武汉大学 2011-2012 下学期高数期末试题

一、（8’）已知$\vec{a}=\vec{i},\vec{b}=\vec{j}-2\vec{k},\vec{c}=2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$,求一单位向量$\vec{m}$，使$\vec{m}\perp\vec{c}$，且$\vec{m}$与$\vec{a},\vec{b}$共面。

解：设$\vec{m}=\{x,y,z\}$.则

$$\begin{cases}2x-2y+z=0\\ \begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\x&y&z\end{vmatrix}=0\\ x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}2x-2y+z=0\\ z+2y=0\\ x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=2y\\ z=-2y\\ x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=\pm\dfrac{2}{3}\\ y=\pm\dfrac{1}{3}\\ z=\mp\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

$\vec{m}=\left\{\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right\}$或$\vec{m}=\left\{-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right\}$。

二、（11’）设$f(x,y)=\sqrt[3]{x y^{2}}$,问$f(x,y)$在$(0,0)$点：（1）是否连续？（2）偏导数是否存在？（3）是否可微？

解：因为$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\sqrt[3]{x^2y}=0=f(0,0)$,所以$f(x,y)$在$(0,0)$点连续。因为$\varphi(x)=f(x,0)\equiv0,\psi(y)=f(0,y)\equiv0$，所以$f_x(\ 0=\varphi'\ 0=\ )\ f_y\ (=\psi 0'\ )=$ 都存在。因为

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{f(x,y)-f(0,0)-[f_x(0,0)x+f_y(0,0)y]}{\sqrt{x^2+y^2}} \overset{y=kx}{=} \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\sqrt[3]{k}\,x}{\sqrt{1+k^2}\,x} = \frac{\sqrt[3]{k}}{\sqrt{1+k^2}}$$ 与 k

有关,所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不可微。

三、(8’)设函数 $y = y(x)$ 由方程组 $\begin{cases} y = f(x,t) \\ t = F(x,y) \end{cases}$ 所确定，求 $\frac{dy}{dx}$（假定隐函数定理条件满足）。

解：$\begin{cases} y = f(x,t) \\ t = F(x,y) \end{cases}$ 等价于 $y = f(x,F(x,y))$。把 *y* 看作 *x* 的函数，两边对 *x* 求导得

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x,F(x,y)) + f_2(x,F(x,y))\left(F_1(x,y) + F_2(x,y)\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f_1(x,F(x,y)) + f_2(x,F(x,y))F_1(x,y)}{1-f_2(x,F(x,y))F_2(x,y)}$$

四、(8’)设 $z = u(x,y)e^{ax+by}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$，试确定 a,b 使 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} + z = 0$。

解：$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}e^{ax+by} + au(x,y)e^{ax+by}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}e^{ax+by} + bu(x,y)e^{ax+by}$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = b\frac{\partial u}{\partial x}e^{ax+by} + a\frac{\partial u}{\partial y}e^{ax+by} + abu(x,y)e^{ax+by}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} + z = (b-1)\frac{\partial u}{\partial x}e^{ax+by} + (a-1)\frac{\partial u}{\partial y}e^{ax+by} + (ab-a-b+1)u(x,y)e^{ax+by}$$

当 $a=b=1$ 时 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} + z = 0$。

五、(10’)求函数 $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ 在条件 $a_1 x + a_2 y + a_3 z = 1$ $(a_i > 0)$ 下的最小值。

解：所求最小值是原点到所给平面距离的平方。即

$$f_{\min} = \left(\frac{1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}\right)^2 = \frac{1}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

六、（8′）计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} x^3 y^2 z\, dV$ ，Ω 为马鞍面 $z = xy$ 与平面 $y = x,\ x = 1,\ z = 0$ 所包围的空间区域。

解：$\iiint\limits_{\Omega} x^3 y^2 z\, dV = \iint\limits_{\substack{0 \le y \le x \\ 0 \le x \le 1}} dx dy \int_0^{xy} x^3 y^2 z\, dz = \frac{1}{2} \iint\limits_{\substack{0 \le y \le x \\ 0 \le x \le 1}} x^5 y^4 dx dy$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 dx \int_0^x x^5 y^4 dy = \frac{1}{10}\int_0^1 x^{10} dx = \frac{1}{110}\text{。}$$

七、（8′）求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2^n} + (-2)^n\right](x+1)^n$ 的收敛域。

