r_1]{r_2+r_1}\begin{vmatrix}1&d&1\\3&2d&0\\4&2d&0\end{vmatrix}=-2d$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&1&d\\2&3&d\\3&-1&d\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{vmatrix}1&1&d\\1&2&0\\2&-2&0\end{vmatrix}=-6d$$

于是

$$a=\frac{D_1}{D}=\frac{-8d}{-16},\quad b=\frac{D_2}{D}=\frac{-2d}{-16},\quad c=\frac{D_3}{D}=\frac{-6d}{-16}$$

代入方程 $ax+by+cz=d$ 化简得所求方程为：

$$4x+y+3z=8.$$

50. 已知 $a^2\neq b^2$, 证明方程组

$$\begin{cases}
ax_1 & & & + & & & bx_{2n} & =1\\
& ax_2 & & + & & bx_{2n-1} & & =1\\
& \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
& & ax_n & + & bx_{n+1} & & & =1\\
& & bx_n & + & ax_{n+1} & & & =1\\
& \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
& bx_2 & & + & & ax_{2n-1} & & =1\\
bx_1 & & & + & & & ax_{2n} & =1
\end{cases}$$

有唯一解, 并求解.

证: 由 $a^2\neq b^2$ 可知, a,b 不同时为 0. 若 $a\neq 0, b=0$, 显然方程组有唯一解 $x_i=\dfrac{1}{a}$. 同理若 $a=0,b\neq 0$, 方程组也有唯一解 $x_i=\dfrac{1}{b}$. 下面讨论 a,b 均不为 0 的情形. 因为方程组的系数行列式

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a &&&&&& b \\ & a &&&& b & \\ && \ddots && \iddots && \\ &&& a \quad b &&& \\ &&& b \quad a &&& \\ && \iddots && \ddots && \\ & b &&&& a & \\ b &&&&&& a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=0,1,\cdots,n-1]{r_{2n-i}+r_{1+i}\times\left(-\frac{b}{a}\right)} \begin{vmatrix} a &&&&&& b \\ & a &&&& b & \\ && \ddots && \iddots && \\ &&& a \quad b &&& \\ &&& 0 \quad \dfrac{a^2-b^2}{2} &&& \\ && \iddots && \ddots && \\ & 0 &&&& \dfrac{a^2-b^2}{2} & \\ 0 &&&&&& \dfrac{a^2-b^2}{2} \end{vmatrix}$$

$$= a^n \left(\frac{a^2-b^2}{a}\right)^n = (a^2-b^2)^n \neq 0.$$

所以方程组有唯一解. 下面求解：

由第 1 个方程和第 $2n$ 个方程

$$\begin{cases} ax_1 + bx_{2n} = 1 \\ bx_1 + ax_{2n} = 1 \end{cases}$$

可得：

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}} = \frac{a-b}{a^2-b^2} = \frac{1}{a+b}.$$

$$x_{2n} = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}} = \frac{a-b}{a^2-b^2} = \frac{1}{a+b}.$$

同理由第 2 个方程和第 $2n-1$ 个方程可以求出 $x_2 = x_{2n-1} = \dfrac{1}{a+b}$,$\cdots$ 由第 n 个方程和第 $n+1$ 个方程可以求出 $x_n = x_{n+1} = \dfrac{1}{a+b}$.

所以方程组的解为

$$x_j = \frac{1}{a+b},\ j = 1, 2, \cdots, 2n.$$

第二章　矩阵

下列 5 ~ 6 题的线性方程组中, p,q 取何值时, 方程组有解, 无解, 在有解的情况下, 求出它的全部解:

5 $\begin{cases} px_1 & +x_2 & +x_3 & =1 \\ x_1 & +px_2 & +x_3 & =p \\ x_1 & +x_2 & +px_3 & =p^2 \end{cases}$　　6. $\begin{cases} x_1 & -3x_2 & -6x_3 & =2x_2 & =-1 \\ x_1 & -x_2 & -2x_3 & +3x_4 & =0 \\ x_1 & +5x_2 & +10x_3 & -x_4 & =q \\ 3x_1 & +x_2 & +px_3 & +4x_4 & =1 \end{cases}$

解:

5 $(A,b) = \begin{pmatrix} p & 1 & 1 & 1 \\ 1 & p & 1 & p \\ 1 & 1 & p & p^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & p & p^2 \\ 1 & p & 1 & p \\ p & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1\times p]{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & p & p^2 \\ 0 & p-1 & 1-p & p-p^2 \\ 0 & 1-p & 1-p^2 & 1-p^3 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{r_3+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & p & p^2 \\ 0 & p-1 & 1-p & p-p^2 \\ 0 & 0 & (1-p)(p+2) & (1-p)(1+p^2) \end{pmatrix}$

(1) 当 $(1-p)(p+2) \neq 0$ 即 $p \neq 1$ 且 $p \neq -2$ 时, 方程组有唯一解, 此时

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & p & p^2 \\ 0 & p-1 & 1-p & p-p^2 \\ 0 & 0 & (1-p)(p+2) & (1-p)(1+p^2) \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3\div(1-p)(p+2)]{r_2\div(p-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & p & p^2 \\ 0 & 1 & -1 & -p \\ 0 & 0 & 1 & \frac{(1+p)^2}{p+2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2+r_3]{r_1-r_3\times p} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -\frac{p}{p+2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{p+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{(1+p)^2}{p+2} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{p+1}{p+2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{p+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{(1+p)^2}{p+2} \end{pmatrix}$$

由上述行最简形矩阵得到 $x_1 = -\dfrac{p+1}{p+2}$, $x_2 = \dfrac{1}{p+2}$, $x_3 = \dfrac{(1+p)^2}{p+2}$.

(2) 当 $p=-2$ 时, $(1-p)(p+2)=0$ 但 $(1-p)(1+p)^2 \neq 0$, 方程组无解.

(3) 当 $p=1$ 时, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & p & p^2 \\ 0 & p-1 & 1-p & p-p^2 \\ 0 & 0 & (1-p)(p+2) & (1-p)(1+p^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

此时方程组有无穷多解, 令 $x_2 = k_1$, $x_3 = k_2$ 得方程组的通解为：$(x_1, x-2, x_3) = (1-k_1-k_2, k_1, k_2)$, $(k_1, k_2$ 为任意常数).

6 $(A,b)=\begin{pmatrix}1&-3&-6&2&-1\\1&-1&-2&3&0\\1&5&10&-1&q\\3&1&p&4&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-r_1\times 3]{r_2-r_1,\ r_3-r_1}\begin{pmatrix}1&-3&-6&2&-1\\0&2&4&1&1\\0&8&16&-3&q+1\\0&10&p+18&-2&4\end{pmatrix}$

$\xrightarrow[r_4-5r_2\times p]{r_3-4r_2}\begin{pmatrix}1&-3&-6&2&-1\\0&2&4&1&1\\0&0&0&-7&q-3\\0&0&p-2&-7&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_4}\begin{pmatrix}1&-3&-6&2&-1\\0&2&4&1&1\\0&0&p-2&-7&-1\\0&0&0&-7&q-3\end{pmatrix}$

$\xrightarrow[r_4\div(-7)]{r_3-r_4}\begin{pmatrix}1&-3&-6&2&-1\\0&2&4&1&1\\0&0&p-2&0&2-q\\0&0&0&1&\frac{3-q}{7}\end{pmatrix}$

(1) 当 $p-2\neq 0$ 即 $p\neq 2$ 时, 方程组有唯一解, 此时

$$\begin{pmatrix}1&-3&-6&2&-1\\0&2&4&1&1\\0&0&p-2&0&2-q\\0&0&0&1&\frac{3-q}{7}\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3\div(p-2)}\begin{pmatrix}1&-3&-6&2&-1\\0&2&4&1&1\\0&0&1&0&\frac{2-q}{p-2}\\0&0&0&1&\frac{3-q}{7}\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2-r_4]{r_1-r_4\times 2}\begin{pmatrix}1&-3&-6&0&\frac{2q-13}{7}\\0&2&4&0&1-\frac{3-q}{7}\\0&0&1&0&\frac{2-q}{p-2}\\0&0&0&1&\frac{3-q}{7}\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2-r_3\times 4]{r_1+r_3\times 6}\begin{pmatrix}1&-3&0&0&\frac{2q-13}{7}+6\frac{2-q}{p-2}\\0&2&0&0&1-\frac{3-q}{7}-4\frac{2-q}{p-2}\\0&0&1&0&\frac{2-q}{p-2}\\0&0&0&1&\frac{3-q}{7}\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\div 2}\begin{pmatrix}1&-3&0&0&\frac{2q-13}{7}+6\frac{2-q}{p-2}\\0&1&0&0&\frac{1}{2}(1-\frac{3-q}{7}-4\frac{2-q}{p-2})\\0&0&1&0&\frac{2-q}{p-2}\\0&0&0&1&\frac{3-q}{7}\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+3r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&0&\frac{q-2}{2}\\0&1&0&0&\frac{1}{2}(1-\frac{3-q}{7}-4\frac{2-q}{p-2})\\0&0&1&0&\frac{2-q}{p-2}\\0&0&0&1&\frac{3-q}{7}\end{pmatrix}$$

由上述行最简形矩阵得到: $x_1=\dfrac{q-2}{2},\quad x_2=\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{3-q}{7}-4\dfrac{2-q}{p-2}),\quad x_3=\dfrac{2-q}{p-2},\quad x_4=\dfrac{3-q}{7}$

(2) 当 $p-2=0$ 且 $2-q\neq 0$ 时, 即 $p=2$ 且 $q\neq 2$ 时, 方程组无解.

(3) 当 $p=2$ 且 $q=2$ 时,

$$\begin{pmatrix}1&-3&-6&2&-1\\0&2&4&1&1\\0&0&p-2&0&2-q\\0&0&0&1&\frac{3-q}{7}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-3&-6&2&-1\\0&2&4&1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&1&\frac{1}{7}\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_4}\begin{pmatrix}1&-3&-6&2&-1\\0&2&4&1&1\\0&0&0&1&\frac{1}{7}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2-r_3]{r_1-2r_3}\begin{pmatrix}1&-3&-6&0&-\frac{9}{7}\\0&2&4&0&\frac{6}{7}\\0&0&0&1&\frac{1}{7}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\div 2}\begin{pmatrix}1&-3&-6&0&-\frac{9}{7}\\0&1&2&0&\frac{3}{7}\\0&0&0&1&\frac{1}{7}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+3r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&2&0&\frac{3}{7}\\0&0&0&1&\frac{1}{7}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

此时方程组有无穷多解, 令 $x_3=k$ 得方程组得通解为: $(x_1,x_2,x_3,x_4)=(0,\dfrac{3}{7}-2k,k,\dfrac{1}{7}),(k$ 为任意常数).

7. 将军点兵, 三三数之剩二, 五五数之剩三, 七七数之剩二, 问兵几何 (求在 500 至 1000 范围内的解)?

解: 设兵的总数为 m , 依题意可得:

$$\begin{cases} 3x_1+2=m \\ 5x_2+3=m \\ 7x_3+2=m \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} 3x_1=7x_3 \\ 5x_2=7x_3-1 \end{cases},\ 取\ x_3=k\ 可得 \begin{cases} x_1=\dfrac{7}{3}k \\ x_2=\dfrac{7k-1}{5} \\ x_3=k \end{cases}$$

由 $500\le 7k+2\le 1000$ 得 $71\le k\le 142$, 注意到 x_1,x_2,x_3 都是正整数, 得到 $k\in\{78,93,108,123,138\}$, 从而 $m\in\{548,653,758,863,968\}$.

8. 百鸡术: 母鸡每只 5 元 , 公鸡每只 3 元, 小鸡三只一元, 百元买百鸡, 各买几何?

解: 设买母鸡 x_1 只, 公鸡 x_2 只, 小鸡 x_3 只, 依题意可得: $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=100 \\ 5x_1+3x_2+\dfrac{1}{3}x_3=100 \end{cases}$, 对其系数矩阵进行初等行变换:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 5 & 3 & \frac{1}{3} & 100 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-5r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & -2 & -\frac{14}{3} & -400 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2\div(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & \frac{7}{3} & 200 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{3} & -100 \\ 0 & 1 & \frac{7}{3} & 200 \end{pmatrix}$$

同解方程组为 $\begin{cases} x_1=\dfrac{4}{3}x_3-100 \\ x_2=200-\dfrac{7}{3}x_3 \end{cases}$ 取 $x_3=3k$ 可得 $\begin{cases} x_1=4k-100 \\ x_2=200-7k \\ x_3=3k \end{cases}$

注意到 x_1,x_2,x_3 都是正整数, 得到 $k\in\{25,26,27,28\}$, 从而 $(x_1,x_2,x_3)=(0,25,75)$或$(4,18,78)$ 或$(8,11,81)$或$(12,4,84)$

21. 已知 $A=P\Lambda Q$, 其中 $P=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\Lambda=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $Q=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $QP=I_2$. 计算: A^8,A^9,A^{2n},A^{2n+1} (n 为正整数).

解: 对正整数 m,

$$A^m=(P\Lambda Q)(P\Lambda Q)\cdots(P\Lambda Q)=P\Lambda(QP)\Lambda(QP)\cdots(QP)\Lambda Q=P\Lambda I_2\Lambda I_2\cdots\Lambda Q=P\Lambda^m Q$$

当 m 为偶数时, $\Lambda^m=I_2$, 当 m 为奇数时, $\Lambda^m=\Lambda$, 因此

- $A^8=A^{2n}=PI_2Q=PQ=I_2$
- $A^9=A^{2n+1}=P\Lambda Q=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & -12 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$

26. 求平方等于零矩阵的所有二阶矩阵.

解: 设 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 满足 $A^2=O$, 即 $A^2=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

于是有

$$\begin{cases} a^2+bc=0, & (2.1) \\ b(a+d)=0, & (2.2) \\ c(a+d)=0, & (2.3) \\ d^2+bc=0, & (2.4) \end{cases}$$

由 2.1 和 2.4 知 $a^2=d^2$，即 $a=\pm d$. 当 $a=-d$ 时，2.2 和 2.3 成立. 当 $a^2=d^2=-bc$ 时，2.1 和 2.4 成立. 因此所求矩阵为 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ $\quad bc=-a^2$

28. 求与 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&1&-2\end{pmatrix}$ 可交换的全体三阶矩阵.

解: 设矩阵 $B=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&c\\0&d&e\end{pmatrix}$ 满足 $AB=BA$, 而

$$AB=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&c\\0&d&e\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b+2d&c+2e\\0&b-2d&c-2e\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&c\\0&d&e\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b+c&2b-2c\\0&d+e&2d-2e\end{pmatrix}.$$

比较得 $c=2d$, 于是所求矩阵为 $B=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&2d\\0&d&b-3d\end{pmatrix}$.其中$a,b,d$ 为任意实数.

29. 已知 A 是对角元互不相等的 n 阶对角矩阵，即 $A=\begin{pmatrix}a_1&&&\\&a_2&&\\&&\ddots&\\&&&a_n\end{pmatrix}$, 当 $i\neq j$ 时，$a_i\neq a_j\quad(i,j=1,2,\cdots,n)$. 证明：与 A 可交换的矩阵必是对角矩阵.

解: 设矩阵 $B=(b_{ij})_{n\times n}$ 与对角矩阵 A 可交换，即 $AB=BA$. 而

$$AB=\begin{pmatrix}a_1&&&\\&a_2&&\\&&\ddots&\\&&&a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1n}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\b_{n1}&b_{n2}&\cdots&b_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1b_{11}&a_1b_{12}&\cdots&a_1b_{1n}\\a_2b_{21}&a_2b_{22}&\cdots&a_2b_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_nb_{n1}&a_nb_{n2}&\cdots&a_nb_{nn}\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1n}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\b_{n1}&b_{n2}&\cdots&b_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1&&&\\&a_2&&\\&&\ddots&\\&&&a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1b_{11}&a_2b_{12}&\cdots&a_nb_{1n}\\a_1b_{21}&a_2b_{22}&\cdots&a_nb_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_1b_{n1}&a_2b_{n2}&\cdots&a_nb_{nn}\end{pmatrix}$$

由 $\begin{pmatrix}a_1b_{11}&a_1b_{12}&\cdots&a_1b_{1n}\\a_2b_{21}&a_2b_{22}&\cdots&a_2b_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_nb_{n1}&a_nb_{n2}&\cdots&a_nb_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1b_{11}&a_2b_{12}&\cdots&a_nb_{1n}\\a_1b_{21}&a_2b_{22}&\cdots&a_nb_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_1b_{n1}&a_2b_{n2}&\cdots&a_nb_{nn}\end{pmatrix}$ 得

$$a_ib_{ij}=a_jb_{ij}\ 即\ (a_i-a_j)b_{ij}=0,\ (i,j=1,2,\cdots,n).$$

因为当 $i \neq j$ 时，$a_i \neq a_j$ ，所以当 $i \neq j$ 时，$b_{ij} = 0$, 即 B 为对角矩阵.

30. 证明: 两个 n 阶下三角矩阵的乘积仍是下三角矩阵.

证: 设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & & & \\ b_{21} & b_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

则 $AB = C = (c_{ij})_{n\times n}$, 当 $i < j$ 时,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{i} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

在 $\sum\limits_{k=1}^{i} a_{ik}b_{kj}$ 中, 因为 $k \leq i < j$, 所以 $b_{kj} = 0$, 从而 $\sum\limits_{k=1}^{i} a_{ik}b_{kj} = 0$; 在 $\sum\limits_{k=i+1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ 中, 因为 $i < k$, 所以 $a_{ik} = 0$, 从而 $\sum\limits_{k=i+1}^{n} a_{ik}b_{kj} = 0$.

因此当 $i < j$ 时, 总有 $c_{ij} = 0$, 即 C 是下三角矩阵.

31. 证明: 若 A 是主对角元全为零的上三角矩阵, 则 A^2 也是主对角元全为零的上三角矩阵.

证: 设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$, 且当 $i \geq j$ 时, $a_{ij} = 0$, $A^2 = (c_{ij})_{n\times n}$.

当 $i \geq j$ 时,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj} = \sum_{k=1}^{i} a_{ik}a_{kj} + \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}a_{kj}$$

在 $\sum\limits_{k=1}^{i} a_{ik}a_{kj}$ 中, 因为 $i \geq k$, 所以 $a_{ik} = 0$, 从而 $\sum\limits_{k=1}^{i} a_{ik}a_{kj} = 0$; 在 $\sum\limits_{k=i+1}^{n} a_{ik}a_{kj}$ 中, 因为 $k > i \geq j$, 所以 $a_{kj} = 0$, 从而 $\sum\limits_{k=i+1}^{n} a_{ik}a_{kj} = 0$.

因此当 $i \geq j$ 时, 总有 $c_{ij} = 0$, 即 A^2 是主对角元为零的上三角矩阵.

32. 证明: 主对角元全为 1 的上三角矩阵的乘积仍是主对角元全为 1 的上三角矩阵.

证: 设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$, $B = (b_{ij})_{n\times n}$, $AB = C = (c_{ij})_{n\times n}$, 且当 $i = j$ 时, $a_{ij} = b_{ij} = 1$, $i > j$ 时, $a_{ij} = b_{ij} = 0$,

当 $i > j$ 时,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=i}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

在 $\sum\limits_{k=1}^{i-1} a_{ik}b_{kj}$ 中, 因为 $i > k$, 所以 $a_{ik} = 0$, 从而 $\sum\limits_{k=1}^{i} a_{ik}b_{kj} = 0$; 在 $\sum\limits_{k=i}^{n} a_{ik}b_{kj}$ 中, 因为 $k \geq i > j$, 所以 $b_{kj} = 0$, 从而 $\sum\limits_{k=i+1}^{n} a_{ik}b_{kj} = 0$.

而 $c_{ii} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki} = \sum\limits_{k=1}^{i-1} a_{ik}b_{ki} + a_{kk}b_{kk} + \sum\limits_{k=i+1}^{n} a_{ik}b_{ki} = 0 + 1 + 0 = 1$

因此当 $i>j$ 时, 总有 $c_{ij}=0$, 且 $c_{ii}=1$, 因此 C 是主对角元为零的上三角矩阵.

36. 对于任意 n 阶矩阵 A , 证明
(1) $A+A^T$ 是对称矩阵, $A-A^T$ 是反对称矩阵;
(2) A 可表示成对称矩阵与反对称矩阵之和.
证: (1) 因为 $(A+A^T)^T=A^T+(A^T)^T=A^T+A=A+A^T$, 所以 $A+A^T$ 是对称矩阵;
因为 $(A-A^T)^T=A^T-(A^T)^T=A^T-A=-(A-A^T)$, 所以 $A-A^T$ 是反对称矩阵.
(2) $A=\dfrac{A+A^T}{2}+\dfrac{A-A^T}{2}$, 由 (1) 的结论知所证成立.

37. 证明若 A 和 B 都是 n 阶对称矩阵, 则 AB 是对称矩阵的充要条件是 A 与 B 可交换.
证: 充分性：由条件有 $A^T=A,\ B^T=B,\ AB=BA$, 则

$$(AB)^T=B^TA^T=BA=AB.$$

即 AB 是对称矩阵.
必要性：由条件有 $A^T=A,\ B^T=B,\ (AB)^T=AB$, 则

$$AB=(AB)^T=B^TA^T=BA$$

即 AB 可交换.

38. 设 A 是实对称矩阵，且 $A^2=O$, 证明 $A=O$.
证: 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, 因为 A 是实对称矩阵，所以 $A=A^T$, 即

$$a_{ij}=a_{ji}\quad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

设 $A^2=C=(c_{ij})_{n\times n}$, 由矩阵乘法的定义有：

$$c_{ii}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{ki}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}^2,\quad (i=1,2,\cdots,n)$$

即 $0=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}^2$, 从而 $a_{ik}=0\quad (i,k=1,2,\cdots,n)$. 故 $A=O$.

45. 设方阵 A 满足 $A^2-A-2I=O$, 证明
(1) A 和 $I-A$ 都可逆，并求它们的逆矩阵；
(2) $A+I$ 和 $A-2I$ 不同时可逆.
证: (1) $A^2-A-2I=O\ \Rightarrow\ A^2-A=2I\ \Rightarrow\ A(A-I)=2I\ \Rightarrow\ \dfrac{A(A-I)}{2}=I.$
上式说明 A 和 $A-I$ 都可逆，且

$$(A)^{-1}=\frac{1}{2}(A-I),\quad (A-I)^{-1}=\frac{A}{2}.$$

从而 $I-A$ 也可逆，且 $(I-A)^{-1}=-\dfrac{A}{2}$.
(2) $A^2-A-2I=O\ \Rightarrow\ (A-2I)(A+I)=O\ \Rightarrow |A-2I|\cdot|A+I|=0\ \Rightarrow\ |A-2I|=0$ 和 $|A+I|=0$ 至少有一个成立, 所以 $A-2I$ 和 $A+I$ 不同时可逆.

46. 设方阵 A 满足 $A^2-2A+4I=O$, 证明 $A+I$ 和 $A-3I$ 都可逆，并求它们得逆矩阵.

证: $A^2-2A+4I=O \Rightarrow A^2-2A+3I=-I \Rightarrow (A+I)(A-3I)=-I \Rightarrow (A+I)(3I-A)=I \Rightarrow A+I$ 和 $A-3I$ 都可逆, 且

$$(A+I)^{-1}=3I-A,\quad (A-3I)^{-1}=-(A+I).$$

47. 证明可逆的对称矩阵的逆矩阵仍是对称矩阵.

证: 设矩阵 A 可逆, 且 $A^T=A$, 那么 $(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}=A^{-1}$. 即 A^{-1} 是对称矩阵.

用初等变换法求下列矩阵的逆矩阵.

