武汉大学 2016-2017 第一学期高等数学 B1 期末试题 A

1、（8 分）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2+n+k}$

2、（8 分）计算极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$

3、（8 分）求反常积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2(x+1)}$ 的值。

4、（8 分）求函数 $y=\dfrac{x^2-9}{x^2-4x+3}$ 的间断点并判断其类型。

5、（8 分）设函数 $f(x)=\begin{cases}x\arctan\dfrac{1}{x^2} & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$，讨论 $f'(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性。

6、（8 分）设 $f(2+x^4)=\ln\dfrac{5+2x^4}{x^4-1}$，且 $f(g(x))=\ln(1+x)$，求 $\int g(x)dx$

7、（8 分）求曲线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{2}{3}}$ 在点 $(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2})$ 处的切线方程和法线方程。

8、（8 分）求解微分方程 $\begin{cases}y''+y=2xe^x+4\sin x\\ y(0)=y'(0)=0\end{cases}$.

9、（10 分）设函数 $f(x)=\int_0^1|t(t-x)|\,dt\ (0<x<1)$，求函数 $f(x)$ 的极值、单调区间及曲线 $y=f(x)$ 的凹凸区间。

10、（8 分）设 $f(x)=\int_0^x e^{-t^2+2t}dt$，求 $\int_0^1(x-1)^2 f(x)dx$.

11、（8 分）把曲线 $y=\dfrac{\sqrt{x}}{1+x^2}$ 绕 x 轴旋转得到一个旋转体，它介于 $x=0$ 与 $x=\xi$ 之间的体积记作 $V(\xi)$，求 a 等于何值时，能使 $V(a)=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{\xi\to+\infty}V(\xi)$。

12、（5 分）设 $f(x)$ 函数在闭区间 $[a,b]$ 上连续，证明：$f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上存在原函数。

13、（5 分）设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,c]$ 上连续，在 $(0,c)$ 内可导，且 $f'(x)$ 为 x 的递减函数。若 $f(0)=0$，证明：对于任何 a,b 满足 $0\le a\le b\le a+b\le c$ 都有 $f(a+b)\le f(a)+f(b)$。

武汉大学 2016-2017 第一学期
高等数学 B1 期末试题 A 解答

1、（8 分）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2+n+k}$

解：$\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}\le\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2+n+k}\le\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n(n+2)}=\dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1}=\dfrac{1}{2}$

由夹逼定理可知 $\lim\limits_{x\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2+n+k}=\dfrac{1}{2}$　　8 分

2、（8 分）计算极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$

解 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x\cdot(\frac{1}{2}x)}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2(1-\cos x)}{x^2\cdot(1+\sqrt{\cos x})}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^2}{2x^2}=\dfrac{1}{2}$　8 分

3、（8 分）$\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2(x+1)}=\int_1^{+\infty}(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{(x+1)})dx=(-\dfrac{1}{x}+\ln\dfrac{1+x}{x})\Big|_1^{+\infty}=1-\ln 2$

4、（8 分）解：因 $y=\dfrac{x^2-9}{x^2-4x+3}=\dfrac{(x+3)(x-3)}{(x-3)(x-1)}$

由于 y 在 $x=1,x=3$ 处无意义，而 $\lim\limits_{x\to1}y=\infty$，所以 $x=1$ 为无穷间断点。

而 $\lim\limits_{x\to3}y=3$，所以 $x=3$ 为 $f(x)$ 的可去间断点。　8 分

5、（8 分）设函数 $f(x)=\begin{cases}x\arctan\dfrac{1}{x^2} & x\ne0\\ 0 & x=0\end{cases}$，讨论 $f'(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性。

解：当 $x\ne0$ 时，$f'(x)=\arctan\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2x^2}{1+x^4}$

当 $x=0$ 时，$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\arctan\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{\pi}{2}$

因为 $\lim\limits_{x\to0}f'(x)=\lim\limits_{x\to0}\left(\arctan\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2x^2}{1+x^4}\right)=\dfrac{\pi}{2}=f'(0)$

所以 $f'(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续。　8 分

6、（8 分）设 $f(2+x^4)=\ln\dfrac{5+2x^4}{x^4-1}$，且 $f(g(x))=\ln(1+x)$，求 $\int g(x)dx$

解 由 $f(2+x^4)=\ln\dfrac{5+2x^4}{x^4-1}=\ln\dfrac{2(x^4+1)+1}{(x^4+2)-3}$，所以有 $f(t)=\ln\dfrac{2t+1}{t-3}$

又 $f(g(x))=\ln\dfrac{2g(x)+1}{g(x)-3}=\ln(x+1)$，即有 $\dfrac{2g(x)+1}{g(x)-1}=x+1$

故有 $g(x)=\dfrac{3x+1}{x-1}$ 所以 $\int g(x)dx=3x+4\ln|x-1|+c$ 8 分

7. 解: 由 $\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y'=0$ 可得 $y'=-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$, 所以在点 $(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ 处切线斜率为 $y'(\frac{\sqrt{2}}{2})=-1,$ 法线斜率为 1, 故切线方程为 $y-\frac{\sqrt{2}}{2}=-(x-\frac{\sqrt{2}}{2})$ 即 $x+y-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$，

法线方程为 $y-\frac{\sqrt{2}}{2}=x-\frac{\sqrt{2}}{2}$，即 $x-y=0$。

8、（8 分）求解微分方程 $\begin{cases} y''+y=2xe^{x}+4\sin x \\ y(0)=y'(0)=0 \end{cases}$

解. 特征方程 $\lambda^2+1=0$， $\lambda=\pm i$ 齐次方程通解 $\overline{y}=c_1\cos x+c_2\sin x$