解：令 $x + 1 = t$ ，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2^n} + (-2)^n\right](x+1)^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2^n} + (-2)^n\right]t^n$.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{2^{n+1}} + (-2)^{n+1}}{\frac{1}{2^n} + (-2)^n}\right| = 2\text{。}\ R_t = \frac{1}{2}\text{。}$$

当 $t = \frac{1}{2}$ ，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2^n} + (-2)^n\right]\frac{1}{2^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ 发散；

当 $t = -\frac{1}{2}$ ，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2^n} + (-2)^n\right]\frac{(-1)^n}{2^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n}} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} 1$ 发散；

$$-\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{2}\text{。}$$

幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2^n} + (-2)^n\right](x+1)^n$ 的收敛域 $K = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$。

八、（8′）求二重积分 $I = \iint\limits_{D}\left|x^2 + y^2 - 4\right| dx dy$ ，其中 $D = \left\{(x, y)\,\middle|\, x^2 + y^2 \le 16\right\}$。

解：$D = D_1 \cup D_2$ ，其中 $D_1 = \left\{(x, y)\,\middle|\, x^2 + y^2 \le 4\right\}$ ，

$D_2=\left\{(x,y)\middle|\,4\le x^2+y^2\le 16\right\}$。

$$I=\iint_{D_1}\left(4-x^2-y^2\right)dxdy+\iint_{D_2}\left(x^2+y^2-4\right)dxdy$$
$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\left(4-\rho^2\right)\rho d\rho+\int_0^{2\pi}d\theta\int_2^4\left(\rho^2-4\right)\rho d\rho$$
$$=2\pi\left(2\rho^2-\frac{1}{4}\rho^4\right)_0^2+2\pi\left(\frac{1}{4}\rho^4-2\rho^2\right)_2^4$$
$$=16\pi+2\pi\left(\frac{1}{4}\cdot 4^4-2\cdot 4^2\right)=80\pi$$

九、（10'）计算曲面积分$\iint_S(2x+z)dydz+zdxdy$，其中S为有向曲面$z=x^2+y^2(0\le z\le 1)$，其法向量与z轴正向的夹角为锐角。

解：S往xy平面的投影$D_{xy}:x^2+y^2\le 1$。$\frac{\partial z}{\partial x}=2x,\frac{\partial z}{\partial y}=2y$。

$$\iint_S(2x+z)dydz+zdxdy=\iint_{D_{xy}}\left[(2x+x^2+y^2)(-2x)+x^2+y^2\right]dxdy$$
$$=-2\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)xdxdy+\iint_{D_{xy}}(y^2-3x^2)dxdy=\iint_{D_{xy}}(y^2-3x^2)dxdy$$
$$=\frac{1}{2}\left[\iint_{D_{xy}}(y^2-3x^2)dxdy+\iint_{D_{xy}}(x^2-3y^2)dxdy\right]=-\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)dxdy$$
$$=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho^3d\rho=-\frac{\pi}{2}$$

十、（11'）已知L是第一象限中从$O(0,0)$沿圆周$x^2+y^2=2x$到点$A(2,0)$，再沿圆周$x^2+y^2=4$到点$B(0,$ 的曲线段，计算曲线积分$\int_L 3x^2ydx+(x^3+x-2y)dy$。

解：L_1是从$B(0,2)$到$O(0,0)$的直线段。

$$\int_{L+L_1}3x^2ydx+(x^3+x-2y)dy=\iint_D dxdy=\frac{\pi}{2}(4-1)=\frac{3\pi}{2}$$

$$\int_L 3x^2ydx+(x^3+x-2y)dy=\frac{3\pi}{2}-\int_{L_1}3x^2ydx+(x^3+x-2y)dy$$
$$=\frac{3\pi}{2}-\int_2^0(-2y)dy=\frac{3\pi}{2}-4$$

十一、（10’）将$f(x)=1-x^2(0\le x\le\pi)$展开成余弦级数，并求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$的和。

解：$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1-x^2\right)dx=\frac{2}{\pi}\left(\pi-\frac{1}{3}\pi^3\right)=2\left(1-\frac{1}{3}\pi^2\right)$，

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1-x^2\right)\cos nxdx\\
&= -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nxdx=\frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi}x\sin nxdx\\
&= -\frac{4}{n^2\pi}x\cos nx\Big|_0^{\pi}=\frac{4(-1)^{n-1}}{n^2}
\end{aligned}
$$

$$f(x)=1-\frac{1}{3}\pi^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n-1}}{n^2}\cos nx(0\le x\le\pi)$$

令$x=0$得$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\pi^2-1\right)$。