

2003~2004 学年第二学期《高等数学》期末考试试题 A 卷 (216 学时)

专业班级_____学号_____姓名_____

一、填空题 (每小题 2 分, 共 8 分)

(1) 设 S 为: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的外侧, 则 $\oiint_S xdydz + \cos ydzdx + dx dy =$ _____。

(2) 设函数 $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ 在点 $M(1, 2, -2)$ 处的梯度 $\text{gradu}|_M =$ _____,
 $\text{div}(\text{gradu})|_M =$ _____。

(3) 设周期为 4 的偶函数 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上的表达式为 $f(x) = x$, 它的傅里叶级数的和函数为 $s(x)$, 则 $s(-5) =$ _____。

(4) 顶点在原点, 准线为 $\begin{cases} x = h \\ z^2 - 2y^2 = 1 \end{cases}$ 的锥面方程为_____。

二、选择题 (每小题 2 分, 共 8 分)

(1) () 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n}}{n4^n}$ 的收敛域为:

- A. $(0, 4)$ B. $(0, 4]$ C. $[0, 4)$ D. $[0, 4]$

(2) () 在曲线 $x = t, y = -t^2, z = t^3$ 的所有切线中, 与平面 $x + 2y + z = 4$ 平行的切线

- A. 只有一条; B. 只有 2 条; C. 至少有 3 条 D. 不存在

(3) () $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} (x^2 + y^2)e^{-(x+y)} =$

- A. 0 B. 1 C. -1 D. 不存在

(4) () 直线 $\frac{x-1}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z+5}{1}$ 与直线 $\begin{cases} x-y=6 \\ 2y+z=3 \end{cases}$ 的交角为:

- A. $\frac{\pi}{6}$; B. $\frac{\pi}{4}$; C. $\frac{\pi}{3}$; D. $\frac{\pi}{2}$

三、计算下列各题 (每小题 7 分, 共 28 分):

(1) $I = \iint_D e^{\frac{y}{x+y}} dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | x + y \leq 1, 0 \leq x, 0 \leq y\}$ 。

(2) 设 $I = \iiint_{\Omega} f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) dx dy dz$, 其中 $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq t^2\}$, $f(x)$ 在

$[0, 1]$ 上连续, $f(0) = 0, f'(0) = 1$, 求极限: $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{I}{\pi t^4}$ 。

(3) 设方程 $z + xy = f(xz, yz)$ 确定可微函数 $z = z(x, y)$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 。

(4) 求微分方程 $y'' + 3y' + 2y = 4e^{-2x}$ 的通解。

四、(10 分) 讨论函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ 在 $(0, 0)$ 处的连续性、可

导性、可微性。

五、(10 分) 已知 $\varphi(\pi) = 1$ ，试确定 $\varphi(x)$ ，使曲线积分 $I = \int_A^B (\sin x - \varphi(x)) \frac{y}{x} dx + \varphi(x) dy$ 与路径无关，并求当 A, B 两点分别为 $(1, 0)$ 及 (π, π) 时这个积分的值。

六、(10 分) 设 Σ 为平面 $y + z = 5$ 被柱面 $x^2 + y^2 = 25$ 所截得的部分，计算曲面积分：

$$I = \iint_{\Sigma} (x + y + z) ds$$

七、(10 分) 求曲面 $x + 2y - 1 = 0$ 和 $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ 的交线上离原点最近的点。

八、(6 分) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，试研究 $\int_a^b dx \int_a^b [f(x) - f(y)]^2 dy$ ，从而证明不等式

$$\left[\int_a^b f(x) dx \right]^2 \leq (b - a) \int_a^b f^2(x) dx, \text{ 此外仅当 } f(x) \text{ 为常数时等号才成立。}$$

九、(10 分) 求过点 $M(2, 1, 3)$ 且与直线 $\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ 垂直相交的直线方程。