武汉大学 2010-2011 学年第二学期

《高等数学 B2》考试试卷（A 卷）解

一、 计算题：（每题 7 分，共 63 分）

1. 设一平面过原点及点 $(6,-3,2)$，且与平面 $4x-y+2z=8$ 垂直，求此平面的方程.

解、记 $A(6,-3,2)$。$\overrightarrow{OA}=\{6,-3,2\}$，$4x-y+2z=8$ 的法向量 $\vec{n}=\{4,-1,2\}$。取 $\vec{s}=\overrightarrow{OA}\times\vec{n}=\{-4,-4,6\}$。所求平面的方程：$2x+2y-3z=0$。

2. 设 $z=f(xy,yg(x))$，其中 f 具有连续二阶偏导数，函数 $g(x)$ 可导且在 $x=2$ 处取得极值 $g(2)=1$．求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{x=2,\,y=1}$.

解、因为函数 $g(x)$ 可导且在 $x=2$ 处取得极值，所以 $g'(2)=0$。

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1(xy,yg(x))y+f_2(xy,yg(x))yg'(x)，$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=&f_1(xy,yg(x))+(f_{11}(xy,yg(x))x+f_{12}(xy,yg(x))g(x))y\\&+f_2(xy,yg(x))g'(x)+(f_{12}(xy,yg(x))x+f_{22}(xy,yg(x))g(x))yg'(x)\end{aligned}，$$

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{x=2,\,y=1}&=f_1(2,g(2))+(2f_{11}(2,g(2))+f_{12}(2,g(2))g(2))\\&\quad+f_2(2,g(2))g'(2)+(2f_{12}(2,g(2))+f_{22}(2,g(2))g(2))g'(2)\\&=f_1(2,1)+2f_{11}(2,1)+f_{12}(2,1)\end{aligned}$$

3. 设 $z=z(x,y)$ 是由 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 确定的函数，求 $z=z(x,y)$ 的极值点和极值.

解、对 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 两边微分得 $2xdx-6xdy-6ydx+20ydy-2ydz-2zdy-2zdz=0$，

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{x-3y}{y+z},\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{-3x+10y-z}{y+z}$。解 $\begin{cases}x-3y=0\\-3x+10y-z=0\\x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0\end{cases}$ 得 $(9,3,3),(-9,-3,-3)$。

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{y+z},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{-3(y+z)-(x-3y)(1+\frac{\partial z}{\partial y})}{(y+z)^2},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{(10-\frac{\partial z}{\partial y})(y+z)-(-3x+10y-z)(1+\frac{\partial z}{\partial y})}{(y+z)^2}。$$

对于 $(9,3,3)$，$A=\dfrac{1}{6}>0,B=\dfrac{-1}{2},C=\dfrac{5}{3},AC-B^2=\dfrac{1}{36}>0$，$z=z(x,y)$ 的极小值点：$(9,3)$，极小值：$z=3$。

对于 $(-9,-3,-3)$，$A=-\dfrac{1}{6}<0,B=\dfrac{1}{2},C=-\dfrac{5}{3},AC-B^2=\dfrac{1}{36}>0$，$z=z(x,y)$ 的极大值点：$(-9,-3)$，极大值：$z=-3$。

4. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，并设 $\int_0^1 f(x)dx=A$，求 $\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy$.

解、
$$\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy=\int_0^1 dy\int_y^1 f(x)f(y)dx=\frac{1}{2}\left(\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy+\int_0^1 dy\int_y^1 f(x)f(y)dx\right)$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^1 f(x)f(y)dy=\frac{1}{2}A^2$$
。

5. 设 $f(u)$ 具有连续导数，求 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{\pi t^4}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})dxdydz$ 。

解、
$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{\pi t^4}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})dxdydz=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\pi t^4}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^t f(r)r^2\sin\varphi dr$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{4\int_0^t f(r)r^2dr}{t^4}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}=\begin{cases} f'(0), & f(0)=0\\ \infty, & f(0)\ne 0\end{cases}$$
。

6. 计算曲面积分 $\iint\limits_S zdxdy+xdydz+ydxdz$,其中 S 为圆柱面 $x^2+y^2=1$ 被 $z=0,\ z=3$ 截的部分外侧.