49. $$(A|I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0\\ 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & -6 & -2 & 1 & 0\\ 0 & -6 & -3 & -2 & 0 & 1\end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{r_3-2r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & -6 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 9 & 2 & -2 & 1\end{array}\right) \xrightarrow[r_3\times\frac{1}{9}]{r_2\times(-\frac{1}{3})} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9}\end{array}\right)$$
$$\xrightarrow[r_2-2r_3]{r_1-2r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{5}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9}\end{array}\right) \xrightarrow{r_1-2r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9}\end{array}\right)$$

$$A^{-1}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

50. $$(A|I)=\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&2&3&4&1&0&0&0\\2&3&1&2&0&1&0&0\\1&1&1&-1&0&0&1&0\\1&0&-2&-6&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{r_3-r_1\\r_4-r_1}]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&2&3&4&1&0&0&0\\0&-1&-5&-6&-2&1&0&0\\0&-1&-2&-5&-1&0&1&0\\0&-2&-5&-10&-1&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[i=2,3,4]{r_i\times(-1)}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&2&3&4&1&0&0&0\\0&1&5&6&2&-1&0&0\\0&1&2&5&1&0&-1&0\\0&2&5&10&1&0&0&-1\end{array}\right)\xrightarrow[r_4-2r_2]{r_3-r_2}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&2&3&4&1&0&0&0\\0&1&5&6&2&-1&0&0\\0&0&-3&-1&-1&1&-1&0\\0&0&-5&-2&-3&2&0&-1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4\times(-3)]{r_3\times(-1)}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&2&3&4&1&0&0&0\\0&1&5&6&2&-1&0&0\\0&0&3&1&1&-1&1&0\\0&0&15&6&9&-6&0&3\end{array}\right)\xrightarrow{r_4-r_3\times5}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&2&3&4&1&0&0&0\\0&1&5&6&2&-1&0&0\\0&0&3&1&1&-1&1&0\\0&0&0&1&4&-1&-5&3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-r_4]{\substack{r_1-r_4\times4\\r_2-r_4\times6}}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&2&3&0&-15&4&20&-12\\0&1&5&0&-22&5&30&-18\\0&0&3&0&-3&0&6&-3\\0&0&0&1&4&-1&-5&3\end{array}\right)\xrightarrow{r_3\times\frac{1}{3}}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&2&3&0&-15&4&20&-12\\0&1&5&0&-22&5&30&-18\\0&0&1&0&-1&0&2&-1\\0&0&0&1&4&-1&-5&3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2-r_3\times5]{r_1-r_3\times3}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&2&0&0&-12&4&14&-9\\0&1&0&0&-17&5&20&-13\\0&0&1&0&-1&0&2&-1\\0&0&0&1&4&-1&-5&3\end{array}\right)\xrightarrow{r_1-r_2\times2}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&22&-6&-26&17\\0&1&0&0&-17&5&20&-13\\0&0&1&0&-1&0&2&-1\\0&0&0&1&4&-1&-5&3\end{array}\right)$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}22&-6&-26&17\\-17&5&20&-13\\-1&0&2&-1\\4&-1&-5&3\end{pmatrix}$$

51. $$(A|I)=\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\1&1&0&0&0&1&0&0\\1&1&1&0&0&0&1&0\\1&1&1&1&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[i=4,3,2]{r_i-r_{i-1}}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&-1&1&0&0\\0&0&1&0&0&-1&1&0\\0&0&0&1&0&0&-1&1\end{array}\right)$$

于是

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&1\end{pmatrix}$$

52. $$(A|I)=\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&a&a^2&a^3&1&0&0&0\\0&1&a&a^2&0&1&0&0\\0&0&1&a&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[i=1,2,3]{r_i-r_{i+1}\times a}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&-a&0&0\\0&1&0&0&0&1&-a&0\\0&0&1&0&0&0&1&-a\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right)$$

于是

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-a&0&0\\0&1&-a&0\\0&0&1&-a\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

53. $(A|I)=\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}0&a_1&0&\cdots&0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&a_2&\cdots&0&0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&a_{n-1}&0&0&\cdots&1&0\\a_n&0&0&\cdots&0&0&0&\cdots&0&1\end{array}\right)$

$$\xrightarrow[n-1\text{行对换}]{r_n\text{依次与前面的}}\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}a_n&0&0&\cdots&0&0&0&\cdots&0&1\\0&a_1&0&\cdots&0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&a_2&\cdots&0&0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&a_{n-1}&0&0&\cdots&1&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_i\times\frac{1}{a_{i-1}}i=2,3,\cdots,n]{r_1\times\frac{1}{a_n}}\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}1&0&0&\cdots&0&0&0&\cdots&0&\frac{1}{a_n}\\0&1&0&\cdots&0&\frac{1}{a_1}&0&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0&\frac{1}{a_2}&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&0&0&\cdots&\frac{1}{a_{n-1}}&0\end{array}\right)$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&\frac{1}{a_n}\\\frac{1}{a_1}&0&\cdots&0&0\\0&\frac{1}{a_2}&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&\frac{1}{a_{n-1}}&0\end{pmatrix}$$

解矩阵方程

54. $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}3&5\\5&9\end{pmatrix}$.

解: 因为

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&3&5\\3&4&5&9\end{array}\right)\xrightarrow{r_2-r_1\times3}\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&3&5\\0&-2&-4&-6\end{array}\right)\xrightarrow{r_1+r_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&-1&-1\\0&-2&-4&-6\end{array}\right)\xrightarrow{r_2\times(-\frac{1}{2})}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&-1&-1\\0&1&2&3\end{array}\right).$$

所以矩阵 $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ 可逆, 且 $X=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3&5\\5&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1\\2&3\end{pmatrix}$.

55. $X\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

解: 因为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_3+3c_1]{c_2-2c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 5 \\ 2 & -5 & 6 \\ 1 & -5 & 3 \\ 10 & -18 & 37 \\ 10 & -13 & 38 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_3\times 4]{c_2\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 20 \\ 2 & 5 & 24 \\ 1 & 5 & 12 \\ 10 & 18 & 148 \\ 10 & 13 & 152 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_3-5c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & 5 & -13 \\ 10 & 18 & 58 \\ 10 & 13 & 87 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_2+5c_3]{c_1+2c_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -25 & -60 & -13 \\ 126 & 308 & 58 \\ 184 & 448 & 87 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_3\times(-1)]{c_2\times\frac{1}{4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -25 & -15 & 13 \\ 10 & 77 & -58 \\ 126 & 112 & -87 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1-3c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 20 & -15 & 13 \\ -105 & 77 & -58 \\ -152 & 112 & -87 \end{pmatrix}$$

所以矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ 可逆, 且 $X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 20 & -15 & 13 \\ -105 & 77 & -58 \\ -152 & 112 & -87 \end{pmatrix}$.

56. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

解: 因为 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[i=1,2,\cdots,n-1]{r_i-r_{i+1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

所以矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 可逆, 且

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

59. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵, B 是 $n\times s$ 矩阵, $\boldsymbol{x}$ 是 $n\times 1$ 矩阵, 证明: $AB=O$ 的充要条件是 B 的每一列都是齐次线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解.

证: 将 $n\times s$ 矩阵 B 和 $m\times s$ 矩阵 O 按列分块为:

$$B=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s),\quad O=(\mathbf{0}_1,\mathbf{0}_2,\cdots,\mathbf{0}_s)$$

于是

$$A(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)=AB=O=(\mathbf{0}_1,\mathbf{0}_2,\cdots,\mathbf{0}_s)$$

即

$$(A\boldsymbol{\beta}_1,A\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,A\boldsymbol{\beta}_s)=(\mathbf{0}_1,\mathbf{0}_2,\cdots,\mathbf{0}_s)$$

从而有

$$A\boldsymbol{\beta}_i=\mathbf{0}\qquad i=1,2,\cdots,s$$

这说明 $\boldsymbol{\beta}_i$ $(i=1,2,\cdots,s)$ 为齐次线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解, 结论成立.

60. 设 C 是 n 阶可逆矩阵, D 是 $3\times n$ 矩阵, 且

$$D=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

试用分块乘法, 求一个 $n\times(n+3)$ 矩阵 A , 使得 $A\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}=I_n$.

解: 设 $A=(A_1,\ A_2)$, 其中 A_1 为 n 阶方阵, A_2 为 $n\times 3$ 阶矩阵, 于是

$$I_n=A\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}=(A_1,\ A_2)\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}=A_1C+A_2D$$

因为 C 可逆, 所以当 $A_1=C^{-1}$ 且 $A_2D=O$ 时, 上式成立. 注意到 D 中只有第一行为非零元, 取 A_2 的第一列全为 0 , 则一定满足 $A_2D=O$. 于是所求

$$A=(C^{-1},A_2)$$

其中 A_2 的第一列全为 0，另两列为任意元素.

61. 设 $A=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & B\\ C & \mathbf{0}\end{pmatrix}$, 其中 B 是 n 阶可逆矩阵, C 是 m 阶可逆矩阵, 证明 A 可逆, 并求 A^{-1}.

证: 因为矩阵 B 和 C 可逆, 所以 $|B|\neq 0$, $|C|\neq 0$. 而

$$|A|=\begin{vmatrix}\mathbf{0} & B\\ C & \mathbf{0}\end{vmatrix}=(-1)^{m\times n}\begin{vmatrix}B & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & C\end{vmatrix}=-1^{m\times n}|B||C|.$$

故 $|A|\neq 0$, 从而 A 可逆.

下面求矩阵 A^{-1} :

方法一：设 $A^{-1}=\begin{pmatrix}X & Y\\ Z & W\end{pmatrix}$, 那么由

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & B\\ C & \mathbf{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X & Y\\ Z & W\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}BZ & BW\\ CX & CY\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_n & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & I_m\end{pmatrix}$$

可得：

$$\begin{cases}BZ=I_n\\ BW=\mathbf{0}\\ CX=\mathbf{0}\\ CY=I_m\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}Z=B^{-1}\\ W=\mathbf{0}\\ X=\mathbf{0}\\ Y=C^{-1}\end{cases}$$

所以

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & C^{-1}\\ B^{-1} & \mathbf{0}\end{pmatrix}.$$

方法二: 因为

$$\left(\begin{array}{cc|cc}\mathbf{0} & B & I & \mathbf{0}\\ C & \mathbf{0} & \mathbf{0} & I\end{array}\right)\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\left(\begin{array}{cc|cc}C & \mathbf{0} & \mathbf{0} & I\\ \mathbf{0} & B & I & \mathbf{0}\end{array}\right)\xrightarrow[B^{-1}\times r_2]{C^{-1}\times r_1}\left(\begin{array}{cc|cc}I & \mathbf{0} & \mathbf{0} & C^{-1}\\ \mathbf{0} & I & B^{-1} & \mathbf{0}\end{array}\right).$$

所以

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & C^{-1}\\ B^{-1} & \mathbf{0}\end{pmatrix}.$$

63. 设 A,B,C,D 都是 n 阶矩阵, $|A|\neq 0$, $AC=CA$. 证明：$\begin{vmatrix}A & B\\ C & D\end{vmatrix}=|AD-CB|$.

证: $$\begin{vmatrix}A & B\\ C & D\end{vmatrix}\overset{r_2-CA^{-1}\times r_1}{=\!=\!=\!=}\begin{vmatrix}A & B\\ \mathbf{0} & D-CA^{-1}B\end{vmatrix}=|A||D-CA^{-1}B|=|AD-ACA^{-1}B|$$

$$\overset{AC=CA}{=\!=\!=}|AD-CAA^{-1}B|=|AD-CB|.$$

64. 设 $A=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & B\\ C & D\end{pmatrix}$, 其中 B, C 分别为二阶, 三阶可逆矩阵, 且已知 B^{-1}, C^{-1} 求 A^{-1}.

解: 方法一：设 $A^{-1}=\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}$, 那么由

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix} \mathbf{0} & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} BZ & BW \\ CX+DZ & CY+DW \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_3 \end{pmatrix}$$

可得：

$$\begin{cases} BZ=I_2 \\ BW=\mathbf{0} \\ CX+DZ=\mathbf{0} \\ CY+DW=I_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Z=B^{-1} \\ W=B^{-1}\mathbf{0} \\ CX+DZ=\mathbf{0} \\ CY+DW=I_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Z=B^{-1} \\ W=\mathbf{0} \\ CX=-DB^{-1} \\ CY=I_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Z=B^{-1} \\ W=\mathbf{0} \\ X=-C^{-1}DB^{-1} \\ Y=C^{-1} \end{cases}$$

所以

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} -C^{-1}DB^{-1} & C^{-1} \\ B^{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

方法二: 因为

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \mathbf{0} & B & I & \mathbf{0} \\ C & D & \mathbf{0} & I \end{array}\right) \xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{cc|cc} C & D & \mathbf{0} & I \\ \mathbf{0} & B & I & \mathbf{0} \end{array}\right) \xrightarrow[B^{-1}\times r_2]{C^{-1}\times r_1} \left(\begin{array}{cc|cc} I & C^{-1}D & \mathbf{0} & C^{-1} \\ \mathbf{0} & I & B^{-1} & \mathbf{0} \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{r_1-C^{-1}D\times r_2} \left(\begin{array}{cc|cc} I & C^{-1}D & \mathbf{0} & -C^{-1}DB^{-1} \\ \mathbf{0} & I & B^{-1} & \mathbf{0} \end{array}\right).$$

所以

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} -C^{-1}DB^{-1} & C^{-1} \\ B^{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

67. 设 A, B 均为 4 阶方阵, 已知 $|A|=-2,\ |B|=3$, 计算：

(1) $|\frac{1}{2}AB^{-1}|$; (2) $|-AB^T|$; (3) $|(AB)^{-1}|$: (4) $\det[(AB)^T]^{-1}$; (5) $|-3A^*|$(A^* 为 A 的伴随矩阵).

解: (1) $|\frac{1}{2}AB^{-1}|=(\frac{1}{2})^4|A||B|^{-1}=\frac{1}{16}\times(-2)\times(\frac{1}{3})=-\frac{1}{24}$.

(2) $|-AB^T|=(-1)^4|A||B^T|=|A||B|=(-2)\times 3=-6$.

(3) $|(AB)^{-1}|=|B^{-1}A^{-1}|=|B|^{-1}|A|^{-1}=\frac{1}{3}\times(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{6}$.

(4) $\det[(AB)^T]^{-1}=|[(AB)^T]^{-1}|=|[(AB)^{-1}]^T|=|(AB)^{-1}|=-\frac{1}{6}$.

(5) $|-3A^*|=(-3)^4|A|^{4-1}=81\times(-8)=-648$.

68. 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,-2,3)^T$, $\boldsymbol{\beta}=(-1,\frac{1}{2},0)^T$, $A=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$, 求 $|A^{100}|$.

解: $|A|=|\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T|=\left|\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}(-1,\frac{1}{2},0)\right|=\begin{vmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & \frac{3}{2} & 0 \end{vmatrix}=0$

因此

$$|A^{100}|=|A|^{100}=0$$

72. 设 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$, $\boldsymbol{\beta}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$, 已知 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}=3$, $B=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$, $A=I-B$. 证明
(1) $B^k=3^{k-1}B(k\geq 2)$ 为正整数；
(2) $(A+2I)$ 或 $A-I$ 不可逆；
(3) A 及 $A+I$ 均可逆.
证: (1) 因为 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}=3$, 所以 $\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}=3$, 于是

$$B^k=(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T)(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T)\cdots(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T)=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha})^{k-1}\boldsymbol{\beta}^T=3^{k-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T=3^{k-1}B.$$

(2) 因为 $A=I-B$, 所以 $(A+2I)(A-I)=(3I-B)(-B)=(B^2-3B)=O$, 从而 $|A+2I||A-I|=0$. 即 $|A+2I|=0$ 或 $|A-I|=0$. 故 $(A+2I)$ 或 $A-I$ 不可逆.

(3) 因为 $A(A+I)=(I-B)(2I-B)=2I-3B-B^2=2I$, 即 $\frac{1}{2}A(A+I)=I$, 所以 A 及 $A+I$ 均可逆.

73. 设 A 为 3 阶方阵, $|A|>0$, 已知 $A^*=\mathrm{diag}(1,-1,-4)$, 且 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3I$, 求 B.
解: 因为 $|A|>0$, 所以 $|A^*|=|\mathrm{diag}(1,-1,-4)|=4=|A|^2$. 从而 $|A|=2$, 于是

$$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}=\frac{1}{2}\mathrm{diag}(1,-1,-4)=\mathrm{diag}(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-2)$$

进一步得到

$$A=\mathrm{diag}(2,-2,-\frac{1}{2}),\ A-I=\mathrm{diag}(1,-3,-\frac{3}{2})$$

$$ABA^{-1}=BA^{-1}+3I\Rightarrow(A-I)BA^{-1}=3I\Rightarrow B=3(A-I)^{-1}A=3\mathrm{diag}(1,-\frac{1}{3},-\frac{2}{3})\mathrm{diag}(2,-2,-\frac{1}{2})=\mathrm{diag}(6,2,1).$$

74. 设 n 阶矩阵 A 满足：$A^TA=I$ 和 $|A|<0$, 求 $|A+I|$.
解: $A^TA=I\Rightarrow|A^T||A|=|A|^2=1$, 因为 $|A|<0$, 所以 $|A|=-1$, 从而

$$|A+I|=|A+A^TA|=|(I+A^T)A|=|(I+A)^T||A|=|I+A||A|=-|A+I|$$

故

$$|A+I|=0.$$

75. 设 A 为奇数阶可逆矩阵，且 $A^{-1}=A^T, |A|=1$, 求 $|I-A|$.
解: $|I-A|=|AA^{-1}-A|=|A||A^{-1}-I|=|A^T-I|=|(A-I)^T|=|A-I|$.
因为 A 为奇数阶矩阵, 所以 $|I-A|=|A-I|=|-(I-A)|=-|I-A|$, 故

$$|I-A|=0.$$

77. 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,0,-1)^T, k$ 为正整数，$A=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$, 求 $|kI-A^n|$.
解:

$$A^n=(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T)(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T)\cdots(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T)=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha})^{n-1}\boldsymbol{\alpha}^T=2^{n-1}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

于是

$$|kI-A^n|=\begin{vmatrix} k-2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & k & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & k-2^{n-1} \end{vmatrix} \xlongequal[\text{展开}]{\text{按}r_2} k\begin{vmatrix} k-2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & k-2^{n-1} \end{vmatrix}=k^2(k-2^n).$$

80. 设 B 是元素全为 1 的 n $(n\geq 2)$ 阶矩阵，证明：

$$(1)\ B^k=n^{k-1}B\ (k\geq 2\text{为正整数});\qquad (2)\ (I-B)^{-1}=I-\frac{1}{n-1}B.$$

证: (1) 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,\cdots,1)$, 则 $B=\boldsymbol{\alpha}^{\intercal}\boldsymbol{\alpha}$, 于是

$$B^k=(\boldsymbol{\alpha}^{\intercal}\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\alpha}^{\intercal}\boldsymbol{\alpha})\cdots(\boldsymbol{\alpha}^{\intercal}\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}^{\intercal}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\intercal})(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\intercal})\cdots(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\intercal})\boldsymbol{\alpha}.$$

注意到 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\intercal}=(1,1,\cdots,1)\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=n$, 所以当 $k\geq 2$ 时，有

$$B^k=\boldsymbol{\alpha}^{\intercal}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\intercal})(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\intercal})\cdots(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\intercal})\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}^{\intercal}\cdot n\cdot n\cdots n\cdot\boldsymbol{\alpha}=n^{k-1}\boldsymbol{\alpha}^{\intercal}\boldsymbol{\alpha}=n^{k-1}B.$$

(2) 因为由 (1) 的结果可得：

$$(I-B)(I-\frac{1}{n-1}B)=I-\frac{1}{n-1}B-B+\frac{1}{n-1}B^2=I-\frac{n}{n-1}B+\frac{1}{n-1}nB=I.$$

所以

$$(I-B)^{-1}=I-\frac{1}{n-1}B.$$

81. 设 A 为 3 阶实对称矩阵，且主对角元全为 $0, B=\mathrm{diag}(0,1,2)$, 求使 $AB+I$ 为可逆矩阵的条件.

解: 依题意可设 $A=\begin{pmatrix}0 & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & 0 & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & 0\end{pmatrix}$, 那么

$$AB+I=\begin{pmatrix}0 & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & 0 & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & a_{12} & 2a_{13}\\ 0 & 0 & 2a_{23}\\ 0 & a_{23} & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & a_{12} & 2a_{13}\\ 0 & 1 & 2a_{23}\\ 0 & a_{23} & 1\end{pmatrix}$$

那么

$$|AB+I|=1-2a_{23}^2$$

由矩阵可逆的充要条件可得：$AB+I$ 为可逆矩阵的充要条件是： $2a_{23}^2\neq 1$, 即 $a_{23}\neq\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

82. 已知 P, A 均为可逆矩阵，且 $P^{-1}AP=\mathrm{diag}(1,1,\cdots,1,0,\cdots,0)$ (有 r 个 1), 试计算 $|A+2I|$.

解:
$$\begin{aligned}|A+2I| &=|P^{-1}||A+2I||P|=|P^{-1}AP+2I|=|\mathrm{diag}(1,1,\cdots,1,0,\cdots,0)+\mathrm{diag}(2,2,\cdots,2)|\\ &=|\mathrm{diag}(3,3,\cdots,3,2,\cdots,2)|\end{aligned}$$

其中有 r 个 3 , $n-r$ 个 1 , 所以

$$|A+2I| = 3^r \cdot 2^{n-r}.$$

83. 设 A 为 n $(n \geq 2)$ 阶可逆矩阵，证明：
(1) $(A^\star)^{-1} = (A^{-1})^\star$; (2) $(A^T)^\star = (A^\star)^T$; (3) $(kA)^\star = k^{n-1}A^\star$ k为非零整数.

解: 利用 $A^{-1} = \dfrac{A^\star}{|A|}$ 和 $A^\star = |A|A^{-1}$ 可得：

(1) $(A^{-1})^\star = |A^{-1}|(A^{-1})^{-1} = |A|^{-1}(A^{-1})^{-1} = (|A|A^{-1})^{-1} = (A^\star)^{-1}$.

(2) $(A^T)^\star = |A^T|(A^T)^{-1} = |A|(A^{-1})^T = (|A|A^{-1})^T = (A^\star)^T$.

(3) $(kA)^\star = |kA|(kA)^{-1} = k^n|A|\,\dfrac{1}{k}A^{-1} = k^{n-1}|A|A^{-1} = k^{n-1}A^\star$.

84. 计算下列矩阵的幂: (1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n$; (2) $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}^n$.

解: (1) 记 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $A = I + B$, 于是

$$A^n = (I+B)^n = I + C_n^1 B + C_n^2 B^2 + \cdots + C_n^n B^n.$$

注意到:

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以

$$A^n = I + C_n^1 B + C_n^2 B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & C_n^1 & 0 \\ 0 & 0 & C_n^1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & C_n^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & C_n^1 & C_n^2 \\ 0 & 1 & C_n^1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 记 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $A = aI + B$ 于是

$$A^n = (aI+B)^n = a^n I + C_n^1 a^{n-1} B + C_n^2 a^{n-2} B^2 + C_n^3 a^{n-3} B^3 \cdots + C_n^n B^n.$$

注意到:

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$B^3=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$B^4=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以

$$\begin{aligned}&A^n=a^nI+C_n^1a^{n-1}B+C_n^2a^{n-2}B^2+C_n^3a^{n-3}B^3\\&=\begin{pmatrix}a^n&0&0&0\\0&a^n&0&0\\0&0&a^n&0\\0&0&0&a^n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&C_n^1a^{n-1}&0&0\\0&0&C_n^1a^{n-1}&0\\0&0&0&C_n^1a^{n-1}\\0&0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&C_n^2a^{n-2}&0\\0&0&0&C_n^2a^{n-2}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0&C_n^3a^{n-3}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}a^n&C_n^1a^{n-1}&C_n^2a^{n-2}&C_n^3a^{n-3}\\0&a^n&C_n^1a^{n-1}&C_n^2a^{n-2}\\0&0&a^n&C_n^1a^{n-1}\\0&0&0&a^n\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

86. n 阶矩阵 $A=(a_{ij})$ 的主对角元之和称为 A 的迹，记作 $tr(A)$, 即 $tr(A)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}$. 证明：若 A 是 $m\times n$ 矩阵， B 是 $n\times m$ 矩阵，则 $tr(AB)=tr(BA)$.

证: 设 $AB=C=(C_{ij})_{m\times m}$, $BA=D=(d_{ij})_{n\times n}$, 那么

$$\begin{aligned}&tr(AB)=c_{11}+c_{22}+\cdots+c_{mm}\\&=(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\cdots+a_{1n}b_{n1})+(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+\cdots+a_{2n}b_{n2})+\cdots\cdots+(a_{m1}b_{1m}+a_{m2}b_{2m}+\cdots+a_{mn}b_{nm})\\&=(b_{11}a_{11}+b_{12}a_{21}+\cdots+b_{1m}a_{m1})+(b_{21}a_{12}+b_{22}a_{22}+\cdots+b_{2m}a_{m2})+\cdots\cdots+(b_{n1}a_{1n}+b_{n2}a_{2n}+\cdots+b_{nm}a_{mn})\\&=d_{11}+d_{22}+\cdots+d_{nn}=tr(BA).\end{aligned}$$

88. 若 n 阶矩阵 A 存在正整数 k , 使得 $A^k=O$, 就称 A 为幂零矩阵. 设幂零矩阵 A 满足 $A^k=O(k$ 为正整数), 试证明：$I-A$ 可逆，并求其逆矩阵.

证: $A^k=O\Rightarrow\ I-A^k=I\Rightarrow(I-A)(I+A+A^2+\cdots+A^{k-1})=I$, 所以 $I-A$ 可逆，并且

$$(I-A)^{-1}=I+A+A^2+\cdots+A^{k-1}.$$

89. 设 $A=\begin{pmatrix}a&1&0&0\\0&a&1&0\\0&0&a&1\\0&0&0&a\end{pmatrix}$, $f(x)=(x-b)^n$. 试求 $f(A)$, 当 $f(A)$ 可逆时，求其逆矩阵.

