2020--2021 学年第一学期线性代数 A 期末考试试卷(A 卷)参考答案

一、(1)B (2)A (3) B (4) B

二、 (1) -3 ; (2) 2 ; (3) 6; (4) $t_1t_2 \neq 1$.

三、(12 分) 设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}$，

(1) 证明矩阵 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 可逆； (2) 当 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&2&0\\3&6&0\\0&0&3\end{pmatrix}$ 时，求 $\boldsymbol{A}$.

解 (1) $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})$，故 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 可逆. (4 分)

(2) 解法 1：由(1)有 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})^{-1}$ ， $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}+(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})^{-1}$ (4 分)

而 $(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{pmatrix}-5&2&0\\3&-1&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$，得 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-4&2&0\\3&0&0\\0&0&\frac{3}{2}\end{pmatrix}$。 (4 分)

解法 2：$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})^{-1}$. (4 分)， 以下同解法 1.

四、(13 分) a，b 取何值时，线性方程组

$$\begin{pmatrix}1&3&-2&-1\\0&1&3&2\\1&4&a&1\\1&7&10&a+6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\b\end{pmatrix}$$

有唯一解、无解、有无穷多解?并在有无穷多解时，求出方程组的通解.

解 $$\bar{\boldsymbol{A}}\xrightarrow{r}\left(\begin{array}{cccc:c}1&3&-2&-1&0\\0&1&3&2&1\\0&0&a-1&0&0\\0&0&0&a-1&b-4\end{array}\right)$$ (3 分)

(1) 当 $a\neq 1$ 时，$R(\boldsymbol{A})=R(\bar{\boldsymbol{A}})=4$，方程有唯一解； (2 分)

(2) 当 $a=1$ 且 $b\neq 4$ 时，$R(\boldsymbol{A})\neq R(\bar{\boldsymbol{A}})$，方程无解； (2 分)

(3) 当 $a=1$ 且 $b=4$ 时，$R(\boldsymbol{A})=R(\bar{\boldsymbol{A}})=2<4$，方程有无穷多解。 (2 分)

此时，由

$$\bar{\boldsymbol{A}}\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&-11&-7&-3\\0&1&3&2&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$，得所求通解

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}-3\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}11\\-3\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}7\\-2\\0\\1\end{pmatrix}，\ c_1,c_2\text{为任意常数}\qquad(4\text{分})$$

五、(12 分) 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$ 线性相关，而且 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\gamma}$ 都不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示. 证明：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$，$\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$，$\boldsymbol{\gamma}$ 等价.

证 因 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$ 线性相关，故存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，λ,μ，使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s+\lambda\boldsymbol{\beta}+\mu\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{0}$。 (4 分)

由 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\gamma}$ 都不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示，可知 λ,μ 均不为零。否则：(1) 若两者均为零，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，与题设矛盾。(2) 若其中之一为零，不妨设 $\mu=0$，则 $\boldsymbol{\beta}=-\dfrac{1}{\lambda}(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s)$，$\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示，与题设也矛盾。

(4 分)

从而有

$\boldsymbol{\beta}=-\dfrac{1}{\lambda}(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s+\mu\boldsymbol{\gamma})$，$\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\gamma}$ 线性表示；

$\boldsymbol{\gamma}=-\dfrac{1}{\boldsymbol{\mu}}(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s+\lambda\boldsymbol{\beta})$，$\boldsymbol{\gamma}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}$ 线性表示；

显然 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$，$\boldsymbol{\beta}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$，$\boldsymbol{\gamma}$ 线性表示。由向量组等价的定义，可知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$，$\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$，$\boldsymbol{\gamma}$ 等价. (4 分)

六、(12分) 设3阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,2,-3$，求方阵 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^*-2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}$ 的特征值及 $\det(\boldsymbol{B}^{-1})$.

