Phần V

Câu 1:

Như đã chứng minh ở phần 1, ta có các điều kiện rang buộc sau đối với s_1, s_2, r :

$$\begin{cases} r \le \dfrac{\sqrt{3}s_2 - s_1}{2} \\ r \le 18 - s_1 \\ r \le 18 - s_2 \\ r \le \dfrac{\sqrt{3}s_1 - s_2}{2} \\ r \ge 0 \end{cases}$$

Nhận thấy tứ giác ABCD là tứ giác ngoại tiếp đường tròn (vì có tổng 2 cặp cạnh đối bằng nhau)

Do đó, với một đường tròn $(S;r)$ nằm trong tứ giác ABCD, bán kính r đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $(S;r)$ là đường tròn nội tiếp tứ giác ABCD.

Khi đó khoảng cách từ điểm $S(s_1;s_2)$ tới các cạnh của tứ giác ABCD đều bằng nhau và bằng bán kính để $r_{\max}$ lớn nhất có thể cắt được. Ta có được hệ sau:

$$\begin{cases} r_{\max} = \dfrac{\sqrt{3}s_2 - s_1}{2} \\ 18 - s_2 = 18 - s_1 \\ \dfrac{\sqrt{3}s_2 - s_1}{2} = \dfrac{\sqrt{3}s_1 - s_2}{2} \\ 18 - s_1 = \dfrac{\sqrt{3}s_1 - s_2}{2} \\ r \ge 0 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình sau ta được:

$$\begin{cases} r_{\max} = 36 - 18\sqrt{3} \\ s_1 = -18 + 18\sqrt{3} \\ s_2 = -18 + 18\sqrt{3} \end{cases}$$

Vậy cái đế hình tròn có diện tích lớn nhất có thể cắt được từ tứ giác ABCD là khoảng $73{,}08\, cm^2$(hay $\left(2268 - 1296\sqrt{3}\right)\pi\ cm^2$) với bán kính bằng $36 - 18\sqrt{3}\ cm$

Câu 2:

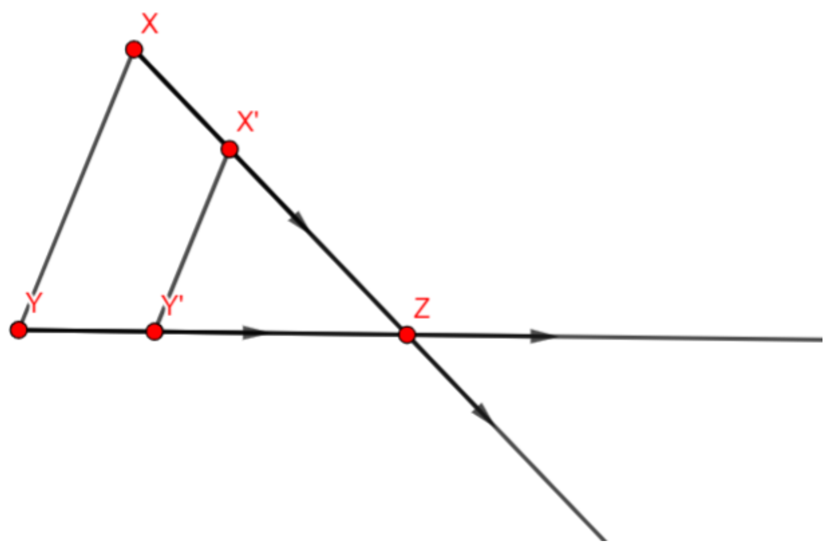
1) Link code Github: Phần V Câu 2
2) Thuật Toán
   - Thay tọa độ các giao điểm vào hệ bất phương trình (hàm điều kiện), nếu không có điểm nào thỏa thì in INVALID
   - Nếu có đỉnh thỏa thì đếm số đỉnh thỏa rồi lưu vào n
   - Nếu có ta tiếp tục tìm góc mở của vùng nghiệm giữa 2 cạnh kề nhau của miền nghiệm
   - Nếu tổng các góc này bằng đúng tổng các góc trong một đa giác lồi n cạnh thì ta làm như bài toán ở phần III
   - Nếu tổng các góc này khác tổng các góc trong đa giác n đỉnh hoặc n=1. Ta sẽ tìm hai cạnh biên (cạnh chỉ chứa đúng một điểm cực trị và là biên của miền nghiệm) của miền nghiệm. Điểm cực trị duy nhất trên đó ta sẽ gọi là điểm cực trị biên.
   - Ta thay giá trị của tất cả các điểm cực trị thỏa vào hàm mục tiêu tìm max
   - Nếu max nằm ở điểm không phải điểm cực trị biên thì in ra rồi DỪNG
   - Nếu max nằm ở điểm cực trị biên, ta cộng hoặc trừ tọa độ của điểm cực trị biên với vecto chỉ phương của cạnh biên chứa nó, xong thay vào hàm điều kiện.
   - Nếu thỏa ta tiếp tục thay vào hàm mục tiêu và so sánh với giá trị khi thay bằng tọa độ của điểm cực trị biên.
   - Nếu kết quả là lớn hơn in INFINITE
   - Nếu kết quả là bé hơn in giá trị của hàm mục tiêu khi thay tọa độ của điểm cực trị biên.

