

武汉大学 2020-2021 学年第一学期期末考试

线性代数 B（A 卷答题卡）

|                   |                     |       |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|-------------------|---------------------|-------|--|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 姓名 _____ 班级 _____ |                     |       | 考 生 学 号  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|                   |                     |       |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 填涂样例              | 正确填涂！<br>错误填涂# \$ % | 注意：事项 | 1.答题前，考生先将自己的姓名、学号填写清楚，并填涂相应的考号信息点。                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |   |
|                   |                     |       | 2.解答题必须使用黑色墨水的签字笔书写，不得用铅笔或圆珠笔作解答题：字体工整、笔迹清楚。       | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
|                   |                     |       | 3.请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答题无效；在草稿纸、试题卷上答题无效。 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
|                   |                     |       | 4.保持卡面清洁，不要折叠、不要弄破。                                | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
|                   |                     |       |  | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |   |
|                   |                     |       |  | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |   |
|                   |                     |       |  | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 |   |
|                   |                     |       |  | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 |   |
|                   |                     |       |  | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 |   |
|                   |                     |       |  | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 |   |

请将选择题、填空题的答案填于此：

一、单项选择题：

(1) \_\_\_\_\_ (2) \_\_\_\_\_ (3) \_\_\_\_\_ (4) \_\_\_\_\_

二、填空题：

(1) \_\_\_\_\_ (2) \_\_\_\_\_ (3) \_\_\_\_\_ (4) \_\_\_\_\_

符号说明：det(**A**) 指方阵 **A** 的行列式；**A**<sup>\*</sup> 指方阵 **A** 的伴随矩阵；**A**<sup>T</sup> 指矩阵 **A** 的转置矩阵；*R*(**A**) 指矩阵 **A** 的秩；**E** 为单位矩阵。

一、单项选择题(每小题 3 分，共 12 分)

(1) 若矩阵  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 0 & -1 & a & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$  的秩为  $R(\mathbf{A}) = 2$ ，则  $a$  的值为\_\_\_\_\_。

(A) 0 (B) 0 或-1 (C) -1 (D) -1 或 1

(2) 设 **A** 为正交矩阵，且  $|\mathbf{A}| = -1$ ，则 **A**<sup>\*</sup> =\_\_\_\_\_。

(A) **A**<sup>T</sup> (B)  $-\mathbf{A}^T$  (C) **A** (D)  $-\mathbf{A}$

(3) 设  $\alpha, \beta$  是  $n$  维列向量， $\alpha^T \beta \neq 0$ ， $n$  阶方阵  $\mathbf{A} = \mathbf{E} + \alpha \beta^T$ ， $n \geq 3$ ，则在 **A** 的  $n$  个特征值中，必然\_\_\_\_\_。

(A) 有  $n$  个特征值等于 1 (B) 有  $n - 1$  个特征值等于 1  
(C) 有 1 个特征值等于 1 (D) 没有 1 个特征值等于 1

(4) 设 **A**, **B** 为  $n$  阶方阵，且秩相等，即  $R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{B})$ ，则\_\_\_\_\_。

(A)  $R(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = 0$ ， (B)  $R(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = 2R(\mathbf{A})$ ，  
(C)  $R(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = 2R(\mathbf{A})$ ， (D)  $R(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \leq R(\mathbf{A}) + R(\mathbf{B})$

二、填空题(每小题 3 分，共 12 分)

(1) 设 **A**<sup>\*</sup> 是  $n$  阶方阵 **A** 的伴随矩阵，行列式  $|\mathbf{A}| = 2$ ，则  $|2\mathbf{A}^*| =$ \_\_\_\_\_。

(2) *D* 中第 2 行元素的代数余子式的和  $\sum_{j=1}^4 A_{2j} =$ \_\_\_\_\_，其中

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

(3) 已知实二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^1 + 2x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2x_2x_3$  正定，则实常数  $a$  的取值范围为\_\_\_\_\_。

(4)  $2n$  阶行列式  $\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{vmatrix} =$ \_\_\_\_\_，其中  $n$  阶矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b \\ 0 & \cdots & b & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

三、计算题(每小题 10 分，共 60 分)

(1) (本题 10 分) 计算  $n$  阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 - m & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - m & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n - m \end{vmatrix}.$$

(2) (本题 10 分)解矩阵方程

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

(3) (本题 10 分) 设非齐次线性方程组  $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = d_1 \\ x_1 - 2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 = d_2 \\ c_1x_1 + c_2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = d_3 \end{cases}$  有 3 个解向量

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix},$$

求此方程组系数矩阵的秩，并求该方程组的通解(其中  $a_i, b_j, c_k, d_l$  为已知常数)。

!

## 1

填涂样例

无解、或有无穷多解. 在有无穷多解时, 求该非齐次方程组的通解并写出对应的齐次线性方程组的基础解系.

(6) (本题 10 分) 在 4 维实向量构成的向量空间  $\mathbb{R}^4$  中, 求  $a$  使  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$  为  $\mathbb{R}^4$  的基, 并求由基  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  到  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$  的过渡矩阵  $P$ , 其中

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \beta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2-a \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \beta_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \beta_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

#### 四、证明题(每题 8 分, 共 16 分)

(1) (本题 8 分) 设  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  是欧氏空间  $V$  的标准正交基, 证明:

$$\beta_1 = \frac{1}{3}(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3), \quad \beta_2 = \frac{1}{3}(2\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3), \quad \beta_3 = \frac{1}{3}(\alpha_1 - 2\alpha_2 - 2\alpha_3),$$

也是  $V$  的标准正交基.

(2) (本题 8 分) 设  $f = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$  是  $n$  元实二次型, 存在  $n$  维实列向量  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ , 使  $\mathbf{x}_1^T \mathbf{A} \mathbf{x}_1 > 0$ ,  $\mathbf{x}_2^T \mathbf{A} \mathbf{x}_2 < 0$ , 证明:

存在  $n$  维列实向量  $\boldsymbol{x}_0 \neq \boldsymbol{0}$ , 使  $\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}_0 = 0$ .