武汉大学 2014-2015 学年第二学期期末考试高等数学 B2 答案

一、（8 分）设 $\vec{p}=2\vec{a}+\vec{b},\vec{q}=k\vec{a}+\vec{b}$，其中 $|\vec{a}|=1,|\vec{b}|=2$，且 $\vec{a}\perp\vec{b}$，问：

(1) k 为何值时，$\vec{p}\perp\vec{q}$？ (2) k 为何值时，以 $\vec{p},\vec{q}$ 为边的平行四边形面积为 6？

解 (1) 因 $\vec{p}\perp\vec{q}$，故 $\vec{p}\cdot\vec{q}=0$， 即 $(2\vec{a}+\vec{b})\cdot(k\vec{a}+\vec{b})=0$

$$2k|\vec{a}|^2+(2+k)\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=0$$

按 $|\vec{a}|^2=1,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=0,\ |\vec{b}|^2=4$，有 $2k+4=0$，得 $k=-2$ 　　4 分

(2) $|\vec{p}\times\vec{q}|=6$，而 $|\vec{\boldsymbol{p}}\times\vec{\boldsymbol{q}}|=|(2\vec{a}+\vec{b})\times(k\vec{a}+\vec{b})|=|(2-k)\vec{a}\times\vec{b}|=2|2-k|$

故 $|2-k|=3$， 得 $k=5$ 或 $k=-1$. 　　4 分

二.(8 分) 求函数 $u=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 沿曲线 $x=t,y=2t^2,z=-2t^4$ 在点 $M(1,2,-2)$ 的切线方向上的方向导数

解：曲线在点 M 处对应 $t=1$，在 M 点的切线方向为 $(1,4t,-8t)=(1,4,-8)$，方向余弦为 $\vec{l}=(\frac{1}{9},\frac{4}{9},-\frac{8}{9})$， 4 分

$$gradu|_M=\left(\frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},-\frac{xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},-\frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\Bigg|_M=\left(\frac{8}{27},-\frac{2}{27},\frac{2}{27}\right)$$

故方向导数为 $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}=-\dfrac{16}{243}$， 　　4 分

三、(6 分) 函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $z=f(x+y+z)$ 所确定，其中 f 二阶可导，且 $f'(u)\neq 1$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$。

解 $z_x=(1+z_x)f'$，$z_x=\dfrac{f'}{1-f'}=-1+\dfrac{1}{1-f'}$ 　(4 分)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{(1+z_x)f''}{(1-f')^2}=\frac{f''}{(1-f')^3} \qquad (2\text{ 分})$$

四、(8 分) 设 $u=f(x+y+z,xyz)$ 具有一阶连续偏导数，其中 $z=z(x,y)$ 由方程 $x^2+2ze^{y^2}=\sin z$ 所确定，求 $\mathrm{d}u$.

解: $\mathrm{d}u=(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)f_1+(yz\,\mathrm{d}x+xz\,\mathrm{d}y+xy\,\mathrm{d}z)f_2$

$2x\,\mathrm{d}x+2e^{y^2}\,\mathrm{d}z+4yze^{y^2}\,\mathrm{d}y=\cos z\,\mathrm{d}z$ 　　4 分

消去 $\mathrm{d}z$ 得：$\mathrm{d}u=\left[f_1+yzf_2+(f_1+xyf_2)\dfrac{2x}{\cos z-2e^{y^2}}\right]\mathrm{d}x$

$+\left[f_1+xzf_2+(f_1+xyf_2)\dfrac{4yze^{y^2}}{\cos z-2e^{y^2}}\right]\mathrm{d}y$ 　　4 分

