例 **11.** $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ bc & ac & ab \end{vmatrix} = 0$，且 a, b, c 互异，则 $ab + ac + bc =$ ________.

[方法]　第 **1** 行的 $(a+b+c)$ 倍加第 **3** 行上，化为范德蒙行列式.

配凑是重要的，不易的，关键的

例 1．填空题：

（1）设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，且 $n\geq 2$ 为整数，则

$$\mathbf{A}^n-2\mathbf{A}^{n-1}=\underline{\qquad\qquad}.$$

［方法］ 计算 $\mathbf{A}^2=2\mathbf{A}$，则 $\mathbf{A}^{n-2}(\mathbf{A}^2-2\mathbf{A})=\mathbf{0}$.

（2）$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$为n阶方阵$|\mathbf{A}|=1$, $|\mathbf{B}|=2$，且$\mathbf{A}+\mathbf{B}$可逆, 则$|B(I+BA^{-1})^{-1}(A+B)|=$________.

［方法］ $(\mathbf{I}+\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1})^{-1}=((\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{A}^{-1})^{-1}=\mathbf{A}(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{-1}$.

上页 下页 返回

（4）$\mathbf{A}$ 为 n 阶方阵 $|\mathbf{A}|=2$，则 $|(2\mathbf{A})^{-1}+\mathbf{A}^*|=$____.

［方法］ 利用 $\mathbf{A}^*=|\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1}=2\mathbf{A}^{-1}$ 代入.

（5）设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,0,-1)^T$，矩阵 $\mathbf{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$，$n$ 为正整数，

则 $|a\mathbf{I}-\mathbf{A}^n|=$________.

［方法］ 计算 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}=2$, $\mathbf{A}^2=2\mathbf{A}$，递推得

$$\mathbf{A}^n=2^{n-1}\mathbf{A}.$$

例 2．填空题

（1）设三阶矩阵

$\mathbf{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)$, $\mathbf{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2)$, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 为三维列向量，$|\mathbf{A}|=2,|\mathbf{B}|=3$，则$|2\mathbf{A}-5\mathbf{B}|=$**-99**

（2）设四阶方阵$\mathbf{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)$, $\mathbf{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$是四维列向量，$|\mathbf{A}|=2$, $|\mathbf{B}|=3$,

则$|(\boldsymbol{\alpha}_1, 2\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2, 3\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)|=$________.

例 6． $\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$为n阶方阵

（1）设$\mathbf{A}^2+3\mathbf{A}+2\mathbf{I}=\mathbf{0}$，证明$\mathbf{A}+4\mathbf{I}$可逆，

求$(\mathbf{A}+4\mathbf{I})^{-1}$.

（2）设$\mathbf{AB}+\mathbf{A}+3\mathbf{B}+2\mathbf{I}=\mathbf{0}$，求$(\mathbf{A}+3\mathbf{I})^{-1}$.

[方法]（1）由条件得$(\mathbf{A}+4\mathbf{I})(\mathbf{A}-\mathbf{I})=-6\mathbf{I}$.

（2）由条件得$(\mathbf{A}+3\mathbf{I})(\mathbf{B}+\mathbf{I})=\mathbf{I}$.

[答案]（1）$\frac{1}{6}(\mathbf{I}-\mathbf{A})$.　（2）$\mathbf{B}+\mathbf{I}$.

求逆与求解是两回事，需注意

例 10. 设四阶矩阵 $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3 & 4\\ 0 & 2 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$,

且 $\mathbf{A}(\mathbf{I}-\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B})^T\mathbf{C}^T=\mathbf{I}$，求 $\mathbf{A}$.

[方法]　化简方程式为 $\mathbf{A}(\mathbf{C}-\mathbf{B})^T=\mathbf{I}$.

