

例 11. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ bc & ac & ab \end{vmatrix} = 0$, 且 a, b, c 互异, 则

$$ab + ac + bc = \underline{\hspace{2cm}}.$$

[方法] 第 1 行的 $(a+b+c)$ 倍加第 3 行上, 化为范德蒙行列式.

配凑是重要的, 不易的, 关键的

例 1. 填空题:

(1) 设 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 且 $n \geq 2$ 为整数, 则

$$\mathbf{A}^n - 2\mathbf{A}^{n-1} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

[方法] 计算 $\mathbf{A}^2 = 2\mathbf{A}$, 则 $\mathbf{A}^{n-2}(\mathbf{A}^2 - 2\mathbf{A}) = \mathbf{0}$.

(2) \mathbf{A}, \mathbf{B} 为 n 阶方阵 $|\mathbf{A}|=1, |\mathbf{B}|=2$, 且 $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ 可逆, 则 $|B(I + BA^{-1})^{-1}(A + B)| = \underline{\hspace{2cm}}$.

[方法] $(\mathbf{I} + \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1})^{-1} = ((\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1}$.

(4) \mathbf{A} 为 n 阶方阵 $|\mathbf{A}|=2$, 则 $|(2\mathbf{A})^{-1} + \mathbf{A}^*| = \underline{\hspace{2cm}}$.

[方法] 利用 $\mathbf{A}^* = |\mathbf{A}| \mathbf{A}^{-1} = 2\mathbf{A}^{-1}$ 代入.

(5) 设 $\alpha = (1, 0, -1)^T$, 矩阵 $\mathbf{A} = \alpha\alpha^T$, n 为正整数,

则 $|a\mathbf{I} - \mathbf{A}^n| = \underline{\hspace{2cm}}$.

[方法] 计算 $\alpha^T \alpha = 2$, $\mathbf{A}^2 = 2\mathbf{A}$, 递推得

$$\mathbf{A}^n = 2^{n-1} \mathbf{A}.$$

例 2. 填空题

(1) 设三阶矩阵

$\mathbf{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \beta_1)$, $\mathbf{B} = (\alpha_1, \alpha_2, \beta_2)$, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$
为三维列向量, $|\mathbf{A}| = 2, |\mathbf{B}| = 3$, 则 $|2\mathbf{A} - 5\mathbf{B}| = -99$

(2) 设四阶方阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1)$, $B = (\alpha_1, \beta_2, \alpha_2, \alpha_3)$,

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$ 是四维列向量, $|A| = 2, |B| = 3$,

则 $|\alpha_1, 2\alpha_2, \beta_1 + \beta_2, 3\alpha_3 + \alpha_1| = \underline{\hspace{2cm}}$.

例 6. \mathbf{A} , \mathbf{B} 为 n 阶方阵

(1) 设 $\mathbf{A}^2 + 3\mathbf{A} + 2\mathbf{I} = \mathbf{0}$, 证明 $\mathbf{A} + 4\mathbf{I}$ 可逆,
求 $(\mathbf{A} + 4\mathbf{I})^{-1}$.

(2) 设 $\mathbf{AB} + \mathbf{A} + 3\mathbf{B} + 2\mathbf{I} = \mathbf{0}$, 求 $(\mathbf{A} + 3\mathbf{I})^{-1}$.

[方法] (1) 由条件得 $(\mathbf{A} + 4\mathbf{I})(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = -6\mathbf{I}$.

(2) 由条件得 $(\mathbf{A} + 3\mathbf{I})(\mathbf{B} + \mathbf{I}) = \mathbf{I}$.

[答案] (1) $\frac{1}{6}(\mathbf{I} - \mathbf{A})$. (2) $\mathbf{B} + \mathbf{I}$.

例 10. 设四阶矩阵 $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

且 $\mathbf{A}(\mathbf{I} - \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B})^T \mathbf{C}^T = \mathbf{I}$, 求 \mathbf{A} .

[方法] 化简方程式为 $\mathbf{A}(\mathbf{C} - \mathbf{B})^T = \mathbf{I}$.

例 13. (1) 设 \mathbf{B} , \mathbf{C} 为非零的 n 阶矩阵, $\mathbf{BC}^T = \mathbf{0}$,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{C} \end{pmatrix}, \text{ 求 } |\mathbf{AA}^T|.$$

[方法] 分块乘法 $\mathbf{AA}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{BB}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{CC}^T \end{pmatrix}$, 且 $|\mathbf{C}| = 0$ 或 $|\mathbf{B}| = 0$.

[答案] $\mathbf{0}$.

