武汉大学 2014-2015 学年第一学期期末考试高等数学 B1 解答

一、（8 分）求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\tan\frac{1}{n}\right)^{\cot\frac{1}{n}}$

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\tan\frac{1}{n}\right)^{\cot\frac{1}{n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(1+\tan\frac{1}{n}\right)^{\cot\frac{1}{n}}}$ 。。。 4分

$=e^{1}=e$。。。。。。4分

二、（8 分）设 $y=2^{3x}\cdot\ln(2x)-\sqrt{1+x^2}$,求$y'$.

解 $y'=3\cdot 2^{3x}\cdot\ln 2\cdot\ln(2x)$。。4分 $+\frac{2^{3x}}{x}-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$。。。4分

三、（10 分）设$\begin{cases}x=t^3+t\\ y=\frac{3}{4}t^4+t^3+\frac{1}{2}t^2+t\end{cases}$且$t=t_0$时,$dy=2dx$，试求$t_0$.

解 $\frac{dy}{dt}=3t^3+3t^2+t+1=(t+1)(3t^2+1)$, $\frac{dx}{dt}=3t^2+1$。。。5分

$\frac{dy}{dx}=t+1$ 从而 $t_0+1=2$ $t_0=1$ 。。。5 分

四、（8 分）求微分方程 $y^{(4)}+5y''-36y=0$ 的通解。

解：方程的特征方程为 $\lambda^4+5\lambda^2-36=0\Rightarrow(\lambda^2+9)(\lambda^2-4)=0$，。。。。。。4 分

可得特征根为 $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=3i$, $\lambda_4=-3i$, 于是原方程的通解为

$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+C_3\cos 3x+C_4\sin 3x$ 。。。。。。4 分

五、（10 分）设 $f(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$， $g(x)=1-x^2$，试讨论复合函数 $f\circ g$ 的连续性。

解：$f(g(x))=\operatorname{sgn}(1-x^2)=\begin{cases}1, & -1<x<1,\\ 0, & x=1,-1\\ -1, & x<-1\text{或}x>1\end{cases}$ ，。。。。。。5 分

则 $\lim\limits_{x\to-1^+}f(g(x))=1$, $\lim\limits_{x\to-1^-}f(g(x))=-1$, $\lim\limits_{x\to1^+}f(g(x))=-1$, $\lim\limits_{x\to1^-}f(g(x))=1$,

所以 $x=\pm1$ 是 $f(g(x))$ 的第一类间断点，其余各处 $f(g(x))$ 处处连续。。。。。。5 分

六、（8 分）求 $\int\frac{x+3}{x^2-5x+6}dx$

解：设 $\frac{x+3}{x^2-5x+6}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}$，则可得 $A=-5,B=6$，。。。。。。 4 分

于是 $\int\frac{x+3}{x^2-5x+6}dx=\int\frac{-5dx}{x-2}+\int\frac{6dx}{x-3}=-5\ln|x-2|+6\ln|x-3|+C$ 。。。。。。 4 分

七、（8 分）验证极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+x+\sin x\cos x}{x-\sin x\cos x}$ 存在,但不能用洛比达法则得出.

证明 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+x+\sin x\cos x}{x-\sin x\cos x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}+1+\frac{\sin x\cos x}{x}}{1-\frac{1}{x}\sin x\cos x}=1$。。。。。。 4 分

但 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(1+x+\sin x\cos x)'}{(x-\sin x\cos x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}$ 不存在

故 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+x+\sin x\cos x}{x-\sin x\cos x}$ 存在,但极限不能用洛比达法则得出.。。。。。。 4 分

八、（8 分）求 $\int_a^b\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}(a<b)$.

解: 因为 $x=a,x=b$ 是瑕点，并且 $\lim\limits_{x\to a^+}(x-a)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}=\frac{1}{\sqrt{b-a}}$

$\lim\limits_{x\to b^-}(b-x)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}=\frac{1}{\sqrt{b-a}}$，所以原积分收敛。。。。。。。 4 分

原式 $=\int_a^b\frac{dx}{\sqrt{(\frac{b-a}{2})^2-(x-\frac{a+b}{2})^2}}$， 令 $x-\frac{a+b}{2}=\frac{b-a}{2}\sin t$

原式 $=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\frac{b-a}{2}\cos t}\cdot\frac{b-a}{2}\cos t dt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}dt=\pi$ 。。。。。。 4 分

九、（8 分）判断函数 $y=\frac{x}{1+x}$ 的单调性，并证明 $\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\le\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}$.

