课程编号：A073003　　　　北京理工大学2009-2010学年第一学期

线性代数(B)试题 A卷

班级 ________ 学号 _________ 姓名 __________ 成绩 ___________

一、（10分）已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&2&5\\0&1&3\\-1&0&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3&2\\4&3\end{pmatrix}$，求行列式 $\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}^*&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&2\boldsymbol{B}\end{vmatrix}$ 的值。

二、（10分）已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&-5&1\\1&-1&0\\-1&0&2\end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}$，求 $\boldsymbol{X}$。

三、（10分）对下列线性方程组

$$\begin{cases}ax_1+x_2+x_3=1\\x_1+ax_2+x_3=a\\x_1+x_2+ax_3=a^2\end{cases}$$

试讨论：当 a 取何值时，它有唯一解？无解？有无穷多解？并在有无穷多解时求其通解。（用导出组的基础解系表示通解）

四、（10 分）已知

$$\alpha_1=(1,1,1),\ \ \alpha_2=(1,1,0),\ \ \alpha_3=(1,0,0),\ \ \alpha_4=(1,2,-3)$$

(1) 求向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩和一个极大无关组;

(2) 用所求的极大无关组线性表出剩余向量。

五、（10 分）已知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是向量空间$R^3$的一个基，$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$，$\beta_3=\alpha_3$。

(1) 证明β_1,β_2,β_3为R^3的一个基;

(2) 求基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的过渡矩阵;

(3) 求向量$\gamma=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$关于基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的坐标。

六、（10 分）设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$是欧氏空间$V$的一个正交向量组，证明$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关。

七、（10 分）已知线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 $\boldsymbol{k_1(1,0,0)^T}+\boldsymbol{k_2(2,1,0)^T}$，其中 $\boldsymbol{k_1,k_2}$ 为任意常数，求此方程组的解空间的一个标准正交基。

八、（10 分）已知二次型 $\boldsymbol{f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3}$。

(1) 用正交变换将它化为标准形，并给出所用的正交变换;

(2) 判断二次型 $\boldsymbol{f(x_1,x_2,x_3)}$ 是否正定。

九、（10 分）已知 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角矩阵 $\mathrm{diag}(\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{0})$ 。

(1) 求 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{I}$ 的所有特征值;

(2) 证明 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{I}$ 为不可逆矩阵。

十、（10 分）设 $\boldsymbol{n}$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A},\quad \mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{r}\quad (\mathbf{0}<\boldsymbol{r}\le\boldsymbol{n})$ 。

(1) 试确定 $\boldsymbol{A}$ 的特征值的取值范围；

(2) 证明 $\boldsymbol{A}$ 一定可以相似对角化；

(3) 求行列式 $|\boldsymbol{A}-\mathbf{2}\boldsymbol{I}|$ 的值。