解 $|\boldsymbol{A}|=-6$，故 $\boldsymbol{A}$ 可逆，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^*-2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}-2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}$， (4 分)

若 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，由特征值的性质，有 $|\boldsymbol{A}|\lambda^{-1}-2\lambda+3$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的特征值， (4 分)

从而得 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为-5，-4，11，进一步由特征值的性质知 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 的特征值为 $-\dfrac{1}{5},-\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{11}$，得

$$\det(\boldsymbol{B}^{-1})=(-\frac{1}{5})\times(-\frac{1}{4})\times(\frac{1}{11})=\frac{1}{220}.\qquad(4\text{分})$$

七、(13 分) 已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1{}^2+3x_2{}^2+3x_3{}^2+2\lambda x_2x_3$ $(\lambda>0)$ 经过正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$，化为标准形 $y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$，求实参数 λ 及正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$。

解 二次型 f 的对应的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&\lambda\\0&\lambda&3\end{pmatrix}$，依题设有特征值 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=5$，由特征值的性质，有

$$|\boldsymbol{A}|=2(9-\lambda^2)=\lambda_1\lambda_2\lambda_3，\ \lambda>0，\text{得}\lambda=2.\qquad 4\text{分}$$

可求得$\boldsymbol{A}$对应于$\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=5$的线性无关的特征向量分别为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},$$ 3 分

对应的单位正交特征向量为

$$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\eta}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},$$ 3 分

于是正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$中的正交矩阵

$$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&\sqrt{2}&0\\1&0&1\\-1&0&1\end{pmatrix}.$$ 3 分

八、(8 分) 设$\mathbb{R}^4$的子空间V由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,-3,5,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,2,-1,4)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(-2,-6,10,2)^{\mathrm{T}}$生成，求$V$的基与维数.

解：知道V的基与维数分别等于向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$的极大无关组与秩. (2 分)

由$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1&\boldsymbol{\alpha}_2&\boldsymbol{\alpha}_3&\boldsymbol{\alpha}_4\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&-1&3&-2\\0&-2&-1&-4\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，知$V$基可取$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$， (3 分)

$\dim(V)=3$. (3 分)

九、(6 分) 设$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$均为n阶正定矩阵. 证明：关于λ的方程$\det(\lambda\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=0$的根全大于零.

证：因$\boldsymbol{A}$正定，有可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，使$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$， (1 分)

因$\boldsymbol{B}$正定，故$(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}$也正定， (1 分)

$$\begin{aligned}|\lambda\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|&=|\lambda\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}|=|\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(\lambda\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1})\boldsymbol{P}|\\&=|\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}|\cdot|\lambda\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}|\cdot|\boldsymbol{P}|=|\boldsymbol{A}|\cdot|\lambda\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}|=0\\&\Leftrightarrow|\lambda\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}|=0\end{aligned}$$ (3 分)

故方程的根即为正定矩阵$(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}$的特征值，故全大于零. (1 分)

武汉大学数学与统计学院

2020--2021 学年第一学期线性代数 B 期末考试试卷(A 卷)答案

一、选择题

(1) (A)　(2) (B)　(3) (B)　(4) (D)

二、填空题

(1) $\left|2\boldsymbol{A}^*\right| = 2^{2n-1}$； (2) 0； (3) $\left|a\right| < \sqrt{\dfrac{7}{2}}$； (4) $(a^2-b^2)^n$

三、计算题

(1) 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1-m & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-m & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n-m \end{vmatrix}.$$

解：各列加到第 1 列，提出公因式，有

$$D_n = (\sum_{i=1}^{n} x_i - m)\begin{vmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 1 & x_2-m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_2 & \cdots & x_n-m \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i - r_1}(\sum_{i=1}^{n} x_i - m)\begin{vmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & -m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -m \end{vmatrix} \qquad 8 分$$

$$= (-1)^{n-1}m^{n-1}(\sum_{i=1}^{n} x_i - m) \qquad 2 分$$

(2) 解矩阵方程

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

解：设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$。　3 分

因

$$\left(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{B}\right) = \left(\begin{array}{ccc:cc} 2 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{r} \left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & 0 & -2 & -\frac{8}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{2}{3} \end{array}\right), \qquad 4 分$$

得 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}-2 & -\frac{8}{3}\\ 2 & 5\\ 1 & -\frac{2}{3}\end{pmatrix}$.　　　　　　　　3 分

(3) 设非齐次线性方程组 $\begin{cases}2x_1+x_2+a_3x_3+a_4x_4=d_1\\ x_1-2x_2+b_3x_3+b_4x_4=d_2\\ c_1x_1+c_2x_2+2x_3-3x_4=d_3\end{cases}$ 有 3 个解向量

$$\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\eta}_3=\begin{pmatrix}3\\2\\4\\2\end{pmatrix},$$

求此方程组系数矩阵的秩，并求该方程组的通解(其中 a_i,b_j,c_k,d_t 为已知常数).