-1
2 -1
-1 2 -1
0 -1 2 -1

例 13. （1）设$\mathbf{B}$，$\mathbf{C}$为非零的n阶矩阵，$\mathbf{BC}^T=\mathbf{0}$，

$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{B}\\ \mathbf{C}\end{pmatrix}$，求$\left|\mathbf{AA}^T\right|$.

[方法] 分块乘法 $\mathbf{AA}^T=\begin{pmatrix}\mathbf{BB}^T & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{CC}^T\end{pmatrix}$，且$|\mathbf{C}|=0$或$|\mathbf{B}|=0$.

[答案] $\mathbf{0}$。

（2）设n阶方阵为$\mathbf{A}$，$|\mathbf{A}|=2$，b,c为实数，$\boldsymbol{\alpha}$为n维列向量，$\boldsymbol{\beta}$为n维行向量，且$\begin{vmatrix}\mathbf{A} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\beta} & b\end{vmatrix}=0$，求$\begin{vmatrix}\mathbf{A} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\beta} & c\end{vmatrix}$.

［方法］ $2(c-b)$.

［答案］ $$\begin{vmatrix}\mathbf{A} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\beta} & c\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\mathbf{A} & \boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}\\ \boldsymbol{\beta} & b+c-b\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\mathbf{A} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\beta} & b\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{0}\\ \boldsymbol{\beta} & c-b\end{vmatrix}$$

例 20．设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶方阵，满足 $\mathbf{A}^2=\mathbf{I}$，又 n 阶矩阵

$\mathbf{B}=(A_{ij})_{n\times n}$，其中 A_{ij} 是 $|\mathbf{A}|$ 中的元素 a_{ij} 的代

数余子式，证明 $\mathbf{B}^2=\mathbf{I}$.

［方法］由 $\mathbf{B}^T=(A_{ij})_{n\times n}^T=\mathbf{A}^*$ 和 $\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}$，则

$$(\mathbf{B}^T)^2=|\mathbf{A}|^2(\mathbf{A}^{-1})^2=\mathbf{I}.$$

例 23. 设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶方阵，$r(\mathbf{A})=1$，证明

（1）$\mathbf{A}$ 可以表为一列 n 维向量与一行 n 维向量之积

（2）$\mathbf{A}^2=k\mathbf{A}$，k 为数。

[方法] （1）存在可逆阵 $\mathbf{P},\mathbf{Q}$，使 $\mathbf{PAQ}=\left(\begin{array}{c|c}1 & \mathbf{0}\\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{array}\right)$，

得 $\mathbf{A}=(\boldsymbol{\alpha}\mid\mathbf{P}_1)\left(\begin{array}{c|c}1 & \mathbf{0}\\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}\boldsymbol{\beta}\\ \hline \mathbf{Q}_1\end{array}\right)=\boldsymbol{\alpha\beta}$，其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 为一列 n 维向量，

$\boldsymbol{\beta}$ 为一行 n 维向量.

（2）$\mathbf{A}^2=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta\alpha})\boldsymbol{\beta}=k\boldsymbol{\alpha\beta}=k\mathbf{A}$.

一个重要题型

例1: 设$AB=aA+bB$,其中a, b为非零常数,证明A, B可交换.

解: 由$AB=aA+bB$可得,

$$(A-bI)(B-aI)=abI,\text{即}\frac{1}{ab}(A-bI)(B-aI)=I$$

于是 $$\frac{1}{ab}(B-aI)(A-bI)=I$$

由此可得 $$BA=aA+bB=AB.$$

注: 矩阵乘积的可交换性可利用逆矩阵的定义来证明.

上页 下页 返回

例2：设 A, B是3阶矩阵，满足$2A^{-1}B=B-4E$. (1)求$(A-2E)^{-1}$；　(2)证明$AB=BA$.

证：(1)条件等式两边左乘矩阵A，

得　$2B=AB-4A$，即$4A-AB+2B=O$.

