

课程编号: A073003

北京理工大学 2013-2014 学年第一学期
线性代数 B 试题 A 卷答案

一、(10 分) 已知 4 阶方阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 计算行列式 $|3A^* - 2I|$, 其中 A^* 是

A 的伴随矩。

解:

$$|3A^* - 2I| = |3|A|A^{-1} - 2AA^{-1}| = |2(3I - A)A^{-1}| = 2^4 |3I - A| |A^{-1}| = 2^4 \cdot 2^3 \cdot \frac{1}{2} = 64$$

更正: $|3A^* - 2I| = |6A^{-1} - 2AA^{-1}| = 2^4 |3I - A| |A^{-1}| = 2^6$

二、(10 分) 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ 和 X 满足 $2XA^{-1} = -BA^{-1} + X$,

求 X 。

解:

$$2XA^{-1} = -BA^{-1} + X \Rightarrow 2XA^{-1} - X = -BA^{-1} \Rightarrow XA - 2X = B \Rightarrow X(A - 2I) = B \\ \Rightarrow X = B(A - 2I)^{-1}$$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (A - 2I)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

所以

$$X = B(A - 2I)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

三、(10 分) 设有线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + (\lambda + 2)x_3 = 3 \\ x_1 + \lambda x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

问： λ 取何值时，此方程组（1）有唯一解；（2）无解；（3）有无穷解？并在有无穷多解时求通解。

解：方程的系数行列式为

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & \lambda + 2 \\ 1 & \lambda & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & \lambda \\ 0 & \lambda - 2 & -3 \end{vmatrix} = -(\lambda - 3)(\lambda + 1)$$

讨论：（1）当 $\lambda \neq 3, \lambda \neq -1$ 时，方程组有唯一解；

（2）当 $\lambda = -1$ 时，增广矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ ，方程组无解；

（3） $\lambda = 3$ 时， $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ，方程组有无穷多解，

基础解系为 $(-7, 3, 1)$ ，特解为 $(3, -1, 0)$ ，一般解 $k(-7, 3, 1) + (3, -1, 0)$

四、（10分）已知

$$\alpha_1 = (-2, 1, 0, 3)^T, \alpha_2 = (1, -3, 2, 4)^T, \alpha_3 = (3, 0, 2, -1)^T, \alpha_4 = (2, -2, 4, 6)^T$$

（1）求向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的秩和一个极大无关组；

（2）用所求的极大无关组线性表出剩余向量。

解：

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & -1 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以求向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的秩为3， $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为极大无关组，

$$\alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3.$$

五、(10 分) 已知 \mathbf{R}^3 的两个基: $\alpha_1 = (1, 1, 0)^T, \alpha_2 = (1, 0, 1)^T, \alpha_3 = (0, 1, 1)^T$,

$\beta_1 = (1, 2, 3)^T, \beta_2 = (2, 3, 4)^T, \beta_3 = (3, 4, 3)^T$ 。

(1) 求基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵;

(2) 求向量 $\alpha = (2, 0, 0)^T$ 关于基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的坐标。

$$\text{解: } P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^{-1} (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

坐标为:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{更正: } P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

六、(10 分) 已知 $\alpha_1 = (1, 1, 1)^T, \alpha_2 = (1, 1, 0)^T, \alpha_3 = (1, -1, 1)^T$, 把 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 化为欧氏空间 \mathbf{R}^3 的标准正交基。

解: 首先正交化, 令

$$\beta_1 = \alpha_2 = (1, 1, 0)^T,$$

$$\beta_2 = \alpha_1 - \frac{(\alpha_1, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 = (1, 1, 1)^T - (1, 1, 0)^T = (0, 0, 1)^T,$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2 = (1, -1, 1)^T - (0, 0, 1)^T = (1, -1, 0)^T$$

单位化

$$\eta_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)^T,$$

$$\eta_2 = (0, 0, 1)^T,$$

$$\eta_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)^T$$

七、(10 分) 证明：实对称矩阵的属于不同特征值的特征向量是正交的。

证明：设 λ_1, λ_2 是实对称矩阵 A 的任意两个不同的特征值，它们对应的特征向量分

别为 X_1, X_2 ，则有 $AX_1 = \lambda_1 X_1$ (1)

$AX_2 = \lambda_2 X_2$ (2)

下面要证 $X_1 \perp X_2$ ，也即 $X_2^T X_1 = 0$ ，为此，对 (2) 式两端同时取转置，得

$$\begin{aligned} X_2^T A^T &= \lambda_2 X_2^T \\ X_2^T A &= \lambda_2 X_2^T \end{aligned} \quad (3)$$

