武汉大学 2016-2017 学年第二学期期末考试高等数学 B2 试题（A）解答

1、（8 分）设 $\vec{a}=(2,-3,1)$，$\vec{b}=(1,-2,3)$，$\vec{c}=(2,1,2)$，求同时垂直于 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$，且在向量 $\vec{c}$ 上投影是 14 的向量 $\vec{d}$.

解:设 $\vec{d}=(x,y,z)$，由条件可得 $\begin{cases}\vec{a}\cdot\vec{d}=2x-3y+z=0\\ \vec{b}\cdot\vec{d}=x-2y+3z=0\\ \vec{c}\cdot\vec{d}=2x+y+2z=|\vec{c}|\cdot\operatorname{Prj}_{\vec{c}}\vec{d}=42\end{cases}$，解之得

$x=14, y=10, z=2$. 故 $\vec{d}=(14,10,2)$

2、（10 分）讨论极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}$ 的存在性，若存在求出极限，若不存在说明理由。

解　由于 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y=0}}\dfrac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}=0$　...5′

$\lim\limits_{\substack{x=y^2\\y\to0}}\dfrac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{y^{12}}{(2y^4)^3}=\dfrac{1}{8}$　　所以 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}$ 不存在。........5′

（或 $\lim\limits_{\substack{x=ky^2\\y\to0}}\dfrac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{k^4y^{12}}{[(k^2+1)y^4]^3}=\dfrac{k^4}{(k^2+1)^3}$ ......5′）

3、（8 分）过直线 $l:\begin{cases}x+y-z=0\\x+2y+z=0\end{cases}$ 作两个互相垂直的平面，且其中一个过已知点 $M_1(0,1,-1)$，求这两个平面的方程。

解　设过 l 的平面方程为 $x+y-z+\lambda(x+2y+z)=0$ 由过 M_1 点，解得：$\lambda=-2$

故过 l 且过 M_1 的平面为 $\pi_1:x+3y+3z=0$

设另一个平面为 $x+y-z+\mu(x+2y+z)=0$ 由与 π_1 垂直，解得 $\mu=-\dfrac{1}{10}$

故平面为 $9x+8y-11z=0$

4、（10 分）设函数 $f(u,v)$ 由关系式 $f(xg(y),y)=x+g(y)$ 确定，其中函数 $g(y)$ 可微，且 $g(y)\neq0$，求 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}$.

解：设 $\begin{cases}xg(y)=u\\y=v\end{cases}$ 得 $f(u,v)=\dfrac{u}{g(v)}+g(v)$，关于 v 求导得 $\dfrac{\partial f}{\partial u}=\dfrac{1}{g(v)}$，....5′

因此 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}=-\dfrac{g'(v)}{g^2(v)}$ ....5′

5、（8 分）设 $u=f(x,y,z)$，$y=\ln x$，$h(\sin x,e^y,z)=0$，且 $\dfrac{\partial h}{\partial z}\neq0$，求 du。

0206003

123

解：法一：对 $y=\ln x$ 两边对 x 求导数，有 $y'=\dfrac{1}{x}$，对 $h(\sin x, e^{y}, z)=0$ 两边对 x 求导数，有 $h_1\cdot\cos x+h_2\cdot e^{y}\cdot y'+h_3\cdot z'=0$，注意由 $y=\ln x$ 可知 $e^{y}=x$，从而 $z'=-\dfrac{\cos x\cdot h_1+h_2}{h_3}$。

对 $u=f(x,y,z)$ 两边同时对 x 求导，得

$$du=(f_1+f_2\cdot y'+f_3\cdot z')\ dx=(f_1+f_2\cdot\frac{1}{x}+f_3\cdot\left(-\frac{\cos x\cdot h_1+h_2}{h_3}\right))\ dx$$

法二　由 $du=f_x(x,y,z)dx+f_y(x,y,z)dy+f_z(x,y,z)dz$

又 $e^{y}=x$，$dy=\dfrac{1}{x}dx$，$h_1\cos xdx+h_2e^{y}dy+h_3dz=0$　故 $dz=-\dfrac{h_1\cos xdx+h_2dx}{h_3}$

所以有 $du=(f_x+\dfrac{f_y}{x}-f_z\dfrac{h_1\cos x+h_2}{h_3})dx$

6、（10 分）在椭球面 $2x^2+2y^2+z^2=1$ 上求一点，使函数 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 在该点沿方向 $\vec{l}=\vec{i}-\vec{j}$ 的方向导数最大。

有结果3'. or 有过程3'.

