武汉大学 2018-2019 第二学期高等数学 B2 期末试题 A

1. （10 分）求曲面 $x^2+y^2+z^2-3x=0$ 在点 $M(1,1,1)$ 处的切平面方程，并求该曲面与平面 $2x-3y+5z-4=0$ 的交线在点 $M(1,1,1)$ 的切线方程.

2. （8 分）设函数 $z=f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，$u=x+y, v=x\sin y$，计算 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

3. （9 分）设函数 $f(x,y)=2x^2-6xy+5y^2-2x+2y+3$，

   1）求函数 $f(x,y)$ 的极值；

   2）写出 $f(x,y)$ 在条件 $x^2+y^2=1$ 下的极值问题的拉格朗日函数（**无需求出条件极值**）.

4. （9 分）计算二重积分 $I=\iint_D(\mathrm{e}^y\sin x+\sqrt{x^2+y^2})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4\}$.

5. (9 分) 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} \min\{z,1\} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，其中 Ω 为 $z = 2-(x^2+y^2)$ 与 $z=0$ 所围成的区域.

6. (8 分) 计算第一类曲线积分 $\int\limits_{\Gamma} (x^2+2y^2)\,\mathrm{d}s$，其中 Γ 为圆周 $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x+y+z=0$.

7. (9 分) 计算积分 $I = \int\limits_{L} 2x(y+\cos y)\,\mathrm{d}x - x^2 \sin y\,\mathrm{d}y$，其中 $L: y=\sqrt{2x-x^2}$ 从 $(0,0)$ 到 $(2,0)$.

8. (9 分) 计算积分 $I = \iint\limits_{S} x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + 2y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，$S$ 为半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 取上侧.

9. （9 分）将函数 $f(x)=\dfrac{3x}{(2-x)(2x-1)}$ 展开成 x 的幂级数，并写出该幂级数的收敛域.

10. （10 分）已知 $|\vec{a}|=1,\ |\vec{b}|=2,\ (\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\dfrac{\pi}{3},\ \vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$，计算 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 以及 $(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{b}$.

11. （10）设 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{n}$（令 $(-1)!!=0!!=1$，n 为正整数时 $(2n)!!=2\cdot4\cdot\cdots\cdot(2n-2)\cdot2n$，

$(2n-1)!!=1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2n-3)\cdot(2n-1)$），考虑如下问题：

1）求此级数的收敛半径；

2）证明 $S(x)$ 满足 $2(1-x)S'(x)=S(x)$；

3）计算 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2n)!}{(n!)^{2}2^{4n}}$.