将上式两端同时右乘 X_1 ，得

$$X_2^T A X_1 = \lambda_2 X_2^T X_1$$

将 (1) 代入上式，得

$$\lambda_1 X_2^T X_1 = \lambda_2 X_2^T X_1$$

即

$$(\lambda_1 - \lambda_2) X_2^T X_1 = 0$$

又因为 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ，所以 $X_2^T X_1 = 0$ 。

八、(10 分) 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_1x_3$

(1) 用正交变换将它化为标准形并给出所用的正交变换；(2) 该二次型是否正定？

解： $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2(\lambda + 3)$

特征值 $\lambda = 2$ (二重), $\lambda = -3$

当 $\lambda = 2$ 时, $2I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

基础解系为 $\alpha_1 = (2, 0, 1)^T, \alpha_2 = (0, 1, 0)^T$

$$\lambda = -3 \text{ 时, } -3I - A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

基础解系为 $\alpha_3 = (1, 0, -2)^T$

单位化:

$$\eta_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}} \right)^T, \eta_2 = (0, 1, 0)^T, \eta_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{5}} \right)^T$$

取 $Q = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$, 则

$$Q^T A Q = \text{diag}(2, 2, -3)$$

(2) 不正定

九、(10 分) 设方程组
$$\begin{cases} x_1 + a_1 x_2 + a_1^2 x_3 = a_1^3 \\ x_1 + a_2 x_2 + a_2^2 x_3 = a_2^3 \\ x_1 + a_3 x_2 + a_3^2 x_3 = a_3^3 \\ x_1 + a_4 x_2 + a_4^2 x_3 = a_4^3 \end{cases}$$

(1) 证明: 若 a_1, a_2, a_3, a_4 两两不相等, 则此方程组无解;

(2) 设 $a_1 = a_3 = k, a_2 = a_4 = -k (k \neq 0)$, 且已知 β_1, β_2 是方程组的两个解, 其中

$\beta_1 = [-1, 1, 1]^T, \beta_2 = [1, 1, -1]^T$, 写出此方程组的通解。

(1) 证明: 方程组增广矩阵行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 \\ 1 & a_4 & a_4^2 & a_4^3 \end{vmatrix}$ 为范德蒙行列式,

当 a_1, a_2, a_3, a_4 两两不相等时, $D \neq 0$, 所以方程组增广矩阵的秩 $r(\bar{A}) = 4$, 而系数矩

阵的秩 $r(A) \leq \min(3, 4) < 4$, 故方程组无解。

(2) 当 $a_1 = a_3 = k, a_2 = a_4 = -k (k \neq 0)$, 原方程组等价于

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 + k^2 x_3 = k^3 \\ x_1 - kx_2 + k^2 x_3 = -k^3 \end{cases}$$

此时方程组系数矩阵的秩为 2，所以基础解系中只有一个解向量，令

$$X_0 = \beta_1 - \beta_2 = (-2, 0, 2)^T, X^* = \beta_1,$$

则方程组的通解为

$$X^* + kX_0, k \in R$$

(2) *当 $a_1 = a_3 = k, a_2 = a_4 = -k (k \neq 0)$ ，原方程组等价于

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 + k^2x_3 = k^3 \\ x_1 - kx_2 + k^2x_3 = -k^3 \end{cases}$$

将 $\beta_1 = [-1, 1, 1]^T$ 代入方程组中的第一个方程得 $-1 + k + k^2 = k^3$ ，即 $k^3 - k^2 - k + 1 = 0$

所以 $k = \pm 1$ 。当 $k = 1$ 时，方程组为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

其基础解系为 $X_0 = (1, 0, -1)^T$

当 $k = -1$ 时，方程组仍为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

其基础解系为 $X_0 = (1, 0, -1)^T$ 。令 $X^* = \beta_1$ ，则方程组的通解为

$$X^* + kX_0, k \in R$$

十、(10 分) α 为 3 维实单位列向量， I 为三阶单位矩阵，令 $B = \alpha\alpha^T$

(1) 证明： $B \neq 0$ ；

(2) 求 B^2 ；

(3) 求 B 相似对角矩阵；

(4) 求 $I - B$ 的秩。

(1) 证明：设 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ，由于 α 为单位列向量，所以 a_1, a_2, a_3 不同时为零，

$$B = \alpha \alpha^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} (a_1 \quad a_2 \quad a_3), \quad b_{11} = a_1^2, b_{22} = a_2^2, b_{33} = a_3^2 \text{ 不全为零, 故 } B \neq 0.$$

$$(2) \quad B^2 = \alpha \alpha^T \alpha \alpha^T = \alpha (\alpha^T \alpha) \alpha^T = \alpha \alpha^T = B$$

$$(3) \quad \text{由 } B\alpha = \alpha \alpha^T \alpha = \alpha \text{ 知 } 1 \text{ 是 } B \text{ 的一个特征值; 又 } 1 \leq r(B) \leq \min(r(\alpha), r(\alpha^T)) = 1,$$

$$\text{故 } r(B) = 1,$$

$$\text{所以 } 0 \text{ 是 } B \text{ 的二重特征值, 所以 } B \sim \text{diag}(0, 0, 1)$$

$$(4) \quad I - B \sim \text{diag}(1, 1, 0), \text{ 故 } r(I - B) = 2$$