进而有 $4A-8E-(A-2E)B=-8E$, $4(A-2E)-(A-2E)B=-8E$

故有 $(A-2E)(4E-B)=-8E$ $(A-2E)\left[-\frac{1}{8}(4E-B)\right]=E$

所以$(A-2E)^{-1}=-\frac{1}{8}(4E-B)$

(2)由(1)有$(A-2E)\left[-\frac{1}{8}(4E-B)\right]=-\frac{1}{8}(4E-B)(A-2E)$

化简整理可得$AB=BA$.

上页　下页　返回

例 **6**. 填空题

（**1**）n 阶方阵 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 相似，$|2\mathbf{I}+\mathbf{A}|=0$，则 $(2\mathbf{B})^{-1}$ 的一个特征值为________.

[思路] $\lambda_{(\mathbf{A})}=-2$, $\because\ \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{B}$, $(2\mathbf{B})^{-1}=\frac{1}{2}\mathbf{B}^{-1}$ 的特征值为

$$\frac{1}{2}\lambda_{(\mathbf{A})}=-\frac{1}{4}.$$

（3） $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，已知矩阵 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 相似，则秩 $(\mathbf{A}-2\mathbf{I})$ 与秩 $(\mathbf{A}-\mathbf{I})$ 的和为（ **C** ）

（A）2，（B）3，（C）4，（D）5.

例 7. （1）设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 2\end{pmatrix}$，$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & -2\end{pmatrix}$，

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix},\quad \mathbf{D}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix},$$

下面结论正确的是（ **C** ）.

（A）**A** 与 **B** 相似.　　（B）**A** 与 **C** 相似

（C）**A** 与 **D** 相似　　（D）**C** 与 **D** 相似

（2）设 $\mathbf{A}$ 是 n 阶实对称矩阵，$\mathbf{P}$ 为 n 阶可逆矩阵，已知 n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\mathbf{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量，则 $(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P})^T$ 属于特征值 λ 的特征向量是（　）

（A）$\mathbf{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$　（B）$\mathbf{P}^T\boldsymbol{\alpha}$　（C）$\mathbf{P}\boldsymbol{\alpha}$　（D）$(\mathbf{P}^{-1})^T\boldsymbol{\alpha}$

[思路]　$\because \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha},\ (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P})^T(\mathbf{P}^T\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{P}^T\mathbf{A}^T(\mathbf{P}^{-1})^T\mathbf{P}^T\boldsymbol{\alpha}$

$$= \mathbf{P}^T\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{P}^T\lambda\boldsymbol{\alpha} = \lambda(\mathbf{P}^T\boldsymbol{\alpha})$$

[结论]若 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 皆为实对称阵，且特征值相同，则 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 相似.

例 **8**． n阶可逆矩阵$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$相似。

（**1**）证明$\mathbf{A}^*$与$\mathbf{B}^*$相似

（**2**）若$\mathbf{A}$的特征值为$\lambda_i, i=1,2,\cdots,n,$ 求$|\mathbf{B}^*|$.

例 9'. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -k & -1 & k \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$，$\mathbf{k}$ 为何值有 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\Lambda$，

求 $\mathbf{P},\Lambda$.

例 **10**. 已知$\xi=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$是$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}$的一个特征向量.

（**1**）试确定参数a,b及特征向量ξ对应的特征值.

（**2**）问**A**能否相似于对角矩阵？说明理由.

[思路]　（**1**）用定义$\mathbf{A\xi}=\boldsymbol{\lambda\xi}$.

（**2**）$|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}|=(\lambda+1)^3$，求$\lambda=-1$对应的线性无关向量个数.　　[答案]（**1**）$\lambda=-1,\ a=-3,b=0$.

例 **10’**．**A**可对角化，$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&0&1\\x&1&y\\1&0&0\end{pmatrix}$，则$x+y=$_____.