(2) 设 n 阶方阵为 A , $|A|=2$, b, c 为实数, α 为 n 维列向量, β 为 n 维行向量, 且 $\begin{vmatrix} A & \alpha \\ \beta & b \end{vmatrix} = 0$, 求 $\begin{vmatrix} A & \alpha \\ \beta & c \end{vmatrix}$.

[方法] $2(c-b)$.

[答案]
$$\begin{vmatrix} A & \alpha \\ \beta & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & \alpha + 0 \\ \beta & b + c - b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & \alpha \\ \beta & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A & 0 \\ \beta & c - b \end{vmatrix}$$

例 20. 设 \mathbf{A} 为 n 阶方阵, 满足 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$, 又 n 阶矩阵 $\mathbf{B} = (A_{ij})_{n \times n}$, 其中 A_{ij} 是 $|\mathbf{A}|$ 中的元素 a_{ij} 的代数余子式, 证明 $\mathbf{B}^2 = \mathbf{I}$.

[方法] 由 $\mathbf{B}^T = (A_{ij})_{n \times n}^T = \mathbf{A}^*$ 和 $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}$, 则

$$(\mathbf{B}^T)^2 = |\mathbf{A}|^2 (\mathbf{A}^{-1})^2 = \mathbf{I}.$$

例 23. 设 \mathbf{A} 为 n 阶方阵, $r(\mathbf{A})=1$, 证明

(1) \mathbf{A} 可以表为一列 n 维向量与一行 n 维向量之积

(2) $\mathbf{A}^2 = k\mathbf{A}$, k 为数。

[方法] (1) 存在可逆阵 \mathbf{P}, \mathbf{Q} , 使 $\mathbf{PAQ} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$,

得 $\mathbf{A} = (\boldsymbol{\alpha} \mid \mathbf{P}_1) \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta} \\ \mathbf{Q}_1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 为一列 n 维向量,

$\boldsymbol{\beta}$ 为一行 n 维向量.

(2) $\mathbf{A}^2 = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\beta} = k\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta} = k\mathbf{A}$.

一个重要题型

例1: 设 $AB = aA + bB$, 其中 a, b 为非零常数, 证明 A, B 可交换.

解: 由 $AB = aA + bB$ 可得,

$$(A - bI)(B - aI) = abI, \text{ 即 } \frac{1}{ab}(A - bI)(B - aI) = I$$

于是

$$\frac{1}{ab}(B - aI)(A - bI) = I$$

由此可得

$$BA = aA + bB = AB.$$

注: 矩阵乘积的可交换性可利用逆矩阵的定义来证明.

上页

下页

返回

例2: 设 A, B 是3阶矩阵, 满足 $2A^{-1}B = B - 4E$. (1)求 $(A-2E)^{-1}$; (2)证明 $AB = BA$.

证: (1)条件等式两边左乘矩阵 A ,
得 $2B = AB - 4A$, 即 $4A - AB + 2B = O$.

进而有 $4A - 8E - (A - 2E)B = -8E$, $4(A - 2E) - (A - 2E)B = -8E$

故有 $(A - 2E)(4E - B) = -8E(A - 2E) \left[-\frac{1}{8}(4E - B) \right] = E$

所以 $(A - 2E)^{-1} = -\frac{1}{8}(4E - B)$

(2)由(1)有 $(A - 2E) \left[-\frac{1}{8}(4E - B) \right] = -\frac{1}{8}(4E - B)(A - 2E)$

化简整理可得 $AB = BA$.

上页

下页

返回

例 6. 填空题

(1) n 阶方阵 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 相似, $|2\mathbf{I} + \mathbf{A}| = 0$, 则 $(2\mathbf{B})^{-1}$ 的一个特征值为_____.

[思路] $\lambda_{(\mathbf{A})} = -2$, $\because \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{B}$, $(2\mathbf{B})^{-1} = \frac{1}{2}\mathbf{B}^{-1}$ 的特征值为

$$\frac{1}{2}\lambda_{(\mathbf{A})} = -\frac{1}{4}.$$

(3) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 已知矩阵 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 相似, 则秩

$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})$ 与秩 $(\mathbf{A} - \mathbf{I})$ 的和为 (C)

(A) 2, (B) 3, (C) 4, (D) 5.

例 7. (1) 设 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$,

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

下面结论正确的是 (**C**) .

