武汉大学数学与统计学院

2019-2020 学年第二学期

《高等数学 B2》期末考试试题 A 卷 参考解答

考试时间：2020 年 6 月 11 日 14:30-16:30

一、（10 分）设 $\vec{a}=(1,-2,1),\vec{b}=(1,2,-2)$，求 m 使得 $\vec{a}+m\vec{b}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影为 0.

解：$\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\left(\vec{a}+m\vec{b}\right)=\dfrac{(\vec{a}+m\vec{b})\bullet\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}=0\Leftrightarrow(\vec{a}+m\vec{b})\bullet\vec{b}=0$ 5 分

$\Leftrightarrow\vec{a}\bullet\vec{b}+m\vec{b}\bullet\vec{b}=0\Leftrightarrow m=-\dfrac{\vec{a}\bullet\vec{b}}{|\vec{b}|^2}=\dfrac{5}{9}$ 10 分

二、（10 分）设曲面 Σ： $x^2+2y^2+3z^2=6$ 及点 $P(1,1,1)$：

1）求点 $P(1,1,1)$ 处曲面 Σ 的切平面方程；

2）若 $\vec{n}$ 是曲面 Σ 在点 $P(1,1,1)$ 处指向内侧的法向量，求 $\vec{n}$ 的方向余弦.

解：1）令 $F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-6$，则 $F_x(1,1,1)=2,F_y(1,1,1)=4,F_z(1,1,1)=6$，因此，所求切平面方程为：$(x-1)+2(y-1)+3(z-1)=0$，即 $x+2y+3z=6$. 5 分

2）由于 $\vec{n}\,||\,\{F_x,F_y,F_z\}$，指向内侧，可知 $\vec{n}=-\{1,2,3\}$，其单位化向量为 $\vec{n}^0=\{\dfrac{-1}{\sqrt{14}},\dfrac{-2}{\sqrt{14}},\dfrac{-3}{\sqrt{14}}\}$，因而 $\vec{n}$ 的方向余弦： $\cos\alpha=\dfrac{-1}{\sqrt{14}}$， $\cos\beta=\dfrac{-2}{\sqrt{14}}$， $\cos\gamma=\dfrac{-3}{\sqrt{14}}$. 10 分

三、（8 分）设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $(x+1)^2z-\cos^2y=x^3(z+\sin y)$ 所确定，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,0)}$ 及 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{(0,0)}$.

解：将 $x=0,y=0$ 代入方程得 $z=1$；方程两边关于 x 求偏导数得：

$$2(x+1)z+(x+1)^2\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2(z+\sin y)+x^3\frac{\partial z}{\partial x},\qquad (3.1)$$

代入 $x=0,y=0,z=1$，容易解得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,0)}=-2$. 5 分

对方程(3.1)两边关于 x 求偏导数得：

$$2z+4(x+1)\frac{\partial z}{\partial x}+(x+1)^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x(z+\sin y)+6x^2\frac{\partial z}{\partial x}+x^3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

代入 $x=0,y=0,z=1$，以及 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,0)}=-2$，得 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{(0,0)}=6$. 8 分

四、（10 分）设 $D=\{(x,y)\big|\,|x|\le 1, 0\le y\le 1\}$，计算二重积分 $\iint\limits_D |y-x^2|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ . .

解： $\iint\limits_D |y-x^2|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}\,x\int_{0}^{x^2}(x^2-y)\,\mathrm{d}\,y+\int_{-1}^{1}\mathrm{d}\,x\int_{x^2}^{1}(y-x^2)\,\mathrm{d}\,y$ 5 分

$$=\int_{-1}^{1}\frac{x^4}{2}\mathrm{d}\,x+\int_{-1}^{1}(\frac{1-x^4}{2}-x^2(1-x^2))\,\mathrm{d}\,x$$

$$=2\int_{0}^{1}(\frac{1}{2}-x^2+x^4))\,\mathrm{d}\,x=\frac{11}{15}.$$ 10 分

五、（8 分）计算对面积的曲面积分 $\iint\limits_S (y+z)\,\mathrm{d}\,S$，其中 S 为圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 介于平面 $z=0$ 及 $z=1$ 之间的部分.