解：由题设条件知 $\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$，$\boldsymbol{\eta}_3$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的 3 个解，因此

$$\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}2\\1\\6\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}1\\3\\3\\1\end{pmatrix}\qquad 3\text{ 分}$$

是对应的齐次线性方程组的线性无关解向量，因此，系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})\le 2$．又 $\boldsymbol{A}$ 中有二阶子式 $\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-5\ne 0$，$R(\boldsymbol{A})\ge 2$，因此 $R(\boldsymbol{A})=2$．　　　　3 分

因此 $\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_2$ 为其导出组的基础解系．由此可得线性方程组的通解：

$$k_1\begin{pmatrix}2\\1\\6\\1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\3\\3\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\2\\4\\2\end{pmatrix},\qquad k_1,k_2\text{ 为任意常数}\qquad 4\text{ 分}$$

(4) 设非齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2+ax_3=-1\\ x_1+x_2+2x_3=b\\ 4x_1+5x_2+10x_3=2\end{cases}$，试问：当 a,b 满足什么条件时, 方程组有（1）唯一解；（2）无解；（3）有无穷多解，在有无穷多解时，求出对应的齐次线性方程组的基础解系以及该非齐次方程组的通解.

解：计算可得 $|\boldsymbol{A}|=a-4$。　　　　2 分

(1) 当 $a\ne 4$, $|\boldsymbol{A}|\ne 0$, 方程组有唯一解。　　　　2 分

(2) 当 $a=4$，对增广矩阵作初等行变换, 有

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}1&2&4&-1\\1&1&2&b\\4&5&10&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&2&4&-1\\0&-1&-2&b+1\\0&0&0&3-3b\end{pmatrix},$$

当$b\neq1$, 则$R(\boldsymbol{A})=2<R(\overline{\boldsymbol{A}})=3$, 方程组无解。 2 分

（3）当$a=4,b=1$, $R(\boldsymbol{A})=R(\overline{\boldsymbol{A}})=2<3$, 方程组有无穷多解，此时

$$\overline{\boldsymbol{A}}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&0&3\\0&1&2&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

故该非齐次方组的通解为$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix}$, c为任意常数。 2 分

非齐次线性方程组的一个解为$\boldsymbol{\eta}^*=\begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix}$，对应的齐次线性方程组的基础解系为$\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$。

2 分

(5) 已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^{\ 2}+3x_2^{\ 2}+3x_3^{\ 2}+2\lambda x_2x_3$ $(\lambda>0)$ 经过正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$，化为标准形$y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$，求实参数$\lambda$及正交矩阵$\boldsymbol{Q}$.

解：二次型f的对应的矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&\lambda\\0&\lambda&3\end{pmatrix}$，依题设有特征值$\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=5$，

由特征值的性质，有

$$\left|\boldsymbol{A}\right|=2(9-\lambda^2)=\lambda_1\lambda_2\lambda_3，\ \lambda>0，得\lambda=2.$$ 3 分

可求得$\boldsymbol{A}$对应于$\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=5$的线性无关的特征向量分别为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},$$ 3 分

对应的单位正交特征向量为

$$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\eta}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},$$ 2 分

于是正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$中的正交矩阵

$$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&\sqrt{2}&0\\1&0&1\\-1&0&1\end{pmatrix}.$$ 2 分

(6) 在 4 维实向量构成的向量空间 $\mathbb{R}^4$ 中，求 a 使 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 为 $\mathbb{R}^4$ 的基，并求由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 到 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 的过渡矩阵 $\boldsymbol{P}$，其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\a\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\2-a\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}_4=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

解：$a\neq 1$.