解: $f(A)=(A-bI)^n=[(a-b)I+B]^n$，其中

$$B=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix};\quad B^2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix};\quad B^3=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

当 $k\geq 4$ 时，$B^k=O$. 于是

$$\begin{aligned}f(A)&=[(a-b)I+B]^n=(a-b)^nI+C_n^1(a-b)^{n-1}B+C_n^2(a-b)^{n-2}B^2+C_n^3(a-b)^{n-3}B^3\\&=\begin{pmatrix}(a-b)^n&C_n^1(a-b)^{n-1}&C_n^2(a-b)^{n-2}&C_n^3(a-b)^{n-3}\\0&(a-b)^n&C_n^1(a-b)^{n-1}&C_n^2(a-b)^{n-2}\\0&0&(a-b)^n&C_n^1(a-b)^{n-1}\\0&0&0&(a-b)^n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$(f(A)\mid I)=\left(\begin{array}{cccc|cccc}(a-b)^n&C_n^1(a-b)^{n-1}&C_n^2(a-b)^{n-2}&C_n^3(a-b)^{n-3}&1&0&0&0\\0&(a-b)^n&C_n^1(a-b)^{n-1}&C_n^2(a-b)^{n-2}&0&1&0&0\\0&0&(a-b)^n&C_n^1(a-b)^{n-1}&0&0&1&0\\0&0&0&(a-b)^n&0&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[i=1,2,3,4]{r_i\div(a-b)^n}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&\frac{C_n^1}{a-b}&\frac{C_n^2}{(a-b)^2}&\frac{C_n^3}{(a-b)^3}&\frac{1}{(a-b)^n}&0&0&0\\0&1&\frac{C_n^1}{a-b}&\frac{C_n^2}{(a-b)^2}&0&\frac{1}{(a-b)^n}&0&0\\0&0&1&\frac{C_n^1}{a-b}&0&0&\frac{1}{(a-b)^n}&0\\0&0&0&1&0&0&0&\frac{1}{(a-b)^n}\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[i=1,2,3]{r_i-\frac{C_n^{4-i}}{(a-b)^{4-i}}\times r_4}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&\frac{C_n^1}{a-b}&\frac{C_n^2}{(a-b)^2}&0&\frac{1}{(a-b)^n}&0&0&-\frac{C_n^3}{(a-b)^{n+3}}\\0&1&\frac{C_n^1}{a-b}&0&0&\frac{1}{(a-b)^n}&0&-\frac{C_n^2}{(a-b)^{n+2}}\\0&0&1&0&0&0&\frac{1}{(a-b)^n}&-\frac{C_n^1}{(a-b)^{n+1}}\\0&0&0&1&0&0&0&\frac{1}{(a-b)^n}\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2-\frac{c_n^1}{a-b}r_3]{r_1-\frac{c_n^2}{(a-b)^2}\times r_3}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&\frac{C_n^1}{a-b}&0&0&\frac{1}{(a-b)^n}&0&-\frac{C_n^2}{(a-b)^{n+2}}&\frac{C_n^1C_n^2-C_n^3}{(a-b)^{n+3}}\\0&1&0&0&0&\frac{1}{(a-b)^n}&-\frac{C_n^1}{(a-b)^{n+1}}&\frac{C_n^1C_n^1-C_n^2}{(a-b)^{n+2}}\\0&0&1&0&0&0&\frac{1}{(a-b)^n}&-\frac{C_n^1}{(a-b)^{n+1}}\\0&0&0&1&0&0&0&\frac{1}{(a-b)^n}\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1-C_n^1(a-b)^{-1}\times r_2}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&\frac{1}{(a-b)^n}&-\frac{C_n^1}{(a-b)^{n+1}}&\frac{(C_n^1)^2-C_n^2}{(a-b)^{n+2}}&\frac{2C_n^1C_n^2-C_n^3-(C_n^1)^3}{(a-b)^{n+3}}\\0&1&0&0&0&\frac{1}{(a-b)^n}&-\frac{C_n^1}{(a-b)^{n+1}}&\frac{(C_n^1)^2-C_n^2}{(a-b)^{n+2}}\\0&0&1&0&0&0&\frac{1}{(a-b)^n}&-\frac{C_n^1}{(a-b)^{n+1}}\\0&0&0&1&0&0&0&\frac{1}{(a-b)^n}\end{array}\right)$$

于是

$$(f(A))^{-1}=(a-b)^{-n}\begin{pmatrix}1&-C_n^1(a-b)^{-1}&[(C_n^1)^2-C_n^2](a-b)^{-2}&[2C_n^1C_n^2-(C_n^1)^3-C_n^3](a-b)^{-3}\\0&1&-C_n^1(a-b)^{-1}&[(C_n^1)^2-C_n^2](a-b)^{-2}\\0&0&1&-C_n^1(a-b)^{-1}\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

90. 设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$，$f(x)=\begin{vmatrix} x-1 & x & 0 \\ 0 & x-1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$，$g(x)=\begin{vmatrix} x & -1 \\ -3 & x+2 \end{vmatrix}$. 试求 $f(A)$, $g(A)$.

解: $f(x)=\begin{vmatrix} x-1 & x & 0 \\ 0 & x-1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2+3r_1} \begin{vmatrix} x-1 & x & 0 \\ 3 & x+2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (x-1)(x+2)-3x = x^2-2x-2.$

$$\begin{aligned} f(A) &= A^2-2A-2I=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^2-2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -12 & 9 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$g(x)=\begin{vmatrix} x & -1 \\ -3 & x+2 \end{vmatrix}=x(x+2)-3=x^2+2x-3.$$

$$\begin{aligned} g(A) &= A^2+2A-3I=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^2+2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

第三章　线性方程组

将 1, 2 题中的向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 表示成 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_4$ 的线性组合:

1. $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-11\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

解: 设 $\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4$, 即

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=1\\x_1+x_2-x_3-x_4=2\\x_1-x_2+x_3-x_4=1\\x_1-x_2-x_3+x_4=1\end{cases}$$

解方程组

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&-1&-1&2\\1&-1&1&-1&1\\1&-1&-1&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[i=2,3,4]{r_i-r_1}\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&0&-2&-2&1\\0&-2&0&-2&0\\0&-2&-2&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_4}\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&-2&-2&0&0\\0&-2&0&-2&0\\0&0&-2&-2&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&-2&-2&0&0\\0&0&2&-2&0\\0&0&-2&-2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_4+r_3}\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&-2&-2&0&0\\0&0&2&-2&0\\0&0&0&-4&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4\div(-4)]{r_2\div(-2),\ r_3\div 2}\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&1&0&0\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&1&-\frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3+r_4]{r_1-r_4}\begin{pmatrix}1&1&1&0&\frac{5}{4}\\0&1&1&0&0\\0&0&1&0&-\frac{1}{4}\\0&0&0&1&-\frac{1}{4}\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2-r_3]{r_1-r_3}\begin{pmatrix}1&1&0&0&\frac{3}{2}\\0&1&0&0&\frac{1}{4}\\0&0&1&0&-\frac{1}{4}\\0&0&0&1&-\frac{1}{4}\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&0&\frac{5}{4}\\0&1&0&0&\frac{1}{4}\\0&0&1&0&-\frac{1}{4}\\0&0&0&1&-\frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

由上述行最简形矩阵可得: $x_1=\frac{5}{4}$, $x_2=\frac{1}{4}$, $x_3=x_4=-\frac{1}{4}$. 故

$$\boldsymbol{\alpha}=\frac{5}{4}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{1}{4}\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{1}{4}\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{1}{4}\boldsymbol{\alpha}_4.$$

2. $\boldsymbol{\alpha}=(0,0,0,1)$, $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0,1)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,3,1)$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,0,0)$, $\boldsymbol{\alpha}_4=(0,1,-1,-1)$.

解:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4-r_1]{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4-r_2]{r_3+3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4\div 2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2-r_4]{r_3+2r_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1+r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3\times(-1)]{r_2\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

由上述行最简形矩阵可得: $x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = -1,\ x_4 = 0$. 故

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_3.$$

判别 3, 4 题中向量组得线性相关性:

3. $\boldsymbol{\alpha_1} = (1,1,1)^T,\ \boldsymbol{\alpha_2} = (0,2,5)^T,\ \boldsymbol{\alpha_3} = (1,3,6)^T$.

解: 方法一：观察可以得到 $\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2$, 所以线性相关.

方法二：因为 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix} \overset{r_2-r_1}{\underset{r_3-r_1}{=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 0$, 所以线性相关.

方法三：因为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-\frac{2}{5}r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

秩 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3\} = 2 < 3$, 所以线性相关.

4. $\boldsymbol{\beta_1} = (1,-1,2,4)^T,\ \boldsymbol{\beta_2} = (0,3,1,2)^T,\ \boldsymbol{\beta_3} = (3,0,7,14)^T$.

解: 方法一：观察可以得到 $\boldsymbol{\beta}_3 = 3\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2$, 所以线性相关.

方法二：因为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 7 \\ 4 & 2 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4-4r_1]{r_2+r_1,\ r_3-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4-2r_2]{r_3-3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

秩 $\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3\} = 2 < 3$, 所以线性相关.

5. 论述单个向量 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 线性相关和线性无关的条件.

解: 单个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关 $\Leftrightarrow\ \alpha = \mathbf{0}$, 个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关 $\Leftrightarrow\ \alpha \neq \mathbf{0}$.

7. 证明: 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2$ 也线性无关.

证: 设 $k_1(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2) + k_2(\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2) = \mathbf{0}$, 即

$$(k_1 + k_1)\boldsymbol{\alpha}_1 + (k_1 - k_2)\boldsymbol{\alpha}_2 = \mathbf{0}$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关, 所以

$$\begin{cases} k_1+k_2=0 \\ k_1-k_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1=0 \\ k_2=0 \end{cases}$$

故 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 也线性无关.

9. 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

证: 充分性：设

$$x_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+x_2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+x_3(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0}$$

即

$$(x_1+x_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(x_1+x_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(x_2+x_3)\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, 所以

$$\begin{cases} x_1+x_3 = 0 \\ x_1+x_2 = 0 \\ x_2+x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

所以 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关.

必要性：用反证法.
假设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，那么其中至少有一个向量能用其余向量线性表示，不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示，那么 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 也可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示，从而
$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性相关，矛盾!

11. 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关, 但其中任意 3 个向量都线性无关, 证明必存在一组全不为零的数 k_1,k_2,k_3,k_4, 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3+k_4\boldsymbol{\alpha}_4=\mathbf{0}.$$

证: 用反证法, 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关, 所以一定存在不全为零的数 k_1,k_2,k_3,k_4, 使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3+k_4\boldsymbol{\alpha}_4=\mathbf{0}$. 若 k_1,k_2,k_3,k_4 中至少有一个等于零, 不妨假设 $k_1=0$, 则由

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3+k_4\boldsymbol{\alpha}_4=\mathbf{0}$$

得到 $k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3+k_4\boldsymbol{\alpha}_4=\mathbf{0}$, 其中 k_2,k_3,k_4 都不为零, 从而得到 $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关, 与题设矛盾!

12. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关, 证明 $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关的充要条件是 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示.

证: 必要性显然. 下面证明充分性, 用反证法：假设 $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关, 则一定存在不全为零的数 k, k_1, k_2, $\cdots$, k_r 使得

$$k\boldsymbol{\beta}+k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r=\mathbf{0}$$

又因为 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关, 所以一定有 $k\neq 0$, 从而

$$\boldsymbol{\beta}=-\frac{k_1}{k}\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{k_2}{k}\boldsymbol{\alpha}_2-\cdots-\frac{k_r}{k}\boldsymbol{\alpha}_r$$

即 $\boldsymbol{\beta}$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示, 矛盾!

13. 求下列向量组的秩及其一个极大线性无关组, 并将其余向量用极大线性无关组线性表示:

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1=(6,4,1,9,2)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,2,3,-4)$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,4,-9,-6,22)$, $\boldsymbol{\alpha}_4=(7,1,0,-1,3)$.

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,2,4)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(0,3,1,2)$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(3,0,7,14)$, $\boldsymbol{\alpha}_4=(2,1,5,6)$, $\boldsymbol{\alpha}_5=(1,-1,2,0)$.

(3) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0)$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,0)$, $\boldsymbol{\alpha}_4=(1,2,-3)$.

解: 以 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 为列向量作矩阵 A , 并对 A 进行初等行变换化为行最简形:

$$(1)\ A=\begin{pmatrix}6&1&1&7\\4&0&4&1\\1&2&-9&0\\9&3&-6&-12\\2&-4&22&3\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&2&-9&0\\4&0&4&1\\6&1&1&7\\9&3&-6&-12\\2&-4&22&3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-9r_1,r_5-2r_1]{r_2-4r_1,r_3-6r_1}\begin{pmatrix}1&2&-9&0\\0&-8&40&1\\0&-11&55&7\\0&-15&75&-1\\0&-8&40&3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-r_3]{r_5-r_2}\begin{pmatrix}1&2&-9&0\\0&-8&40&1\\0&-11&55&7\\0&-4&20&-8\\0&0&0&2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2\leftrightarrow r_4]{r_4\div(-4)}\begin{pmatrix}1&2&-9&0\\0&1&-5&2\\0&-11&55&7\\0&-8&40&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4+8r_2]{r_3+11r_2}\begin{pmatrix}1&2&-9&0\\0&1&-5&2\\0&0&0&29\\0&0&0&17\\0&0&0&2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_5\leftrightarrow r_3]{r_5\div 2}\begin{pmatrix}1&2&-9&0\\0&1&-5&2\\0&0&0&1\\0&0&0&17\\0&0&0&29\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-17r_3]{r_5-29r_3}\begin{pmatrix}1&2&-9&0\\0&1&-5&2\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-2r_3}\begin{pmatrix}1&2&-9&0\\0&1&-5&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-2r_2}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&-5&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

由上述矩阵可知: 秩 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_4\}=3$, $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是一个极大线性无关组, $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1-5\boldsymbol{\alpha}_2$.

$$A=\begin{pmatrix}1&0&3&2&1\\-1&3&0&1&-1\\2&1&7&5&2\\4&2&14&6&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-2r_3]{r_2+r_1}\begin{pmatrix}1&0&3&2&1\\0&3&3&3&0\\2&1&7&5&2\\0&0&0&-4&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_2\div 3\\ r_4\div(-4)}]{r_3-2r_1}\begin{pmatrix}1&0&3&2&1\\0&1&1&1&0\\0&1&1&1&0\\0&0&0&1&\frac12\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3\leftrightarrow r_4]{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&0&3&2&1\\0&1&1&1&0\\0&0&0&1&\frac12\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1-2r_3]{r_2-r_3}\begin{pmatrix}1&0&3&0&0\\0&1&1&0&-\frac12\\0&0&0&1&\frac12\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

由上述矩阵可知: 秩 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_4,\ \boldsymbol{\alpha}_5\}=3$, $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_4$ 是一个极大线性无关组.

$$\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_5=-\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2+\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_4.$$

$$(3)A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&0&2\\1&0&0&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&-1&1\\0&-1&-1&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2\leftrightarrow r_3]{\substack{r_2\div(-1)\\ r_3\div(-1)}}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&4\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2-r_3]{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&-3\\0&1&0&5\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$$

由上述矩阵可知: 秩 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_4\}=3$, $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3$ 是一个极大线性无关组. $\boldsymbol{\alpha}_4=-3\boldsymbol{\alpha}_1+5\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$.

14. 设向量组: $\boldsymbol{\xi}_1=(1,-1,2,4)$, $\boldsymbol{\xi}_2=(0,3,1,2)$, $\boldsymbol{\xi}_3=(3,0,7,14)$, $\boldsymbol{\xi}_4=(1,-1,2,0)$, $\boldsymbol{\xi}_5=(2,1,5,6)$.

(1) 证明 $\boldsymbol{\xi}_1$, $\boldsymbol{\xi}_2$ 线性无关;

(2) 求向量组包含 $\boldsymbol{\xi}_1$, $\boldsymbol{\xi}_2$ 的极大线性无关组.

(1)证: 因为 $\boldsymbol{\xi}_1$, $\boldsymbol{\xi}_2$ 的对应分量不成比例, 所以 $\boldsymbol{\xi}_1$, $\boldsymbol{\xi}_2$ 线性无关.

$$(2)\ A=\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\-1&3&0&-1&1\\2&1&7&2&5\\4&2&14&0&6\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-4r_1]{\substack{r_2+r_1\\ r_3-2r_1}}\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&3&3&0&3\\0&1&1&0&1\\0&2&2&-4&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[{}_4-2r_3]{{}_2-3r_3}\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&0&0&0&0\\0&1&1&0&1\\0&0&0&-4&-4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[{}_4\div(-4)]{{}_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{{}_4\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{{}_1-r_3}\begin{pmatrix}1&0&3&0&1\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

由上述行最简形矩阵可以得到包含 $\boldsymbol{\xi}_1$, $\boldsymbol{\xi}_2$ 的极大线性无关组是 $\boldsymbol{\xi}_1$, $\boldsymbol{\xi}_2$, $\boldsymbol{\xi}_4$.

17. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵, B 是 $n\times m$ 矩阵, $n<m$, 证明齐次线性方程组 $(AB)x=0$ 有非零解.

证: AB 是 $m\times m$ 的矩阵, 而

$$r(AB)\le\min\{r(A),r(B)\}\le n<m.$$

所以方程组 $(AB)x=0$ 有非零解.

18. 设 A 是 $s\times n$ 矩阵, B 是由 A 的前 m 行构成的 $m\times n$ 矩阵. 证明: 若 A 的行向量组的秩为 r, 则 $r(B)\le r+m-s$.

证: 注意到 B (即 A 的前 m 个行向量) 的极大无关组与 A 的后 $s-m$ 个行向量所构成的向量组中包含了 A 的行向量组的极大无关组, 即 $r(B)+s-m\le r(A)=r$, 亦即

$$r(B)\le r+m-s.$$

求下列矩阵的秩, 并指出该矩阵的一个最高阶非零子式.

$$19.\ \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\0&0&-1&-2&-3\\0&0&0&0&4\\0&0&1&2&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_4}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\0&0&-1&-2&-3\\0&0&1&2&-1\\0&0&0&0&4\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\0&0&-1&-2&-3\\0&0&0&0&-4\\0&0&0&0&4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4+r_3}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\0&0&-1&-2&-3\\0&0&0&0&-4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

矩阵的秩为 3, 它的一个最高阶非零子式为 $\begin{vmatrix}1&3&5\\0&-1&-3\\0&0&4\end{vmatrix}$.

20. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4-r_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

矩阵的秩为 3, 它的一个最高阶非零子式为 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix}$.

21. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & -5 & -6 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & -5 & -6 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-4r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -4 & 1 \\ 0 & -7 & 11 & 9 & -5 \\ 0 & -7 & 11 & 10 & -3 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -4 & 1 \\ 0 & -7 & 11 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

矩阵的秩为 3, 它的一个最高阶非零子式为 $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -6 \end{vmatrix}$.

22. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{r_4-2r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

矩阵的秩为 4, 它的一个最高阶非零子式为 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

23. 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $m \times n$ 矩阵, 证明: 存在非零的 $n \times s$ 矩阵 B 使得 $AB = O$ 的充要条件是 $r(A) < n$.

证: (充分性) 设 $r(A) < n$, 则 $Ax = 0$ 有非零解, 取 $Ax = 0$ 的 s 个解 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots \boldsymbol{\beta}_s,$, 且其中至少有一个 $\boldsymbol{\beta}_j \neq \mathbf{0}$. 作矩阵 $B = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots \boldsymbol{\beta}_s)$, 则 $B \neq O$ 且有

$$AB = A(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots \boldsymbol{\beta}_s) = (A\boldsymbol{\beta}_1, A\boldsymbol{\beta}_2, \cdots A\boldsymbol{\beta}_s) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \cdots, \mathbf{0}) = O.$$

(必要性) 设存在非零的 $n \times s$ 矩阵 B 使得 $AB = O$, 将矩阵 B 和零矩阵按列分块为 $B = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots \boldsymbol{\beta}_s), O =$

$(\mathbf{0},\mathbf{0},\cdots,\mathbf{0})$, 则 $AB=O$ 即为

$$A(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots\boldsymbol{\beta}_s)=(\mathbf{0},\mathbf{0},\cdots,\mathbf{0}).$$

即矩阵 B 的列向量 $\boldsymbol{\beta}_j$ $(j=1,2,\cdots,s)$ 都是方程组 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解. 因为 B 为非零矩阵, 所以至少有一个 $\boldsymbol{\beta}_i\neq\mathbf{0}$, 即 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 有非零解, 从而 $r(A)<n$.

28. 求下列齐次线性方程组的一个基础解系及一般解.

$$(1)\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 0\\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0\\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 = 0\\ x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}\qquad (2)\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0\\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0\\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0\\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

解: (1) 对方程组的系数矩阵进行初等行变换, 化为行最简形:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -1\\ 1 & 1 & -2 & 3\\ 3 & -1 & 8 & 1\\ 1 & 3 & -9 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4-r_1]{r-2-r_1 \quad r_3-3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -1\\ 0 & 2 & -7 & 4\\ 0 & 2 & -7 & 4\\ 0 & 4 & -14 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4-2r_2]{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -1\\ 0 & 2 & -7 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\div 2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -1\\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 1\\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

同解方程组为 $\begin{cases} x_1 = -\frac{3}{2}x_3 - x_4\\ x_2 = \frac{7}{2}x_3 - 2x_4 \end{cases}$, 分别取 $\begin{pmatrix} x_3\\ x_4 \end{pmatrix}$ 为 $\begin{pmatrix} 1\\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0\\ 1 \end{pmatrix}$ 代入同解方程组得到基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix} -\frac{3}{2}\\ \frac{7}{2}\\ 1\\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix} -1\\ -2\\ 0\\ 1 \end{pmatrix}$.

方程组的一般解为 $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2=k_1\begin{pmatrix} -\frac{3}{2}\\ \frac{7}{2}\\ 1\\ 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} -1\\ -2\\ 0\\ 1 \end{pmatrix}$.($k_1,k_2$ 为任意常数).

(2) 对方程组的系数矩阵进行初等行变换, 化为行最简形:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -8 & 2 & 1\\ 2 & -2 & -3 & -7 & 2\\ 1 & 11 & -12 & 34 & -5\\ 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 9 & -1\\ 2 & -2 & -3 & -7 & 2\\ 1 & 11 & -12 & 34 & -5\\ 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4-r_1]{r_2-2r_1,\ r_3-r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 9 & -1\\ 0 & -8 & 7 & -25 & 4\\ 0 & 8 & -7 & 25 & -4\\ 0 & -8 & -7 & -25 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3+r_2]{r_4-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 9 & -1\\ 0 & -8 & 7 & -25 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2\div(-8)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 9 & -1\\ 0 & 1 & -\frac{7}{8} & \frac{25}{8} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{19}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & -\frac{7}{8} & \frac{25}{8} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

同解方程组为 $\begin{cases} x_1 = \frac{19}{8}x_3 + \frac{3}{8}x_4 - \frac{1}{2}x_5 \\ x_2 = \frac{7}{8}x_3 - \frac{25}{8}x_4 + \frac{1}{2}x_5 \end{cases}$, 分别取 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$ 为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 代入同解方程组得到基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} \frac{19}{8} \\ \frac{7}{8} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ -\frac{25}{8} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\xi}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

方程组的一般解为 $\boldsymbol{x} = k_1\boldsymbol{\xi}_1 + k_2\boldsymbol{\xi}_2 + k_3\boldsymbol{\xi}_3 = k_1 \begin{pmatrix} \frac{19}{8} \\ \frac{7}{8} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ -\frac{25}{8} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.($k_1, k_2, k_3$ 为任意常数).

29. 求下列非齐次线性方程组的一般解：

(1) $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -2 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 12 \end{cases}$

解: (1) 对方程组的增广矩阵进行初等行变换, 化为行最简形：

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-7r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ -1 & -9 & -4 & 0 & -8 \\ -5 & -45 & -20 & 0 & -40 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2\times(-1)]{r_3-5r_2} \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & 9 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{r_2-2-r_1} \begin{pmatrix} 0 & -11 & -5 & 1 & -10 \\ 1 & 9 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

同解方程组为 $\begin{cases} x_1 = -9x_2 - 4x_3 + 8 \\ x_4 = 11x_2 + 5x_3 - 10 \end{cases}$, 取 $x_2 = x_3 = 0$, 代入得方程组得一个解 $\boldsymbol{\xi}_0 = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}$.

在对应的齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 = -9x_2 - 4x_3 \\ x_4 = 11x_2 + 5x_3 \end{cases}$ 中，分别取 $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ 为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. 得到对应的齐次线性方程组的基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

于是方程组的一般解为 $\boldsymbol{x} = k_1\boldsymbol{\xi}_1 + k_2\boldsymbol{\xi}_2 + \boldsymbol{\xi}_0 = k_1 \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}$.($k_1, k_2$ 为任意常数).

(2) 对方程组的增广矩阵进行初等行变换, 化为行最简形:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4-5r_1]{r_2-3r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2\times(-1)]{r_3+r_2,r_4-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -5 & -16 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

同解方程组为 $\begin{cases} x_1 = & x_3 & +x_4 & +5x_5 & -16 \\ x_2 = & -2x_3 & -2x_4 & -6x_5 & +23 \end{cases}$, 取 $x_3 = x_4 = x_5 = 0$, 代入得方程组得一个解 $\boldsymbol{\xi}_0 = (-16, 23, 0, 0, 0)^T$.

在对应的齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 = & x_3 & +x_4 & +5x_5 \\ x_2 = & -2x_3 & -2x_4 & -6x_5 \end{cases}$, 中, 分别取 $(x_3, x_4, x_5)^T$ 为 $(1,0,0)^T$, $(0,1,0)^T$ 和 $(0,0,1)^T$ 得到对应的齐次线性方程组的基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1 = (1,-2,1,0,0)^T$, $\boldsymbol{\xi}_2 = (1,-2,0,1,0)$, $\boldsymbol{\xi}_3 = (5,-6,0,0,-1)^T$.

于是方程组的一般解为 $\boldsymbol{x} = k_1\boldsymbol{\xi}_1 + k_2\boldsymbol{\xi}_2 + k_3\xi_3 + \boldsymbol{\xi}_0 = k_1(1,-2,1,0,0)^T + k_2(1,-2,0,1,0) + k_3(5,-6,0,0,-1)^T + (-16,23,0,0,0)^T (k_1, k_2, k_3$ 为任意常数).

30. 讨论 p, q 取何值时, 下列线性方程组有解, 无解, 有解时求其解:

(1) $\begin{cases} (p+3)x_1 & +x_2 & +2x_3 & = p \\ px_1 & +(p-1)x_2 & +x_3 & = 2p \\ 3(p+1)x_1 & +px_2 & +(p+3)x_3 & = 3 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & = 1 \\ 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & -3x_5 & = p \\ & x_2 & +2x_3 & +2x_4 & +6x_5 & = 3 \\ 5x_1 & +4x_2 & +3x_3 & +3x_4 & -x_5 & = q \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1 & +x_2 & +2x_3 & -x_4 & = 1 \\ x_1 & -x_2 & -2x_3 & -7x_4 & = 3 \\ & x_2 & +px_3 & +qx_4 & = q-3 \\ x_1 & +x_2 & +2x_3 & +(q-2)x_4 & = q+3 \end{cases}$

解:

$$(1)\ D = \begin{vmatrix} p+3 & 1 & 2 \\ p & p-1 & 1 \\ 3(p+1) & p & p+3 \end{vmatrix} = (p-1)(p+3)^2 + 3(p+1) + 2p^2 - 6(p+1)(p-1) - p(p+3) - p(p+3)$$
$$= p^2(p-1).$$

当 $p^2(p-1) \neq 0$, 即 $p \neq 0$ 且 $p \neq 1$ 时, 方程组有唯一解. 当 $p = 0$ 时, 对增广矩阵作行初等变换:

$$(A,b) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_1} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$ 此时方程组无解.

当 $p = 1$ 时, 对增广矩阵作行初等变换:

$$(A,b) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-6r_1]{r_2-4r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

此时方程组无解.