解：由于曲面 S 关于 $y=0$ 对称，因此 $\iint\limits_S y\,\mathrm{d}\,S=0$. 4 分

另一方面，圆柱面上 $\mathrm{d}\,S=2\pi R\,\mathrm{d}\,z$，因而有 $\iint\limits_S z\,\mathrm{d}\,S=\int_0^1 2\pi Rz\,\mathrm{d}\,z=\pi R$.

所以 $\iint\limits_S (y+z)\,\mathrm{d}\,S=\pi R$. 8 分

六、（8 分）设有曲线 Γ: $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6,\\ x^2-y^2=3z,\end{cases}$ 及曲线上一点 $M(2,1,1)$：

1）求曲线 Γ 在点 M 处的切线 L 的方程;

2）验证 Γ 与 L 在 zOx 面上的投影在点 $M'(2,0,1)$ 处相切.

解：1）切线 L 的方程： $\begin{cases}2x+y+z=6\\ 4x-2y-3z=3\end{cases}$； 4 分

2）Γ 与 L 在 zOx 平面上的投影方程分别为：Γ': $\begin{cases}2x^2+z^2=6+3z\\ y=0\end{cases}$ 及 L': $\begin{cases}8x-z=15\\ y=0\end{cases}$；

他们都过点 $M'(2,0,1)$，此处曲线上 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M'}=8$，直线上 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M'}=8$，因此 Γ 与 L 在 zOx 平面上的投影在点

$M'(2,0,1)$ 处相切. 8 分

七、（8 分）求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+(-3)^n}{n}x^n$ 的和函数及收敛域.

解： $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+(-3)^n}{n}x^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(2x)^n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(-3x)^n$，不妨考虑如下幂级数：

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}t^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^t\tau^{n-1}\,\mathrm{d}\,\tau=\int_0^t\sum\limits_{n=1}^{\infty}\tau^{n-1}\,\mathrm{d}\,\tau=\int_0^t\frac{1}{1-\tau}\mathrm{d}\,\tau=-\ln(1-\tau)$，它的收敛域为 $[-1,1)$. 5 分

因此， $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+(-3)^n}{n}x^n=-\ln(1-2x)-\ln(1+3x)$，收敛域为 $(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]$. 8 分

八、（10 分）1)确定常数 a，使得对平面上任意分段光滑闭曲线 L，均有 $\oint_L (2xy-y^4+5)\,\mathrm{d}x+(x^2-axy^3)\,\mathrm{d}y=0$.

2)对于该常数，求二元函数 $u(x,y)$，使得 $\mathrm{d}u(x,y)=(2xy-y^4+5)\,\mathrm{d}x+(x^2-axy^3)\,\mathrm{d}y$，且 $u(0,0)=0$.

解：1) 题设条件等价 $\dfrac{\partial(2xy-y^4+5)}{\partial y}\equiv\dfrac{\partial(x^2-axy^3)}{\partial x}$，即有 $2x-4y^3\equiv 2x-ay^3$，因此 $a=4$. 5 分

2) $$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(2xy-y^4+5)\,\mathrm{d}x+(x^2-4xy^3)\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^x 5\,\mathrm{d}x+\int_0^y (x^2-4xy^3)\,\mathrm{d}y=5x+x^2y-xy^4.$$ 10 分

九、（8 分）计算曲面积分 $I=\iint_S (x^3+2zx)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(2y^3+3xy)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(3z^3+4yz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的**内**侧.