设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)$，则

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-1&-1&1\\-1&1&1&0\\a&2-a&0&0\\1&1&0&0\end{pmatrix}$$ 2 分

因 $|\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}1&-1&-1&1\\-1&1&1&0\\a&2-a&0&0\\1&1&0&0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a&2-a\\1&1\end{vmatrix}=2-2a\neq 0$，故 $a\neq 1$. 3 分

设 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\boldsymbol{P}$，由

$$(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{B})=\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&1&1&1&1&-1&-1&1\\0&1&1&1&-1&1&1&0\\0&0&1&1&a&2-a&0&0\\0&0&0&1&1&1&0&0\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-r_4]{r_1-r_2,\,r_2-r_3}\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&2&-2&-2&1\\0&1&0&0&-1-a&a-1&1&0\\0&0&1&0&a-1&1-a&0&0\\0&0&0&1&1&1&0&0\end{array}\right)$$

得

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&-2&-2&1\\-1-a&a-1&1&0\\a-1&1-a&0&0\\1&1&0&0\end{pmatrix}.$$ 5 分

四、证明题

(1) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是欧氏空间 V 的标准正交基，证明：

$$\boldsymbol{\beta}_1=\frac{1}{3}(2\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3),\quad \boldsymbol{\beta}_2=\frac{1}{3}(2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3),\quad \boldsymbol{\beta}_3=\frac{1}{3}(\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3),$$

也是 V 的标准正交基.

证：证法一：因为

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)=\frac{1}{9}(4(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1)-2(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2)-2(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3))=0,\ (\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=0,$$ 4 分

$$|\boldsymbol{\beta}_1|^2=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)=\frac{1}{9}(4(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1)+4(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2)+(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3))=1,\quad |\boldsymbol{\beta}_2|^2=|\boldsymbol{\beta}_3|^2=1,$$

所以 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 是 V 的标准正交基. 4 分

证法二：由题设条件有

$$\left(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\right)=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\right)\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&2&1\\2&-1&-2\\-1&2&-2\end{pmatrix},$$ 4 分

设 $\boldsymbol{K}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&2&1\\2&-1&-2\\-1&2&-2\end{pmatrix}$，可验证 $\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}=\boldsymbol{E}$，故 $\boldsymbol{K}$ 为正交矩阵．又因 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是标准正交基，从而 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 是标准正交基． 4 分

(2) 设 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是 n 元实二次型，存在 n 维实列向量 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$，使 $\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1>0$，$\boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2<0$，证明：存在 n 维列实向量 $\boldsymbol{x}_0\neq\boldsymbol{0}$，使 $\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0=0$．

证：依题设 f 是不定二次型，设 f 的正惯性指数为 p，f 的秩为 r，则 $0<p<r$， 2 分

f 可经可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 化为规范形

$$f=y_1^{\,2}+\cdots+y_p^{\,2}-y_{p+1}^{\,2}-\cdots-y_r^{\,2}$$ 4 分

取 $\boldsymbol{y}_0=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&1&0&\cdots&0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{0}$，则有 $\boldsymbol{x}_0=Q\boldsymbol{Y}_0\neq\boldsymbol{0}$，使

$$\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0=1+0\cdots+0-1+0\cdots+0=0.$$ 2 分

2020--2021 学年第一学期线性代数 C 期末考试试卷(A 卷)参考答案

一、(1)C　　(2)D　(3) C　　(4)　A

二、 (1) $(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}$；　(2) -3；　(3) 2；　(4) 0.

三、(10 分) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，而 $n\geq 2$ 为正整数，计算 $\boldsymbol{A}^n-2\boldsymbol{A}^{n-1}$.

解　计算易得 $\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&4&0\\2&0&2\end{pmatrix}=2\boldsymbol{A}$，递推易得 $\boldsymbol{A}^{n-1}=2^{n-2}\boldsymbol{A}$，故　　5 分

$$\boldsymbol{A}^n-2\boldsymbol{A}^{n-1}=2^{n-1}\boldsymbol{A}-2^{n-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}\text{。}\qquad 5\text{ 分}$$

四、(12 分) 设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}$，

(1) 证明矩阵 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 可逆；　　(2) 当 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&2&0\\3&6&0\\0&0&3\end{pmatrix}$ 时，求 $\boldsymbol{A}$.

解　(1)　$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})$，故 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 可逆.　　4 分

(2) 解法 1：由(1)有 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})^{-1}$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}+(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})^{-1}$　　4 分

而 $(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{pmatrix}-5&2&0\\3&-1&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$，得 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-4&2&0\\3&0&0\\0&0&\frac{3}{2}\end{pmatrix}$.　　4 分

解法 2：$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})^{-1}$.　　4 分，　余下同解法 1.

