武汉大学 2018-2019 第二学期高等数学 B2 期末试题 A 参考解答

1. （10 分）求曲面 $x^2+y^2+z^2-3x=0$ 在点 $M(1,1,1)$ 处的切平面方程，并求该曲面与平面 $2x-3y+5z-4=0$ 的交线在点 $M(1,1,1)$ 的切线方程.

解： 记 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-3x$，则 $F_x(1,1,1)=-1, F_y(1,1,1)=2, F_z(1,1,1)=2$　5 分

得切平面方程：$-(x-1)+2(y-1)+2(z-1)=0$，即 $-x+2y+2z=3$　8 分

交线的切线方程：$\begin{cases}2x-3y+5z-4=0\\-x+2y+2z-3=0\end{cases}$　10 分

2. （8 分）设函数 $z=f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，$u=x+y, v=x\sin y$，计算 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}=f_1'+f_2'\sin y$　5 分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(f_1'+f_2'\sin y)$$

$$=\frac{\partial f_1'}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f_1'}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\left(\frac{\partial f_2'}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f_2'}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\sin y+f_2'\cos y$$

$$=f_{11}''+f_{12}''x\cos y+(f_{21}''+f_{22}''x\cos y)\sin y+f_2'\cos y$$

$$=f_{11}''+f_{12}''(x\cos y+\sin y)+f_{22}''x\cos y\sin y+f_2'\cos y$$　8 分

3. （9 分）设函数 $f(x,y)=2x^2-6xy+5y^2-2x+2y+3$，

1）求函数 $f(x,y)$ 的极值；

2）写出 $f(x,y)$ 在条件 $x^2+y^2=1$ 下的极值问题的拉格朗日函数（**无需求出条件极值**）.

解：1） $f_x=4x-6y-2=0$， $f_y=10y-6x+2=0$，解得唯一驻点 $(2,1)$；　5 分

此外，$f_{xx}=4, f_{xy}=-6, f_{yy}=10$，可知 $AC-B^2=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=4>0, f_{xx}>0$，因此 $f(x,y)$ 在点 $(2,1)$ 处取得极小值 $f(2,1)=2$；　7 分

2） $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda(x^2+y^2-1)$

$$=2x^2-6xy+5y^2-2x+2y+3+\lambda(x^2+y^2-1)$$　9 分

4. （9 分）计算二重积分 $I=\iint_D(\mathrm{e}^y\sin x+\sqrt{x^2+y^2})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4\}$.

解：由对称性可知 $\iint_D e^y \sin x \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$ 3 分

$$I = 0 + \iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^2 \rho\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho \qquad 7\text{ 分}$$

$$= 2\pi\cdot\frac{1}{3}\rho^3\Big|_1^2 = \frac{14\pi}{3} \qquad 9\text{ 分}$$

5. （9 分）计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}\min\{z,1\}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，其中 Ω 为 $z = 2-(x^2+y^2)$ 与 $z=0$ 所围成的区域.

解： $\iiint\limits_{\Omega}\min\{z,1\}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^2 \min\{z,1\}\,\mathrm{d}z \iint\limits_{x^2+y^2\le 2-z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 5 分

$$= \pi\int_0^2 \min\{z,1\}(2-z)\,\mathrm{d}z$$

$$= \pi\left(\int_0^1 z(2-z)\,\mathrm{d}z + \int_1^2 (2-z)\,\mathrm{d}z\right) \qquad 7\text{ 分}$$

$$= \pi\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right) = \frac{7\pi}{6} \qquad 9\text{ 分}$$

6. （8 分）计算第一类曲线积分 $\int\limits_{\Gamma}\left(x^2+2y^2\right)\mathrm{d}s$，其中 Γ 为圆周 $x^2+y^2+z^2=R^2$，$x+y+z=0$.

解：利用轮换对称性，有 $\int\limits_{\Gamma} x^2\,\mathrm{d}s = \int\limits_{\Gamma} y^2\,\mathrm{d}s = \int\limits_{\Gamma} z^2\,\mathrm{d}s$

$$\int\limits_{\Gamma}\left(x^2+2y^2\right)\mathrm{d}s = \int\limits_{\Gamma}\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}s = \int\limits_{\Gamma} R^2\,\mathrm{d}s \qquad 6\text{ 分}$$

$$= R^2\int\limits_{\Gamma}\mathrm{d}s = R^2\cdot 2\pi R = 2\pi R^3 \qquad 8\text{ 分}$$

7. （9 分）计算积分 $I = \int\limits_{L} 2x(y+\cos y)\,\mathrm{d}x - x^2\sin y\,\mathrm{d}y$，其中 $L: y=\sqrt{2x-x^2}$ 从 $(0,0)$ 到 $(2,0)$.

