Phần I

Câu 1:

$$A=\begin{bmatrix}6&5\\3&2\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}4&3\\2&1\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}34&59\\16&11\end{bmatrix} => tr(AB)=34+11=45$$

$$BA=\begin{bmatrix}33&26\\15&12\end{bmatrix} => tr(BA)=33+12=45$$

Vậy $tr(AB)=tr(BA)$

Câu 2:

Gọi a_{ij} ; b_{ij} với $1\le i, j\le n$ lần lượt là các tử của 2 ma trận A,B

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}&a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}\\a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}&a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\end{bmatrix} => tr(AB)=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}$$

$$BA=\begin{bmatrix}a_{11}b_{11}+a_{21}b_{12}&a_{12}b_{11}+a_{22}b_{12}\\a_{11}b_{21}+a_{21}b_{22}&a_{12}b_{21}+a_{22}b_{22}\end{bmatrix} => tr(AB)=a_{11}b_{11}+a_{21}b_{12}+a_{12}b_{21}+a_{22}b_{22}$$

Vậy $tr(AB)=tr(BA)$

Câu 3:

Gọi a_{ij} ; b_{ij} với $1 \le i, j \le n$ lần lượt là các tử của 2 ma trận A,B

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} ;\ B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

Ta có $[AB]_{ij} = \sum_{h=1}^{n} a_{ih} b_{hj}$; $[BA]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} b_{ik}$ và $tr(AB) = \sum_{g=1}^{n} [AB]_{gg}; tr(BA) = \sum_{l=1}^{n} [BA]_{ll}$

Suy ra $tr(AB) = \sum_{g=1}^{n} [AB]_{gg} = \sum_{g=1}^{n} \sum_{h=1}^{n} a_{gh} b_{hg}$ và $tr(BA) = \sum_{l=1}^{n} [BA]_{ll} = \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{kl} b_{lk}$

Mà ta lại chứng minh được với $n = 2$ thì $tr(AB) = tr(BA)$.(Bài 2)

*Ta sử dụng qui nạp để chứng minh bài toán.

Giả sử $tr(AB) = tr(BA)\ (1)$ đúng tới $n = t$.

Ta cần chứng minh $tr(AB) = tr(BA)$ đúng với $n = t + 1$

Từ giả thiết qui nạp, ta có $\sum_{g=1}^{t} \sum_{h=1}^{t} a_{gh} b_{hg} = \sum_{l=1}^{t} \sum_{p=1}^{t} a_{pl} b_{lp}$

Ta cộng thêm 2 vế của phương trình với

$\sum_{k=1}^{t} a_{k(t+1)} b_{(t+1)k} + \sum_{k=1}^{t} a_{(t+1)k} b_{k(t+1)} + a_{(t+1)(t+1)} b_{(t+1)(t+1)}$

Ta được:

$$VT=\sum_{g=1}^{t}\sum_{h=1}^{t}a_{gh}b_{hg}+\sum_{k=1}^{t}a_{k(t+1)}b_{(t+1)k}+\sum_{k=1}^{t}a_{(t+1)k}b_{k(t+1)}+a_{(t+1)(t+1)}b_{(t+1)(t+1)}$$

$$=\left(\sum_{h=1}^{t}\left(a_{1h}b_{h1}+a_{2h}b_{h2}+...+a_{th}b_{ht}\right)+\sum_{k=1}^{t+1}a_{k(t+1)}b_{(t+1)k}\right)+\left(\sum_{k=1}^{t}a_{(t+1)k}b_{k(t+1)}+a_{(t+1)(t+1)}b_{(t+1)(t+1)}\right)$$

$$=\sum_{h=1}^{t+1}\left(a_{1h}b_{h1}+a_{2h}b_{h2}+...+a_{th}b_{ht}\right)+\sum_{k=1}^{t+1}a_{(t+1)k}b_{k(t+1)}$$

$$=\sum_{g=1}^{t}\sum_{h=1}^{t+1}a_{gh}b_{hg}+\sum_{k=1}^{t+1}a_{(t+1)k}b_{k(t+1)}$$