五、证明：

(1) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，且 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵，证明 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB}$ 也是对称矩阵.

证　由题设 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵，有 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，故　　2 分

$(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB}$，　　3 分

故 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB}$ 也是对称矩阵.　　3 分

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为同阶正交矩阵，证明 $\boldsymbol{AB}$ 也为正交矩阵.

证　因 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均为正交矩阵，有

$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{-1}$，$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{-1}$，从而　　2 分

$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\left(\boldsymbol{AB}\right)^{\mathrm{T}}$，　　3 分

故 $\boldsymbol{AB}$ 是正交矩阵.　　3 分

六、(10 分)设非齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+2x_2+ax_3=-1 \\ x_1+x_2+2x_3=b \\ 4x_1+5x_2+10x_3=2 \end{cases}$，试问：当$a,b$满足什么条件时，方程组有唯一解、无解、或有无穷多解．在有无穷多解时，求该非齐次方程组的通解并写出对应的齐次线性方程组的基础解系．

解　计算可得$\left|\boldsymbol{A}\right|=a-4$。　　　　2 分

(1) 当$a\neq 4$，$\left|\boldsymbol{A}\right|\neq 0$，方程组有唯一解。　　　　2 分

(2) 当$a=4$，对增广矩阵作初等行变换，有

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & b \\ 4 & 5 & 10 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & 3-3b \end{pmatrix},$$

当$b\neq 1$，则$R(\boldsymbol{A})=2<R(\overline{\boldsymbol{A}})=3$，方程组无解。　　　　2 分

(3) 当$a=4,b=1$，$R(\boldsymbol{A})=R(\overline{\boldsymbol{A}})=2<3$，方程组有无穷多解，此时

$$\overline{\boldsymbol{A}} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故该非齐次方组的通解为$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=c\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$，$c$为任意常数。　　　　2 分

非齐次线性方程组的一个解为$\boldsymbol{\eta}^*=\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$，对应的齐次线性方程组的基础解系为$\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$。

2 分

七、(10 分) 设 3 阶矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值为$1,2,-3$，求方阵$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^*-2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}$的特征值及$\det(\boldsymbol{B})$．

解　$\left|\boldsymbol{A}\right|=-6$，故$\boldsymbol{A}$可逆，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^*-2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}=\left|\boldsymbol{A}\right|\boldsymbol{A}^{-1}-2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}$，　　　　4 分

若λ为$\boldsymbol{A}$的特征值，由特征值的性质，有$\left|\boldsymbol{A}\right|\lambda^{-1}-2\lambda+3$为$\boldsymbol{B}$的特征值，　　　　4 分

从而得$\boldsymbol{B}$的特征值为-5，-4，11，由特征值的性质

$$\det(\boldsymbol{B})=(-5)\times(-4)\times 11=220.$$　　　　2 分

八、(10 分) 设矩阵$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，

(1) 写出二次型$f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$的矩阵$\boldsymbol{A}$；

(2) 求一个正交矩阵$\boldsymbol{P}$，使$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$成对角矩阵；

(3) 写出在正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$下$f$化成的标准形.

解 (1) $\boldsymbol{A}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})=\begin{pmatrix}2&3&0\\3&2&0\\0&0&5\end{pmatrix}$ 3 分

(2) 易计算得$\left|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right|=(\lambda-5)^2(\lambda+1)$，故$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=5,\lambda_3=-1$，

对应于$\lambda_1=\lambda_2=5$的正交单位特征向量可取为

$$\boldsymbol{p}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^{\mathrm{T}}，\ \boldsymbol{p}_2=(0,0,1)^{\mathrm{T}}，$$

对应于$\lambda_3=-1$的单位特征向量可取为$\boldsymbol{p}_3=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$，令$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}_1&\boldsymbol{p}_2&\boldsymbol{p}_3\end{pmatrix}$，则$\boldsymbol{P}$为正交矩阵，使$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}5&&\\&5&\\&&-1\end{pmatrix}$. 5 分

(3) $f=5y_1^2+5y_2^2-y_3^3$. 2 分

九、(8 分)设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$线性相关，而且$\boldsymbol{\beta}$与$\boldsymbol{\gamma}$都不能由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性表示．证明：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$，$\boldsymbol{\beta}$与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$，$\boldsymbol{\gamma}$等价.