解：用 L_1 表示是从 $(2,0)$ 到 $(0,0)$ 的线段，利用格林公式有： 3 分

$$I = \int\limits_{L+L_1} - \int\limits_{L_1} 2x(y+\cos y)\,\mathrm{d}x - x^2\sin y\,\mathrm{d}y$$

$$= -\iint\limits_{D}\left(-2x\sin y - 2x(1-\sin y)\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \int\limits_{L_1} 2x(y+\cos y)\,\mathrm{d}x - x^2\sin y\,\mathrm{d}y \qquad 7\text{ 分}$$

$$= \iint\limits_{D} 2x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_0^2 2x\,\mathrm{d}x$$

$$= 2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot\pi + 4 = 4+\pi \qquad 9\text{ 分}$$

8. （9 分）计算积分 $I = \iint\limits_{S} x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + 2y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$， S 为半球面 $z = \sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 取上侧.

解：在 S 上添加圆盘 $S_1=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le R^2\}$ 且取下侧，利用高斯公式，有： 3 分

$$I=\oiint\limits_{S\cup S_1}-\iint\limits_{S_1}x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+2y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(2x+2+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-\iint\limits_{D}0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad 7\text{ 分}$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\frac{3}{2}\cdot\frac{4\pi}{3}\cdot R^3=2\pi R^3 \qquad 9\text{ 分}$$

其中 Ω 为 S 以及 S_1 所围成的区域，D 为 S_1 对应的平面区域.

9. （9 分）将函数 $f(x)=\dfrac{3x}{(2-x)(2x-1)}$ 展开成 x 的幂级数，并写出该幂级数的收敛域.

解：$f(x)=\dfrac{2}{2-x}-\dfrac{1}{1-2x}$；分别展开，有 3 分

$\dfrac{2}{2-x}=\dfrac{1}{1-\frac{x}{2}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{x}{2}\right)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}x^n$，收敛域为 $(-2,2)$

$\dfrac{1}{1-2x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2x)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^n x^n$，收敛域为 $(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$ 7 分

所以，$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}x^n-\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^n x^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2^n}-2^n\right)x^n$，收敛域为 $(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$ 9 分

10. （10 分）已知 $|\vec a|=1,\ |\vec b|=2,\ (\widehat{\vec a,\vec b})=\dfrac{\pi}{3}$，$\vec c=\vec a\times\vec b$，计算 $\vec a\cdot\vec b$ 以及 $(\vec a\times\vec c)\cdot\vec b$.

解：$\vec a\cdot\vec b=|\vec a||\vec b|\cos(\widehat{\vec a,\vec b})=2\cos(\dfrac{\pi}{3})=1$ 6 分

$(\vec a\times\vec c)\cdot\vec b=(\vec b\times\vec a)\cdot\vec c=(\vec b\times\vec a)\cdot(\vec a\times\vec b)=-|\vec a\times\vec b|^2=-(2\sin\dfrac{\pi}{3})=-3$ 10 分

11. （10）设 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n$（令 $(-1)!!=0!!=1$，n 为正整数时 $(2n)!!=2\cdot4\cdot\cdots\cdot(2n-2)\cdot2n$，$(2n-1)!!=1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2n-3)\cdot(2n-1)$），考虑如下问题：

1）求此级数的收敛半径；

2）证明 $S(x)$ 满足 $2(1-x)S'(x)=S(x)$；

3）计算 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2n)!}{(n!)^2\,2^{4n}}$.

解：1）收敛半径 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\dfrac{\big(2(n+1)\big)!!}{(2n+1)!!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2(n+1)}{2n+1}=1$ 3 分

2） $S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}nx^{n-1}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n-2)!!}x^{n-1}$ 5 分

$$2(1-x)S'(x)=(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n-2)!!}x^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n-2)!!}x^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n-2)!!}x^{n}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}x^{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{n}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1-2n)\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{n}=S(x)$$ 7 分

3）利用第 2) 问及 $S(0)=1$ 解微分方程得 $S(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$

另一方面，$\frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}}=\frac{(2n)!}{((2n)!!)^2 2^{2n}}=\frac{(2n-1)!}{(2n)!!}\frac{1}{4^n}$，因此

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}}=S\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$ 10 分