武汉大学 2011-2012 学年第一学期

《高等数学 B1》考试试卷（A 卷）

一、　计算题：（每题 8 分，共 56 分）

1. 设$\begin{cases} x = \arcsin\sqrt{1-t^2} \\ y = 1+t^2 \end{cases}$，求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

2. 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - e^{\sin x}}{(x+x^2)\ln(1+x)\arcsin x}$.

3. 已知$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)^x = \int_a^{+\infty} 2xe^{-2x}dx$，求常数$a$的值。负号

4. 计算不定积分$\int\dfrac{dx}{\sqrt{ax+b}+d}(a\neq 0)$常数C。

5. 求定积分$\int_0^1 x(1-x^4)^{\frac{3}{2}}dx$.

6. 求解常微分方程$\dfrac{dy}{dx} = x^3y^3 - xy$。

7、设$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{\int_x^{2x} e^{t^2}dt}{x}, & x\neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$，求$a$的值使得$\varphi(x)$在$x=0$处连续，并用导数定义求$\varphi'(0)$.

二、(5 分) 设 $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)\sin\dfrac{n\pi}{2}$, 证明数列$\{a_n\}$没有极限。

三、(10 分) 设$y=y(x)$满足微分方程$y''-3y'+2y=2e^x$，且其图形在点$(0,1)$处的切线与曲线$y=x^2-x+1$在该点的切线重合，求$y=y(x)$.

四、(11 分)已知函数$y=\dfrac{x-1}{x^2+1}$，求函数的增减区间，凹凸区间，极值、拐点和渐近线。

五、(10 分) 求曲线$y=e^x$，$y=\sin x$, $x=0$, $x=1$所围成的平面图形的面积S，并求该平面图形绕x轴旋转一周所得的旋转体体积。

六、(8 分)设$f(x), g(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内具有二阶导数且存在相等的最大值，$f(a)=g(a)$，$f(b)=g(b)$，证明：存在$\xi\in(a,b)$，使得$f''(\xi)=g''(\xi)$.

武汉大学 2011-2012 学年第一学期

《高等数学 B1》考试试卷（A 卷标答）

一、　计算题：（每题 8 分，共 56 分）

1. 解：$\frac{dy}{dx}=-2t\sqrt{1-t^2}$，$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})\frac{dt}{dx}=\frac{-2\sqrt{1-t^2}+\frac{2t^2}{\sqrt{1-t^2}}}{-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}}=2-4t^2$

2. 解：$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{(x+x^2)\ln(1+x)\arcsin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\sin x}(e^{x-\sin x}-1)}{(x+x^2)\ln(1+x)\arcsin x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^{x-\sin x}-1}{(x+x^2)x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{(x+x^2)x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2+4x^3}=\frac{1}{6}.$$

3. 解：左$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2a}{x+a}\right)^x=e^{-2a}$，右$=-\int_a^{+\infty}xde^{-2x}=-xe^{-2x}\big|_a^{+\infty}+\int_a^{+\infty}e^{-2x}dx$

$=ae^{-2a}-\frac{1}{2}\int_a^{+\infty}de^{-2x}=ae^{-2a}+\frac{1}{2}e^{-2a}$，于是由 $e^{-2a}=e^{-2a}(a+\frac{1}{2})$ 可得 $a=\frac{1}{2}$。

4．解：令 $t=\sqrt{ax+b}+d$，则 $x=\frac{t^2-b}{a}$，$dx=\frac{2tdt}{a}$，代入原式得，

$$\int\frac{1}{t+d}\frac{2tdt}{a}=\frac{2}{a}\int\frac{t}{t+d}dt=\frac{2}{a}\int(1-\frac{d}{t+d})dt=\frac{2}{a}t-\frac{2d}{a}\ln|t+d|+C$$
$$=\frac{2}{a}\sqrt{ax+b}-\frac{2d}{a}\ln(\sqrt{ax+b}+d)+C$$

5．设 $x^2=\sin t$，则 $x=0$ 时，$t=0$，$x=1$ 时 $t=\frac{\pi}{2}$，

原式$=\frac{1}{2}\int_0^1(1-x^4)^{\frac{3}{2}}dx^2=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 tdt=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4\cdot2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{32}.$

6. 设 $z=y^{-2}$，则 $\frac{dz}{dx}=-2y^{-3}\frac{dy}{dx}$，原方程变为 $-\frac{1}{2}\frac{dz}{dx}=-xz+x^3$。这是一阶线性微分方程，由常数变易法或公式可得 $z=Ce^{x^2}+x^2+1$，将 $z=y^{-2}$ 代回可得 $y^{-2}=Ce^{x^2}+x^2+1$。