解 函数 $y=\frac{x}{1+x}$ 的定义域 $(-\infty,-1)$ 及 $(-1,+\infty)$

$y'=\frac{1}{(1+x)^2}>0$ 故在 $(-\infty,\ -1)$ 及 $(-1,\ +\infty)$ 内 $y=\frac{x}{1+x}$ 单调增 。。。。。。 4 分

令 $x_1=|a+b|,\ x_2=|a|+|b|$, 则 $x_1\le x_2$

$\therefore \quad \dfrac{|a+b|}{1+|a+b|} \le \dfrac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} = \dfrac{|a|}{1+|a|+|b|} + \dfrac{|b|}{1+|a|+|b|} \le \dfrac{|a|}{1+|a|} + \dfrac{|b|}{1+|b|}$ 。。。 4 分

十、8 分）设 $f(x)=[\varphi(x)-\varphi(0)]\ln(1+2x), g(x)=\int_0^x \frac{t}{1+t^3}dt$, 其中 $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $\varphi'(0)=1$，证明 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为 $x\to 0$ 时的同阶无穷小。

证明 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x}{1+x^3}}{2x}=\dfrac{1}{2}$ 。。。。。。 4 分

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}\cdot\dfrac{x^2}{g(x)}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\phi(x)-\phi(0)}{x}\cdot\dfrac{\ln(2x+1)}{x}=2\cdot\varphi'(0)\cdot 2=4$

$\therefore f(x)$与$g(x)$为同阶无穷小$(x\to 0)$ 。。。。。。 4 分

十一、(8 分)求微分方程 $xdy+(x-2y)dx=0$ 的一个解 $y=y(x)$，使得由曲线 $y=y(x)$ 与直线 $x=1$， $x=2$ 以及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周的旋转体体积最小。

解： $xdy+(x-2y)dx=0$ 整理成 $\dfrac{dy}{dx}=2\dfrac{y}{x}-1$ 为一阶线性非齐次方程，可得通解为

$y=Ce^{\int\frac{2}{x}dx}+e^{\int\frac{2}{x}dx}\int -e^{-\int\frac{2}{x}dx}dx=x+Cx^2$ 。。。。。。 4 分

旋转体体积为$V(C)=\pi\int_1^2[x+Cx^2]^2dx=\pi[\dfrac{7}{3}+\dfrac{15}{2}C+\dfrac{31}{5}C^2]$，则

$V'(C)=\pi(\dfrac{62}{5}C+\dfrac{15}{2})=0\Rightarrow C=-\dfrac{75}{124}$ ，且$V''(C)=\dfrac{62}{5}\pi>0$ ，所以$V(-\dfrac{75}{124})$ 为极小值，且为唯一极小值，因此为最小值，所以所求曲线为 $y=x-\dfrac{75}{124}x^2$ 。。。。。。。 4 分

十二、(8 分）设 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上连续，在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内可导，且 $f(\frac{\pi}{2})=0$，证明 存在一点 $\xi\in(0,\frac{\pi}{2})$，使 $f(\xi)+\tan\xi\cdot f'(\xi)=0$.

证明 令 $F(x)=f(x)\sin x$， 则 $F(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 连续， 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内可导， 又因 $f(\frac{\pi}{2})=0$， 则 $F(0)=F(\frac{\pi}{2})=0$，即 $F(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上满足罗尔定理的条件，。。。。。。。 4 分

则至少存在 $\xi\in(0,\frac{\pi}{2})$， 使 $F'(\xi)=0$， 而 $F'(x)=f'(x)\sin x+f(x)\cos x$， 即

$f(\xi)\cos\xi+f'(\xi)\sin\xi=0,\quad \xi\in(0,\frac{\pi}{2}),\quad \cos\xi\ne 0$ 即 $f(\xi)+tg\xi\cdot f'(\xi)=0$ 。。。。。。 4 分