非齐次方程特解：

1）由 $r=1$ 不是特征根，故 $y_1^*=(Ax+B)e^x$，

代入方程得：$A=1,B=-1,\quad y_2{*}=(x-1)e^x$

2）由 $r=i$ 是特征根，故 $y_2^*=(Ax+B)\sin x+(Cx+D)\cos x$，

代入方程得：$A=0,B=0,C=-2,D=0,\quad y_3{*}=-2x\cos x$

所以 $y=c_1\cos x+c_2\sin x+e^x(x-1)-2x\cos x$ 由 $y(0)=y'(0)=0$ 可得 $c_1=1,c_2=2$ 得解 $y=\cos x+2\sin x+e^x(x-1)-2x\cos x$ 8 分

9、（10 分）设函数 $f(x)=\int_0^1|t(t-x)|\,dt\ (0<x<1)$, 求函数 $f(x)$ 的极值、单调区间及曲线 $y=f(x)$ 的凹凸区间。

解 $f(x)=\int_0^1|t(t-x)|\,dt=\int_0^x t(x-t)dt+\int_x^1 t(t-x)dt=\frac{1}{3}x^3-\frac{x}{2}+\frac{1}{3}$ 5 分

令 $f'(x)=x^2-\frac{1}{2}=0\Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ 由 $(0<x<1)$，故 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

又 $f''(x)=2x>0\ (0<x<1)$，所以 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 为 $f(x)$ 的极小值点，极小值为：

$f(\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{1}{3}(1-\frac{\sqrt{2}}{2})$，且曲线 $y=f(x)$ 在 $(0,1)$ 内是凹的。

由 $f'(x)=x^2-\frac{1}{2}$ 知，$f(x)$ 在 $(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$ 内单调递减，在 $(\frac{\sqrt{2}}{2},1)$ 内单调递增。 5 分

10、（8 分）设 $f(x)=\int_0^x e^{-y^2+2y}dy$，求 $\int_0^1(x-1)^2f(x)dx$

解：由 $f(x)=\int_0^x e^{-y^2+2y}dy$ 知，$f(0)=0$，$f'(x)=e^{-x^2+2x}$

$$\int_0^1(x-1)^2f(x)dx=\frac{1}{3}(x-1)^3f(x)\Big|_0^1-\frac{1}{3}\int_0^1(x-1)^3f'(x)dx=-\frac{1}{3}\int_0^1(x-1)^3e^{-x^2+2x}dx$$

$$=-\frac{1}{6}\int_0^1(x-1)^2e^{-(x-1)^2+1}d(x-1)^2=\frac{e}{6}\int_0^1te^{-t}dt=\frac{1}{6}(e-2)\quad 8\text{ 分}$$

11、（8 分）把曲线 $y=\dfrac{\sqrt{x}}{1+x^2}$ 绕 x 轴旋转得到一个旋转体，它介于 $x=0$ 与 $x=\xi$ 之间的体积记作 $V(\xi)$，求 a 等于何值时，能使 $V(a)=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{\xi\to+\infty}V(\xi)$。

解：旋转体体积为 $V(\xi)=\int_0^{\xi}\pi y^2(x)dx=\int_0^{\xi}\pi\dfrac{x}{(1+x^2)^2}dx=\dfrac{\pi}{2}(1-\dfrac{1}{1+\xi^2})$ ，则

$\lim\limits_{\xi\to+\infty}V(\xi)=\dfrac{\pi}{2}$，而 $V(a)=\dfrac{\pi}{2}(1-\dfrac{1}{1+a^2})=\dfrac{\pi}{4}$，所以 $a=1$。8 分

12、（5 分）设 $f\left(x\right)$ 函数在闭区间 $\left[a,b\right]$ 上连续，证明：$f\left(x\right)$ 在闭区间 $\left[a,b\right]$ 上存在原函数。

证 由于 $f\left(x\right)$ 函数在闭区间 $\left[a,b\right]$ 上连续，可设 $\Phi\left(x\right)=\int\limits_a^x f\left(x\right)dx, x\in\left[a,b\right]$

由于 $\Phi\left(x+\Delta x\right)-\Phi\left(x\right)=\int_a^{x+\Delta x}f\left(x\right)dx-\int_a^x f\left(x\right)dx=\int_x^{x+\Delta x}f\left(x\right)dx, x+\Delta x\in\left[a,b\right]$

从而 $\Phi'\left(x\right)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Phi\left(x+\Delta x\right)-\Phi\left(x\right)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x}f\left(x\right)dx=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\Delta x}\cdot f\left(\xi\right)\Delta x,\xi$ 位于 $x+\Delta x$ 与 x 之间，再由连续性，从而 $\Phi'\left(x\right)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}f\left(\xi\right)=\lim\limits_{\xi\to x}f\left(\xi\right)=f\left(x\right)$，由原函数的定义知 $\Phi\left(x\right)$ 是 $f\left(x\right)$ 在闭区间 $\left[a,b\right]$ 上的一个原函数，因此 $f\left(x\right)$ 在闭区间 $\left[a,b\right]$ 上存在原函数 5 分

13、（5 分）设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,c]$ 上连续，在 $(0,c)$ 内可导，且 $f'(x)$ 为 x 的递减函数。若 $f(0)=$ (，证明：对于任何 a,b 满足 $0\le a\le b\le a+b\le$ 都有 $f(a+b)\le f(a)+f($ 。

证明：由 Lagrange 中值定理有 $f(a)=f(a)-f(0)=f'(\xi)a,\ \ 0<\xi<a$,

$f(a+b)-f(b)=f'(\eta)a,\ b<\eta<a+b$,

由 $f'(x)$ 的单调递减可知 $f'(\xi)\ge f'(\eta)$，因此 $f(a+b)\le f(a)+f(b)$ 5 分