课程编号：A073003　　北京理工大学 2010-2011 学年第一学期

线性代数 B 试题 A 卷

班级 ________ 学号 _________ 姓名 __________ 成绩 ___________

一、（10 分）已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$，求行列式 $\begin{vmatrix} 0 & \boldsymbol{A}^* \\ 3\boldsymbol{B} & 0 \end{vmatrix}$ 的值。

二、（10 分）已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\frac{1}{3}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}$，求 $\boldsymbol{X}$。

三、（10 分）对下列线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+\lambda x_2-x_3=1 \\ \lambda x_1-x_2+x_3=2 \\ 4x_1+5x_2-5x_3=-1 \end{cases}$$

试讨论：当 λ 取何值时，它有唯一解？无解？有无穷多解？并在有无穷多解时求其通解。（用导出组的基础解系表示通解）

四、（10 分）已知

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(-2,1,0,3),\ \ \boldsymbol{\alpha}_2=(1,-3,2,4),\ \ \boldsymbol{\alpha}_3=(3,0,2,-1),\ \ \boldsymbol{\alpha}_4=(2,-2,4,6)$$

(1) 求向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$的秩和一个极大无关组;

(2) 用所求的极大无关组线性表出剩余向量。

五、（10 分）已知$\boldsymbol{R}^3$的一个基: $\boldsymbol{\beta}_1=(0,1,1),\boldsymbol{\beta}_2=(1,0,1),\boldsymbol{\beta}_3=(1,1,0)$ 。

(1) 求$\boldsymbol{R}^3$的自然基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$到基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$的过渡矩阵;

(2) 求向量$\boldsymbol{\alpha}=(2,-1,3)$关于基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$的坐标。

六、（10 分）设$\boldsymbol{X}_0$是非齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$的一个特解， $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_t$是其导出方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系，证明： $\boldsymbol{X}_0,\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_t$线性无关。

七、（10 分）已知线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 $\boldsymbol{k_1(1,0,0)^T}+\boldsymbol{k_2(1,1,0)^T}$，其中 $\boldsymbol{k_1,k_2}$ 为任意常数，求此方程组的解空间的一个标准正交基。

八、（10 分）已知二次型 $\boldsymbol{f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+2x_3^2-4x_2x_3}$。

(1) 用正交变换将它化为标准形，并给出所用的正交变换;

(2) 判断二次型 $\boldsymbol{f(x_1,x_2,x_3)}$ 是否正定。

九、（10 分）设$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$为 3 元单位列向量，且$\boldsymbol{\alpha}^{T}\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$，记$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{T}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{T}$。证明：

(1) 齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$有非零解；

(2) $\boldsymbol{A}$相似于矩阵$\begin{bmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{bmatrix}$。

十、（10 分）设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$都是 3 元向量，且$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性无关，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$线性无关。

(1) 证明：存在非零向量$\boldsymbol{\gamma}$，使得$\boldsymbol{\gamma}$既可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性表出，又可由$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$线性表出；

(2) 当$\boldsymbol{\alpha}_1=(\mathbf{1,2,1})^{T},\boldsymbol{\alpha}_2=(\mathbf{2,5,3})^{T}$，$\boldsymbol{\beta}_1=(\mathbf{2,3,-1})^{T},\boldsymbol{\beta}_2=(\mathbf{-1,0,3})^{T}$时，求出所有既可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性表出，又可由$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$线性表出的向量。