(A) \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 相似. (B) \mathbf{A} 与 \mathbf{C} 相似

(C) \mathbf{A} 与 \mathbf{D} 相似 (D) \mathbf{C} 与 \mathbf{D} 相似

(2) 设 \mathbf{A} 是 n 阶实对称矩阵, \mathbf{P} 为 n 阶可逆矩阵, 已知 n 维列向量 α 是 \mathbf{A} 的属于特征值 λ 的特征向量, 则 $(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P})^T$ 属于特征值 λ 的特征向量是 ()

(A) $\mathbf{P}^{-1}\alpha$ (B) $\mathbf{P}^T\alpha$ (C) $\mathbf{P}\alpha$ (D) $(\mathbf{P}^{-1})^T\alpha$

[思路] $\because \mathbf{A}\alpha = \lambda\alpha, (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P})^T(\mathbf{P}^T\alpha) = \mathbf{P}^T\mathbf{A}^T(\mathbf{P}^{-1})^T\mathbf{P}^T\alpha$
 $= \mathbf{P}^T\mathbf{A}\alpha = \mathbf{P}^T\lambda\alpha = \lambda(\mathbf{P}^T\alpha)$

[结论] 若 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 皆为实对称阵, 且特征值相同, 则

2024-5-28 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 相似.

例 8. n 阶可逆矩阵 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 相似。

(1) 证明 \mathbf{A}^* 与 \mathbf{B}^* 相似

(2) 若 \mathbf{A} 的特征值为 $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$, 求 $|\mathbf{B}^*|$.

例 9'. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -k & -1 & k \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, k 为何值有 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \Lambda$,

求 \mathbf{P}, Λ .

例 10. 已知 $\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 是 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix}$ 的一个特征向量.

(1) 试确定参数 a, b 及特征向量 ξ 对应的特征值.

(2) 问 A 能否相似于对角矩阵? 说明理由.

[思路] (1) 用定义 $A\xi = \lambda\xi$.

(2) $|\lambda I - A| = (\lambda + 1)^3$, 求 $\lambda = -1$ 对应的线性无关向量个数.

[答案] (1) $\lambda = -1, a = -3, b = 0$.

例 10'. A 可对角化, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & y \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $x + y = \underline{\hspace{2cm}}$.

例 11. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ x & 4 & y \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$, 已知 A 有三个线性无关的特征向量, $\lambda = 2$ 是 A 的二重特征值, 试求可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 为对角形矩阵。

[思路] 由已知: A 可对角化 \Rightarrow 矩阵 $(2I - A)$ 的秩为 1, $\Rightarrow x = 2, y = -2$.

例 12. 设 α, β 为非零的 n 维列向量, $A = \alpha\beta^T$, 且 α 与 β 正交.

(1) 求 A 的特征值.

(2) 说明 A 不可对角化.

[思路] (1) α 与 β 正交 $\Leftrightarrow \beta^T \alpha = 0$, $A^2 = \alpha\beta^T \alpha\beta = 0 \Rightarrow$ 特征值全为 0.

(2) 反证法. 假定 $P^{-1}AP = 0, \Rightarrow A = 0$.

[答案] 特征值皆为 0.

例 13. \mathbf{A} 为三阶实对称矩阵, 特征值

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2, \lambda_1, \lambda_2$ 对应的特征向量为 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 求 \mathbf{A} , (或 \mathbf{A}^k).

[思路] 因实对称阵不同特征值对应特征向量正交

\Leftrightarrow 求 $\alpha_3 \Rightarrow P = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3), P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$ [答案] $\cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

例 14'. 3 阶矩阵 \mathbf{A} 的每一行元素之和为 3, 且

$$\mathbf{AB} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \textcircled{1} \text{证明 } \mathbf{A} \text{ 与对角阵相似;}$$

②求 \mathbf{A} , \mathbf{A}^{100} .

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \mathbf{P}^{-1} = 3 \begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{100} = 3^{100} \begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

例 15. 设 \mathbf{A} 为 3 阶方阵, $\mathbf{A}\alpha_1 = 0$, $\mathbf{A}\alpha_2 = 2\alpha_1 + \alpha_2$,

$$\mathbf{A}\alpha_3 = -\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3, \text{ 其中 } \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1) 证明 \mathbf{A} 相似于对角阵, 求此对角阵.

(2) 求 \mathbf{A} .

例 16. 设 A 为 3 阶方阵, 且 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是线性无关的列

向量, 满足
$$\begin{cases} A\alpha_1 = -\alpha_1 - 3\alpha_2 - 3\alpha_3 \\ A\alpha_2 = 4\alpha_1 + 4\alpha_2 + \alpha_3 \\ A\alpha_3 = -2\alpha_1 + 3\alpha_3 \end{cases}$$

1) 求 A 的特征值; 2) 求 $A^* - 6I$ 的秩.

例 13. 设 A 为 n 阶实矩阵, 若 A 有 n 个标准正交的特征向量, 证明 A 是对称矩阵.