例 11．设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ x & 4 & y \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$，已知 **A** 有三个线性无关的特征向量，$\lambda=2$ 是 **A** 的二重特征值，试求可逆矩阵 **P**，使得 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ 为对角形矩阵。

［思路］ 由已知：**A** 可对角化 $\Rightarrow$ 矩阵 $(2\mathbf{I}-\mathbf{A})$ 的秩为 **1**，$\Rightarrow x=2,\ y=-2$.

例 12. 设$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$为非零的$n$维列向量，$\mathbf{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$，且$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$ 正交.

（1）求 A 的特征值.

（2）说明 A 不可对角化.

[思路] （1）$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$正交$\Leftrightarrow \boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}=0,\ \mathbf{A}^2=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}\Rightarrow$特征值全为 0.

（2）反证法. 假定$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{0},\ \Rightarrow \mathbf{A}=\mathbf{0}$.

[答案] 特征值皆为 0.

例 **13**．**A** 为三阶实对称矩阵，特征值

$\lambda_1=1,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=2, \lambda_1, \lambda_2$ 对应的特征向量为 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，

$\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，求 **A**，（或 $\mathbf{A}^k$）．

[思路] 因实对称阵不同特征值对应特征向量正交

$\Leftrightarrow$ 求 $\alpha_3 \Rightarrow P=(\alpha_1\alpha_2\alpha_3),\ P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$ [答案]．$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3&-1&0\\-1&3&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

例 **14'**．**3** 阶矩阵 **A** 的每一行元素之和为 **3**，且

$\mathbf{AB}=0$， $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\\ -2 & 0\end{pmatrix}$，①证明 **A** 与对角阵相似；

②求 **A**，$\mathbf{A}^{100}$.

$$\mathbf{A}=\mathbf{P}\begin{pmatrix}3 & & \\ & 0 & \\ & & 0\end{pmatrix}\mathbf{P}^{-1}=3\begin{pmatrix}-2 & 4 & -1\\ -2 & 4 & -1\\ -2 & 4 & -1\end{pmatrix}，\quad \mathbf{A}^{100}=3^{100}\begin{pmatrix}-2 & 4 & -1\\ -2 & 4 & -1\\ -2 & 4 & -1\end{pmatrix}$$

例 **15**． 设**A**为 3 阶方阵，$\mathbf{A}\alpha_1=0$，$\mathbf{A}\alpha_2=2\alpha_1+\alpha_2$，

$\mathbf{A}\alpha_3=-\alpha_1+3\alpha_2-\alpha_3$，其中 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

（**1**）证明**A**相似于对角阵，求此对角阵.

（**2**）求**A**.

例 **16**．设 **A** 为 **3** 阶方阵，且 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是线性无关的列

向量，满足 $\begin{cases} A\alpha_1 = -\alpha_1 - 3\alpha_2 - 3\alpha_3 \\ A\alpha_2 = 4\alpha_1 + 4\alpha_2 + \alpha_3 \\ A\alpha_3 = -2\alpha_1 + 3\alpha_3 \end{cases}$

1）求 **A** 的特征值；　　**2**）求 $\mathbf{A}^* - \mathbf{6I}$ 的秩.

例 13. 设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶实矩阵，若 $\mathbf{A}$ 有 n 个标准正交的特征向量，证明 $\mathbf{A}$ 是对称矩阵.

[思路]　存在正交阵 $\mathbf{C}$，使 $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}=\wedge$（对角阵），

$$(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C})^{T}=\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}^{T}\mathbf{C}=\wedge.$$

例 6’ 五元二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{AX}$ 的正惯性指数为 3，且 $\mathbf{A}^2+\mathbf{A}=6\mathbf{I}$，求二次型 f 经正交变换化为的标准形.

