课程编号：A073003　　北京理工大学 2009-2010 学年第二学期

# 线性代数 B 试题 A 卷

班级 ________ 学号 ________ 姓名 ________ 成绩 ________

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 八 | 九 | 十 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | | | | | | | |
| 签名 | | | | | | | | | | | |

一、（10 分）设 $A$ 是三阶矩阵，$A^*$ 是其伴随矩阵，已知 $|A|=\frac{1}{2}$，求行列式 $\left|(3A)^{-1}-2A^*\right|$ 的值。

二、（10 分） 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}$，求 $\boldsymbol{B}$。

三、（10 分）设有线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=1 \\ 2x_1+3x_2+(\lambda+2)x_3=3 \\ x_1+\lambda x_2-2x_3=0 \end{cases}$$

问：$\lambda$ 取何值时，此方程组有唯一解？无解？有无穷多解？并在有无穷多解时求通解。（用导出组的基础解系表示通解）

四、（10 分）已知 $\alpha_1=(1,2,3,4),\alpha_2=(2,3,4,5),\alpha_3=(3,4,5,6),\alpha_4=(4,5,6,7)$。

(1) 求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩和一个极大无关组;

(2) 用所求的极大无关组线性表出剩余向量。

五、（10 分）已知 $\mathbf{R}^3$ 的两组基:

$$\alpha_1=(1,1,1)^T,\quad \alpha_2=(0,1,1)^T,\quad \alpha_3=(0,0,1)^T,$$

$$\beta_1=(1,0,1)^T,\quad \beta_2=(0,0,-1)^T,\quad \beta_3=(1,2,0)^T,$$

(1) 求 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到 $\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 的过渡矩阵;

(2) 求 $\alpha=(3,2,1)^T$ 关于基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的坐标。

六、（10 分）设矩阵 $A \sim B$，其中 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & a \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & b \end{pmatrix}$，求 $a,b$ 的值。

七、（10 分）已知向量组：$\alpha_1=(1,0,1)^T$，$\alpha_2=(0,1,2)^T$，求生成子空间 $L(\alpha_1,\alpha_2)$ 的一个标准正交基。

八、（10 分）已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$。

(1) 求一正交变换 $X=QY$，将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形;

(2) 判断二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 是否正定。

九、（10 分）设 $X_0$ 是非齐次线性方程组 $AX=b$ 的一个特解，$X_1,X_2,\cdots,X_t$ 是其导出方程组 $AX=0$ 的一个基础解系，证明：$X_0,X_1,X_2,\cdots,X_t$ 线性无关。

十、（10分）设三阶矩阵 $A$ 的各行元素之和均为 3，向量 $\alpha_1=(-1,2,-1)^T$，$\alpha_2=(0,-1,1)^T$ 是线性方程组 $AX=0$ 的两个解。

(1) 求 $A$ 的特征值与特征向量；

(2) 证明：存在可逆矩阵 $P$ 和对角矩阵 $\Lambda$，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$；

(3) 求 $(A-\frac{3}{2}E)^6$，其中 $E$ 为三阶单位矩阵。