[思路] 存在正交阵 C , 使 $C^{-1}AC = \Lambda$ (对角阵),

$$(C^{-1}AC)^T = C^{-1}A^T C = \Lambda.$$

例 6' 五元二次型 $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X}$ 的正惯性指数为 3, 且 $\mathbf{A}^2 + \mathbf{A} = 6\mathbf{I}$, 求二次型 f 经正交变换化为的标准形.

解: $\mathbf{A}^2 + \mathbf{A} = 6\mathbf{I}$, \mathbf{A} 可逆, 秩(\mathbf{A}) = 秩 f = 5

$\because \mathbf{A}^2 + \mathbf{A} = 6\mathbf{I}$, 可证 \mathbf{A} 的特征值为 $\lambda = 2$ 或 $\lambda = -3$

故 $f \xrightarrow{\mathbf{X} = \mathbf{C}\mathbf{Y}} 2y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_3^2 - 3y_4^2 - 3y_5^2$

例 10. 设三阶实对称矩阵 \mathbf{A} 的特征值 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 且 $\lambda_1 = 0$ 对应的特征向量为 $\alpha_1 = (-1, 1, 0)^T$, 求矩阵 \mathbf{A} .

[思路] 由对称阵不同特征值对应的特征向量正交求 α_2, α_3 , 构成 \mathbf{P} , 使 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \Lambda \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{P}\Lambda\mathbf{P}^{-1}$.

[答案]
$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

例 12. (1) \mathbf{A} 为 n 阶正交矩阵, 证明 \mathbf{A}^* 也是正交矩阵.

(2) \mathbf{A} 为实对称矩阵, $\mathbf{A}^2 + 6\mathbf{A} + 8\mathbf{I} = \mathbf{0}$, 证明 $\mathbf{A} + 3\mathbf{I}$ 是正交矩阵.

(3) \mathbf{A}, \mathbf{B} 为 n 阶正交矩阵, $|\mathbf{A}| = -|\mathbf{B}|$, 证明 $|\mathbf{A} + \mathbf{B}| = 0$.

例 13. 设 A 为 n 阶实矩阵, 若 A 有 n 个标准正交的特征向量, 证明 A 是对称矩阵.

[思路] 存在正交阵 C , 使 $C^{-1}AC = \Lambda$ (对角阵),

$$(C^{-1}AC)^T = C^{-1}A^T C = \Lambda.$$

例 15. \mathbf{A} 为 n 阶正定矩阵, \mathbf{B} 为 n 阶反对称矩阵,
证明 $\mathbf{A} - \mathbf{B}^2$ 是正定矩阵.

[思路] 对 $\forall \mathbf{X} \neq 0$, 要证 $g(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^T (\mathbf{A} - \mathbf{B}^2) \mathbf{X} > 0 \Rightarrow$ 证
 $-\mathbf{X}^T \mathbf{B}^2 \mathbf{X} \geq 0$.

例 16. 设 \mathbf{A} 为 $m \times n$ 矩阵, \mathbf{I} 为 n 阶单位矩阵, 证明
 $\mathbf{I} + \mathbf{A}^T \mathbf{A}$ 为正定矩阵.

[思路] 先证 $\mathbf{I} + \mathbf{A}^T \mathbf{A}$ 为 n 阶对称阵

\Rightarrow 再证 $\forall \mathbf{X} \neq \mathbf{0}, f = \mathbf{X}^T (\mathbf{I} + \mathbf{A}^T \mathbf{A}) \mathbf{X} > 0$.

八、(5分)

已知 A 是实反对称矩阵(即满足 $A^T = -A$), 试证 $E - A^2$ 为正定矩阵, 其中 E 是单位矩阵.

WPS PDF编辑试用

上页

下页

返回

16 设 α 是实数 n 维非零列向量, E 为 n 阶单位矩阵,
 $A = E - [2 / (\alpha^T \alpha)] \alpha \alpha^T$,

- 1) 计算 A^T , 并回答 $(kE - A)$ 能否相似于一个对角阵?
并说明理由, 其中 k 为常数;
- 2) 计算 A^2 , 并回答 $(kE - A)$ 是否可逆? 并说明理由,
其中 $k \neq \pm 1$;
- 3) 给出 $(E - 2\alpha\alpha^T)$ 为正交矩阵的充分必要条件.

解: 1) 计算 $A^T = A$, 从而可以证明 A 是实对称阵, 于是
 $(kE - A)$ 是实对称阵, 所以可以对角化.

2) 计算得 $A^2 = E$, 则 A 的特征值只取 ± 1 . 而 $k \neq \pm 1$,
即 $|kE - A| \neq 0$, 或 $(kE - A)$ 是可逆的.

3) $(E - 2\alpha\alpha^T)$ 为正交矩阵的充分必要条件是 $\alpha^T \alpha = 1$.