因为

$$D_1=\begin{vmatrix} p & 1 & 2 \\ 2p & p-1 & 1 \\ 3 & p & p+3 \end{vmatrix}=p(p-1)(p+3)+3+4p^2-6(p-1)-p^2-2p(p+3)$$
$$=p^3+3p^2-15p+9.$$

$$D_2=\begin{vmatrix} p+3 & p & 2 \\ p & 2p & 1 \\ 3(p+1) & 3 & p+3 \end{vmatrix}=2p(p+3)(p+3)+p(3p+3)+6p-4p(3p+3)-3(p+3)-p^2(p+3)$$
$$=p^3+12p-9..$$

$$D_3=\begin{vmatrix} p+3 & 1 & p \\ p & p-1 & 2p \\ 3(p+1) & p & 3 \end{vmatrix}=3(p+3)(p-1)+p^3+6p(p+1)-3p(p+1)(p-1)-2p^2(p+3)-3p$$
$$=-4p^3+3p^2+12p-9..$$

所以当 $p\neq 0$ 且 $p\neq 1$ 时, 方程组的解为：

$$x_1=\frac{p^3+3p^2-15p+9}{p^2(p-1)};\ x_2=\frac{p^3+12p-9}{p^2(p-1)};\ x_3=\frac{-4p^3+3p^2+12p-9}{p^2(p-1)}.$$

当 $p=0$ 或 $p=1$ 时, 方程组无解.

(2) 对方程组的增广矩阵作行初等变换：

$$(A,b)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & p \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & q \end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-5r_1]{r_2-3r_1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & p-3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & q-5 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & p-3 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & q-5 \end{pmatrix}\xrightarrow[r_4+r_2]{r_3+r_2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q-2 \end{pmatrix}$$

由上述行阶梯形矩阵可知当 $p\neq 0$ 或 $q\neq 2$ 时, 方程组无解; 当 $p=0$ 且 $q=2$ 时, 方程组有无穷多解, 此时对上述矩阵继续作初等行变换

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

方程组的同解方程组为

$$\begin{cases} x_1=x_3+x_4+5x_5-2 \\ x_2=-2x_3-2x_4-6x_5+3 \end{cases} \text{令}\begin{cases} x_3=c_1 \\ x_4=c_2 \\ x_5=c_3 \end{cases}, \text{得方程组的通解为：}\begin{cases} x_1=c_1+c_2+5c_3-2 \\ x_2=-2c_1-2c_2-6c_3+3 \\ x_3=c_1 \\ x_4=c_2 \\ x_5=c_3 \end{cases}$$

(3) 对方程组的增广矩阵作行初等变换：

$$(A,b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & p & q & q-3 \\ 1 & 1 & 2 & q-2 & q+3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4-r_1]{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & p & q & q-3 \\ 0 & 0 & 0 & q-1 & q+2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\div(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & p & q & q-3 \\ 0 & 0 & 0 & q-1 & q+2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & p-2 & q-3 & q-2 \\ 0 & 0 & 0 & q-1 & q+2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & p-2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & q-1 & q+2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & p-2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & q-1 & q+2 \end{pmatrix}$$

(1) 当 $q-1=0$, 即 $q=1$ 时, 方程组无解.

(2) 当 $q\neq 1$ 且 $p\neq 2$ 时, 方程组有唯一解：此时

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & p-2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & q-1 & q+2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4\div(q-1)]{r_3\div(p-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{2-p} & \frac{4}{2-p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{q+2}{q-1} \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-\frac{2}{2-p}r_4]{\substack{r_1+4r_4 \\ r_2-3r_4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{6q+6}{q-1} \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{4q+5}{1-q} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2(q-4)}{(2-p)(q-1)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{q+2}{q-1} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2-2r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{6q+6}{q-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{12q-4pq-5p-6}{(1-q)(2-p)} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2(q-4)}{(2-p)(q-1)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{q+2}{q-1} \end{pmatrix}$$

由上述行最简形矩阵可知此时方程组的解为 $\begin{cases} x_1 = \frac{6q+6}{q-1} \\ x_2 = \frac{12q-4pq-5p-6}{(1-q)(2-p)} \\ x_3 = \frac{2(q-4)}{(2-p)(q-1)} \\ x_4 = \frac{q+2}{q-1} \end{cases}$

(3) 当 $p=2$ 且 $\dfrac{-2}{q-1} = \dfrac{-4}{q+2}$ 即 $q=4$ 时, 方程组有无穷多解, 此时

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3\div(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4-3r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2-3r_3]{r_1+4r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

同解方程组为 $\begin{cases} x_1 = 10 \\ x_2 = -2x_3 - 7 \\ x_4 = 2 \end{cases}$ 令 $x_3 = c$ 得方程组得通解为 $\begin{cases} x_1 = 10 \\ x_2 = -2c-7 \\ x_3 = c \\ x_4 = 2 \end{cases}$

(4) 当 $p=2$ 且 $\dfrac{-2}{q-1}\neq\dfrac{-4}{q+2}$ 即 $q\neq 4$ 时, 方程组无解.

31. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，证明：若任一个 n 维向量都是 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解，那么 $A=O$.

证: 由题意可知方程组 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系中所含向量的个数为 n , 由

$$n=n-r(A)$$

得到

$$r(A)=0$$

故 $A=O$.

另证: 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为 n 个线性无关的 n 维列向量，矩阵 $B=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，由题设可得

$$A\boldsymbol{\alpha}_i=\mathbf{0},\quad i=1,2,\cdots,n$$

于是得到

$$AB=O$$

又因为 B 可逆，所以

$$A=O$$

34. 设 A^* 是 n 阶矩阵 A 的伴随矩阵，证明：

$$(1)\ r(A^*)=\begin{cases} n, & 当r(A)=n,\\ 1, & 当r(A)=n-1,\\ 0, & 当r(A)<n-1.\end{cases}\qquad (2)|A^*|=|A|^{n-1}.$$

证: (1) 当 $r(A)=n$ 时, 有 $|A|\neq 0$, 且 $|A^*|=|A|^{n-1}$, 所以 $|A^*|\neq 0$, 从而 $r(A^*)=n$.

当 $r(A)=n-1$ 时, 有 $|A|=0$, 且 A 中至少有一个 $n-1$ 阶非零子式, 于是 A^* 中至少有一个非零元, 从而 $r(A^*)\geq 1$.

又因为 $AA^*=A^*A=|A|I=O$, 所以 $r(A)+r(A^*)\leq n$ 即

$$r(A^*)\leq n-r(A)=n-(n-1)=1.$$

综合可得 $r(A^*)=1$.

当 $r(A)<n-1$ 时，A 中所有 $n-1$ 阶子式均为 0 , 于是 $A^*=O$, 故 $r(A^*)=0$.

(2) 因为 $AA^*=A^*A=|A|I$, 所以

$$|A||A^*|=|A|^n.$$

于是当 $|A|\neq 0$ 时, 有

$$|A^*|=|A|^{n-1}.$$

当 $|A|=0$ 时，有 $r(A)<n$, 由 (1) 可知此时 $r(A^*)<n$, 故

$$|A^*|=0=0^{n-1}=|A|^{n-1}.$$

36. 设 A 是 n 阶矩阵. 证明：非齐次线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 对任何 $\boldsymbol{b}$ 都有解的充要条件是 $|A|\neq 0$.

证: 充分性:

当 $|A|\neq 0$ 时, A 可逆. 于是对任意 $\boldsymbol{b}$, 由 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 可得:

$$\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{b}.$$

充分性得证.

必要性:

取 n 个线性无关的 n 维向量 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n$, 设 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_i$ 的解为 $\boldsymbol{x}_i$,$(i=1,2,\cdots,n)$. 那么

$$A(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n).$$

两边取行列式并注意到 $|\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n|\neq 0$, 于是

$$|A|\neq 0.$$

46. 设 A 为 n 阶矩阵，若存在正整数 k $(k\geq 2)$ 使得 $A^k\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$, 但 $A^{k-1}\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 为非零列向量，证明 $\boldsymbol{\alpha},A\boldsymbol{\alpha},\cdots,A^{k-1}\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关.

证: 设 $l_1\boldsymbol{\alpha}+l_2A\boldsymbol{\alpha}+\cdots+l_kA^{k-1}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ (1)

两边同时左乘 A^{k-1} 得:

$$l_1A^{k-1}\boldsymbol{\alpha}+l_2A^k\boldsymbol{\alpha}+\cdots+l_kA^{2k-2}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0} \qquad (1')$$

因为 $A^k\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$, 所以

$$A^k\boldsymbol{\alpha}=A^{k+1}\boldsymbol{\alpha}=\cdots=A^{2k-2}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$$

代入 $(1')$ 式得:

$$l_1A^{k-1}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$$

因为 $A^{k-1}\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$, 所以 $l_1=0$

将 $l_1=0$ 代入 (1) 式得:

$$l_2A\boldsymbol{\alpha}+\cdots+l_kA^{k-1}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0} \qquad (2)$$

两边同时左乘 A^{k-2} 得:

$$l_2A^{k-1}\boldsymbol{\alpha}+l_3A^k\boldsymbol{\alpha}+\cdots+l_kA^{2k-3}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$$

注意到

$$A^k\boldsymbol{\alpha}=A^{k+1}\boldsymbol{\alpha}=\cdots=A^{2k-2}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0},\quad A^{k-1}\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$$

于是得到 $l_2=0$, 类似可得

$$l_3=l_4=\cdots=l_k=0.$$

因此结论成立.

50. 设 n 阶矩阵 A 的每行元素之和均为 0 , 又 $r(A)=n-1$, 求齐次线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的通解.

解: 由题设可知 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系中只有一个解向量, 且 $\boldsymbol{\xi}=(1,1,\cdots,1)^T$ 是方程组的一个解, 因此所求通解为

$$\boldsymbol{x}=k(1,1,\cdots,1)^T(k\text{为任意常数}).$$

51. 已知下列线性方程组 I, II 为同解线性方程组, 求参数 m,n,t 之值.

$$I:\begin{cases} x_1 & +x_2 & & -2x_4 & = & -6,\\ 4x_1 & -x_2 & -x_3 & -x_4 & = & 1,\\ 3x_1 & -x_2 & -x_3 & & = & 3;\end{cases}$$

$$II:\begin{cases} x_1 & +mx_2 & -x_3 & -x_4 & = & -5, \\ & nx_2 & -x_3 & -2x_4 & = & -11, \\ & & x_3 & -2x_4 & = & -t+1. \end{cases}$$

解: 对方程组 I 的增广矩阵做初等行变换:

$$(A,\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & -6 \\ 4 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-3\times r_1]{r_3-4\times r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 7 & 25 \\ 0 & -4 & -1 & 6 & 21 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2-r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & -1 & 6 & 21 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-4\times r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[i=2,3]{r_i\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

由上述矩阵可以得到方程组 I 的特解为:

$$\boldsymbol{\xi}_0=(-2,-4,-5,0)^T$$

由于两方程组同解，所以方程组 I 的解也是方程组 II 的解, 将 $\boldsymbol{\xi}_0$ 代入方程组 II 得:

$$\begin{cases} -2-4m+5 & =-5 \\ -4n+5 & =-11 \\ -5 & =-t+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m & =2 \\ n & =4 \\ t & =6 \end{cases}$$

52. 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,1)^T$, $\boldsymbol{\beta}=(1,\frac{1}{2},0)^T$, $\boldsymbol{\gamma}=(0,0,8)^T$, $A=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$, $B=\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}$, 求解方程 $2B^2A^2\boldsymbol{x}=A^4\boldsymbol{x}+B^4\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\gamma}$.

解: 首先可计算出:

$$B=\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}=(1,\frac{1}{2},0)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}=2$$

$$A=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}(1,\frac{1}{2},0)=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2=(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T)(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T)=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\beta}^T=2A,\quad A^4=3A$$

于是方程组为: $16A\boldsymbol{x}=8A\boldsymbol{x}+16\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\gamma}$ 即 $(8A-16I)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\gamma}$

对方程组的增广矩阵作初等行变换:

$$\begin{pmatrix} -8 & 4 & 0 & 0 \\ 16 & -8 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & -16 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

取 $x_3=0$ 得非齐次方程组的特解为: $\boldsymbol{\xi}_0=(\frac{1}{2},1,0)^T$.
取 $x_3=1$ 得齐次方程组的基础解系为: $\boldsymbol{\xi}_1=(1,2,1)^T$.
于是方程组的通解为:

$$\boldsymbol{\xi}=k(1,2,1)^T+(\frac{1}{2},1,0)\ \ (k\text{为任意实数}).$$

53. 设 n 阶矩阵 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$ 的行列式 $|A|\neq 0$, A 的前 $n-1$ 列构成的 $n\times(n-1)$ 矩阵记为 $A_1=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1})$, 问方程组 $A_1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}_n$ 是否有解?
解: 由题设可知

$$r(A_1)=n-1\neq n=r(A,\boldsymbol{\alpha}_n)$$

所以无解.

54. 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 均为非零的 n 维列向量, $A=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$, 证明: A 中任意两行或两列成比例.

分析: 即证 A 中任意两行或两列线性相关, 亦即 $r(A)=1$.

证: 一方面

$$A=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T\Rightarrow\ r(A)\leq min\{r(\boldsymbol{\alpha}),r(\boldsymbol{\beta}^T)\}=1.$$

另一方面, 因为 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 均为非零的 n 维列向量, 所以 A 为非零矩阵, 于是

$$r(A)>0.$$

综合可得 $r(A)=1$. 从而结论成立.

56. 设 A,B 皆为 n 阶矩阵，证明：

$$(1)\begin{vmatrix} I & B\\ A & I\end{vmatrix}=|I-AB|;(2)|I-BA|=|I-AB|;$$

$$(3)det(\lambda I-AB)=det(\lambda I-BA)(\lambda\text{为任意常数}).$$

解: (1) $\begin{vmatrix} I & B\\ A & I\end{vmatrix}\overset{r_2-A\times r_1}{=\!=\!=\!=}\begin{vmatrix} I & B\\ O & I-AB\end{vmatrix}=|I||I-AB|=|I-AB|.$

(2) $|I-AB|=\begin{vmatrix} I & B\\ A & I\end{vmatrix}\overset{c_1-c_2\times A}{=\!=\!=\!=}\begin{vmatrix} I-BA & B\\ O & I\end{vmatrix}=|I-BA||I|=|I-BA|.$

(3) 因为 $\begin{vmatrix} \lambda I & B\\ A & I\end{vmatrix}\overset{c_1-c_2\times A}{=\!=\!=\!=}\begin{vmatrix} \lambda I-BA & B\\ O & I\end{vmatrix}=det(\lambda I-BA);$

$\begin{vmatrix} \lambda I & B\\ A & I\end{vmatrix}\overset{r_1-B\times r_2}{=\!=\!=\!=}\begin{vmatrix} \lambda I-AB & O\\ A & I\end{vmatrix}=det(\lambda I-AB)$

所以 $det(\lambda I-AB)=det(\lambda I-BA).$

57. 证明：若 A 是 $m\times n$ 矩阵, $r(A)=r$, 则存在 $m\times r$ 矩阵 B ,$r\times n$ 矩阵 C, 且 $r(B)=r(C)=r$, 使得 $A=BC$.

证: 因为 $r(A)=r$, 所以存在 m 阶可逆矩阵 P 和 n 阶可逆矩阵 Q 使得

$$PAQ=\begin{pmatrix} I_r & O_{r\times(n-r)}\\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)}\end{pmatrix}=U$$

于是 $A=P^{-1}UQ^{-1}$. 将矩阵 P^{-1} 和 Q^{-1} 分块为 $P^{-1}=(B_{m\times r},M_{m\times(m-r)})$, $Q^{-1}=\begin{pmatrix} C_{r\times n}\\ N_{(n-r)\times n}\end{pmatrix}$. 因为 B 中的 r 列线性无关, C 中的 r 行线性无关, 所以 $r(B)=r(C)=r$, 且

$$\begin{aligned} A=P^{-1}UQ^{-1} &=(B_{m\times r},M_{m\times(m-r)})\begin{pmatrix} I_r & O_{r\times(n-r)}\\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_{r\times n}\\ N_{(n-r)\times n}\end{pmatrix}\\ &=(B_{m\times r},O_{m\times(n-r)})\begin{pmatrix} C_{r\times n}\\ N_{(n-r)\times n}\end{pmatrix}=BC. \qquad \text{结论得证.}\end{aligned}$$

59. 证明: $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ (其中 $\boldsymbol{\alpha}_1\neq\mathbf{0}$) 线性相关的充要条件是存在一个 $\boldsymbol{\alpha}_i$ $(1<i\leq r)$ 使得 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1}$ 线性表示, 且表示法唯一.

证: 充分性 显然. 必要性: 考虑下列所有的线性组合

$$\begin{aligned} &k_{11}\boldsymbol{\alpha}_1=\mathbf{0},\\ &k_{21}\boldsymbol{\alpha}_1+k_{22}\boldsymbol{\alpha}_2=\mathbf{0},\\ &k_{31}\boldsymbol{\alpha}_1+k_{32}\boldsymbol{\alpha}_2+k_{33}\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &k_{r1}\boldsymbol{\alpha}_1+k_{r2}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{rr}\boldsymbol{\alpha}_r=\mathbf{0}.\end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关, 所以存在一组不全为 0 的数使得某一个式子成立. 设 k_{ii} 是所有系数中第一个不为 0 的数, 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1\neq\mathbf{0}$, 所以 $1<i\leq r$. 因为 $k_{ii}\neq 0$, 所以 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1}$ 线性表示.

又因为系数还满足满足

$$k_{11}=k_{21}=k_{22}=\cdots=k_{i,i-1}=0$$

即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1}$ 线性无关, 所以表示法唯一.

60. 证明: $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_i\neq\sum\limits_{j=1}^{i-1}k_j\boldsymbol{\alpha}_j$ $(i=2,3,\cdots,s)$.

证: (必要性:) 用反证法 , 若存在某一个 i_0, 使得 $\boldsymbol{\alpha}_{i_0}\neq\sum\limits_{j=1}^{i_0-1}k_j\boldsymbol{\alpha}_j$, 则一定有 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关, 矛盾!

(充分性:) 用反证法, 假设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关, 由练习 59 可知存在一个 $\boldsymbol{\alpha}_{i_0}$ $(1<i_0\leq r)$ 使得 $\boldsymbol{\alpha}_{i_0}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_0-1}$ 线性表示, 矛盾!

61. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关, 如果在向量组的前面加入一个向量 $\boldsymbol{\beta}$, 证明: 在向量组 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 中至多有一个向量 $\boldsymbol{\alpha}_i$ $(1\leq i\leq r)$ 可经其前面的 i 个向量 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1}$ 线性表示. 并在 $\mathbb{R}^3$ 中做几何解释.

证: (1) 如果 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关, 那么任何 $\boldsymbol{\alpha}_i$ $(1\leq i\leq r)$ 都不能经其前面的 i 个向量线性表示;

(2) 如果 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关, 但 $\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$, 那么同样任何 $\boldsymbol{\alpha}_i$ $(1\leq i\leq r)$ 都不能经其前面的 i 个向量线性表示;

(3) 如果 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关, 且 $\boldsymbol{\beta}\neq\mathbf{0}$. 从前往后考察, 如果 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1}$ 线性无关, 而 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_i$ 线性相关, 此时 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 可由 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1}$ 线性表示. 下证至多有一个 $\boldsymbol{\alpha}_i$ $(1\leq i\leq r)$ 可由其前面的 i 个向量线性表示, 用反证法, 设 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_j$ $(j>i)$ 均可由前面的 i 个与 j 个向量线性表示, 即

$$\boldsymbol{\alpha}_i=k_0\boldsymbol{\beta}+k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_{i-1}\boldsymbol{\alpha}_{i-1}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_j = l_0\boldsymbol{\beta} + l_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + l_{i-1}\boldsymbol{\alpha}_{i-1} + l_i\boldsymbol{\alpha}_i + \cdots + l_{j-1}\boldsymbol{\alpha}_{j-1}$$

其中 $k_0 \neq 0$, $l_0 \neq 0$, 由上面的两个式子得到:

$$\boldsymbol{\beta} = -\frac{k_1}{k_0}\boldsymbol{\alpha}_1 - \cdots - \frac{k_{i-1}}{k_0}\boldsymbol{\alpha}_{i-1} + \frac{1}{k_0}\boldsymbol{\alpha}_i$$

$$\boldsymbol{\beta} = -\frac{l_1}{l_0}\boldsymbol{\alpha}_1 - \cdots - \frac{l_{i-1}}{l_0}\boldsymbol{\alpha}_{i-1} - \frac{l_i}{l_0}\boldsymbol{\alpha}_i - \cdots - -\frac{l_{j-1}}{l_0}\boldsymbol{\alpha}_{j-1} + \frac{1}{l_0}\boldsymbol{\alpha}_j$$

两式相减得到：

$$(\frac{l_1}{l_0} - \frac{k_1}{k_0})\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + (\frac{l_{i-1}}{l_0} - \frac{k_{i-1}}{k_0})\boldsymbol{\alpha}_{i-1} + (\frac{l_i}{l_0} + \frac{1}{k_0})\boldsymbol{\alpha}_i + \frac{l_{i+1}}{l_0}\boldsymbol{\alpha}_{i+1} + \cdots + +\frac{l_{j-1}}{l_0}\boldsymbol{\alpha}_{j-1} - \frac{1}{l_0}\boldsymbol{\alpha}_j = \mathbf{0}$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_j$ 线性无关, 所以上面 $j = i$, 且 $k_0 = l_0$, $k_1 = l_1, \cdots\ k_{i-1} = l_{i-1}$. 即至多只有一个 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 可由其前面的 i 个向量线性表示.

几何解释: 设 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,0,0), \boldsymbol{\alpha}_2 = (0,1,0), \boldsymbol{\alpha}_3 = (0,0,1)$,

当 $\boldsymbol{\beta} = (a,b,0)$ 时, $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 共面, 此时 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 不能由 $\boldsymbol{\beta}$ 表示, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 可由 $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}_1$ 表示: $\boldsymbol{\alpha}_2 = \frac{1}{b}\boldsymbol{\beta} - \frac{a}{b}\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 不能由 $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 表示.

当 $\boldsymbol{\beta} = (0,b,c)$ 时, $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 共面, 此时 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 不能由 $\boldsymbol{\beta}$ 表示, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 也不能由 $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}_1$ 表示, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 能由 $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 表示 :$\boldsymbol{\alpha}_3 = \frac{1}{c}\boldsymbol{\beta} + 0\boldsymbol{\alpha}_1 - \frac{b}{c}\boldsymbol{\alpha}_2$.

当 $\boldsymbol{\beta} = (a,0,c)$ 时, $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3$ 共面, 此时 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 不能由 $\boldsymbol{\beta}$ 表示, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 也不能由 $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}_1$ 表示, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 能由 $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 表示 :$\boldsymbol{\alpha}_3 = \frac{1}{c}\boldsymbol{\beta} - \frac{a}{c}\boldsymbol{\alpha}_1 + 0\boldsymbol{\alpha}_2$.

当 $\boldsymbol{\beta} = (a,b,c)$ 时, $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$, 任意三个不共面, 此时 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 不能由 $\boldsymbol{\beta}$ 表示, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 也不能由 $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}_1$ 表示, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 能由 $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 表示 :$\boldsymbol{\alpha}_3 = \frac{1}{c}\boldsymbol{\beta} - \frac{a}{c}\boldsymbol{\alpha}_1 - \frac{b}{c}\boldsymbol{\alpha}_2$,.

62. 证明：在 n 维向量空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中, 若向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 可经向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示，则表示法唯一的充要条件是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

证: 充分性 同教材 116 页定理 3.3 中表示法唯一的证明.

下面证明必要性. 用反证法：假设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关, 即存在不全为 0 的数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0}$$

由条件又有

$$\boldsymbol{\alpha} = \lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \lambda_s\boldsymbol{\alpha}_s$$

于是得到

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{0} = (k_1 + \lambda_1)\boldsymbol{\alpha}_1 + (k_2 + \lambda_2)\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + (k_s + \lambda_s)\boldsymbol{\alpha}_s$$

即向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示的方法有两种, 矛盾!

63. 设 A 是 n 阶矩阵, $r(A) = 1$, 证明：(1) $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (b_1, b_2, \cdots, b_n)$; (2)$A^2 = kA$.

证: 因为 $r(A)=1$, 所以 A 中任意两行成比例, 可设

$$A=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}(b_1,b_2,\cdots,b_n).$$

由 (1) 可知:

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}(b_1,b_2,\cdots,b_n)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}(b_1,b_2,\cdots,b_n) \\ &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\left[(b_1,b_2,\cdots,b_n)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\right](b_1,b_2,\cdots,b_n) \\ &= (a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)A=kA. \end{aligned}$$

66. 设 $m\times n$ 矩阵 A 的 m 个行向量是齐次线性方程组 $C\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系, 又 B 是一个 m 阶可逆矩阵. 证明: BA 的行向量组也是 $C\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系.

证: 由题设可得:

$$CA^T=O\Rightarrow\ CA^TB^T=O\Rightarrow\ C(BA)^T=O$$

即 $(BA)^T$ 的 m 个列向量都是 $C\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解, 亦即 BA 的 m 个行向量都是 $C\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解. 又因为矩阵 B 可逆, 所以

$$r(BA)=r(A)=m=BA\text{的行数}=\text{基础解系中解向量的个数}$$

故结论成立.

67. 证明: 若 A 是 n 阶矩阵 $(n>1)$, 且 $|A|=0$, 则 $|A|$ 中任意两行 (列) 对应元素的代数余子式成比例.

证:

$$|A|=0\Rightarrow\ r(A)<n\Rightarrow r(A^*)=0\text{或}1.$$

若 $r(A^*)=0\Rightarrow A^*=O$, 结论成立.

若 $r(A^*)=1\Rightarrow A^*$ 中任意两行 (列) 线性相关, 即成比例. 结论成立.

68. 设 A 是 $(n-1)\times n$ 矩阵, $|A_j|$ 表示 A 中划去第 j 列所构成的行列式. 证明:

(1) $(-|A_1|,|A_2|,\cdots,(-1)^n|A_n|)^T$ 是 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的一个解;

(2) 若 $|A_j|$ $(j=1,2,\cdots,n)$ 不全为零, 则 (1) 中的解是 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系.

证: (1) 在矩阵 $A=(a_{ij})_{(n-1)\times n}$ 的前面加上一行 $a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n}$, 得到 n 阶矩阵 $B=(b_{ij})$.