7、解：$\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_x^{2x}e^{t^2}dt}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{4x^2}\cdot2-e^{x^2}}{1}=1$，因此 $a=1$ 时 $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

$$\varphi'(0)=\lim_{x\to0}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\int_x^{2x}e^{t^2}dt}{x}-1}{x}=\frac{\int_x^{2x}e^{t^2}dt-x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2e^{4x^2}-e^{x^2}-1}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{16xe^{4x^2}-2xe^{x^2}}{2}=0$$

二、证：设 k 为正整数，若 $n=4k$，则 $a_{4k}=(1+\frac{1}{4k})\sin\frac{4k\pi}{2}=0,$ 若 $n=4k+1$，则 $a_{4k+1}=(1+\frac{1}{4k+1})\sin\frac{(4k+1)\pi}{2}=1+\frac{1}{4k+1}\to 1(k\to\infty),$ 因此 $\{a_n\}$ 没有极限。

三、解:微分方程的特征方程为 $r^2-3r+2=0$，解得 $r_1=1,r_2=2$，设特解为 $y^*=Cxe^x$，代入方程解得 $C=-2$，因此方程通解为 $y=C_1e^{2x}+C_2e^x-2xe^x$，由初始条件 $y(0)=1$，和 $y'(0)=(2x-1)|_{x=0}=-1$，解得 $C_1=0,C_2=1,$ 即 $y=(1-2x)e^x$。

四、解：定义域为 $(-\infty,+\infty)$.…1 分

$y'=\frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$，得驻点 $x_1=\sqrt{2}+1,x_2=-\sqrt{2}+1$

$y''=\frac{2(x^3-3x^2-3x+1)}{(x^2+1)^3}=\frac{2(x+1)(x^2-4x+1)}{(x^2+1)^3}=0$，得 $x_3=-1,x_{4,5}=2\pm\sqrt{3}$

列表讨论如下：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,-\sqrt{2}+1)$	$-\sqrt{2}+1$	$(-\sqrt{2}+1,2-\sqrt{3})$	$2-\sqrt{3}$	$(2-\sqrt{3},\sqrt{2}+1)$	$\sqrt{2}+1$
y'	$-$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	0
y''	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
y	↘		↘	极小点，$\frac{-\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}}$	↗	↗	↗	极大点，$\frac{\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}$

$(\sqrt{2}+1,$ $2+\sqrt{3})$	$2+\sqrt{3}$	$(2+\sqrt{3},+\infty$
$-$	$-$	$-$
$-$	0	$+$
$\searrow$		$\searrow$

单调减区间为$(-\infty,-\sqrt{2}+1),(\sqrt{2}+1,+\infty)$，单调增区间为$(-\sqrt{2}+1,\sqrt{2}+1)$，极大值点为$x=\sqrt{2}+1$，极大值为$\dfrac{\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}$，极小点$x=-\sqrt{2}+1$，极小值$\dfrac{-\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}}$，凸区间为 $(-1,2-\sqrt{3})$ 和 $(2+\sqrt{3},+\infty)$，凹区间为$(-\infty,-1)$和$(2-\sqrt{3},2+\sqrt{3})$，无垂直渐近线，水平渐近线为$y=0$.

五、解：图形面积为

$$S=\int_0^1(e^x-\sin x)dx=e^x+\cos x\Big|_0^1=e+\cos 1-1-1=e-2+\cos 1,$$

旋转体体积为

$$V=\pi\int_0^1(e^{2x}-\sin^2 x)dx=\pi[\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x]_0^1=\pi[\frac{1}{2}(e^2+\frac{1}{2}\sin 2)-1]。$$

六、设$h(x)=f(x)-g(x)$，则$h(a)=h(b)=0$，设$f(x),g(x)$在(a,b)内的最大值M分别在$\alpha\in(a,b),\beta\in(a,b)$取得。当$\alpha=\beta$时，取$\eta=\alpha$，则$h(\eta)=0.$当$\alpha\neq\beta$时，$h(\alpha)=f(\alpha)-g(\alpha)=M-g(\alpha)>0,\ h(\beta)=f(\beta)-M<0,$由介值定理，存在介于$\alpha$和$\beta$之间的点$\eta$使得$h(\eta)=0.$综上，存在$\eta\in(a,b)$使得$h(\eta)=0.$因此由罗尔定理知存在$\xi_1\in(a,\eta),\xi_2\in(\eta,b),$使得$h'(\xi_1)=h'(\xi_2)=0$。再由罗尔定理可知存在$\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$使得$h''(\xi)=0$，即$f''(\xi)=g''(\xi)$。