证 因$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$线性相关，故存在一组不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_s$，$\lambda,\mu$，使得$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s+\lambda\boldsymbol{\beta}+\mu\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{0}$。 2 分

由$\boldsymbol{\beta}$与$\boldsymbol{\gamma}$都不能由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性表示，可知$\lambda,\mu$均不为零。否则：(1)若两者均为零，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性相关，与题设矛盾。(2)若其中之一为零，不妨设$\mu=0$，则$\boldsymbol{\beta}=-\dfrac{1}{\lambda}(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s)$，$\boldsymbol{\beta}$可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性表示，与题设也矛盾。

3 分

从而有

$\boldsymbol{\beta}=-\dfrac{1}{\lambda}(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s+\mu\boldsymbol{\gamma})$，$\boldsymbol{\beta}$可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\gamma}$线性表示；

$\boldsymbol{\gamma}=-\dfrac{1}{\boldsymbol{\mu}}(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s+\lambda\boldsymbol{\beta})$，$\boldsymbol{\gamma}$可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}$线性表示；

显然$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$可以由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$，$\boldsymbol{\beta}$和$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$，$\boldsymbol{\gamma}$线性表示。由向量组等价的定义，可知$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$，$\boldsymbol{\beta}$与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$，$\boldsymbol{\gamma}$等价. 3 分

2020--2021 学年第一学期线性代数 D 期末考试试卷 A 卷参考答案

一、单项选择题：

（1）C　　（2）C　　（3）A　　（4）C

二、填空题：

（1）a^4-b^4，　（2）a^3，　（3）任意值，　（4）$(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}$

三、（8 分）计算行列式的值：

$$\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix} \quad \left(a_1a_2a_3 \neq 0\right).$$

解：$$\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1-\frac{1}{a_1}c_2-\frac{1}{a_2}c_3-\frac{1}{a_3}c_4} \begin{vmatrix} a_0-\sum\limits_{i=1}^{3}\frac{1}{a_i} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix}$$ 4 分

$$=a_1a_2a_3(a_0-\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{a_i})\text{。}$$ 4 分

四、证明：

（1）设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，且 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵，证明 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 也是对称矩阵.

证　由题设 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵，有 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，故　2 分

$(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$，　3 分

故 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 也是对称矩阵.　3 分

（2）设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为同阶正交矩阵，证明 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 也为正交矩阵.

证　因 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均为正交矩阵，有

$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{-1}$，$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{-1}$，从而　2 分

$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\right)^{\mathrm{T}}$，　3 分

故 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 是正交矩阵.　3 分

五、（8 分）解矩阵方程

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

解：设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$。　2 分

因

$$\left(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{B}\right)=\left(\begin{array}{ccc:cc}2 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 3 & 2\end{array}\right) \xrightarrow{r}\left(\begin{array}{ccc:cc}1 & 0 & 0 & -2 & -\frac{8}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{2}{3}\end{array}\right),$$ 4 分

得 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}-2 & -\frac{8}{3} \\ 2 & 5 \\ 1 & -\frac{2}{3}\end{pmatrix}$. 2 分

六、(10 分) 设非齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2+ax_3=-1 \\ x_1+x_2+2x_3=b \\ 4x_1+5x_2+10x_3=2\end{cases}$ ，试问：当 a,b 满足什么条件时，方程组有（1）唯一解；（2）无解；（3）有无穷多解，在有无穷多解时，求出对应的齐次线性方程组的基础解系以及该非齐次方程组的通解.