五、(8 分) 求曲面 $z-e^z+2xy=3$ 在点 $M(1,2,0)$ 处的切平面和法线方程。

解: 设 $F(x,y,z)=z-e^z+2xy-3$，则 $F_x=2y,F_y=2x,F_z=1-e^z$， 　　4 分

故法向量 $\vec{n}|_M=\{F_x,F_y,F_z\}|_M=\{4,2,0\}$，所以切平面方程为

$4(x-1)+2(y-2)+0\cdot(z-0)=0$ 即 $2x+y=4$，

法线方程为$\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{0}$或者 $\begin{cases}\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{2}\\ z=0\end{cases}$ 4 分

六、（10 分）设$z=x^3+\alpha x^2+2\gamma xy+\beta y^2+\alpha\beta^{-1}(\gamma x+\beta y)$，试证：当$\alpha\beta\neq\gamma^2$时，函数$z$有一个且仅有一个极值，又若$\beta<0$，则该极值必为极大值。

证明 由$\begin{cases}z_x=3x^2+2\alpha x+2\gamma y+\alpha\gamma\beta^{-1}=0\\ z_y=2\gamma x+2\beta y+\alpha=0\end{cases}$，解得$x=0$或$x=\frac{-2}{3\beta}(\alpha\beta-\gamma^2)=\mu$ 5 分

$$D=\begin{pmatrix}z_{xx} & z_{xy}\\ z_{yx} & z_{yy}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6x+2\alpha & 2\gamma\\ 2\gamma & 2\beta\end{pmatrix},D|_{x=0}=4(\alpha\beta-\gamma^2),D|_{x=\mu}=4(\gamma^2-\alpha\beta)$$

在$\alpha\beta\neq\gamma^2$的条件下，以上二式中必有且仅有一式大于零，这说明函数z有且仅有一个极值。因为$z_{yy}=2\beta$，所以当$\beta<0$时，必为极大值。 5 分

七、(8 分)设$f(x,y)$连续，且满足$f(x,y)=x\sqrt{y}+\iint\limits_D f(u,v)dudv$，其中$D$为曲线$y=x^2,x=y^2$所围成的区域，求$f(x,y)$.

解： 设 $A=\iint\limits_D f(u,v)dudv$，则$A=\iint\limits_D (x\sqrt{y}+A)dxdy$，而

$$\iint\limits_D x\sqrt{y}dxdy=\int_0^1dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}}x\sqrt{y}dy=\frac{6}{55}$$ 4 分

而$\iint\limits_D Adxdy=A\int_0^1dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}}dy=\frac{1}{3}A$，所以$A=\frac{6}{55}+\frac{A}{3}\Rightarrow A=\frac{9}{55}$ ，

故$f(x,y)=x\sqrt{y}+\frac{9}{55}$ 4 分

八、(8 分) 设Ω是由锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$与半球面$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$围成的空间区域，S是Ω的整个边界的外侧，求曲面积分$\oiint\limits_S xdydz+ydzdx+zdxdy$.

解：由 Gauss 公式可知

$$\oiint\limits_S xdydz+ydzdx+zdxdy=\iiint\limits_\Omega(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dxdydz=3\iiint\limits_\Omega dxdydz$$ 4 分

用球坐标$x=r\cos\theta\sin\varphi,y=r\sin\theta\sin\varphi,z=r\cos\varphi$，可得

$$\iiint\limits_\Omega dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^R r^2\sin\varphi dr=\frac{2-\sqrt{2}}{3}\pi R^3,$$

所以$\oiint\limits_S xdydz+ydzdx+zdxdy=3\cdot\frac{2-\sqrt{2}}{3}\pi R^3=(2-\sqrt{2})\pi R^3$ 4 分

九、（10 分）求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$的收敛域与和函数.

