

课程编号：A073003

北京理工大学 2011-2012 学年第一学期

线性代数 B 试题 A 卷

班级 _____ 学号 _____ 姓名 _____ 成绩 _____

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
签名											

一、(10 分) 已知 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, 求 $\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^{-1}$.

二、(10 分) 已知矩阵 A, X 满足 $A^*XA = 2XA - 8I$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, A^* 是 A 的伴随矩阵, I 为三阶单位方阵, 求 X 。

三、(10 分) 求 a, b 对为何值时, 下列线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + (a-1)x_3 = b \end{cases}$$

有唯一解? 无解? 有无穷多解? 在有解时求其全部解, 当有无穷多解时, 用基础解系表示。

四、(10 分) 已知向量组

$$\alpha_1 = (1, 2, a, -2)^T, \alpha_2 = (2, 1, 2a, 2)^T, \alpha_3 = (3, 4, 4a-1, -2)^T, \alpha_4 = (a, 1, 1, 2a-2)^T,$$

其中 a 为常数, 求向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的秩和一个极大无关组;

五、(10 分) 已知 \mathbf{R}^3 的两个基: $\alpha_1 = (1, 1, 1)^T, \alpha_2 = (0, 1, 1)^T, \alpha_3 = (0, 0, 1)^T$,

$$\beta_1 = (1, 0, 1)^T, \beta_2 = (0, 0, -1)^T, \beta_3 = (1, 2, 0)^T。$$

(1) 求基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵;

(2) 求向量 $\alpha = (3, 2, 1)^T$ 关于基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的坐标。

六、(10 分) 设 A 是 3 阶方阵, 它的 3 个特征值分别为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 2$, $B = A^3 - 5A^2$, 求 $|B|$ 。

七、(10 分) 已知向量组

$$\alpha_1 = (0, 0, 3)^T, \alpha_2 = (0, 2, 3)^T, \alpha_3 = (1, 2, 3)^T$$

用 Schmidt 正交化方法, 构造一组与 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 等价的标准正交向量组。

八、(10 分) 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ 用正交变换将它化为标准形, 并给出所用的正交变换。

九、(10 分) (1) 证明: 若 A 、 B 相似, 则 A 、 B 有相同的特征多项式;
(2) 举一个二阶矩阵的例子说明 (1) 的逆命题不成立。

十、(10 分) A 为三阶实对称矩阵, 设 $r(A) = 2$, 且 $A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

- (1) 求 A 的特征值和特征向量;
- (2) 求矩阵 A 。