显然有 $|B|=0$. 下面考虑:

$$b_{i1}M_{11}-b_{i2}M_{12}+b_{i3}M_{13}-\cdots+(-1)^{1+n}b_{in}M_{1n}=\begin{cases} |B|=0, & \text{当}i=1\text{时}; \\ 0, & \text{当}i>1\text{时} \end{cases}$$

注意到：$b_{ij}=a_{i-1,j}\quad(i=2,3,\cdots,n,\quad j=1,2,\cdots,n)$，且 $M_{1j}=|A_j|$, 所以当 $1\le i\le n$ 时, 总有

$$b_{i1}|A_1|-b_{i2}|A_2|+b_13|A_3|-\cdots+(-1)^{1+n}b_{in}|A_n|=0$$

两边同时乘以 (-1) 得：

$$b_{i1}(-|A_1|)+b_{i2}|A_2|+b_{i3}(-|A_3|)+\cdots+b_{in}((-1)^n|A_n|)=0(i=1,2,\cdots,n)$$

故结论 (1) 成立.

(2) 由 $|A_j|\quad(j=1,2,\cdots,n)$ 不全为零 $\Rightarrow\ r(A)\ge n-1$，另一方面又显然有 $r(A)\le n-1$，所以

$$r(A)=n-1.$$

于是方程组的基础解系中解向量的个数为

$$n-r(A)=n-(n-1)=1.$$

又因为 (1) 中的解为非零解，从而线性无关, 所以 (1) 中的解是一个基础解系.

69. 若 A 为一个 n 阶矩阵, 且 $A^2=A$, 证明

$$r(A)+r(A-I)=n.$$

证: 一方面 $r(A)+r(A-I)=r(A)+r(I-A)\ge r(A+I-A)=r(I)=n$,
另一方面 $A^2=A\Rightarrow\ A^2-A=O\Rightarrow\ A(A-I)=O\Rightarrow\ r(A)+r(A-I)\le n$.
综合可得 $r(A)+r(A-I)=n$.

70. 若 A 为一个 n 阶矩阵, 且 $A^2=I$, 证明

$$r(A+I)+r(A-I)=n.$$

证: 一方面 $r(A+I)+r(A-I)=r(A+I)+r(I-A)\ge r(A+I+I-A)=r(2I)=n$,
另一方面 $A^2=I\Rightarrow\ A^2-A=O\Rightarrow\ (A+I)(A-I)=O\Rightarrow\ r(A+I)+r(A-I)\le n$.
综合可得 $r(A+I)+r(A-I)=n$.

71. 设 A,B 皆为 n 阶方阵，证明

$$r(AB)\ge r(A)+r(B)-n.$$

证: 由练习 15 的结论可知：

$$r(A)+r(B)=r\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}\le r\begin{pmatrix}A&O\\I&B\end{pmatrix}$$

$$=r\begin{pmatrix}O&-AB\\I&B\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}O&-AB\\I&O\end{pmatrix}=r(I)+r(-AB)=n+r(AB)$$

于是得到 $r(AB)\ge r(A)+r(B)-n$.

72. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{nj})^T \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$. 证明: 如果

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|,\ i = 1, 2, \cdots, n,$$

则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.

证: 用反证法. 假设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关, 则齐次线性方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \mathbf{0}$ 有非零解. 设非零解为 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 其中

$$x_i \geq x_j (j \neq i).$$

于是由

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = 0$$

得到

$$|a_{ii}||x_i| = -|\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij}x_j| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}||x_j|$$

即

$$|a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|\frac{|x_j|}{|x_i|} \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

矛盾!

第四章　向量空间与线性变换

1. 证明: $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,1)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,-1,-1)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,1,-1)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_4=(1,-1,-1,1)^T$ 是 $\mathbb{R}^4$ 的一组基, 并求 $\boldsymbol{\beta}=(1,2,1,1)^T$ 在这组基下的坐标.

解: 因为

$$|(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)|=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&0&-2&-2\\0&-2&0&-2\\0&-2&-2&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&2&0\\0&2&0&2\\0&0&2&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&2&01\\0&0&-2&2\\0&0&0&4\end{vmatrix}=-16\neq 0.$$

所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关, 又因为任意 5 个四维向量都线性相关, 所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是 $\mathbb{R}^4$ 的一组基.

设 $\boldsymbol{\beta}$ 在这组基下的坐标为 $(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$, 即有

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\beta}$$

解此方程组:

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&-1&-1&2\\1&-1&1&-1&1\\1&-1&-1&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[i=2,3,4]{r_i-r_1}\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&0&-2&-2&1\\0&-2&0&-2&0\\0&-2&-2&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_4}\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&-2&-2&0&0\\0&-2&0&-2&0\\0&0&-2&-2&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&-2&-2&0&0\\0&0&2&-2&0\\0&0&-2&-2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_4+r_3}\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&-2&-2&0&0\\0&0&2&-2&0\\0&0&0&-4&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&1&0&0\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&1&-\frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_1-r_4]{r_3+r_4}\begin{pmatrix}1&1&1&0&\frac{5}{4}\\0&1&1&0&0\\0&0&1&0&-\frac{1}{4}\\0&0&0&1&-\frac{1}{4}\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2-r_3]{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&0&\frac{5}{4}\\0&1&0&0&\frac{1}{4}\\0&0&1&0&-\frac{1}{4}\\0&0&0&1&-\frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

方程组有唯一解: $x_1=\dfrac{5}{4}$, $x_2=\dfrac{1}{4}$, $x_3=x_4=-\dfrac{1}{4}$. 即 $\boldsymbol{\beta}$ 在这组基下的坐标为 $(\dfrac{5}{4},\dfrac{1}{4},-\dfrac{1}{4},-\dfrac{1}{4})^T$.

2. 已知 $\mathbb{R}^3$ 的两组基为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(2,3,3)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(3,7,1)^T$; $\boldsymbol{\beta}_1=(3,1,4)^T$, $\boldsymbol{\beta}_2=(5,2,1)^T$, $\boldsymbol{\beta}_3=(1,1-6)^T$. 求

(1) 向量 $\boldsymbol{\gamma}=(3,6,2)^T$ 在基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3\}$ 下的坐标;

(2) 基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3\}$ 到基 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3\}$ 的过渡矩阵;

(3) 用公式 (4.7) 求 $\boldsymbol{\gamma}$ 在基 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3\}$ 下的坐标.

解: (1) 设向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 在基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3\}$ 下的坐标为 $(x_1,x_2,x_3)^T$, 即 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\gamma}$, 解方程组:

$$\begin{pmatrix}1&2&3&3\\2&3&7&6\\1&3&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&2&3&3\\0&-1&1&0\\0&1&-2&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1&2&3&3\\0&-1&1&0\\0&0&-1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[i=2,3]{r_i\times(-1)}\begin{pmatrix}1&2&3&3\\0&1&-1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_1-3r_3]{r_2+r_3}\begin{pmatrix}1&2&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-2r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&-2\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

于是所求方程组的解为: $x_1=-2,\ x_2=1,\ x_3=1$, 即向量 $\boldsymbol{\gamma}=(3,6,2)^T$ 在基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3\}$ 下的坐标为 $(-2,1,1)^T$.

(2) 设所求的过渡矩阵为 P , 即有 $(\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3)P$, 那么 $P=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3)^{-1}(\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3)$.

$$\begin{pmatrix}1&2&3&3&5&1\\2&3&7&1&2&1\\1&3&1&4&1&-6\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&2&3&3&5&1\\0&-1&1&-5&-8&-1\\0&1&-2&1&-4&-7\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+r_1}\begin{pmatrix}1&2&3&3&5&1\\0&-1&1&-5&-8&-1\\0&0&-1&-4&-12&-8\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[i=2,3]{r_i\times(-1)}\begin{pmatrix}1&2&3&3&5&1\\0&1&-1&5&8&1\\0&0&1&4&12&8\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1-3r_3]{r_2+r_3}\begin{pmatrix}1&2&0&-9&-31&-23\\0&1&0&9&20&9\\0&0&1&4&12&8\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-2r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&-27&-71&-41\\0&1&0&9&20&9\\0&0&1&4&12&8\end{pmatrix}$$

于是所求过渡矩阵 $P=\begin{pmatrix}-27&-71&-41\\9&20&9\\4&12&8\end{pmatrix}$.

(3) 向量 $\boldsymbol{\gamma}=(3,6,2)^T$ 在基 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3\}$ 下的坐标为 $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-27&-71&-41\\9&20&9\\4&12&8\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$. 因为

$$\begin{pmatrix}-27&-71&-41&-2\\9&20&9&1\\4&12&8&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3\div 4]{r_1+3r_2}\begin{pmatrix}0&-11&-14&1\\9&20&9&1\\1&3&2&\frac{1}{4}\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&3&2&\frac{1}{4}\\9&20&9&1\\0&-11&-14&1\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[r_3\times 7]{r_2-9r_1}\begin{pmatrix}1&3&2&\frac{1}{4}\\0&-7&-9&-\frac{5}{4}\\0&-77&-98&7\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-11r_2}\begin{pmatrix}1&3&2&\frac{1}{4}\\0&-7&-9&-\frac{5}{4}\\0&0&1&\frac{83}{4}\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2+9r_3]{r_1-2r_3}\begin{pmatrix}1&3&0&-\frac{165}{4}\\0&-7&0&\frac{742}{4}\\0&0&1&\frac{83}{4}\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{r_2\div(-7)}\begin{pmatrix}1&3&0&-\frac{165}{4}\\0&1&0&-\frac{106}{4}\\0&0&1&\frac{83}{4}\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-3r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{153}{4}\\0&1&0&-\frac{106}{4}\\0&0&1&\frac{83}{4}\end{pmatrix}$$

所以向量 $\boldsymbol{\gamma}=(3,6,2)^T$ 在基 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3\}$ 下的坐标为 $(\frac{153}{4},\ -\frac{106}{4},\ \frac{83}{4})^T$.

3. 已知 $\mathbb{R}^4$ 的两组基为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,0)^T,\ \boldsymbol{\alpha}_2=(1,-1,1,1)^T,\ \boldsymbol{\alpha}_3=(-1,2,1,1)^T,\boldsymbol{\alpha}_4=(-1,-1,0,1)^T$; $\boldsymbol{\beta}_1=(2,1,0,1)^T,\ \boldsymbol{\beta}_2=(0,1,2,2)^T,\ \boldsymbol{\beta}_3=(-2,1,1,2)^T,\ \boldsymbol{\beta}_4=(1,3,1,2)^T$. 求

(1) 求基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_4\}$ 到基 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3,\ \boldsymbol{\beta}_4\}$ 的过渡矩阵; 若向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 在基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\}$ 下的坐标为 $(1,0,0,0)^T$, 求 $\boldsymbol{\gamma}$ 在基 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4\}$ 下的坐标;

(2) 求基 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3,\ \boldsymbol{\beta}_4\}$ 到基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_4\}$ 的过渡矩阵; 若向量 $\boldsymbol{\xi}$ 在基 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3,\ \boldsymbol{\beta}_4\}$ 下的坐标为 $(1,2,-1,0)^T$, 求 $\boldsymbol{\xi}$ 在基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_4\}$ 下的坐标;

(3) 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_4\}$ 下的坐标为 $(1,2,-1,0)$ 求它在基 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3,\ \boldsymbol{\beta}_4\}$ 下的坐标.

解: 记 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_4)$, $B=(\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3,\ \boldsymbol{\beta}_4)$.

(1) 设所求过渡矩阵为 P, 即有 $B = AP$, 从而 $P = A^{-1}B$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & 1 & -3 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 2 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 2 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 & 1 & -3 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4+3r_2]{r_3-2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & 4 & 0 & 7 & 11 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3\div(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & 1 & \frac{5}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 4 & 0 & 7 & 11 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4-7r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & 1 & \frac{5}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-\frac{3}{2}r_4]{r_1+r_4,\ r_2-r_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2-r_3]{r_1+r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

即从基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_4\}$ 到基 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3,\ \boldsymbol{\beta}_4\}$ 的过渡矩阵为 $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

下面求 P^{-1}.

$$(P, I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4-r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_4]{r_1-r_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

即 $P^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&-1&1\\-1&1&0&0\\0&0&0&1\\1&-1&1&-1\end{pmatrix}$.

于是当向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 在基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\}$ 下的坐标为 $(1,0,0,0)^T$, 则 $\boldsymbol{\gamma}$ 在基 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4\}$ 下的坐标为:

$$\begin{pmatrix}0&1&-1&1\\-1&1&0&0\\0&0&0&1\\1&-1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

(2) 设所求过渡矩阵为 Q, 即有 $A=BQ$, 从而 $Q=B^{-1}A$, 于是 $Q=P^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&-1&1\\-1&1&0&0\\0&0&0&1\\1&-1&1&-1\end{pmatrix}$.

当 $\boldsymbol{\xi}$ 在基 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3,\ \boldsymbol{\beta}_4\}$ 下的坐标为 $(1,2,-1,0)^T$ 时, 它在基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_4\}$ 下的坐标为:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&1\\0&1&1&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

(3) 当向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_4\}$ 下的坐标为 $(1,2,-1,0)$ 时, 它在基 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3,\ \boldsymbol{\beta}_4\}$ 下的坐标为:

$$\begin{pmatrix}0&1&-1&1\\-1&1&0&0\\0&0&0&1\\1&-1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\0\\-2\end{pmatrix}.$$

4. 在 $\mathbb{R}^4$ 中找一个向量 $\boldsymbol{\gamma}$, 使它在自然基和基 $B=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4\}$ 下有相同的坐标, 其中 $\boldsymbol{\beta}_1=(2,1,-1,1)^T$, $\boldsymbol{\beta}_2=(0,3,1,0)^T$, $\boldsymbol{\beta}_3=(5,3,2,1)^T$, $\boldsymbol{\beta}_4=(6,6,1,3)^T$.

解: 设所求向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 在两组基下的坐标均为 $(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$, 则有

$$\boldsymbol{\gamma}=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T=x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+x_3\boldsymbol{\beta}_3+x_4\boldsymbol{\beta}_4.$$

即

$$\left\{\begin{array}{c}2x_1+5x_3+6x_4=x_1\\x_1+3x_2+3x_3+6x_4=x_2\\-x_1+x_2+2x_3+x_4=x_3\\x_1+x_3+3x_4=x_4\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}x_1+5x_3+6x_4=0\\x_1+2x_2+3x_3+6x_4=0\\-x_1+x_2+x_3+x_4=0\\x_1+x_3+2x_4=0\end{array}\right.$$

对上述方程组的系数矩阵进行初等行变换:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&5&6\\1&2&3&6\\-1&1&1&1\\1&0&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-r_1]{r_2-r_1,\ r_3+r_1}\begin{pmatrix}1&0&5&6\\0&2&-2&0\\0&1&6&7\\0&0&-4&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4\div(-4)]{r_2\div 2}\begin{pmatrix}1&0&5&6\\0&1&-1&0\\0&1&6&7\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&0&5&6\\0&1&-1&0\\0&0&7&7\\0&0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-r_3]{r_3\div 7}\begin{pmatrix}1&0&5&6\\0&1&-1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2+r_3]{r_1-5r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

取 $x_4=k$, 得方程组得通解为: $(x_1,x_2,x_3,x_4)^T=(-k,-k,-k,k)^T$ (k为任意实数.) 即所求向量为:

$$\boldsymbol{\gamma}=(-k,-k,-k,k)^T\quad (k\text{为任意实数.})$$

5. 已知 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,-1,1)$, $\boldsymbol{\beta}=(2,3,1,-1)$, $\boldsymbol{\gamma}=(-1,-1,-2,2)$.

(1) 求 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ 的长度及 $<\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta}>$, $<\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\gamma}>$.

(2) 求与 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ 都正交的所有向量.

解: (1) $\|\boldsymbol{\alpha}\|=\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{7}$, $\|\boldsymbol{\beta}\|=\sqrt{4+9+1+1}=\sqrt{15}$, $\|\boldsymbol{\gamma}\|=\sqrt{1+1+4+4}=\sqrt{10}$.

$$<\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta}>=\arccos\frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}}{\|\boldsymbol{\alpha}\|\cdot\|\boldsymbol{\beta}\|}=\arccos\frac{2+6-1-1}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{15}}=\arccos\frac{2\sqrt{105}}{21}.$$

$$<\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\gamma}>=\arccos\frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\gamma}}{\|\boldsymbol{\alpha}\|\cdot\|\boldsymbol{\gamma}\|}=\arccos\frac{-1-2+2+2}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{10}}=\arccos\frac{\sqrt{70}}{70}.$$

(2) 设与 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ 都正交的向量为 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$, 则有 $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{x}=0$, $\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{x}=0$, $\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{x}=0$. 即 $\begin{cases}x_1+2x_2-x_3+x_4=0\\2x_1+3x_2+x_3-x_4=0\\-x_1-x_2-2x_3+2x_4=0\end{cases}$

解此方程组：

$$\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\2&3&1&-1\\-1&-1&-2&2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\0&-1&3&-3\\0&1&-3&3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2\times(-1)]{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\0&1&-3&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-2r_2}\begin{pmatrix}1&0&5&-5\\0&1&-3&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

同解方程组为 $\begin{cases}x_1=5x_4-5x_3\\x_2=3x_3-3x_4\end{cases}$ 分别取 $\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 代入同解方程组得 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-5\\3\\1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}5\\-3\\0\\1\end{pmatrix}$. 于是与 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ 都正交的所有向量为 $k_1\begin{pmatrix}-5\\3\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}5\\-3\\0\\1\end{pmatrix}$ (k_1,k_2 为任意常数).

6. 求与 $(1,1,-1,1)$, $(1,-1,-1,1)$, $(2,1,1,3)$ 都正交的单位向量.

解: 设与已知向量都正交的向量为 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$, 则有 $\begin{cases} x_1+x_2-x_3+x_4=0 \\ x_1-x_2-x_3+x_4=0 \\ 2x_1+x_2+x_3+3x_4=0 \end{cases}$ 解此方程组:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2\times(-1)]{r_3-2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & -2 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{r_3\div(-6)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2+3r_3]{r_1+r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

同解方程组为 $\begin{cases} x_1=-\frac{4}{3}x_4 \\ x_2=0 \\ x_3=-\frac{1}{3}x_4 \end{cases}$ 取 $x_4=-3$ 代入同解方程组得 $\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, 于是与已知向量都正交的所有向量为 $k\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ (k 为任意常数). 由 $k^2(16+1+9)=1$ 得 $k=\pm\dfrac{1}{\sqrt{26}}$, 所以所求向量为 $\pm\dfrac{1}{\sqrt{26}}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

7. 已知向量 $\boldsymbol{\beta}$ 与向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 中每个向量都正交, 求证 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的任一线性组合正交.

证: 设 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m$ 为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的任一线性组合, 注意到 $(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_i)=0\ \ (i=1,2,\cdots,m)$, 则

$$(\boldsymbol{\beta},k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m)=k_1(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1)+k_2(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_2)+\cdots+k_m(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_m)=0.$$

结论成立.

10. 设 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基, 证明 $\boldsymbol{\beta}_1=\dfrac{1}{3}(2\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3)$, $\boldsymbol{\beta}_2=\dfrac{1}{3}(2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3)$, $\boldsymbol{\beta}_3=\dfrac{1}{3}(\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3)$, 也是 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基.

证: 设 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$, $B=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$ 由题设可知:

$A^TA=E$ 且 $B=\dfrac{1}{3}A\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

因为

$$B^TB=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}^T A\cdot\frac{1}{3}A^T\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}^T\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}=I.$$

所以 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3\}$ 也是 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基.

11. 已知 $Q=\begin{pmatrix} a & -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ b & c & d \\ -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} & e \end{pmatrix}$ 为正交矩阵, 试求 a,b,c,d 的值.

解: 因为 Q 为正交矩阵, 所以 Q^T 也是正交矩阵, 从而 Q 的行向量组为 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基, 即

$$\begin{cases} a^2+\dfrac{9}{49}+\dfrac{4}{49}=1, & (4.1)\\ b^2+c^2+d^2=1, & (4.2)\\ \dfrac{9}{49}+\dfrac{4}{49}+e^2=1, & (4.3)\\ -\dfrac{3}{7}a-\dfrac{6}{49}+\dfrac{2}{7}e=0, & (4.4)\\ ab-\dfrac{3}{7}c+\dfrac{2}{7}d=0, & (4.5)\\ -\dfrac{3}{7}b+\dfrac{2}{7}c+de=0, & (4.6) \end{cases}$$

由 4.1 得: $a=\pm\frac{6}{7}$, 由 4.3 得: $e=\pm\frac{6}{7}$. 将 $a=\frac{6}{7}$ 代入 4.4 得 $e=\frac{12}{7}$, 这与 4.3 矛盾, 故舍去. 将 $a=-\frac{6}{7}$ 代入 4.4 得 $e=-\frac{6}{7}$. 将 $a=e=-\frac{6}{7}$ 代入 4.5 和 4.6 联立解得 $c=-3b,\ d=-\frac{3}{2}b$, 代入 4.2 得 $b=\pm\frac{2}{7}$, 于是 $c=\mp\frac{6}{7},\ d=\mp\frac{3}{7}$. 即所求的值有两组, 分别为 $(a,b,c,d,e)=(-\frac{6}{7},\frac{2}{7},-\frac{6}{7},-\frac{3}{7},-\frac{6}{7})$ 或 $(-\frac{6}{7},-\frac{2}{7},\frac{6}{7},\frac{3}{7},-\frac{6}{7})$

12. 证明: 若 A 是正交阵, 则 A 的伴随矩阵 $A^\star$ 也是正交矩阵.

证: 因为 A 是正交矩阵, 所以 $A^TA=E$, 从而 $AA^T=E$, 且 $|A|^2=|A^T||A|=|A^TA|=|E|=1$. 而 $A^\star=|A|A^{-1}$, 于是 $(A^\star)^TA^\star=(|A|A^{-1})^T|A|A^{-1}=|A|^2(AA^T)^{-1}=E^{-1}=E$. 故 $A^\star$ 也是正交矩阵.

21. 设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, 求齐次线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解空间的维数及解空间的一组标准正交基.

分析: 齐次线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解空间的维数就是其基础解系中解向量的个数, 并且基础解系就是解空间的一组基, 因此本题就是要求齐次线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系, 再将其标准正交化.

解:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & -4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2-3r_3]{r_1+r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2\times(-1),\ r_3\times(-1)]{r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

因为 $r(A)=3$, 所以解空间的维数为 $n-r(A)=5-3=2$.

分别取 $\begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 代入同解方程组 $\begin{cases} x_1=-x_4+4x_5 \\ x_2=x_4-5x_5 \\ x_3=0 \end{cases}$ 得基础解系为:

$$\boldsymbol{\xi}_1=(1,1,0,1,0)^T,\ \boldsymbol{\xi}_2=(4,-5,0,0,1).$$

将 $\boldsymbol{\xi}_1$, $\boldsymbol{\xi}_2$ 正交化得：$\boldsymbol{\eta}_1=\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\eta}_2=\boldsymbol{\xi}_2-\dfrac{(\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\eta}_1)}{(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_1)}\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}4\\-5\\0\\0\\1\end{pmatrix}-\dfrac{-4-5}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\3\\1\end{pmatrix}$.

再单位化：$\boldsymbol{e}_1=\dfrac{\boldsymbol{\eta}_1}{\|\boldsymbol{\eta}_1\|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2=\dfrac{\boldsymbol{\eta}_2}{\|\boldsymbol{\eta}_2\|}=\dfrac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\3\\1\end{pmatrix}$.

综上: 齐次线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解空间的维数为 2, 解空间的一组标准正交基为 $\boldsymbol{e}_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,0,1,0)^T$, $\boldsymbol{e}_2=\dfrac{1}{\sqrt{15}}(1,-2,0,3,1)^T$.

22. 设 V 是 $\mathbb{R}^5$ 的一个二维子空间, 它的一组基为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,1,1)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0,1,1)$, 试将 V 的基扩充为 $\mathbb{R}^5$ 的基.

分析: 与 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 正交的向量一定与 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关.

解: 设向量 $\boldsymbol{x}$ 满足 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{x})=0$, $(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{x})=0$, 即 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4\ \ x_5=0\\x_1+x_2+x_4+x_5=0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_3=0\\x_1=-x_2-x_4-x_5\end{cases}$

方程组的基础解系为: $\boldsymbol{\xi}_1=(-1,1,0,0,0)^T$, $\boldsymbol{\xi}_2=(-1,0,0,1,0)^T$, $\boldsymbol{\xi}_3=(-1,0,0,0,1)^T$, 于是得到 $\mathbb{R}^5$ 的一组基为: $(1,1,1,1,1)^T$, $(1,1,0,1,1)^T$, $(-1,1,0,0,0)^T(-1,0,0,1,0)^T$, $(-1,0,0,0,1)^T$.

另解: $\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[i=2,3,4,5]{r_1+r_i}\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_1}\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&0&0&0\\-1&-1&0&-1&-1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3\times(-1)}$ $\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&0&0&0\\1&1&0&1&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$. 于是得到 $\mathbb{R}^5$ 的一组基为: $(1,1,1,1,1)^T$, $(1,1,0,1,1)^T$, $(0,1,0,0,0)^T(0,0,0,1,0)^T$, $(0,0,0,0,1)^T$.

27. 设 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是 n 维空间 V 的一组基, 又 V 中向量 $\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ 在这组基下的坐标 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 全不为零. 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ 中任意 n 个向量必构成 V 的一组基. 并求 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 在基 $\{\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_{n+1}\}$ 下的坐标.

证: 只需证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ 中任意 n 个向量线性无关.

若 n 个向量中不包含 $\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$, 那么结论显然成立, 若 n 个向量中包含 $\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$, 不妨考虑 $\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ 这 n 个向量, 设

$$k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n+k_{n+1}\boldsymbol{\alpha}_{n+1}=\boldsymbol{0}$$

又因为 $\boldsymbol{\alpha}_{n+1}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n$, 则有

$$k_{n+1}x_1\boldsymbol{\alpha}_1+(k_{n+1}x_2+k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(k_{n+1}x_n+k_n)\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0}$$

因为 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是 n 维空间 V 的一组基, 所以

$$\begin{cases} k_{n+1}x_1=0 \\ k_{n+1}x_2+k_2=0 \\ \cdots\cdots \\ k_{n+1}x_n+k_n=0 \end{cases} \text{因为 } x_i\neq 0,\ \text{所以 } k_2=k_3=\cdots=k_{n+1}=0$$

故结论成立.