$$=\sum_{g=1}^{t+1}\sum_{h=1}^{t+1}a_{gh}b_{hg}$$

Ta có được điều tương tự ở vế phải của phương trình

$$VP=\sum_{l=1}^{t}\sum_{p=1}^{t}a_{pl}b_{lp}+\sum_{k=1}^{t}a_{k(t+1)}b_{(t+1)k}+\sum_{k=1}^{t}a_{(t+1)k}b_{k(t+1)}+a_{(t+1)(t+1)}b_{(t+1)(t+1)}$$

$$=\left(\sum_{l=1}^{t}\left(a_{1l}b_{l1}+a_{2l}b_{l2}+...+a_{tl}b_{lt}\right)+\sum_{k=1}^{t+1}a_{k(t+1)}b_{(t+1)k}\right)+\left(\sum_{k=1}^{t}a_{(t+1)k}b_{k(t+1)}+a_{(t+1)(t+1)}b_{(t+1)(t+1)}\right)$$

$$=\sum_{l=1}^{t+1}\left(a_{1l}b_{l1}+a_{2l}b_{l2}+...+a_{tl}b_{lt}\right)+\sum_{k=1}^{t+1}a_{(t+1)k}b_{k(t+1)}$$

$$=\sum_{p=1}^{t}\sum_{l=1}^{t+1}a_{pl}b_{lp}+\sum_{k=1}^{t+1}a_{(t+1)k}b_{k(t+1)}$$

$$=\sum_{g=1}^{t+1}\sum_{h=1}^{t+1}a_{pl}b_{lp}$$

Vậy với 2 ma trận A,B vuông nxn, ta luôn có $tr\left(AB\right)=tr\left(BA\right)$

Câu 4:

Gọi a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} với $1 \le i, j \le n$ lần lượt là các tử của 3 ma trận A,B,C

Ta có được:

$$\begin{cases} [AB]_{ij} = \sum_{h=1}^{n} a_{ih} b_{hj} \\ [BC]_{ij} = \sum_{h=1}^{n} b_{ih} c_{hj} \\ [CA]_{ij} = \sum_{h=1}^{n} c_{ih} a_{hj} \end{cases}$$

Suy ra:

$$\begin{cases} [ABC]_{ij} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{h=1}^{n} a_{ih} b_{hk} c_{kj} \\ [BCA]_{ij} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{h=1}^{n} b_{ih} c_{hk} a_{kj} \\ [CAB]_{ij} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{h=1}^{n} b_{ih} a_{hk} b_{kj} \end{cases}$$

Khi đó, ta được:

$$\begin{cases} tr(ABC) = \sum_{i=1}^{n} [ABC]_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{h=1}^{n} a_{ih} b_{hk} c_{ki} \\ tr(BCA) = \sum_{i=1}^{n} [BCA]_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{h=1}^{n} b_{ih} c_{hk} a_{ki} \\ tr(CAB) = \sum_{i=1}^{n} [CAB]_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{h=1}^{n} c_{ih} a_{hk} b_{ki} \end{cases}$$

Gọi $a_{mp} b_{pq} c_{qm}$ là một số hạng bất kì trong biểu thức $tr(ABC)$. Ta sẽ chứng minh có số hạng giống như vậy trong biểu thức $tr(BCA)$ và $tr(CAB)$.

Trong biểu thức $tr(BCA)$, với $i = p; k = m; h = q$, sẽ có số hạng $b_{pq} c_{qm} a_{mp}$ duy nhất.

Tương tự, Trong biểu thức $tr(CAB)$, với $i = q; k = p; h = m$, sẽ có số hạng $c_{qm} a_{mp} b_{pq}$ duy nhất

Vậy ta đã chứng minh được cả 3 biểu thức $tr(ABC), tr(CAB), tr(BCA)$ có chung tất cả số hạng.

Do đó, $tr(ABC) = tr(CAB) = tr(BCA)$.

Câu 5:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Ta có:

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & -9 \\ 22 & 36 \end{bmatrix}$$

$$CB = \begin{bmatrix} 19 & 9 \\ 13 & 27 \end{bmatrix}$$

Suy ra:

$$ABC = \begin{bmatrix} -26 & -28 \\ 248 & 130 \end{bmatrix} => tr(CBA) = -26 + 130 = 104$$

$$CBA = \begin{bmatrix} 64 & 17 \\ 148 & 95 \end{bmatrix} => tr(CBA) = 64 + 95 = 159$$

Vậy $tr(ABC) \neq tr(CBA)$