武汉大学计算机学院

2014-2015学年第一学期2013级

《离散数学》期末考试试卷（A）

姓名：__________ 学号：______________ 专业：______________

(注：①考试时间为120分钟；②所有的解答必须写在答题纸上。)

一、 设有如下命题公式 (10分，5 + 5)

$$\neg P \vee Q \to \neg Q \wedge R.$$

(1) 试构造该公式的真值表；

(2) 试根据真值表构造该公式的主析取范式和主合取范式.

二、 用推理规则证明： (10分，5 + 5)

(1) 前提：$P \to \neg Q \vee R$，$\neg R$，结论：$Q \to \neg P$；

(2) 前提：$\forall x(P(x) \to \neg Q(x))$，$\forall x(Q(x) \vee R(x))$，$\exists \neg R(x)$，结论：$\forall x \neg P(x)$.

三、 设A，B和C是集合. 试证明： (10分，5 + 5)

(1) $A - B - C = A - (B \cup C)$；

(2) 若$A \cap C \subseteq B \cap C$，$A \cap \overline{C} \subseteq B \cap \overline{C}$，则$A \subseteq C$.

四、 设$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $R = \{(1, 4), (5, 2), (2, 3)\} \subseteq A^2$是$A$上的关系. (25分, 5 × 5)

(1) 分别指出R是否为自反关系，反自反关系，对称关系，反对称关系和传递关系；

(2) 求关系R的自反传递闭包$tr(R)$(画出关系图即可)；

(3) 关系$tr(R)$是偏序关系. 试问A的子集合$\{2, 3, 5, 6\}$是否存在最大元素、最小元素、极大元素和极小元素. 若存在，试求出该元素；

(4) 求关系R的自反传递对称闭包$str(R)$(画出关系图即可)；

(5) 关系$str(R)$是等价关系. 试求该等价关系对应的集合的划分.

五、 设 n 是一给定的自然数($n \geqslant 1$)，设 X 是整数集合，$|X| = n + 2$，设 $Y = \{0, 1, 2, \ldots, 2n-1\}$，设 $Z = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. 定义函数 $f : X \to Y$, $f(x) = x \bmod 2n$. 定义函数 $g : Y \to Z$, $g(y) = |y - n|$. (25分, 5 × 5)

(1) 试写出单射的定义；

(2) 设$n = 3$, $X = \{ 0, 19, 27, 64, 125 \}$, 试用集合列举法表示函数$g \circ f$；

(3) 试分别指出题(2)中的f、g和$g \circ f$是否为单射；

(4) 试证明: 若f不是单射，则$g \circ f$一定不是单射；

(5) 试证明: $g \circ f(x) = g \circ f(x')$当且仅当$x - x'$能被$2n$整除或$x + x'$能被$2n$整除.

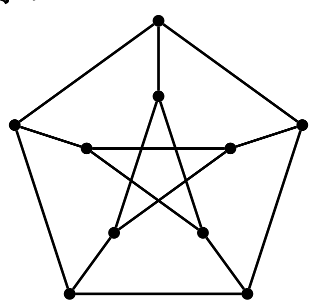
六、 (10分，$5 + 5$)

(1) 设$T = (V, E)$是无向树, $V = \{ v_1, v_2, \ldots, v_n \}$，则

$$\sum_{i=1}^{n} \deg(v_i) = 2n - 2.$$

(2) 设$G = (V_1, V_2, E)$是二分图(偶图)，若$|V_1| \neq |V_2|$，则G一定不是哈米尔顿图.

七、 设Petersen图如下所示： (10分，$5 + 5$)



(1) 已知Petersen图的基本回路都大于等于5，试利用欧拉公式的推论证明Petersen图不是平面图；

(2) 试找到Petersen图的一个子图，并说明该子图二度同构于$K_{3,3}$.