设 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 在基 $\{\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_{n+1}\}$ 下的坐标为 $(y_2,y_3,\cdots,y_n,y_{n+1})^T$ 即有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}_1 &= y_2\boldsymbol{\alpha}_2+y_3\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+y_n\boldsymbol{\alpha}_n+y_{n+1}\boldsymbol{\alpha}_{n+1} \\ &= y_2\boldsymbol{\alpha}_2+y_3\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+y_n\boldsymbol{\alpha}_n+y_{n+1}(x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n) \\ &= (x_1y_{n+1})\boldsymbol{\alpha}_1+(y_2+x_2y_{n+1})\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(y_n+x_ny_{n+1})\boldsymbol{\alpha}_n \end{aligned}$$

于是得到

$$\begin{cases} x_1y_{n+1}=1 \\ y_2+x_2y_{n+1}=0 \\ \cdots\cdots \\ y_n+x_ny_{n+1}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_{n+1}=\dfrac{1}{x_1} \\ y_2=-\dfrac{x_2}{x_1} \\ \cdots\cdots \\ y_n=-\dfrac{x_n}{x_1} \end{cases}$$

故 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 在基 $\{\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_{n+1}\}$ 下的坐标为 $(\frac{1}{x_1},-\frac{x_2}{x_1},\cdots,-\frac{x_n}{x_1})^T$.

28. 设 $\mathbb{R}[x]_5$ 的旧基为 $\{1,x,x^2,x^3,x^4\}$; 新基为 $\{1,1+x,1+x+x^2,1+x+x^2+x^3,1+x+x^2+x^3+x^4\}$.

(1) 求由旧基到新基的过渡矩阵;

(2) 求多项式 $1+2x+3x^2+4x^3+5x^4$ 在新基下的坐标;

(3) 若多项式 $f(x)$ 在新基下的坐标为 $(1,2,3,4,5)$, 求它在新基下的坐标.

解: (1) 因为 $(1,1+x,1+x+x^2,1+x+x^2+x^3,1+x+x^2+x^3+x^4)=(1,x,x^2,x^3,x^4)\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&1&1&1\\0&0&1&1&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$,

所以所求过渡矩阵为: $\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&1&1&1\\0&0&1&1&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$.

(2) 设所求坐标为 (a,b,c,d,e), 即有

$$\begin{aligned} 1+2x+3x^2+4x^3+5x^4 &= a+b(1+x)+c(1+x+x^2)+d(1+x+x^2+x^3)+e(1+x+x^2+x^3+x^4) \\ &= (a+b+c+d+e)+(b+c+d+e)x+(c+d+e)x^2+(d+e)x^3+ex^4 \end{aligned}$$

比较系数得: $\begin{cases} a+b+c+d+e &= 1 \\ b+c+d+e &= 2 \\ c+d+e &= 3 \\ d+e &= 4 \\ e &= 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-1 \\ c=-1 \\ d=-1 \\ e=5 \end{cases}$

即多项式 $1+2x+3x^2+4x^3+5x^4$ 在新基下的坐标为: $(-1,-1,-1,-1,5)$.

(3) 由已知可得:

$$f(x)=1+2(1+x)+3(1+x+x^2)+4(1+x+x^2+x^3)+5(1+x+x^2+x^3+x^4)=15+14x+12x^2+9x^3+5x^4$$

所以 $f(x)$ 在旧基下的坐标为 $(15,14,12,9,5)$.

29. 设 $E_{11}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{12}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{21}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{22}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$G_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $G_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $G_3=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $G_4=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 01 \end{pmatrix}$,

(1) 证明 G_1,G_2,G_3,G_4 是 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 的一组基;

(2) 求从基 $\{E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}\}$ 到基 $\{G_1,G_2,G_3,G_4\}$ 的过渡矩阵;

(3) 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ 分别在两组基下的坐标 (列) 向量.

解: (1) 设 $k_1G_1+k_2G_2+k_3G_3+k_4G_4=O$, 即

$$k_1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+k_4\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 01 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k_2+k_3+k_4 & k_1+k_3+k_4 \\ k_1+k_2+k_4 & k_1+k_2+k_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

从而 $\begin{cases} k_2+k_3+k_4=0 \\ k_1+k_3+k_4=0 \\ k_1+k_2+k_4=0 \\ k_1+k_2+k_3=0 \end{cases} \Rightarrow k_1=k_2=k_3=k_4=0$. 所以 G_1,G_2,G_3,G_4 线性无关, 又因为 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 为四维空间, 所以 G_1,G_2,G_3,G_4 是 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 的一组基.

(2) 因为 $(G_1,G_2,G_3,G_4)=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 所以从基 $\{E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}\}$ 到基 $\{G_1,G_2,G_3,G_4\}$ 的过渡矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(3) 因为 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}=E_{12}+2E_{21}-3E_{22}$, 所以矩阵 A 在基 $\{E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}\}$ 下的坐标为 $(0,1,2,-3)^T$.

设矩阵 A 在基 $\{G_1, G_2, G_3, G_4\}$ 下的坐标为 $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T$, 即有

$$x_1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 01 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2+x_3+x_4 & x_1+x_3+x_4 \\ x_1+x_2+x_4 & x_1+x_2+x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

从而 $\begin{cases} x_2+x_3+x_4=0 \\ x_1+x_3+x_4=1 \\ x_1+x_2+x_4=2 \\ x_1+x_2+x_3=-3 \end{cases}$ 解方程组

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2\times(-1), r_3\times(-1)]{r_4+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4-r_3]{r_1-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4\div 3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3+r_4]{r_1-r_4, r_2+r_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

即方程组的解为 $x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = -2, X_4 = 3$, 于是矩阵 A 在基 $\{G_1, G_2, G_3, G_4\}$ 下的坐标为 $(0, -1, -2, 3)^T$.

41. 在 $\mathbb{R}^3$ 中定义线性变换 $\boldsymbol{\sigma}(x_1, x_2, x_3)^T = (x_1+x_2, x_1-x_2, x_3)^T$.

(1) 求 $\boldsymbol{\sigma}$ 在自然基 $\{\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3\}$ 下的对应矩阵;

(2) 求 $\boldsymbol{\sigma}$ 在基 $\{\boldsymbol{\beta}_1 = (1,0,0)^T, \boldsymbol{\beta}_2 = (1,1,0)^T, \boldsymbol{\beta}_3 = (1,1,1)^T\}$ 下的对应矩阵.

解: (1) 因为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}_1) &= \boldsymbol{\sigma}(1,0,0)^T = (1,1,0)^T = \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}_2) &= \boldsymbol{\sigma}(0,1,0)^T = (1,-1,0)^T = \boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}_3) &= \boldsymbol{\sigma}(0,0,1)^T = (0,0,1)^T = \boldsymbol{\varepsilon}_3 \end{aligned}$$

即 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3) = (\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 所以 $\boldsymbol{\sigma}$ 在自然基 $\{\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3\}$ 下的对应矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(2) 因为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\beta}_1) &= \boldsymbol{\sigma}(1,0,0)^T = (1,1,0)^T = \boldsymbol{\beta}_2 \\ \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\beta}_2) &= \boldsymbol{\sigma}(1,1,0)^T = (2,0,0)^T = 2\boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\beta}_3) &= \boldsymbol{\sigma}(1,1,1)^T = (2,0,1)^T = 2\boldsymbol{\beta}_1 - \boldsymbol{\beta}_2 + \boldsymbol{\beta}_3 \end{aligned}$$

即 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 所以 $\boldsymbol{\sigma}$ 在自然基 $\{\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3\}$ 下的对应矩阵为 $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

另解: 从自然基 $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3\}$ 到基 $\{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}$ 的过渡矩阵为: $C=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, 于是 $\boldsymbol{\sigma}$ 在基 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}$ 下的对应矩阵为:

$$\begin{aligned}C^{-1}AC &= \begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2&2\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

42. 设 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 和 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的两组基, 已知: $\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\beta}_3=-2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$; $\boldsymbol{\sigma}$ 在基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 下的对应矩阵为 $A=\begin{pmatrix}5&7&-5\\0&4&-1\\2&8&3\end{pmatrix}$. 试求:

(1) $\boldsymbol{\sigma}$ 在基 $\{-\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 下的对应矩阵;

(2) $\boldsymbol{\sigma}$ 在基 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}$ 下的对应矩阵.

解: (1) 由题设可知: $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1)=5\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_2)=7\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2+8\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_3)=-5\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3$. 注意到 $\boldsymbol{\sigma}$ 为线性变换, 于是有:

$\boldsymbol{\sigma}(-\boldsymbol{\alpha}_2)=-\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_2)=-7\boldsymbol{\alpha}_1-4\boldsymbol{\alpha}_2-8\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\sigma}(2\boldsymbol{\alpha}_1)=2\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1)=10\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_3)=-5\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3$.

所以 $\boldsymbol{\sigma}$ 在基 $\{-\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 下的对应矩阵为: $B=\begin{pmatrix}-7&10&-5\\-4&0&-1\\-8&4&3\end{pmatrix}$.

另解: 因为从基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 到基 $\{-\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 的过渡矩阵为: $C=\begin{pmatrix}0&2&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, 所以 $\boldsymbol{\sigma}$ 在基 $\{-\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 下的对应矩阵为:

$$\begin{aligned}B=C^{-1}AC &= \begin{pmatrix}0&2&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}5&7&-5\\0&4&-1\\2&8&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}0&-1&0\\\frac{1}{2}&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&7&-5\\0&4&-1\\2&8&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7&10&-5\\-4&0&-1\\-8&4&3\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(2) 由已知可得从基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 到基 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}$ 的过渡矩阵为: $C=\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&1&1\\3&2&1\end{pmatrix}$, 所以 $\boldsymbol{\sigma}$ 在基 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}$ 下的对应矩阵为:

$$B = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 & 24 & 12 \\ -54 & -34 & -18 \\ 18 & 12 & 9 \end{pmatrix}.$$

43. 已知 $\mathbb{R}^3$ 的线性变换 $\boldsymbol{\sigma}$ 对于基 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (-1,0,2)^T, \boldsymbol{\alpha}_2 = (0,1,1)^T, \boldsymbol{\alpha}_3 = (3,-1,-6)^T$ 的象为 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1) = \boldsymbol{\beta}_1 = (-1,0,1)^T$, $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_2) = \boldsymbol{\beta}_2 = (0,-1,2)^T$, $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_3) = \boldsymbol{\beta}_3 = (-1,-1,3)^T$.

(1) 求 $\boldsymbol{\sigma}$ 在基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3\}$ 下的矩阵表示;

(2) 求 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\beta}_1), \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\beta}_2), \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\beta}_3)$;

(3) $\boldsymbol{\sigma}$ 在基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3\}$ 下的坐标向量为 $(5,1,1)^T$, 求 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha})$ 在基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3\}$ 下的坐标向量;

(4) $\boldsymbol{\beta} = (1,1,1)^T$, 求 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\beta})$;

(5) $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\gamma})$ 在基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3\}$ 下的坐标向量为 $(2,-4,-2)^T$, 问: 原象 $\boldsymbol{\gamma}$ 是否唯一? 若不唯一, 求所有的原象 $\boldsymbol{\gamma}$.

解: (1) 设 $\boldsymbol{\sigma}$ 在基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3\}$ 下的矩阵为 A, 即有 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)A$, 亦即 $(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)A$.

因为 $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$ 可逆, 所以 $A = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)^{-1}(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)$.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -6 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+2r_1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1\times(-1)]{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[r_2+r_3]{r_1+3r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 9 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{所以} \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 9 & 7 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

(2) $(\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\beta}_1), \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\beta}_2), \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\beta}_3)) = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = \boldsymbol{\sigma}((\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)A) = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)A = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)A$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 9 & 7 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -12 & -9 \\ 2 & -5 & -3 \\ -7 & 22 & 15 \end{pmatrix}.$$

(3) 已知 $\boldsymbol{\alpha} = 5\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 所以

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\sigma}\left((\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)A\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

因此 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha})$ 在基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3\}$ 下的坐标向量为 $A\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 9 & 7 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(4) 先求向量 $\boldsymbol{\beta}=(1,1,1)^T$ 在基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 下的坐标: 解方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$.

$$\begin{pmatrix}-1&0&3&1\\0&1&-1&1\\2&1&-6&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+2r_1}\begin{pmatrix}-1&0&3&1\\0&1&-1&1\\0&1&0&3\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-r_3}\begin{pmatrix}-1&0&3&1\\0&0&-1&-2\\0&1&0&3\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}-1&0&3&1\\0&1&0&3\\0&0&-1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3\times(-1)]{r_1\times(-1)}\begin{pmatrix}1&0&-3&-1\\0&1&0&3\\0&0&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+3r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&5\\0&1&0&3\\0&0&1&2\end{pmatrix}.$$

即 $\boldsymbol{\beta}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}5\\3\\2\end{pmatrix}$. 再求 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\beta})$.

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\sigma}\left((\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}5\\3\\2\end{pmatrix}\right)=\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}5\\3\\2\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)A\begin{pmatrix}5\\3\\2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-1&0&3\\0&1&-1\\2&1&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&9&7\\-1&2&1\\-1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\-5\\17\end{pmatrix}.$$

(5) 设 $\boldsymbol{\gamma}$ 在基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 下的坐标为 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^T$, $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\gamma})$ 在基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 下的坐标为 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3)^T=(2,-4,-2)^T$, 则 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$, 即 $\begin{pmatrix}-2&9&7\\-1&2&1\\-1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-4\\-2\end{pmatrix}$. 解方程组:

$$\begin{pmatrix}-2&9&7&2\\-1&2&1&-4\\-1&3&2&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}-1&2&1&-4\\-2&9&7&2\\-1&3&2&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}-1&2&1&-4\\0&5&5&10\\0&1&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2\leftrightarrow r_3]{r_1\times(-1)}\begin{pmatrix}1&-2&-1&4\\0&1&1&2\\0&5&5&10\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{r_3-5r_1}\begin{pmatrix}1&-2&-1&4\\0&1&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+2r_2}\begin{pmatrix}1&0&1&8\\0&1&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

方程组的通解为 $(x_1,x_2,x_3)^T=(8-k,2-k,k)$, k 为任意常数. 所以原象 $\boldsymbol{\gamma}$ 不唯一, 所有的原象 $\boldsymbol{\gamma}$ 为:

$$\boldsymbol{\gamma}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=(4k-8,2-2k,18-9k)^T,\ k\ \text{为任意常数}.$$

44. 在 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 中定义变换 $\boldsymbol{\sigma}(X)=BXC$, 其中 $B,C\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是两个固定的矩阵, 证明 $\boldsymbol{\sigma}$ 是 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 中的线性变换.

证: 任取 $X_1,X_2\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $k_1,k_2\in\mathbb{R}$, 因为

$$\boldsymbol{\sigma}(k_1X_1+k_2X_2)=B(k_1X_1+k_2X_2)C=k_1BX_1C+k_2BX_2C=k_1\boldsymbol{\sigma}(X_1)+k_2\boldsymbol{\sigma}(X_2)$$

所以 $\boldsymbol{\sigma}$ 是 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 中的线性变换.

45. 求 $\mathbb{R}[x]_4$ 的微分变换 $\boldsymbol{D}(f(x))=f'(x)$ 在基 $\{1,1+x,1+x+x^2,1+x+x^2+x^3\}$ 下的对应矩阵.

解: 因为

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{D}1=0=0\cdot 1+0\cdot(1+x)+0\cdot(1+x+x^2)+0\cdot(1+x+x^2+x^3)\\
&\boldsymbol{D}(1+x)=1=1\cdot 1+0\cdot(1+x)+0\cdot(1+x+x^2)+0\cdot(1+x+x^2+x^3)\\
&\boldsymbol{D}(1+x+x^2)=1+2x=(-1)\cdot 1+2\cdot(1+x)+0\cdot(1+x+x^2)+0\cdot(1+x+x^2+x^3)\\
&\boldsymbol{D}(1+x+x^2+x^3)=1+2x+3x^2=(-1)\cdot 1+(-1)\cdot(1+x)+3\cdot(1+x+x^2)+0\cdot(1+x+x^2+x^3)
\end{aligned}
$$

所以所求矩阵为 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

46. 设 44 题中的 $B=C=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{\sigma}(X)=BXC$ 在基 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ (如 29 题所给) 下的对应矩阵.

解: 因为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}(E_{11})&=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2 & ab\\ ac & bc\end{pmatrix}=a^2E_{11}+abE_{12}+acE_{21}+bcE_{22}\\
\boldsymbol{\sigma}(E_{12})&=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ac & ad\\ c^2 & dc\end{pmatrix}=acE_{11}+adE_{12}+c^2E_{21}+cdE_{22}\\
\boldsymbol{\sigma}(E_{21})&=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ab & b^2\\ ad & bd\end{pmatrix}=abE_{11}+b^2E_{12}+adE_{21}+bdE_{22}\\
\boldsymbol{\sigma}(E_{22})&=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} bc & bd\\ dc & d^2\end{pmatrix}=bcE_{11}+bdE_{12}+cdE_{21}+d^2E_{22}
\end{aligned}
$$

所以所求的矩阵为 $\begin{pmatrix} a^2 & ac & ab & bc\\ ab & ad & b^2 & bd\\ ac & c^2 & ad & cd\\ bc & cd & bd & d^2\end{pmatrix}$.

47. 设 $\boldsymbol{\sigma}$ 是线性空间 V 上的线性变换. 如果 $\boldsymbol{\sigma}^{k-1}(\boldsymbol{\xi})\neq\mathbf{0}$, 但 $\boldsymbol{\sigma}^k(\boldsymbol{\xi})=\mathbf{0}$, 求证 $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\xi}),\boldsymbol{\sigma}^2(\boldsymbol{\xi}),\cdots,\boldsymbol{\sigma}^{k-1}(\boldsymbol{\xi})$ 线性无关 $(k>1)$.

证: 设 $l_1\boldsymbol{\xi}+l_2\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\xi})+\cdots+l_k\boldsymbol{\sigma}^{k-1}(\boldsymbol{\xi})=\mathbf{0}$ (1)

两边同时用 $\boldsymbol{\sigma}^{k-1}$ 作用得:

$$l_1\boldsymbol{\sigma}^{k-1}(\boldsymbol{\xi})+l_2\boldsymbol{\sigma}^{k}(\boldsymbol{\xi})+\cdots+l_k\boldsymbol{\sigma}^{2k-2}(\boldsymbol{\xi})=\mathbf{0} \qquad (1')$$

因为 $\boldsymbol{\sigma}^k(\boldsymbol{\xi})=\mathbf{0}$, 所以 $\boldsymbol{\sigma}^k(\boldsymbol{\xi})=\boldsymbol{\sigma}^{k+1}(\boldsymbol{\xi})=\cdots=\boldsymbol{\sigma}^{2k-2}(\boldsymbol{\xi})=\mathbf{0}$, 代入 $(1')$ 式得: $l_1\boldsymbol{\sigma}^{k-1}(\boldsymbol{\xi})=\mathbf{0}$. 因为 $\boldsymbol{\sigma}^{k-1}(\boldsymbol{\xi})\neq\mathbf{0}$, 所以 $l_1=0$.

将 $l_1=0$ 代入 (1) 式得:

$$l_2\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\xi})+\cdots+l_k\boldsymbol{\sigma}^{k-1}(\boldsymbol{\xi})=\mathbf{0} \qquad (2)$$

两边同时用 $\boldsymbol{\sigma}^{k-2}$ 作用得: $l_2\boldsymbol{\sigma}^{k-1}(\boldsymbol{\xi})+l_3\boldsymbol{\sigma}^{k}(\boldsymbol{\xi})+\cdots+l_k\boldsymbol{\sigma}^{2k-3}(\boldsymbol{\xi})=\mathbf{0}$, 注意到 $\boldsymbol{\sigma}^k(\boldsymbol{\xi})=\boldsymbol{\sigma}^{k+1}(\boldsymbol{\xi})=\cdots=\boldsymbol{\sigma}^{2k-2}(\boldsymbol{\xi})=\mathbf{0}$, $\boldsymbol{\sigma}^{k-1}(\boldsymbol{\xi})\neq\mathbf{0}$. 于是得到 $l_2=0$, 类似可得 $l_3=l_4=\cdots=l_k=0$. 因此结论成立.

50. 已知 $\mathbb{R}^2$ 的线性变换 $\boldsymbol{\sigma}(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2)$.

(1) 求 $\boldsymbol{\sigma}^2(x_1, x_2) =$?

(2) 问 $\boldsymbol{\sigma}$ 是否可逆? 求 $\boldsymbol{\sigma}^{-1}(x_1, x_2) =$?

解: (1) $\boldsymbol{\sigma}^2(x_1, x_2) = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}(x_1, x_2)) = \boldsymbol{\sigma}(x_1 - x_2, x_1 + x_2) = ((x_1 - x_2) - (x_1 + x_2), (x_1 - x_2) + (x_1 + x_2)) = (-2x_2, 2x_1)$.

(2) $\boldsymbol{\sigma}(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2) = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

因为 $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, 所以矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 可逆, 且 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. 从而 $\boldsymbol{\sigma}$ 可逆, 且 $\boldsymbol{\sigma}^{-1}(x_1, x_2) = (x_1, x_2)\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = (\dfrac{x_1 - x_2}{2}, \dfrac{x_1 + x_2}{2})$.

51. 设 A 为正交矩阵, $I + A$ 可逆, 证明:

(1) $(I - A)(I + A)^{-1}$ 可交换;

(2) $(I - A)(I + A)^{-1}$ 为反对称矩阵.

证: (1) 因为 $I - A^2 = (I - A)(I + A) = (I + A)(I - A)$, 所以 $(I + A)^{-1}(I - A)(I + A) = (I + A)^{-1}(I + A)(I - A) = (I - A)$, 从而

$$(I + A)^{-1}(I - A) = (I - A)(I + A)^{-1}.$$

故 $(I - A)(I + A)^{-1}$ 可交换.

(2) 因为 A 为正交矩阵, 所以 $AA^T = A^T A = I$, 从而

$$\begin{aligned} [(I - A)(I + A)^{-1}]^T &= [(I + A)^{-1}]^T (I - A)^T = [(I + A)^T]^{-1}(I - A)^T = (I + A^T)^{-1}(I - A^T) = [A^T(A + I)]^{-1}A^T(A - I) \\ &= (A + I)^{-1}(A^T)^{-1}A^T(A - I) = -(I + A)^{-1}(I - A) = -(I - A)(I + A)^{-1} \end{aligned}$$

故 $(I - A)(I + A)^{-1}$ 为反对称矩阵.

52. 证明: (1) 若 $detA = 1$, 则 A 为正交矩阵的充分必要条件是 A 的每个元素等于自己的代数余子式; 若 $detA = -1$, 则 A 为正交矩阵的充分必要条件是 A 的每个元素等于自己的代数余子式乘以 -1.

证: A 为正交矩阵 $\Leftrightarrow A^T = A^{-1} \Leftrightarrow A^T = \dfrac{A^\star}{|A|}$.

若 $|A| = 1$, 则 A 为正交矩阵 $\Leftrightarrow A^T = A^\star \Leftrightarrow a_{ij} = A_{ij}\ (1, j = 1, 2, \cdots n)$.

若 $|A| = -1$, 则 A 为正交矩阵 $\Leftrightarrow A^T = -A^\star \Leftrightarrow a_{ij} = -A_{ij}\ (1, j = 1, 2, \cdots n)$.

结论成立.

53. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m \in \mathbb{R}^n$, 证明: $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关的充要条件是

$$\det A = \det\begin{pmatrix} (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_m) \\ (\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\alpha}_m) \end{pmatrix} \neq 0.$$

证: 充分性：设 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0}$, 分别用 $\boldsymbol{\alpha}_i\ (i = 1, 2, \cdots, m)$ 与上式两端的向量做内积, 得

到线性方程组：

$$\begin{cases} x_1(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1)+x_2(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)+\cdots+x_m(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_m)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\mathbf{0})=0 \\ x_1(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1)+x_2(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2)+\cdots+x_m(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_m)=(\boldsymbol{\alpha}_2,\mathbf{0})=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1(\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_1)+x_2(\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_2)+\cdots+x_m(\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_m)=(\boldsymbol{\alpha}_m,\mathbf{0})=0 \end{cases}$$

因为 $\det A=\det\begin{pmatrix} (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_m) \\ (\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_m) \end{pmatrix}\neq 0$, 所以上述方程组只有零解, 即 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$, 故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

必要性：用反证法, 假设 $\det A=0$, 那么 A 的 m 个列向量线性相关, 记 $\boldsymbol{\beta}_i=\begin{pmatrix} (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_i) \\ (\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_i) \\ \vdots \\ (\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_i) \end{pmatrix}$, 则存在不全为 0 的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 使得

$$k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}+\cdots+k_m\boldsymbol{\beta}_m=\mathbf{0}$$

即 $(\boldsymbol{\alpha}_i,\sum_{j=1}^m k_j\boldsymbol{\alpha}_j)=0,\ \ i=1,2,\cdots,n$. 于是

$$\sum_{i=1}^m k_i(\boldsymbol{\alpha}_i,\sum_{j=1}^m k_j\boldsymbol{\alpha}_j)=(\sum_{i=1}^m k_i\boldsymbol{\alpha}_i,\sum_{j=1}^m k_j\boldsymbol{\alpha}_j)=(\sum_{i=1}^m k_i\boldsymbol{\alpha}_i,\sum_{i=1}^m k_i\boldsymbol{\alpha}_i)=0$$

亦即 $\sum\limits_{i=1}^m k_i\boldsymbol{\alpha}_i=\mathbf{0}$, 这与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关矛盾, 故结论成立.

第五章　特征值与特征向量

1. 求下列矩阵的特征值与特征向量.

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$;　(2) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$;　(3) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$;

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;　(5) $\begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;　(6) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

解: (1) $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 3 \\ 3 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-1)-9 = \lambda^2-3\lambda-7.$

故 A 的特征值为: $\lambda_1 = \dfrac{3+\sqrt{37}}{2}$,　$\lambda_2 = \dfrac{3-\sqrt{37}}{2}$.