解： 计算可得 $\left|\boldsymbol{A}\right|=a-4$ 。 2 分

（1）当 $a\neq 4$，$\left|\boldsymbol{A}\right|\neq 0$，方程组有唯一解。 2 分

（2）当 $a=4$，对增广矩阵作初等行变换，有

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & b \\ 4 & 5 & 10 & 2\end{pmatrix} \xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & 3-3b\end{pmatrix},$$

当 $b\neq 1$，则 $R(\boldsymbol{A})=2<R(\overline{\boldsymbol{A}})=3$，方程组无解。 2 分

（3）当 $a=4,b=1$，$R(\boldsymbol{A})=R(\overline{\boldsymbol{A}})=2<3$，方程组有无穷多解，此时

$$\overline{\boldsymbol{A}} \xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

故该非齐次方组的通解为 $\begin{pmatrix}x_1 \\ x_2 \\ x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}0 \\ -2 \\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 \\ -2 \\ 0\end{pmatrix}$，$c$ 为任意常数。 2 分

非齐次线性方程组的一个解为 $\boldsymbol{\eta}^*=\begin{pmatrix}3 \\ -2 \\ 0\end{pmatrix}$，对应的齐次线性方程组的基础解系为 $\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}0 \\ -2 \\ 1\end{pmatrix}$。 2 分

七、（10 分）已知n阶方阵$\boldsymbol{A}$的每行元素之和均为a，求$\boldsymbol{A}$的一个特征值.

解：依题设条件，有

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}, \qquad 5 分$$

故a为$\boldsymbol{A}$的一个特征值，$(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$为对应的一个特征向量.　　　5 分

八、（10 分）3 阶实对称矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值为$0,2,2$，对应于特征值0的特征向量为$\boldsymbol{p}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，求出相应于特征值$2$的全部特征向量.

解：设$\boldsymbol{A}$相应于特征值 2 的特征向量为$\boldsymbol{\xi}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，　　　2 分

因为实对称矩阵的不同特征值对应的特征向量相互正交，所以

$$\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}_1=0，得 x_1+x_2+x_3=0， \qquad 2 分$$

得到基础解系$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，　　　3 分

所以$\boldsymbol{A}$相应于 2 的全部特征向量为$\boldsymbol{\xi}=c_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，$c_1,c_2$不同时为零。　　　3 分

九、(8 分) 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$线性相关，而且$\boldsymbol{\beta}$与$\boldsymbol{\gamma}$都不能由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性表示. 证明：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$，$\boldsymbol{\beta}$与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$，$\boldsymbol{\gamma}$等价.

证　因$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$线性相关，故存在一组不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_s$，$\lambda,\mu$，使得$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s+\lambda\boldsymbol{\beta}+\mu\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{0}$。　　　2 分

由$\boldsymbol{\beta}$与$\boldsymbol{\gamma}$都不能由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性表示，可知$\lambda,\mu$均不为零。否则：(1) 若两者均为零，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性相关，与题设矛盾。(2) 若其中之一为零，不妨设$\mu=0$，则$\boldsymbol{\beta}=-\frac{1}{\lambda}(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s)$，$\boldsymbol{\beta}$可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性表示，与题设也矛盾。　　　2 分

从而有

$\boldsymbol{\beta}=-\frac{1}{\lambda}(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s+\mu\boldsymbol{\gamma})$，$\boldsymbol{\beta}$可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\gamma}$线性表示；

$\boldsymbol{\gamma}=-\frac{1}{\boldsymbol{\mu}}(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s+\lambda\boldsymbol{\beta})$，$\boldsymbol{\gamma}$可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}$线性表示；

显然$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$可以由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$，$\boldsymbol{\beta}$和$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$，$\boldsymbol{\gamma}$线性表示。由向量组等价的定义，可知$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$，$\boldsymbol{\beta}$与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$，$\boldsymbol{\gamma}$等价.　　　4 分

十、(6 分)求曲线 $x^2+xy+y^2=1$ 所围成的图形的面积.

解：设 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}$，则有 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=x^2+xy+y^2$，因

$\left|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right|=\left(\lambda-\dfrac{3}{2}\right)\left(\lambda-\dfrac{1}{2}\right)$，故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\dfrac{3}{2},\lambda_2=\dfrac{1}{2}$。 2 分

对应于 λ_1 的特征向量，计算可得：$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$,单位化得 $\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ 1 分

对应于 λ_2 的特征向量，计算可得：$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$,单位化得 $\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ 1 分

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1&1\\1&1\end{pmatrix}$，作正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{p}\boldsymbol{Y}$ 得到 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\dfrac{y_1^2}{2}+\dfrac{y_2^2}{\frac{2}{3}}=1$，由正交变换的

性质及椭圆的面积公式知所求面积为 $\boldsymbol{\pi}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\boldsymbol{\pi}$. 2 分