解：函数 $f(x,y,z)$ 的方向导数的表达式为 $\dfrac{\partial f}{\partial l}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\dfrac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$。

其中：$\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2}},\cos\beta=-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\cos\gamma=0$ 为方向 $\vec{l}$ 的方向余弦。3' 因此 $\dfrac{\partial f}{\partial l}=\sqrt{2}(x-y)$。…5' 2' 结果对5分

于是，按照题意，即求函数 $\sqrt{2}(x-y)$ 在条件 $2x^2+2y^2+z^2=1$ 下的最大值。设

$F(x,y,z,\lambda)=\sqrt{2}(x-y)+\lambda(2x^2+2y^2+z^2-1)$，则由　3' or 5'

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=\sqrt{2}+4\lambda x=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=-\sqrt{2}+4\lambda y=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial z}=2\lambda z=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial \lambda}=2x^2+2y^2+z^2-1=0\end{cases}$$

结果过程都对 有 5'

得 $z=0$ 以及 $x=-y=\pm\dfrac{1}{2}$，即得驻点为 $M_1=\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},0\right)$ 与 $M_2=\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},0\right)$。因最大值必存在，故只需比较 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{M_1}=\sqrt{2}$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{M_2}=-\sqrt{2}$ 的大小。由此可知 $M_1=\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},0\right)$ 为所求。….5'

有过程 结果错 3'

结果对 无过程 3'

7、（10 分）设区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4, x\ge 0\}$，计算二重积分 $\iint\limits_D\dfrac{1+xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

解：由于积分区域关于 x 轴对称，函数 $\dfrac{1}{1+x^2+y^2}$ 是变量 y 的偶函数，$\dfrac{xy}{1+x^2+y^2}$ 是变量 y 的奇函数，则　$\iint\limits_D\dfrac{xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$………5'

$$\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint_{D_1}\frac{1}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^2\frac{r\mathrm{d}r}{1+r^2} = \frac{\pi}{2}\ln 5,$$

其中 $D_1=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4, x\ge 0,\ y\ge 0\}$ …………5'

8、(8 分)计算曲线积分 $\int_L e^x(\cos y\mathrm{d}x-\sin y\mathrm{d}y)$,其中 L 是从坐标原点起,经曲线 $y=x^2$ 到点 (a,a^2) 的路径.

解:因 $\frac{\partial}{\partial x}(-\sin ye^x)=-\sin ye^x=\frac{\partial}{\partial y}(e^x\cos y)$,所以积分与路径无关,取路径为如下折线 $(0,0)\to(a,0)\to(a,a^2)$,则有

$$\int_L e^x(\cos y\mathrm{d}x-\sin y\mathrm{d}y)=\int_0^a e^x\mathrm{d}x-\int_0^{a^2}e^a\sin y\mathrm{d}y=e^a\cos a^2-1$$

9、(10 分)试将函数 $f(x)=\ln(1+x+x^2)$ 展开成 x 的幂级数。

解:由于 $f(x)=\ln(1-x^3)-\ln(1-x)$ 利用 $\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ $x\in(-1,1)$.....5'

得 $f(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^{3k+1}}{3k+1}+\frac{x^{3k+2}}{3k+2}-\frac{2x^{3k+3}}{3(k+1)}\right)$ $x\in(-1,\ 1)$.....5'

10、(10 分)计算曲面积分 $I=\iint_S 2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 S 是曲面 $z=4-x^2-y^2(z\ge 0)$ 的上侧。

解 补辅助面 $S_1:\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ z=0\end{cases}$,法向量向下,形成封闭曲面 Ω,在 Ω 上运用高斯公式可得

$$J=\iint_{S\cup S_1}2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_{\Omega}6(x^2+y^2+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\ ......5'$$

作柱坐标变换得

$J=6\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 dr\int_0^{1-r^2}(r^2+z)rdz=128\pi$,而

$J_1=\iint_{S_1}2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_{S_1}3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_D -3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=12\pi$,所以

$$I=J-J_1=116\pi\ ......5'$$

11、(8 分)设 $a_n<b_n<c_n, n=1,2,\dots$,证明:若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$,$\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ 收敛,则必有 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛,且有 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\le\sum_{n=1}^{\infty}b_n\le\sum_{n=1}^{\infty}c_n$.

证明:由 $a_n<b_n<c_n$ 可得 $0<b_n-a_n<c_n-a_n$,由 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$,$\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ 收敛知道 $\sum_{n=1}^{\infty}(c_n-a_n)$ 收敛,由正项级数比较判别法知道 $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)$ 收敛,从而 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}[a_n+(b_n-a_n)]$ 收敛。另外设

A_n, B_n, C_n 分别是 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 的部分和数列，则 $A_n < B_n < C_n$，由数列极限的性质知道

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \le \sum_{n=1}^{\infty} b_n \le \sum_{n=1}^{\infty} c_n$$