解、设 $x^2+y^2=1, z=0, z=3$ 所围圆柱体 Ω 的向外上下底分别为 S_1, S_2 。

$$\iint\limits_{S+S_1+S_2} zdxdy+xdydz+ydxdz=3\iiint\limits_{\Omega}dv=9\pi$$ 。

$$\iint\limits_S zdxdy+xdydz+ydxdz=9\pi-\iint\limits_{S_1} zdxdy+xdydz+ydxdz-\iint\limits_{S_2} zdxdy+xdydz+ydxdz=9\pi-3\pi-0=6\pi$$ 。

7. 将函数 $f(x)=2+|x|\ (-1\le x\le 1)$ 展成以 2 为周期的傅里叶级数。

解、$l=1$，

$$a_0=\int_{-1}^1 f(x)dx=2\int_0^1(2+x)dx=5, a_n=\int_{-1}^1 f(x)\cos(n\pi x)dx=2\int_0^1(2+x)\cos(n\pi x)dx=\frac{2}{n^2\pi^2}((-1)^n-1), b_n=0$$

$$f(x)=\frac{5}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n^2\pi^2}((-1)^n-1)\cos(n\pi x)\quad(-1\le x\le 1)$$ 。

8. 计算二重积分 $I=\iint\limits_D\frac{1+xy}{1+x^2+y^2}dxdy$ ，其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1, x\ge 0\}$.

解、$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\frac{1+\rho^2\cos\theta\sin\theta}{1+\rho^2}\rho d\rho=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\frac{1}{1+\rho^2}\rho d\rho+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta d\theta\int_0^1\frac{\rho^2}{1+\rho^2}\rho d\rho=\frac{\pi\ln 2}{2}$$ 。

9. 求方程 $(1+e^{\frac{x}{y}})dx+e^{\frac{x}{y}}(1-\frac{x}{y})dy=0$ 的通解。

解、($P=(1+e^{\frac{x}{y}}), Q=e^{\frac{x}{y}}(1-\frac{x}{y}), \frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{xe^{\frac{x}{y}}}{y^2}$ ， $(1+e^{\frac{x}{y}})dx+e^{\frac{x}{y}}(1-\frac{x}{y})dy=0$ 是全微分方程。)

$d\left(x+ye^{\frac{x}{y}}\right)=(1+e^{\frac{x}{y}})dx+e^{\frac{x}{y}}(1-\frac{x}{y})dy$ 。方程 $(1+e^{\frac{x}{y}})dx+e^{\frac{x}{y}}(1-\frac{x}{y})dy=0$ 的通解： $x+ye^{\frac{x}{y}}=C$ 。

二、(8 分) 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$ 的收敛性，若收敛，请指出是条件收敛还是绝对收敛。

解、记 $f(x)=\dfrac{1}{x-\ln x}$。$f'(x)=-\dfrac{1-\frac{1}{x}}{\left(x-\ln x\right)^2}<0\quad(x>1)$，$f(x)$ 在 $x>1$ 时单调下降，$f(x)$ 在 $x>1$ 时单调下降。

$\dfrac{1}{n-\ln n}$ 在 $n>1$ 时单调下降，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n-\ln n}=0$。所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n-\ln n}$ 收敛。$\dfrac{1}{n-\ln n}\geq\dfrac{1}{n}$ 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{(-1)^n}{n-\ln n}\right|$ 发散。$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n-\ln n}$ 条件收敛。

三、（10 分）设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有一阶连续导数，L 是上半平面 $(y>0)$ 内从 (a,b) 到 (c,d) 的有向分段光滑曲线，记 $I=\int_L\dfrac{1}{y}[1+y^2f(xy)]dx+\dfrac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]dy.$

(1) 证明：曲线积分 I 与路径 L 无关。　　(2) 当 $ab=cd$ 时，求 I 的值。

解、（1）$P=\dfrac{1}{y}[1+y^2f(xy)],Q=\dfrac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]$。$\dfrac{\partial P}{\partial y}\equiv\dfrac{\partial Q}{\partial x}=f(xy)+xyf'(xy)-\dfrac{1}{y^2}$。故曲线积分 I 与路径 L 无关。