解：$\mathbf{A}^2+\mathbf{A}=6\mathbf{I}$， A 可逆，秩$(\mathbf{A})=$秩 $f=5$

$\because$ $\mathbf{A}^2+\mathbf{A}=6\mathbf{I}$，可证 $\mathbf{A}$ 的特征值为 $\lambda=2$ 或 $\lambda=-3$

故 $f \underline{\underline{\mathbf{X}=\mathbf{CY}}} 2y_1^2+2y_2+2y_3^2-3y_4^2-3y_5^2$

例 **10**．设三阶实对称矩阵 **A** 的特征值 $\lambda_1=0, \lambda_2=\lambda_3=1$ 且 $\lambda_1=0$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,1,0)^T$，求矩阵 **A**．

[思路]　由对称阵不同特征值对应的特征向量正交求 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$，构成 **P**，使 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\wedge \Rightarrow \mathbf{A}=\mathbf{P}\wedge\mathbf{P}^{-1}$.

[答案] $\mathbf{A}=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$

例 12. （1）$\mathbf{A}$ 为 n 阶正交矩阵，证明 $\mathbf{A}^*$ 也是正交矩阵.

（2）$\mathbf{A}$ 为实对称矩阵，$\mathbf{A}^2+6\mathbf{A}+8\mathbf{I}=0$，证明 $\mathbf{A}+3\mathbf{I}$ 是正交矩阵.

（3）$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$ 为 n 阶正交矩阵，$|\mathbf{A}|=-|\mathbf{B}|$，证明 $|\mathbf{A}+\mathbf{B}|=0$.

例 **13**．设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶实矩阵，若 $\mathbf{A}$ 有 n 个标准正交的特征向量，证明 $\mathbf{A}$ 是对称矩阵.

[思路] 存在正交阵 $\mathbf{C}$，使 $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}=\wedge$（对角阵），

$$(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C})^T=\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{C}=\wedge.$$

例 15. $\mathbf{A}$ 为 n 阶正定矩阵，$\mathbf{B}$ 为 n 阶反对称矩阵，

证明 $\mathbf{A}-\mathbf{B}^2$ 是正定矩阵.

[思路] 对 $\forall \mathbf{X} \neq 0$，要证 $g(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^T(\mathbf{A}-\mathbf{B}^2)\mathbf{X} > 0 \Rightarrow$ 证

$-\mathbf{X}^T\mathbf{B}^2\mathbf{X} \geq 0$.

例 16．设$\mathbf{A}$为$m\times n$矩阵，$\mathbf{I}$为n阶单位矩阵，证明

$\mathbf{I}+\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$为正定矩阵.

[思路]　先证$\mathbf{I}+\mathbf{A}^{T}\mathbf{A}$为$n$阶对称阵

$\Rightarrow$再证$\forall\mathbf{X}\neq\mathbf{0}$，$f=\mathbf{X}^{T}(\mathbf{I}+\mathbf{A}^{T}\mathbf{A})\mathbf{X}>0$.

八、（5分）

已知A是实反对称矩阵(即满足 $A^T=-A$),试证$E-A^2$为正定矩阵,其中E是单位矩阵.

16　设 α 是实数 n 维非零列向量， E 为 n 阶单位矩阵，

$A=E-[2/(\alpha^T\alpha)]\alpha\alpha^T$，

1）计算 A^T，并回答 $(kE-A)$ 能否相似于一个对角阵？并说明理由，其中 k 为常数；

2）计算 A^2，并回答 $(kE-A)$ 是否可逆？并说明理由，其中 $k\neq\pm1$；

3）给出 $(E-2\alpha\alpha^T)$ 为正交矩阵的充分必要条件.

解：1) 计算 $A^T=A$，从而可以证明 A 是实对称阵，于是 $(kE-A)$ 是实对称阵，所以可以对角化.

2）计算得 A^2=E，则 A 的特征值只取 ±1. 而 $k\neq\pm1$，即 $|kE-A|\neq0$，或 $(kE-A)$ 是可逆的.

3）$(E-2\alpha\alpha^T)$ 为正交矩阵的充分必要条件是 $\alpha^T\alpha=1$.