解:令 $t=x^2$，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}t^n$的收敛半径为$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=1$，当$t=\pm1$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$收敛，所以原级数的收敛域为$[-1,1]$。 5 分

令$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}=xS(x), S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$，故$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\frac{1}{1+x^2}, |x|\le 1$，

$S(x)=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt=\arctan x$，$|x|\le 1$，故$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}=xS(x)=x\arctan x$，$|x|\le 1$

5 分

十、（10 分）确定常数λ，使得在右半平面$x>0$的单连通区域内，曲线积分

$$\int_L 2xy(x^4+y^2)^{\lambda}\mathrm{d}x-x^2(x^4+y^2)^{\lambda}\mathrm{d}y=\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

与路径无关，并在上述条件下，求积分$\int_{(1,0)}^{(3,3)}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$之值。

解　记$t=x^4+y^2$，$P=2xyt^{\lambda}, Q=-x^2t^{\lambda}$，

$\frac{\partial P}{\partial y}=2xt^{\lambda}+2xy\lambda t^{\lambda-1}\cdot 2y,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=-2xt^{\lambda}-x^2\lambda t^{\lambda-1}\cdot 4x^3,$

由$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，得$2xt^{\lambda}+2xy\lambda t^{\lambda-1}\cdot 2y=-2xt^{\lambda}-x^2\lambda t^{\lambda-1}\cdot 4x^3$，即$\lambda=-1$，

故当$\lambda=-1$时，积分$\int_L\frac{2xy\mathrm{d}x-x^2\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$与路径无关。　　　　6 分

取L_1：$y=0, x$从 1 到 3，$L_2: x=3, y$从 0 到 3，则

$$\int_L\frac{2xy\mathrm{d}x-x^2\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=\int_{L_1}\frac{2xy\mathrm{d}x-x^2\mathrm{d}y}{x^4+y^2}+\int_{L_2}\frac{2xy\mathrm{d}x-x^2\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$$

$$=0+\int_0^3\frac{-9}{81+y^2}dy=-\arctan\frac{y}{9}\Big|_0^3=-\arctan\frac{1}{3}$$　　4 分

十一、（10 分）计算三重积分$\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z)\mathrm{d}V$，其中$\Omega$是由曲线$\begin{cases}y^2=4z\\x=0\end{cases}$绕$z$轴旋转一周而成的曲面与平面$z=4$围成的立体.

解一：旋转曲面方程为$z=\frac{x^2+y^2}{4}$，用柱坐标$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, z=z$将三重积分化为

$$\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z)\mathrm{d}V=\int_0^4 dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{2\sqrt{z}}(r^2+z)rdr$$　　5 分

$$=2\pi\int_0^4\left(\frac{r^4}{4}+\frac{r^2}{2}z\right)_0^{2\sqrt{z}}dz=2\pi\int_0^4 6z^2dz=256\pi$$　　5 分

或者解二：旋转曲面方程为$z=\frac{x^2+y^2}{4}$，用柱坐标$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, z=z$将三重积分化为

$$\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z)\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^4 rdr\int_{\frac{r^2}{4}}^4(r^2+z)dz$$　　5 分

$$=2\pi\int_0^4(4r^3+8r-\frac{9}{32}r^5)dr=256\pi$$　　5 分

十二、（6 分）设级数$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在[0, 1]上收敛，证明：当$a_0=a_1=0$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)$收敛。

证明　因为$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$在 x=1 点收敛，所以$\sum_{n=0}^{\infty}a_n$收敛。

那么，存在 M>0，使得$\left|a_n\right| \le \mathrm{M}$　　3 分

而$f\left(\frac{1}{n}\right)=a_0+\frac{a_1}{n}+\frac{a_2}{n^2}+\cdots+\frac{a_k}{n^k}+\cdots$当$a_0=a_1=0$时，有

$f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{a_2}{n^2}+\cdots+\frac{a_k}{n^k}+\cdots$，当$n \ge 2$以后，$f\left(\frac{1}{n}\right)$是绝对收敛的，所以

$\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right| \le \frac{\left|a_2\right|}{n^2}+\frac{\left|a_3\right|}{n^3}\cdots+\frac{\left|a_k\right|}{n^k}+\cdots \le \mathrm{M}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\cdots\right) \sim \frac{\mathrm{M}}{n^2}$故级数$\sum_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)$收敛　3 分