（2）记 $L_1:\begin{cases}x=x\\y=b\end{cases}(x:a\to c),L_2:\begin{cases}x=c\\y=y\end{cases}(y:b\to d)$。

$$
\begin{aligned}
I&=\int_{L_1}\frac{1}{y}[1+y^2f(xy)]dx+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]dy+\int_{L_2}\frac{1}{y}[1+y^2f(xy)]dx+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]dy\\
&=\int_a^c\frac{1}{b}[1+b^2f(bx)]dx+\int_b^d\frac{c}{y^2}[y^2f(cy)-1]dy\\
&=\int_a^c\frac{1}{b}dx-\int_b^d\frac{c}{y^2}dy+\int_a^c bf(bx)dx+\int_b^d cf(cy)dy\\
&=\frac{c-a}{b}+c\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{b}\right)+b\int_a^c f(bx)dx+c\int_b^d f(cy)dy\\
&=\frac{bc-ad}{bd}+\int_{ab}^{bc}f(t)dt+\int_{bc}^{cd}f(t)dt=\frac{bc-ad}{bd}+\int_{bc}^{bc}f(t)dt=\frac{bc-ad}{bd}\quad(ab=cd)
\end{aligned}
$$

四、（9 分）求幂级数 $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{2n}$ 的和函数 $f(x)$ 及其极值。

解、记 $x^2=u$，$s(u)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{u^n}{n}$。$s(0)=0,s'(u)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^nu^{n-1}=-\dfrac{1}{1+u}$，$s(u)=\ln\dfrac{1}{1+u}$。当 $x=\pm1$ 时 $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{2n}$ 收敛。所以，$f(x)=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{2n}=1+\dfrac{1}{2}s(x^2)=1+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{1+x^2}\quad(-1\leq x\leq1)$。

让 $f'(x)=-\dfrac{x}{1+x^2}=0$ 得 $x=0$。$f''(0)=\left.\dfrac{x^2-1}{(1+x^2)^2}\right|_{x=0}=-1<0$。$f(x)$ 的极大值 $f(0)=1$ 而无极小值。

五、（10 分）在变力 $\vec{F}=yz\vec{i}+zx\vec{j}+xy\vec{k}$ 的作用下，质点由原点沿直线运动到椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 上第一卦限

的点 $M(x_0, y_0, z_0)$，问当 x_0, y_0, z_0 取何值时，力 $\vec{F}$ 所作的功最大，并求出最大值。

解、$\overrightarrow{OM}:\begin{cases} x = x_0 t \\ y = y_0 t \ (t: 0 \to 1) \\ z = z_0 t \end{cases}$。外力做功 $W(M) = \int_{\overline{OM}} yzdx + zxdy + xydz = 3\int_0^1 x_0 y_0 z_0 t^2 dt = x_0 y_0 z_0$。

$\begin{cases} W = xyz \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \\ x, y, z > 0 \end{cases}$。作 $L = xyz + \lambda\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1\right)$。解

$$\begin{cases} L_x = yz + \dfrac{2x\lambda}{a^2} = 0 \\ L_y = xz + \dfrac{2y\lambda}{b^2} = 0 \\ L_z = xy + \dfrac{2z\lambda}{c^2} = 0 \\ L_\lambda = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \end{cases}$$

得唯一解 $\begin{cases} x = \dfrac{a}{\sqrt{3}} \\ y = \dfrac{b}{\sqrt{3}} \\ z = \dfrac{c}{\sqrt{3}} \end{cases}$。此时 $W = \dfrac{abc}{3\sqrt{3}}$。根据问题的实际，当 $x_0 = \dfrac{a}{\sqrt{3}}, y_0 = \dfrac{b}{\sqrt{3}}, z_0 = \dfrac{c}{\sqrt{3}}$ 时，力 $\vec{F}$ 所作的功最大，

最大值 $W_{\max} = \dfrac{abc}{3\sqrt{3}}$。