课程编号：A073003　　北京理工大学 2009-2010 学年第一学期

线性代数(B)试题 B 卷

班级 ________ 学号 ________ 姓名 ________ 成绩 ________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
签名											

一、（10 分）已知 $A=\begin{pmatrix}0&2&5\\0&1&3\\1&0&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}3&1\\4&2\end{pmatrix}$，求行列式 $\begin{vmatrix}0&A^T\\B^{-1}&0\end{vmatrix}$ 的值。

二、（10 分）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，矩阵 X 满足 $AXA^*=2XA^*+9I$，求 X。

三、（10 分）对下列线性方程组

$$\begin{cases}ax_1+x_2+x_3=1\\x_1+ax_2+x_3=a\\x_1+x_2+ax_3=a^2\end{cases}$$

试讨论：当 a 取何值时，它有唯一解？无解？有无穷多解？并在有无穷多解时求其通解。（用导出组的基础解系表示通解）

四、（10 分）已知

$$\alpha_1=(-2,1,0,3),\ \ \alpha_2=(1,-3,2,4),\ \ \alpha_3=(3,0,2,-1),\ \ \alpha_4=(2,-2,4,6)$$

(1) 求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩和一个极大无关组;

(2) 用所求的极大无关组线性表出剩余向量。

五、（10 分）已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是向量空间 R^3 的一个基，$\beta_1=\alpha_1,\beta_2=\alpha_1+\alpha_2$，$\beta_3=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$。

(1) 证明 β_1,β_2,β_3 为 R^3 的一个基;

(2) 求基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵;

(3) 求向量 $\gamma=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$ 关于基 β_1,β_2,β_3 的坐标。

六、（10 分）已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$，

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量;

(2) 判断 $\boldsymbol{A}$ 是否可以相似对角化。

七、（10 分）已知向量组：$\alpha_1=(1,0,1)^T$，$\alpha_2=(0,1,2)^T$，求生成子空间$L(\alpha_1,\alpha_2)$的一个标准正交基。

八、（10 分）已知实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$，其中A相似于对角矩阵$\mathrm{diag}(1,-2,3)$。

(1) 求二次型$f(x_1,x_2,x_3)$的一个标准形;

(2) 判断二次型$f(x_1,x_2,x_3)$是否正定。

九、（10 分）已知 A 是 3 阶矩阵，非齐次线性方程组 $AX=\beta$ 有通解 $\beta+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$，其中 k_1,k_2 为任意常数，求 A 的特征值和特征向量。

十、（10 分）已知 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ 都是 3 元向量，且 α_1,α_2 线性无关，β_1,β_2 线性无关。

(1) 证明：存在非零的 3 元向量 γ，它既能由 α_1,α_2 线性表示，又能由 β_1,β_2 线性表示；

(2) 当 $\alpha_1=(1,1,0)^T,\alpha_2=(1,-1,1)^T,\beta_1=(2,1,1)^T,\beta_2=(-1,2,-1)^T$ 时，求(1)中的 γ。