当 $\lambda_1 = \dfrac{3+\sqrt{37}}{2}$ 时, 解方程组 $(\lambda_1 I - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, 由

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{37}-1}{2} & 3 \\ 3 & \frac{\sqrt{37}+1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

解得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1 = (6, 1-\sqrt{37})^T$. 因此矩阵对应于特征值 $\lambda_1 = \dfrac{3+\sqrt{37}}{2}$ 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{\xi}_1$ (k_1 为任意非零常数).

当 $\lambda_1 = \dfrac{3-\sqrt{37}}{2}$ 时, 由 $(\lambda_1 I - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, 即

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{37}+1}{2} & 3 \\ 3 & \frac{1-\sqrt{37}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

解得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_2 = (6, 1+\sqrt{37})^T$. 因此矩阵对应于特征值 $\lambda_1 = \dfrac{3+\sqrt{37}}{2}$ 的全部特征向量为 $k_2\boldsymbol{\xi}_2$ (k_2 为任意非零常数).

(2) $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-3 & 1 & -1 \\ -2 & \lambda & -1 \\ -1 & 1 & \lambda-2 \end{vmatrix} \xlongequal[r_2-\lambda r_3]{r_1-r_3} \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 1-\lambda 1 \\ \lambda-2 & 0 & -\lambda^2+2\lambda-1 \\ -1 & 1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2(\lambda-1).$

故 A 的特征值为: $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$,　$\lambda_3 = 1$.

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ 时, 解方程组 $(2I - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, 由

$$2I - A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[(r_1+r_2)\times(-1)]{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

解得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1 = (1, 1, 0)^T$. 因此矩阵对应于特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{\xi}_1$ (k_1 为任意非零常数).

当 $\lambda_3=1$ 时, 解方程组 $(I-A)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 由

$$I-A=\begin{pmatrix}-2&1&-1\\-2&1&-1\\-1&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3\times(-1)]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}-2&1&-1\\0&0&0\\1&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

解得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_2=(0,1,1)^T$. 因此矩阵对应于特征值 $\lambda_3=1$ 的全部特征向量为 $k_2\boldsymbol{\xi}_2$ (k_2 为任意非零常数).

(3) $$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&0\\-1&\lambda-1&-1\\-1&1&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-1&-1\\1&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-2)^3.$$

故 A 的特征值为: $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$ 时, 解方程组 $(2I-A)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 由

$$2I-A=\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&1&-1\\-1&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

解得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,1,0)^T$, $\boldsymbol{\xi}_2=(-1,0,1)^T$. 因此矩阵对应于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$ 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2$, ($k_1,k_2$ 为任意非零常数).

(4) $$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-3&-4\\0&\lambda-1&-2&-3\\0&0&\lambda-1&-2\\0&0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^4,$$ 故 A 的特征值为: $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=1$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=1$ 时, 解方程组 $(I-A)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 由

$$I-A=\begin{pmatrix}0&-2&-3&-4\\0&0&-2&-3\\0&0&0&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[i=1,2,3]{r_i\div(-2)}\begin{pmatrix}0&1&\frac{3}{2}&2\\0&0&1&\frac{3}{2}\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2-\frac{3}{2}r_3]{r_1-2r_3}\begin{pmatrix}0&1&\frac{3}{2}&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-\frac{3}{2}r_2}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

解得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}=(1,0,0,0)^T$, 因此矩阵对应于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=1$ 的全部特征向量为 $k\boldsymbol{\xi}$, (k 为任意非零常数).

(5) $$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-4&-5&2\\2&\lambda+2&-1\\1&1&\lambda-1\end{vmatrix}\xrightarrow[c_3-(\lambda-1)c_2]{c_1-c_2}\begin{vmatrix}\lambda+1&-5&5\lambda-3\\-\lambda&\lambda+2&-\lambda^2-\lambda+1\\0&1&0\end{vmatrix}=(\lambda-1)^3.$$

故 A 的特征值为: $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$ 时, 解方程组 $(I-A)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 由

$$I-A=\begin{pmatrix}-3&-5&2\\2&3&-1\\1&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\2&3&-1\\-3&-5&2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&-1\\0&-2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

解得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}=(-1,1,1)^T$, 因此矩阵对应于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$ 的全部特征向量为 $k\boldsymbol{\xi}$, (k 为任意非零常数).

(6) $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 2 & 0\\ 2 & \lambda-1 & 2\\ 0 & 2 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)-4(\lambda-2)-4\lambda=(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-4).$

故 A 的特征值为: $\lambda_1=-2,\quad \lambda_2=1,\quad \lambda_3=4.$

当 $\lambda_1=-2$ 时, 解方程组 $(-2I-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$-2I-A=\begin{pmatrix}-4 & 2 & 0\\ 2 & -3 & 2\\ 0 & 2 & -2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+2r_2}\begin{pmatrix}0 & -4 & 4\\ 2 & -3 & 2\\ 0 & 2 & -2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 2 & -3 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 2 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

解得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,2,2)^T$. 因此矩阵对应于特征值 $\lambda_1=-2$ 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{\xi}_1$ (k_1 为任意非零常数).

当 $\lambda_2=1$ 时, 解方程组 $(I-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$I-A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1\times(-1)]{r_2+2r_1}\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & 4 & 2\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

解得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_2=(2,1,-2)^T$. 因此矩阵对应于特征值 $\lambda_2=1$ 的全部特征向量为 $k_2\boldsymbol{\xi}_2$ (k_2 为任意非零常数).

当 $\lambda_3=4$ 时, 解方程组 $(4I-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$4I-A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ 2 & 3 & 2\\ 0 & 2 & 4\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-r_1}\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 4\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

解得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_3=(-2,2,-1)^T$. 因此矩阵对应于特征值 $\lambda_3=4$ 的全部特征向量为 $k_3\boldsymbol{\xi}_3$ (k_3 为任意非零常数).

2. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}7 & 4 & -1\\ 4 & 7 & -1\\ -4 & -4 & x\end{pmatrix}$ 的特征值 $\lambda_1=3$ (二重), $\lambda_2=12$, 求 x 的值, 并求特征向量.

解: 由特征值的性质可知 $\lambda_1+\lambda_1+\lambda_2=tr(A)$, 即

$$3+3+12=7+7+x\Rightarrow x=4.$$

当 $\lambda_1=3$ 时, 解方程组 $(\lambda_1 I-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$(\lambda_1 I-A)=(3I-A)=\begin{pmatrix}-4 & -4 & 1\\ -4 & -4 & 1\\ 4 & 4 & -1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & -\frac{1}{4}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1=(-1,1,0)^T$, $\boldsymbol{\xi}_2=(1,0,4)^T$, 因此矩阵对应于特征值 $\lambda_1=3$ 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2$ (k_1,k_2 为任意常数).

当 $\lambda_2=12$ 时, 解方程组 $(\lambda_2 I-A)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 由

$$(\lambda_2 I-A)=\begin{pmatrix}5&-4&1\\-4&5&1\\4&4&8\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+r_2]{r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&1&2\\-4&5&1\\0&9&9\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3\div 9]{r_2+4r_1}\begin{pmatrix}1&1&2\\0&9&9\\0&1&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_3=(1,1,-1)^T$, 因此矩阵对应于特征值 $\lambda_2=12$ 的全部特征向量为 $k_3\boldsymbol{\xi}_3$ (k_3 为任意常数).

3. 设 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$ 是矩阵 A 不同特征值的特征向量, 证明 $\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2$ 不是 A 的一个特征向量.

证: 用反证法: 假设 $\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2$ 是矩阵 A 的特征向量, 对应的特征值为 λ, 由题设再设 $\boldsymbol{x}_i$ 是矩阵 A 的对应于特征值 λ_i 的特征向量, $i=1,2$, 且 $\lambda_1\neq\lambda_2$, 即有

$$A\boldsymbol{x}_1=\lambda_1\boldsymbol{x}_1,\ A\boldsymbol{x}_2=\lambda_2\boldsymbol{x}_2,\ A(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)=\lambda(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)$$

于是得到

$$(\lambda-\lambda_1)\boldsymbol{x}_1+(\lambda-\lambda_2)\boldsymbol{x}_2=\mathbf{0}$$

因为 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$ 对应 A 的不同特征值, 所以 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$ 线性无关, 从而有

$$\lambda-\lambda_1=\lambda-\lambda_2=0\Rightarrow\lambda=\lambda_1=\lambda_2.$$

矛盾!

4. 设 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3$ 分别是矩阵 A 对应于互不相同的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 的特征向量, 证明 $\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{x}_3$ 不是 A 的特征向量.

证: 用反证法: 假设 $\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{x}_3$ 是矩阵 A 的特征向量, 对应的特征值为 λ, 由题设再设 $\boldsymbol{x}_i$ 是矩阵 A 的对应于特征值 λ_i 的特征向量, $i=1,2,3$, 且 $\lambda_1\neq\lambda_2\neq\lambda_3$, 即有

$$A\boldsymbol{x}_1=\lambda_1\boldsymbol{x}_1,\ A\boldsymbol{x}_2=\lambda_2\boldsymbol{x}_2,\ A\boldsymbol{x}_3=\lambda_3\boldsymbol{x}_3A(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{x}_3)=\lambda(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{x}_3)$$

于是得到

$$(\lambda-\lambda_1)\boldsymbol{x}_1+(\lambda-\lambda_2)\boldsymbol{x}_2+(\lambda-\lambda_3)\boldsymbol{x}_3=\mathbf{0}$$

因为 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3$ 对应 A 的不同特征值, 所以 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3$ 线性无关, 从而有

$$\lambda-\lambda_1=\lambda-\lambda_2=\lambda-\lambda_3=0\Rightarrow\lambda=\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3.$$

矛盾!

5. 证明对合矩阵 A (即 $A^2=I$) 的特征值只能为 1 或 -1.

证: 设 λ 是 A 的特征值, $\boldsymbol{x}$ 是对应的特征向量, 即有 $A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$, 用 A 左乘上式得 $A^2\boldsymbol{x}=\lambda A\boldsymbol{x}=\lambda^2\boldsymbol{x}$, 注意到 $A^2=I$, 则有

$$\boldsymbol{x}=\lambda^2\boldsymbol{x}\Rightarrow(1-\lambda^2)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$$

因为 $\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$, 所以 $1-\lambda^2=0$, 从而 $\lambda=1$ 或 -1.

6. 设 A 可逆, 讨论 A 与 $A^\star$ 的特征值 (特征向量) 之间的相互关系.

解: 设 λ 是 A 的特征值, 对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}$, 即有 $A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$. 因为 A 可逆, 所以 $|A|\neq 0$, 且 $\lambda\neq 0$.

$$A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}\Rightarrow \boldsymbol{x}=\lambda A^{-1}\boldsymbol{x}=\lambda\frac{A^\star}{|A|}\boldsymbol{x}\Rightarrow A^\star\boldsymbol{x}=\frac{|A|}{\lambda}\boldsymbol{x}$$

上式说明: 如果 λ 是可逆矩阵 A 的特征值, 那么 $\dfrac{|A|}{\lambda}$ 就是 $A^\star$ 的特征值, 对应的特征向量相同.

7. 若 $P^{-1}AP=B$, 问: $P^{-1}(A-2I)P=B-2I$ 是否成立?

解: $P^{-1}(A-2I)P=P^{-1}AP-2P^{-1}IP=B-2I$, 即成立.

8. 已知 $A\sim\Lambda=\begin{pmatrix}-1&0\\0&2\end{pmatrix}$, 求 $\det(A-I)$.

解: 因为 $A\sim\Lambda$, 所以存在可逆阵 P, 使得 $P^{-1}AP=\Lambda$, 即 $A=P\Lambda P^{-1}$, 从而 $A-I=P\Lambda P^{-1}-PIP^{-1}=P(\Lambda-I)P^{-1}$, 两边取行列式得:

$$|A-I|=|P||\Lambda-I||P^{-1}|=|\Lambda-I|=\begin{vmatrix}-1-1&0\\0&2-1\end{vmatrix}=-2.$$

另解: 由已知条件可知 A 的特征值为 -1 和 2, 那么 $A-I$ 的特征值为 $-1-1=-2$ 和 $2-1=1$, 于是

$$|A-I|=(-1)\times 1=-2.$$

9. 已知 $P=\begin{pmatrix}2&-1\\3&-2\end{pmatrix}$, $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0\\0&2\end{pmatrix}$, 求 A^n.

解: 由已知 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0\\0&2\end{pmatrix}$ 可得 $A=P\begin{pmatrix}-1&0\\0&2\end{pmatrix}P^{-1}$, 且 $P^{-1}=-\begin{pmatrix}-2&1\\-3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\3&-2\end{pmatrix}$ 于是

$$A^n=P\begin{pmatrix}-1&0\\0&2\end{pmatrix}^nP^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1\\3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-1)^n&0\\0&2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\3&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4(-1)^n-3\cdot 2^n&2(-1)^{n+1}+2^{n+1}\\6(-1)^n-3\cdot 2^{n+1}&3(-1)^{n+1}+2^{n+2}\end{pmatrix}.$$

10. 设 $B=P^{-1}AP,\boldsymbol{x}$ 是矩阵 A 属于特征值 λ_0 的特征向量. 证明 $P^{-1}\boldsymbol{x}$ 是矩阵 B 对应特征值 λ_0 的一个特征向量.

证: 由已知可得: $A\boldsymbol{x}=\lambda_0\boldsymbol{x}$, 又由 $B=P^{-1}AP$ 可得 $A=PBP^{-1}$, 所以有:

$$PBP^{-1}\boldsymbol{x}=\lambda_0\boldsymbol{x}$$

两边左乘 P^{-1} 得:

$$B(P^{-1}\boldsymbol{x})=\lambda_0(P^{-1}\boldsymbol{x}).$$

即 $P^{-1}\boldsymbol{x}$ 是矩阵 B 对应特征值 λ_0 的一个特征向量.

11. 设 A 为非奇异矩阵, 证明 AB 与 BA 相似.

证: 因为 A 为非奇异矩阵, 所以 A^{-1} 存在, 而

$$BA = IBA = A^{-1}ABA$$

即 AB 与 BA 相似.

12. 设 $A \sim B$, $C \sim D$, 证明: $\begin{pmatrix} A & O \\ O & C \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} B & O \\ O & D \end{pmatrix}$.

证: 因为 $A \sim B$, $C \sim D$, 所以存在可逆矩阵 P, Q, 使得 $B = P^{-1}AP$, $D = Q^{-1}CQ$, 作矩阵 $T = \begin{pmatrix} P & O \\ O & Q \end{pmatrix}$, 因为 P, Q 都可逆, 所以 T 也可逆, 且 $T^{-1} = \begin{pmatrix} (& P^{-1} & O \\ & O & Q^{-1} \end{pmatrix}$, 于是

$$T^{-1}\begin{pmatrix} A & O \\ O & C \end{pmatrix}T = \begin{pmatrix} P^{-1} & O \\ O & Q^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & O \\ O & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & O \\ O & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P^{-1}AP & O \\ O & Q^{-1}CQ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & O \\ O & D \end{pmatrix}.$$

所以 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & C \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} B & O \\ O & D \end{pmatrix}$.

13. 证明: m 阶矩阵 $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ 只有零特征值, 且其特征子空间是 $\mathbb{R}^m$ 的一维子空间, 并求它的基.

证: 由 $|\lambda I - J| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^n = 0$ 得 $\lambda = 0$, 即矩阵 J 只有零特征值.

因为 $R(J) = n-1$, 所以 $J\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的基础解系中只有一个解向量 $\boldsymbol{\xi} = (1, 0, \cdots, 0)^T$. 即 J 的关于零特征值的特征子空间是 $\mathbb{R}^m$ 的一维子空间, 且 $\boldsymbol{\xi}$ 为特征子空间的一个基.

14. 若 $I + A$ 可逆, $I - A$ 不可逆, 那么, 关于 A 的特征值能作出怎样的断语?

解: 有题设可知 $|I + A| \neq 0$, , 即 $|-I - A| \neq 0$, 且 $|I - A| = 0$, 所以 1 是 A 的特征值, 而 -1 不是 A 的特征值.

15. 若 $\det(I - A^2) = 0$, 证明: 1 或 -1 至少有一个是 A 的特征值.

证: 因为 $|I - A^2| = |I - A||I + A| = 0$, 所以 $|I - A| = 0$ 和 $|-I - A| = 0$ 至少有一个成立, 从而 1 或 -1 至少有一个是 A 的特征值.

18. 设 n 阶矩阵 A 的 n^2 个元素全为 1, 试求可逆阵 P, 使 $P^{-1}AP$ 为对角阵, 并写出与 A 相似的对角阵.

解: 计算 A 的特征多项式:

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-\lambda & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1-\lambda \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{c_1+c_i} \begin{vmatrix} n-\lambda & 1 & \cdots & 1 \\ n-\lambda & 1-\lambda & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-\lambda & 1 & \cdots & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (n-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-\lambda & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1-\lambda \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i-r_1} (n-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^{n-1}(n-\lambda).$$

故 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}=0,\ \lambda_n=n$.

对于特征值 0, 解方程组 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 同解方程组为 $x_1=-x_2-x_3-\cdots-x_n$. 对应的特征向量为: $\boldsymbol{\xi}_1=(1,-1,0,\cdots,0)^T$, $\boldsymbol{\xi}_2=(1,0,-1,\cdots,0)^T$, $\boldsymbol{\xi}_{n-1}=(1,0,0,\cdots,-1)^T$.

对于特征值 n, 解方程组 $(A-nI)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 因为 $A-nI$ 的每行元素之和均为 0, 所以对应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_n=(1,1,\cdots,1)^T$.

取 $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\Lambda=\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & n \end{pmatrix}$, 则 P 可逆, 且 $P^{-1}AP=\Lambda$.

19. 已知 4 阶矩阵 A 的特征值 λ_1 (三重), $\lambda_2=-3$; 对应于 λ_1 的特征向量有 $\boldsymbol{x}_1=(1,-1,0,0)^T$, $\boldsymbol{x}_2=(-1,1,-1,0)^T$, $\boldsymbol{x}=(0,-1,1,-1)^T$, 对应于 λ_2 的特征向量为 $\boldsymbol{x}_4=(0,0,-1,1)^T$. 问 A 可否对角化? 如能对角化, 求出 A 及 A^n.

解: 因为

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4-r_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2+r_4]{r_3\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-r_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2\times(-1)]{r_1-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

即矩阵 $P=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{x}_4)=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\-1&1&-1&0\\0&-1&1&-1\\0&0&-1&1\end{pmatrix}$ 可逆, 且 $P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&-1&-1\\0&0&-1&-1\\-1&-1&0&0\\-1&-1&0&1\end{pmatrix}$. 因为 A 的特征向量 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{x}_4$ 线性无关, 所以 A 可以对角化. 记 $\Lambda=\mathrm{diag}(1,1,1,-3)$, 则有 $AP=P\Lambda$, 从而

$$A=P\Lambda P^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\-1&1&-1&0\\0&-1&1&-1\\0&0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1&-1\\0&0&-1&-1\\-1&-1&0&0\\-1&-1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-4&-4&1&4\\4&4&0&-3\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}A^n=P\Lambda^nP^{-1}&=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\-1&1&-1&0\\0&-1&1&-1\\0&0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&(-3)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1&-1\\0&0&-1&-1\\-1&-1&0&0\\-1&-1&0&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1+(-3)^n&-1+(-3)^n&1&1-(-3)^n\\1-(-3)^n&1-(-3)^n&0&(-3)^n\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

21. 已知 $A=\begin{pmatrix}-3&2\\-2&2\end{pmatrix}$.

(1). 求 A^4, A^5, A^k(k 为正整数).

(2). 若 $f(x)=\begin{vmatrix}x^4-1&x\\x^3&x^6+1\end{vmatrix}$, 求 $f(A)$.

解: $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda+3&-2\\2&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda+3)+4=(\lambda+2)(\lambda-1)$.

即 A 的特征值为 $\lambda_1=-2,\ \lambda_2=1$.

当 $\lambda_1=-2$ 时, 解齐次线性方程组 $(-2I-A)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 因为

$$(-2I-A)=\begin{pmatrix}1&-2\\2&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2\\0&0\end{pmatrix}$$

所以 A 的对应于特征值 $\lambda_1=-2$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1=(2,1)^T$.

当 $\lambda_2=1$ 时, 解齐次线性方程组 $(I-A)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 因为

$$(I-A)=\begin{pmatrix}4&-2\\2&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&-1\\0&0\end{pmatrix}$$

所以 A 的对应于特征值 $\lambda_2=1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,2)^T$.

取 $P=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$, $\Lambda=\begin{pmatrix}-2&0\\0&1\end{pmatrix}$ 那么 $P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$, 且 $P^{-1}AP=\Lambda$, 或 $A=P\Lambda P^{-1}$. 于是

$$A^4=P\Lambda^4P^{-1}=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-2)^4&0\\0&1\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21&-10\\10&-4\end{pmatrix}.$$

$$A^5 = P\Lambda^4 P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -43 & 22 \\ -22 & 12 \end{pmatrix}.$$

$$A^k = P\Lambda^4 P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1+(-2)^{k+2} & 2+(-2)^{k+1} \\ -2-(-2)^{k+1} & 4-(-2)^k \end{pmatrix}.$$

(2). 因为 $f(x) = (x^4-1)(x^6+1) - x^4 = x^{10} - x^6 - 1$, 所以

$$f(A) = A^{10} - A^6 - I = P(\Lambda^{10} - \Lambda^6 - I)P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 959 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1279 & -640 \\ 640 & -321 \end{pmatrix}.$$

22. 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 求 A^k (k 为正整数).

解: 将 A 分块为 $\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}$, 那么 $A^k = \begin{pmatrix} A_1^k & O \\ O & A_2^k \end{pmatrix}$. 下面分别求 A_1^k 和 A_2^k.

$A_1^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} = 25I = 5^2 I$, 一般地, $A_1^k = \begin{cases} 5^k I, & k \text{ 为偶数}, \\ 5^{k-1} A_1, & k \text{ 为奇数}, \end{cases}$

$A_2^2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 4\cdot 2\cdot 2 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 16 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $A_2^3 = \begin{pmatrix} 2^2 & 4\cdot 2\cdot 2 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^3 & 4\cdot 3\cdot 2^2 \\ 0 & 2^3 \end{pmatrix}$.

一般地, $A_2^k = \begin{pmatrix} 2^k & 4\cdot k\cdot 2^{k-1} \\ 0 & 2^k \end{pmatrix}$. 从而

$$A^k = \begin{cases} \begin{pmatrix} 5^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^k & 4k2^{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}, & k \text{ 为偶数}, \\ \begin{pmatrix} 3(5^{k-1}) & 4(5^{k-1}) & 0 & 0 \\ 4(5^{k-1}) & -3(5^{k-1}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^k & 4k2^{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}, & k \text{ 为奇数}. \end{cases}$$

23. 对 5.2 节例 1 的矩阵 A, 求正交矩阵 T, 使得 $T^{-1}AT$ 为对角阵.

解: 求特征值及对应特征值的同解方程组见教材, 对应于特征值 2 (三重根) 的特征向量取为两两正交的向量 $\boldsymbol{\xi}_1 = (1,-1,0,0)^T, \boldsymbol{\xi}_2 = (0,0,1,-1)^T, \boldsymbol{\xi}_3 = (1,1,-1,-1)^T$. 对应于特征值 -2 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_4 = (1,1,1,1)$.

再取 $\boldsymbol{\eta}_1 = \frac{\boldsymbol{\xi}_1}{\|\boldsymbol{\xi}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0,0)^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 = \frac{\boldsymbol{\xi}_2}{\|\boldsymbol{\xi}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,-1)^T$, $\boldsymbol{\eta}_3 = \frac{\boldsymbol{\xi}_3}{\|\boldsymbol{\xi}_3\|} = \frac{1}{2}(1,1,-1,-1)^T$, $\boldsymbol{\eta}_4 = \frac{\boldsymbol{\xi}_4}{\|\boldsymbol{\xi}_4\|} = \frac{1}{2}(1,1,1,1)^T$, 则 $T = (\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3, \boldsymbol{\eta}_4) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ 即为所求的正交矩阵.

24. 对下列实对称矩阵 A, 求正交矩阵 T 和对角阵 Λ, 使 $T^{-1}AT=\Lambda$.

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; (3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$;

(4) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; (5) $\begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & -3 \\ -3 & -1 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & -1 & -3 \\ -3 & 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

解: (1) $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 & -4 \\ -2 & \lambda & -2 \\ -4 & -2 & \lambda-3 \end{vmatrix} \xlongequal{c_3-c_1} \begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 & -1-\lambda \\ -2 & \lambda & 0 \\ -4 & -2 & \lambda\lambda+1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1+r_3} \begin{vmatrix} \lambda-7 & -4 & 0 \\ -2 & \lambda & 0 \\ -4 & -2 & \lambda+1 \end{vmatrix}$.

$=(\lambda+1)[\lambda^2-7\lambda-8]=(\lambda+1)^2[\lambda-8]$

故 A 的特征值为: $\lambda_1=\lambda_2=-1,\quad \lambda_3=8$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=-1$ 时, 解方程组 $(A+I)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 由

$$A+I=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

解得矩阵对应于特征值 -1 的两两正交的特征向量为: $\boldsymbol{\xi}_1=(1,-2,0)^T,\quad \boldsymbol{\xi}_2=(4,2,-5)^T$.

当 $\lambda_3=8$ 时, 解方程组 $(A-8I)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 由

$$A-8I=\begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ -5 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & -18 & 9 \\ 0 & 18 & -9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

解得矩阵对应于特征值 8 特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_3=(2,1,2)^T$.

取 $\boldsymbol{\eta}_1=\dfrac{\boldsymbol{\xi}_1}{\|\boldsymbol{\xi}_1\|}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(1,-2,0)^T, \boldsymbol{\eta}_2=\dfrac{\boldsymbol{\xi}_2}{\|\boldsymbol{\xi}_2\|}=\dfrac{1}{\sqrt{45}}(4,2,-5)^T, \boldsymbol{\eta}_3=\dfrac{\boldsymbol{\xi}_3}{\|\boldsymbol{\xi}_3\|}=\dfrac{1}{3}(2,1,2)^T$, 作矩阵

$$T=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{\sqrt{45}} & \frac{2}{3} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{45}} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{-5}{\sqrt{45}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix},\ \Lambda=\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 8 \end{pmatrix}$$

则 T 为正交矩阵, 且 $T^{-1}AT=\Lambda$.