解: 用 Ω 表示球 $\left\{(x,y,z)\,\middle|\,x^2+y^2+z^2\le 1\right\}$，利用高斯公式可得:

$$I=-\iiint_\Omega (3x^2+2z+6y^2+3x+9z^2+4y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$ 4 分

由对称性可知：$\iiint_\Omega x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iiint_\Omega y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iiint_\Omega z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=0$;

$$\iiint_\Omega x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iiint_\Omega y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iiint_\Omega z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$ 6 分

因此，$I=-\iiint_\Omega (3+6+9)x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=-6\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

$$=-6\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r=-\frac{24\pi}{5}.$$ 8 分

十、(8 分) 将函数 $f(x)=x\arctan x$ 展开成 x 的幂级数，并写出该幂级数的收敛域.

解：由于 $\arctan x=\int_0^x\dfrac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$，且 $\dfrac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ 收敛半径为 1，因此有

$$\arctan x=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x x^{2n}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},$$ 5 分

因此，$f(x)=x\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+2}$，收敛域为[-1,1]. 8 分

十一、(8 分) 设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(y-x)x^4}{(y-x)^4+x^6}, & x^2+y^2\ne 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$ 考虑如下问题：

1）计算该函数在点 $O(0,0)$ 处沿方向 $\vec{l}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 的方向导数；

2）证明该函数在点 $O(0,0)$ 处不连续.

解：1) $$\frac{\partial f}{\partial\vec{l}}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)-0}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{(\sin\alpha-\cos\alpha)\cos^4\alpha}{(\sin\alpha-\cos\alpha)^4+t^2\cos^6\alpha}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\cos^4\alpha}{(\sin\alpha-\cos\alpha)^3}, & \sin\alpha\neq\cos\alpha\\ 0, & \sin\alpha=\cos\alpha\end{cases}$$ 4 分

2）考虑动点沿曲线 $y=x+kx^2$ 趋近于原点 $O(0,0)$，有

$f(x,x+kx^2)=\dfrac{kx^6}{k^4x^8+x^6}\to k$ （$x\to 0$），因此 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在，所以该函数在点 $O(0,0)$ 处不连续. 8 分

十二、（4 分） **阅读如下材料**：利用指数函数的幂级数展开式 $\mathrm{e}^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}\,(x\in\mathbb{R})$ 可以拓展到复数域上的结论，即 $\mathrm{e}^z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{n!}\,(z\in\mathbb{C}，即z为复数)$. 并且对于复数 $z=a+ib$，依然有 $\mathrm{e}^{a+ib}=\mathrm{e}^a\,\mathrm{e}^{ib}$ 以及 $\left(\mathrm{e}^{a+ib}\right)^n=\mathrm{e}^{n(a+ib)}$，而且有被称为欧拉公式的如下等式：$\mathrm{e}^{ix}=\cos x+i\sin x$，$\mathrm{e}^{-ix}=\cos x-i\sin x$.

问题：若将函数 $\mathrm{e}^x\cos x$ 展开成幂级数 $\mathrm{e}^x\cos x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n,(x\in\mathbb{R})$，试给出 a_n 的表达式.

解：由欧拉公式可得 $\mathrm{e}^x\cos x=\dfrac{\mathrm{e}^{(1+i)x}+\mathrm{e}^{(1-i)x}}{2}$，利用 $\mathrm{e}^z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{n!}\,(z\in\mathbb{C})$，有

$$\mathrm{e}^{(1+i)x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{n!}x^n,\quad \mathrm{e}^{(1-i)x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-i)^n}{n!}x^n.$$

因此
$$\mathrm{e}^x\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{(1+i)^n}{n!}+\frac{(1-i)^n}{n!}\right)x^n,$$

也就是 $a_n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{(1+i)^n}{n!}+\dfrac{(1-i)^n}{n!}\right)$.利用 $(1\pm i)^n=\left(\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\pm\frac{i\pi}{4}}\right)^n=2^{\frac{n}{2}}\,\mathrm{e}^{\pm\frac{in\pi}{4}}=2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\dfrac{n\pi}{4}\pm i\sin\dfrac{n\pi}{4}\right)$ 可得

$$a_n=\frac{1}{n!}2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}.$$ 4 分