

课程编号: A073003

北京理工大学 2009-2010 学年第二学期

线性代数 B 试题 B 卷

班级 _____ 学号 _____ 姓名 _____ 成绩 _____

一、(10 分) 设 A 是三阶矩阵, A^* 是其伴随矩阵, 已知 $|A| = 4$, 求行列式 $\left| \frac{1}{4}A^* - (4A)^{-1} \right|$ 的值。

二、(10 分) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, B 满足方程 $A^{-1}BA = 6A + BA$, 求 B 。

三、(10 分) 已知向量 $\alpha_1 = (-2, 1, 0, 3)$, $\alpha_2 = (1, -3, 2, 4)$, $\alpha_3 = (3, 0, 2, -1)$, $\alpha_4 = (2, -2, 4, 6)$,

(1) 求向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的秩和一个极大无关组;

(2) 用所求的极大无关组线性表出剩余向量。

四、(10 分) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 是 \mathbf{R}^3 的两组基, 且由基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 到 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的过渡矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 。

渡矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 。

(1) 如果 α 在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标为 $(2, -1, 3)$, 求 α 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标;

(2) 如果 $\alpha_1 = (1, 1, 0)^T$, $\alpha_2 = (1, 0, -1)^T$, $\alpha_3 = (0, -1, 1)^T$, 求基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 。

五、(10 分) 求齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

的解空间的一个标准正交基。

六、(10 分) 设有线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

问: λ 取何值时, 此方程组有唯一解? 无解? 有无穷多解? 并在有无穷多解时求通解。

(用导出组的基础解系表示通解)

七、(10 分) 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$, 求可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵。

八、(10 分) 已知实二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

(1) 求一正交变换 $X = QY$, 将二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为标准形;

(2) 判断二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 是否正定。

九、(10 分) 已知 A 是 n 阶实对称矩阵, 且 $A^2 = A$ 。

(1) 证明存在正交矩阵 Q , 使得

$$Q^{-1}AQ = \text{diag} \{1, 1, \dots, 1, 0, \dots\}$$

(2) 若 $r(A)=r$, 则求 $\det(A-2I)$ 。

十、(10 分) 已知三阶矩阵 A 的第一行是 (a, b, c) , a, b, c 不全为零, 矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & k \end{pmatrix}$

(k 为常数), 且 $AB = 0$, 求线性方程组 $AX = 0$ 的通解。