(2) $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -3 & 0 \\ -3 & \lambda-4 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-4)-(\lambda-1)-9(\lambda-1)=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-6)$.

故 A 的特征值为: $\lambda_1=1,\ \lambda_2=-1,\ \lambda_3=6$.

当 $\lambda_1=1$ 时, 解方程组 $(A-I)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 由

$$A-I=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

解得矩阵对应于特征值 1 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,0,3)^T$.

当 $\lambda_2=-1$ 时, 解方程组 $(A+I)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 由

$$A+I=\begin{pmatrix}2&3&0\\3&5&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&3&0\\1&2&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&3&0\\0&-1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&-1&2\\0&-1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

解得矩阵对应于特征值 -1 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_2=(-3,2,1)^T$.

当 $\lambda_3=6$ 时, 解方程组 $(A-6I)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 由

$$A-6I=\begin{pmatrix}-5&3&0\\3&-2&-1\\0&-1&-5\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+2r_2}\begin{pmatrix}1&-1&-2\\3&-2&-1\\0&-1&-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-2\\0&1&5\\0&-1&-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&5\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

解得矩阵对应于特征值 6 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_3=(3,5,-1)^T$.

取 $\boldsymbol{\eta}_1=\dfrac{\boldsymbol{\xi}_1}{\|\boldsymbol{\xi}_1\|}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}(1,0,3)^T,\boldsymbol{\eta}_2=\dfrac{\boldsymbol{\xi}_2}{\|\boldsymbol{\xi}_2\|}=\dfrac{1}{\sqrt{14}}(-3,2,1)^T,\boldsymbol{\eta}_3=\dfrac{\boldsymbol{\xi}_3}{\|\boldsymbol{\xi}_3\|}=\dfrac{1}{\sqrt{35}}(3,5,-1)^T$, 作矩阵

$$T=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}}&\frac{-3}{\sqrt{14}}&\frac{3}{\sqrt{35}}\\0&\frac{2}{\sqrt{14}}&\frac{5}{\sqrt{35}}\\\frac{3}{\sqrt{10}}&\frac{1}{\sqrt{14}}&\frac{-1}{\sqrt{35}}\end{pmatrix},\ \Lambda=\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&6\end{pmatrix}$$

则 T 为正交矩阵, 且 $T^{-1}AT=\Lambda$.

(3) $$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&-2\\0&\lambda-1&-2\\-2&-2&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)-4(\lambda-1)-4(\lambda-1)=(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda+3).$$

故 A 的特征值为: $\lambda_1=1,\ \lambda_2=3,\ \lambda_3=-3$.

当 $\lambda_1=1$ 时, 解方程组 $(A-I)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 由

$$A-I=\begin{pmatrix}0&0&2\\0&0&2\\2&2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

解得矩阵对应于特征值 1 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,-1,0)^T$.

当 $\lambda_2=3$ 时, 解方程组 $(A+I)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 由

$$A-3I=\begin{pmatrix}-2&0&2\\0&-2&2\\2&2&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-2&0&2\\0&-2&2\\0&2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-2&0&2\\0&-2&2\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

解得矩阵对应于特征值 3 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_2=(1,1,1)^T$.

当 $\lambda_3=-3$ 时, 解方程组 $(A+3I)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 由

$$A+3I=\begin{pmatrix}4&0&2\\0&4&2\\2&2&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+2r_2}\begin{pmatrix}0&-4&-2\\0&4&2\\2&2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

解得矩阵对应于特征值 -3 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_3=(1,1,-2)^T$.

取 $\boldsymbol{\eta}_1=\dfrac{\boldsymbol{\xi}_1}{\|\boldsymbol{\xi}_1\|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^T,\boldsymbol{\eta}_2=\dfrac{\boldsymbol{\xi}_2}{\|\boldsymbol{\xi}_2\|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T,\boldsymbol{\eta}_3=\dfrac{\boldsymbol{\xi}_3}{\|\boldsymbol{\xi}_3\|}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)^T$, 作矩阵

$$T=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},\ \Lambda=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 3 & \\ & & -3\end{pmatrix}.$$

则 T 为正交矩阵, 且 $T^{-1}AT=\Lambda$.

$$(4)\ |\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda & 0 & -4 & -1\\ 0 & \lambda & -1 & -4\\ -4 & -1 & \lambda & 0\\ -1 & -4 & 0 & \lambda\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-4r_4]{r_1+\lambda r_4}\begin{vmatrix}0 & -4\lambda & -4 & \lambda^2-1\\ 0 & \lambda & -1 & -4\\ 0 & 15 & \lambda & -4\lambda\\ -1 & -4 & 0 & \lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-4\lambda & -4 & \lambda^2-1\\ \lambda & -1 & -4\\ 15 & \lambda & -4\lambda\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3-\lambda r_2]{r_1-4r_2}\begin{vmatrix}-8\lambda & 0 & \lambda^2+15\\ \lambda & -1 & -4\\ 15+\lambda^2 & 0 & -8\lambda\end{vmatrix}=(8\lambda)^2-(\lambda^2+15)^2=(\lambda-3)(\lambda+3)(\lambda-5)(\lambda+5).$$

故 A 的特征值为: $\lambda_1=3,\ \lambda_2=-3,\ \lambda_3=5,\ \lambda_4=-5$.

当 $\lambda_1=3$ 时, 解方程组 $(3I-A)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 由

$$3I-A=\begin{pmatrix}3 & 0 & -4 & -1\\ 0 & 3 & -1 & -4\\ -4 & -1 & 3 & 0\\ -1 & -4 & 0 & 3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 4 & 0 & -3\\ 0 & 3 & -1 & -4\\ -4 & -1 & 3 & 0\\ 3 & 0 & -4 & -1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 4 & 0 & -3\\ 0 & 3 & -1 & -4\\ 0 & 15 & 3 & -12\\ 0 & -12 & -4 & 8\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 4 & 0 & -3\\ 0 & 3 & -1 & -4\\ 0 & 0 & 8 & 8\\ 0 & 0 & -8 & -8\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

解得矩阵对应于特征值 3 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1=(-1,1,-1,1)^T$.

当 $\lambda_2=-3$ 时, 解方程组 $(A+3I)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 由

$$A+3I=\begin{pmatrix}3 & 0 & 4 & 1\\ 0 & 3 & 1 & 4\\ 4 & 1 & 3 & 0\\ 1 & 4 & 0 & 3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 4 & 0 & 3\\ 0 & 3 & 1 & 4\\ 4 & 1 & 3 & 0\\ 3 & 0 & 4 & 1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 4 & 0 & 3\\ 0 & 3 & 1 & 4\\ 0 & -15 & 3 & -12\\ 0 & -12 & 4 & -8\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 4 & 0 & 3\\ 0 & 3 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 8 & 8\\ 0 & 0 & 8 & 8\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

解得矩阵对应于特征值 -3 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_2=(1,-1,-1,1)^T$.

当 $\lambda_3=5$ 时, 解方程组 $(A+3I)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 由

$$A-5I=\begin{pmatrix}-5&0&4&1\\0&-5&1&4\\4&1&-5&0\\1&4&0&-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&4&0&-5\\0&-5&1&4\\4&1&-5&0\\-5&0&4&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&4&0&-5\\0&-5&1&4\\0&-15&-5&20\\0&20&4&-24\end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix}1&4&0&-5\\0&-5&1&4\\0&0&-8&8\\0&0&8&-8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

解得矩阵对应于特征值 5 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_3=(1,1,1,1)^T$.

当 $\lambda_4=-5$ 时, 解方程组 $(A+5I)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 由

$$A+5I=\begin{pmatrix}5&0&4&1\\0&5&1&4\\4&1&5&0\\1&4&0&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&4&0&5\\0&5&1&4\\4&1&5&0\\5&0&4&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&4&0&5\\0&5&1&4\\0&-15&5&-20\\0&-20&4&-24\end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix}1&4&0&5\\0&5&1&4\\0&0&8&-8\\0&0&8&-8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

解得矩阵对应于特征值 5 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_4=(-1,-1,1,1)^T$.

取 $\boldsymbol{\eta}_1=\dfrac{\boldsymbol{\xi}_1}{\|\boldsymbol{\xi}_1\|}=\dfrac{1}{2}(-1,1,-1,1)^T$, $\boldsymbol{\eta}_2=\dfrac{\boldsymbol{\xi}_2}{\|\boldsymbol{\xi}_2\|}=\dfrac{1}{2}(1,-1,-1,1)^T$, $\boldsymbol{\eta}_3=\dfrac{\boldsymbol{\xi}_3}{\|\boldsymbol{\xi}_3\|}=\dfrac{1}{2}(1,1,1,1)^T$, $\boldsymbol{\eta}_4=\dfrac{\boldsymbol{\xi}_4}{\|\boldsymbol{\xi}_4\|}=\dfrac{1}{2}(-1,-1,1,1)^T$. 作矩阵

$$T=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4)=\begin{pmatrix}-\frac12&\frac12&\frac12&-\frac12\\\frac12&-\frac12&\frac12&-\frac12\\-\frac12&-\frac12&\frac12&\frac12\\\frac12&\frac12&\frac12&\frac12\end{pmatrix},\ \Lambda=\begin{pmatrix}3&&&\\&-3&&\\&&5&\\&&&-5\end{pmatrix}.$$

则 T 为正交矩阵, 且 $T^{-1}AT=\Lambda$.

(5) $$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda+1&3&-3&3\\3&\lambda+1&3&-3\\-3&3&\lambda+1&3\\3&-3&3&\lambda+1\end{vmatrix}\xlongequal[i=2,3,4]{c_1+c_i}\begin{vmatrix}\lambda+4&3&-3&3\\\lambda+4&\lambda+1&3&-3\\\lambda+4&3&\lambda+1&3\\\lambda+4&-3&3&\lambda+1\end{vmatrix}$$
$$\xlongequal[i=2,3,4]{r_i-r_1}\begin{vmatrix}\lambda+4&3&-3&3\\0&\lambda-2&6&-6\\0&0&\lambda+4&0\\0&-6&6&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda+4)\begin{vmatrix}\lambda-2&6&-6\\0&\lambda+4&0\\-6&6&\lambda-2\end{vmatrix}$$
$$=(\lambda+4)^2[(\lambda-2)^2-6^2]=(\lambda+4)^3(\lambda-8).$$

故 A 的特征值为: $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-4,\ \lambda_4=8$.

当 $\lambda_1=-4$ 时, 解方程组 $(A+4I)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 由

$$A+4I=\begin{pmatrix}3&-3&3&-3\\-3&3&-3&3\\3&-3&3&-3\\-3&3&-3&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

解得矩阵对应于特征值 -4 的两两正交的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,1,0,0)^T,\ \boldsymbol{\xi}_2=(0,0,1,1)^T,\ \boldsymbol{\xi}_3=(1,-1,-1,1)^T$.

当 $\lambda_4=8$ 时, 解方程组 $(A-8I)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 由

$$\begin{aligned}A-8I&=\begin{pmatrix}-9&-3&3&-3\\-3&-9&-3&3\\3&-3&-9&-3\\-3&3&-3&-9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3&1&-1&1\\1&3&1&-1\\1&-1&-3&-1\\1&-1&1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1&3\\1&3&1&-1\\1&-1&-3&-1\\3&1&-1&1\end{pmatrix}\\&\to\begin{pmatrix}1&-1&1&3\\0&4&0&-4\\0&0&-4&-4\\0&4&-4&-8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

解得矩阵对应于特征值 8 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_4=(-1,1,-1,1)^T$.

取 $\boldsymbol{\eta}_1=\frac{\boldsymbol{\xi}_1}{\|\boldsymbol{\xi}_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0)^T,\ \boldsymbol{\eta}_2=\frac{\boldsymbol{\xi}_2}{\|\boldsymbol{\xi}_2\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,1)^T,\ \boldsymbol{\eta}_3=\frac{\boldsymbol{\xi}_3}{\|\boldsymbol{\xi}_3\|}=\frac{1}{2}(1,-1,-1,1)^T,\ \boldsymbol{\eta}_4=\frac{\boldsymbol{\xi}_4}{\|\boldsymbol{\xi}_4\|}=\frac{1}{2}(-1,1,-1,1)^T$. 作矩阵

$$T=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac12&-\frac12\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac12&\frac12\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac12&-\frac12\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac12&\frac12\end{pmatrix},\ \Lambda=\begin{pmatrix}-4&&&\\&-4&&\\&&-4&\\&&&8\end{pmatrix}.$$

则 T 为正交矩阵, 且 $T^{-1}AT=\Lambda$.

30. 设 $A=(a_{ij})_{4\times4}$, 已知 0 是 A 的二重特征值 1 是 A 的 (一重) 特征值, 求矩阵 A 特征多项式 $\det(\lambda I-A)$.

解: 由题设及特征值的性质可知 A 的四个特征值分别为 $\lambda_1=\lambda_2=0,\ \lambda_3=1,\ \lambda_4=\sum_4^{i=1}a_{ii}-1$, 于是

$$\det(\lambda I-A)=\lambda^2(\lambda-1)(\lambda-\sum_4^{i=1}a_{ii}+1).$$

31. 设 n 阶矩阵 A 的每行元素之和皆为 1, 问: 能否至少求得 A 的一个特征值?

解: 能!

因为由题设可知 A 的特征多项式 $|A-\lambda I|$ 的每行元素之和皆为 $1-\lambda$, 所以至少可以求得 A 的一个特征值 1.

32. 设 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\lambda_n$ 是矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的 n 个特征值, 证明: $\sum_{i=1}^n\lambda_i^2=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}a_{ji}$.

证: 因为 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\lambda_n$ 是矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的 n 个特征值, 所以 $\lambda_1^2,\ \lambda_2^2,\ \cdots,\lambda_n^2$ 是矩阵 A^2 的 n 个特征值. 又因为 A^2 主对角元 $c_{ii}=\sum_{j=1}^n a_{ij}a_{ji}$, 所以

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^2=\sum_{i=1}^n c_{ii}=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}a_{ji}.$$

33. 设 $AB=BA$, $\boldsymbol{x}$ 是 A 对应于特征值 λ_0 的特征向量, 证明: $B\boldsymbol{x}\in V_{\lambda_0}$ (A 的特征子空间.

证: $\left.\begin{array}{r} A\boldsymbol{x}=\lambda_0\boldsymbol{x}\Rightarrow BA\boldsymbol{x}=B\lambda_0\boldsymbol{x}=\lambda_0(B\boldsymbol{x}) \\ AB=BA \end{array}\right\}\Rightarrow A(B\boldsymbol{x})=\lambda_0(B\boldsymbol{x})$. 故结论成立.

34. 证明: 若 n 阶矩阵 A 有 n 个互不相同的特征值, 则 $AB=BA$ 的充要条件是 A 的特征向量也是 B 的特征向量.

证: (充分性:) 设 $\boldsymbol{p}_i$ 是矩阵 A 对应于特征值 λ_i 的特征向量, 同时也是矩阵 B 对应于特征值 μ_i 的特征向量 $(i=1,2,\cdots,n)$, 作矩阵 $P=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n)$, 则 P 可逆. 再记 $\Lambda_1=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$, $\Lambda_2=\mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)$, 则有 $P^{-1}AP=\Lambda_1$, $P^{-1}BP=\lambda_2$, 注意到对角矩阵可交换, 于是有

$$AB=(P\Lambda_1P^{-1})(P\Lambda_2P^{-1})=P\Lambda_1\Lambda_2P^{-1}=P\Lambda_2\Lambda_1P^{-1}=(P\Lambda_2P^{-1})(P\Lambda_1P^{-1})=BA.$$

(必要性:) 设 $\boldsymbol{x}$ 是矩阵 A 的对应于特征值 λ 的特征向量, 即有 $A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$, 从而有 $B(A\boldsymbol{x})=B(\lambda\boldsymbol{x})=\lambda(B\boldsymbol{x})$, 又因为 $AB=BA$, 所以 $B(A\boldsymbol{x})=A(B\boldsymbol{x})=\lambda(B\boldsymbol{x})$, 即 $B\boldsymbol{x}$ 也是 A 的对应于特征值 λ 的特征向量. 因为 λ 是 A 的单重特征值, 所以 A 的对应于 λ 的线性无关的特征向量只有一个, 从而 $B\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{x}$ 线性相关, 即存在常数 μ, 使得 $B\boldsymbol{x}=\mu\boldsymbol{x}$, 此式就说明 $\boldsymbol{x}$ 也是矩阵 B 的特征向量.

35. 设 A,B 皆为 n 阶矩阵, $\varphi(\lambda)=|\lambda I-B|$. 证明: $\varphi(A)$ 可逆的充要条件是 B 的任一特征值都不是 A 的特征值.

证: 设 B 的特征值为 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_n$, 那么

$$\varphi(\lambda)=|\lambda I-B|=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$$

从而 $\varphi(A)=(A-\lambda_1I)(A-\lambda_2I)\cdots(A-\lambda_nI)$. 进一步有

$$|\varphi(A)|=|A-\lambda_1I||A-\lambda_2I|\cdots|A-\lambda_nI|$$

$\varphi(A)$ 可逆 $\Leftrightarrow$ $|\varphi(A)|\neq 0$ $\Leftrightarrow$ $|A-\lambda_iI|\neq 0$, 即 λ_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 不是 A 的特征值.

36. 证明反对称实矩阵的特征值是 0 或纯虚数.

证: 设 λ 是 A 的任一个特征值, 由 $\overline{A}^T=-A$ 和 $A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$, 有

$\overline{(A\boldsymbol{x})^T}=\overline{(\lambda\boldsymbol{x})^T}\Rightarrow\overline{\boldsymbol{x}^TA^T}=\overline{\lambda\boldsymbol{x}^T}\Rightarrow\overline{\boldsymbol{x}^TA^T}\boldsymbol{x}=\overline{\lambda\boldsymbol{x}^T}\boldsymbol{x}\Rightarrow\overline{\boldsymbol{x}}^TA\boldsymbol{x}=\lambda\overline{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{x}=\overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{x}$

又因为 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$, $\overline{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{x}>0$, 所以 $\lambda=\overline{\lambda}$, 即反对称实矩阵 A 的特征值 λ 是 0 或纯虚数.

37. 已知 $\mathbb{R}^n$ 中两个非零的正交向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$, 证明: 矩阵 $A=\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}$ 的特征值全为 0, 且 A 不可对角化.

证: 因为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交, 所以 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T=\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^T=0$, 从而 $A^2=\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}^T(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^T)\boldsymbol{\beta}=0A=O$.

设 λ 为 A 任一特征值, 对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}$, 即有 $A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$, 于是 $A^2\boldsymbol{x}=\lambda^2\boldsymbol{x}$, 即 $\lambda^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 因为 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$, 所以 $\lambda^2=0$, 即 $\lambda=0$, 故 0 为 A 的 n 重特征值.

又因为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 均为非零向量, 所以 $A=\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}$ 中至少有一个非零元, 即 $r(A)\geq 1$, 从而 A 的与 n 重特征值 0 对应的线性无关的特征向量不超过 $n-1$ 个, 所以 A 不可对角化.

38. 设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in R^n$, 且 $a_i\neq 0\ (i=1,2,\cdots,n)$. 试求矩阵 $A=\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}$ 的特征值，并求可逆阵 P, 使得 $P^{-1}AP$ 成对角形.

解:

$$A=\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\begin{pmatrix}a_1^2&a_1a_2&\cdots&a_1a_n\\a_2a_1&a_2^2&\cdots&a_2a_n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_na_1&a_na_2&\cdots&a_n^2\end{pmatrix}$$

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a_1^2&-a_1a_2&\cdots&-a_1a_n\\-a_2a_1&\lambda-a_2^2&\cdots&-a_2a_n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\-a_na_1&-a_na_2&\cdots&\lambda-a_n^2\end{vmatrix}\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i-\frac{a_i}{a_1}r_1}\begin{vmatrix}\lambda-a_1^2&-a_1a_2&\cdots&-a_1a_n\\-\frac{a_2}{a_1}\lambda&\lambda&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\-\frac{a_n}{a_1}\lambda&0&\cdots&\lambda\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{c_1+\frac{a_n}{a_1}c_i}\begin{vmatrix}\lambda-a_1^2-a_2^2-\cdots-a_n^2&0&\cdots&0\\0&\lambda&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^{n-1}\left(1-\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{\lambda}\right).$$

故 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}=0,\ \ \lambda_n=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}=0$, 时, $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的同解方程组为

$$a_1x_1=-a_2x_2-a_3x_3-\cdots-a_nx_n$$

于是对应的线性无关的特征向量为: $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}a_2\\-a_1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ \ \boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}a_3\\0\\-a_1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ \ \cdots\cdots,\ \ \boldsymbol{\xi}_{n-1}=\begin{pmatrix}a_n\\0\\0\\\vdots\\-a_1\end{pmatrix}.$

当 $\lambda_n=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$ 时, 注意到 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}=\lambda_n$, 所以 $A\boldsymbol{x}=\lambda_n\boldsymbol{x}$ 即为 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{x}$, 容易观察到 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}$ 满足上式, 即对应 $\lambda_n=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_n=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$.

令 $P=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n)=\begin{pmatrix}a_2&a_3&\cdots&a_n&a_1\\-a_1&0&\cdots&0&a_2\\0&-a_1&\cdots&0&a_3\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&-a_1&a_n\end{pmatrix}$, 则 $P^{-1}AP=\mathrm{diag}(0,\cdots,0,\sum_{i=1}^n a_i^2)$.

39. 已知 $A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}$ 的一个特征向量 $\boldsymbol{\xi}=(1,1,-1)^T$.

(1). 确定 a,b 及 $\boldsymbol{\xi}$ 对应的特征值;

(2). A 能否相似于对角阵? 说明理由.

解: (1) 设 $\boldsymbol{\xi}$ 对应的特征值为 λ, 则有 $(A-\lambda I)\boldsymbol{\xi}=\mathbf{0}$, 即

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & a-\lambda & 3 \\ -1 & b & -2-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\lambda-1 \\ 2+a-\lambda \\ 1+b+\lambda \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} \lambda=-1 \\ a=-3 \\ b=0 \end{cases}$$

(2). $|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix}\overset{c_3-(2+\lambda)c_1}{=\!=\!=\!=}\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & \lambda^2-2 \\ 5 & -3-\lambda & -7-5\lambda \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=-(\lambda+1)^3$, 即 $\lambda=-1$ 是 A 的三重特征值, 而

$$(A+I)=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

即 $R(A+I)=2$, 所以 A 的对应于三重特征值 -1 的线性无关的特征向量只有一个, 所以 A 不能对角化.

40. 设 $A=\begin{pmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{pmatrix}$, 已知 $|A|=1$, 且 $A^\star$ 有一个特征值 λ_0, 其特征向量 $\boldsymbol{x}=(-1,-1,1)^T$, 试求 a,b,c 及 λ_0.

解: $\left.\begin{array}{r} A^\star\boldsymbol{x}=\lambda_0\boldsymbol{x} \\ AA^\star=|A|I \\ |A|=1 \end{array}\right\}\Rightarrow AA^\star\boldsymbol{x}=I\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}=\lambda_0A\boldsymbol{x}$, 即

$$\lambda_0\begin{pmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda_0(1-a+c) \\ \lambda_0(-2-b) \\ \lambda_0(c-a-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} \lambda_0=-1 \\ a=4 \\ b=-3 \\ c=4 \end{cases}$$

41. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ x & 4 & y \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$, 已知 A 有三个线性无关的特征向量, 且 $\lambda_1=2$ 是其二重特征值, 求 P, 使得 $P^{-1}AP=\Lambda$ (对角矩阵).

解: 由特征值的性质可知 A 的第三个特征值 $\lambda_3=1+4+5-2-2=6$,

$$(A-2I)=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ x & 2 & y \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ x-2 & 0 & y+2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

因为 A 有三个线性无关的特征向量, 且 $\lambda_1=2$ 是其二重特征值, 所以 $R(A-2I)=1$, 从而有 $x=2,\ y=-2$.

解方程组 $(A-2I)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 由

$$(A-2I)=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\2&2&-2\\-3&-3&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

得对应于二重特征值 2 的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{p}_1=(-1,1,0)^T$, $\boldsymbol{p}_2=(1,0,1)^T$.

解方程组 $(A-6I)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 由

$$(A-2I)=\begin{pmatrix}-5&-1&1\\2&-2&-2\\-3&-3&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-5&-1&1\\3&3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&-6&-4\\0&6&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&\frac{2}{3}\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{3}\\0&1&\frac{2}{3}\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

得对应于特征值 6 的特征向量为 $\boldsymbol{p}_3=(1,-2,3)^T$.

作矩阵 $P=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&0&-2\\0&1&3\end{pmatrix}$, $\Lambda=\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&6\end{pmatrix}$, 则 P 可逆, 且 $P^{-1}AP=\Lambda$.

42. 设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$, $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$ 均为非零向量, 已知 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}=0$, $A=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$. 试求: (1) A^2; (2) A 的特征值与特征向量.

解: (1) $A^2=\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}^T(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^T)\boldsymbol{\beta}=0A=O$.

(2). 设 λ 为 A 任一特征值, 对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}$, 即有 $A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$, 于是 $A^2\boldsymbol{x}=\lambda^2\boldsymbol{x}$, 即 $\lambda^2\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 因为 $\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$, 所以 $\lambda^2=0$, 即 $\lambda=0$, 故 0 为 A 的 n 重特征值.

因为 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 均为非零向量, 不妨设 $a_1\neq 0$, 则方程组 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的同解方程组为 $b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n=0$, 于是所求特征向量为: $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}b_2\\-b_1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}b_3\\0\\-b_1\\\vdots\\0\end{pmatrix}$, $\cdots\cdots$, $\boldsymbol{\xi}_{n-1}=\begin{pmatrix}b_n\\0\\0\\\vdots\\-b_1\end{pmatrix}$.