Câu 3:

Ta chứng minh bài toán nhỏ sau:

(1) Cho 2 người ở 2 điểm X,Y phân biệt, đi theo hai phương không song song với mỗi người có một vận tốc xác định, không đổi và găp nhau tại Z sau một khoảng thời gian t_0.
Chứng minh rằng: đoạn thẳng nối hai người này luôn song song với một đường thẳng cố định sau một khoảng thời gian t bất kì $(t \neq t_0)$.

- Chứng minh:



Gọi X',Y' là vị trí hai người sau khi di chuyển một khoảng thời gian $t(t \neq t_0)$
Dựa vào hình vẽ, ta có thể chứng minh $\triangle ZYX \backsim \triangle ZY'X'$
Từ đó suy ra $YX \parallel Y'X'$
Vậy 2 người này luôn di chuyển trên cùng một đường thẳng song song với đường thẳng nối hai người lúc xuất phát(cố định)

Áp dụng (1) ta tiếp tục chứng minh một bài toán nữa:

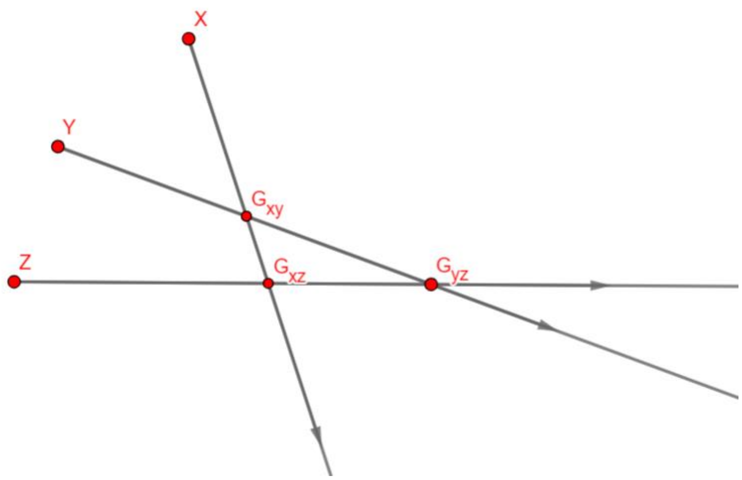
(2) Cho 3 người ở 3 điểm X,Y,Z phân biệt, đi theo ba phương đôi một không song song với nhau, mỗi người có một vận tốc xác định, không đổi. Họ đôi một găp nhau tại G_{XY}, G_{YZ}, G_{ZX} sau một khoảng thời gian t_0.
Chứng minh rằng:

- Vị trí xuất phát của 3 người nằm trên cùng một đường thẳng

- Trong cùng một thời điểm, vị trí cả 3 người sau khi bắt đầu di chuyển luôn nằm trên một đường thẳng song song với một đường thẳng cố định sau một khoảng thời gian t bất kì $(t \neq t_0)$

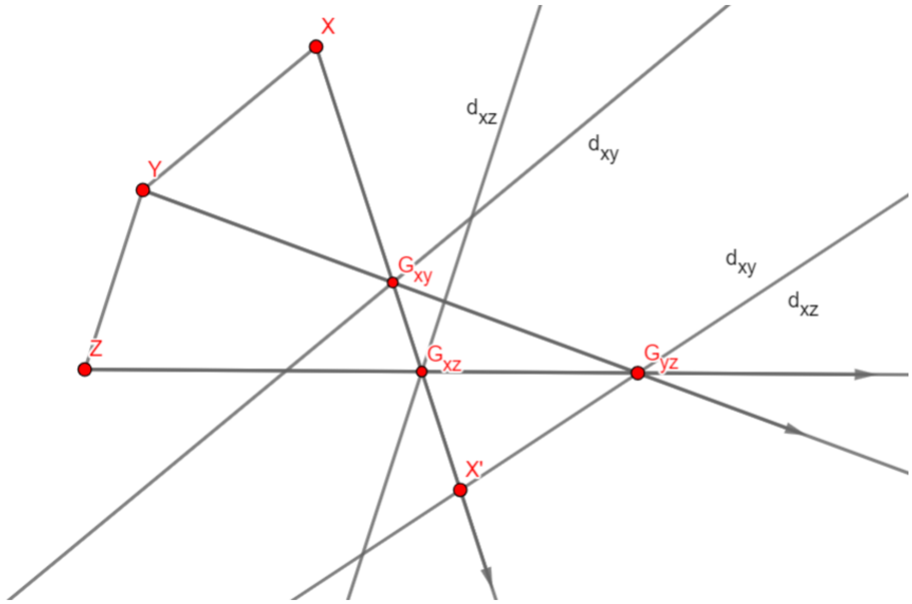
- Chứng minh:

  Không mất tính tổng quát, ta giả sử thứ tự gặp nhau của 3 người như hình sau.



Gọi d_{XY}, d_{XZ} lần lượt là đường thẳng nối hai người X,Y và X,Z trong suốt quá trình di chuyển được biểu diễn như trên hình.
Ta nhận thấy khi Y và Z gặp nhau, Vị trí của Y,Z trùng nhau tại điểm G_{YZ}. Gọi X' là vị trí của X tại thời điểm đó

Vậy khi đó 2 đường thẳng d_{XY}, d_{XZ} cùng đi qua hai điểm X' và G_{YZ}



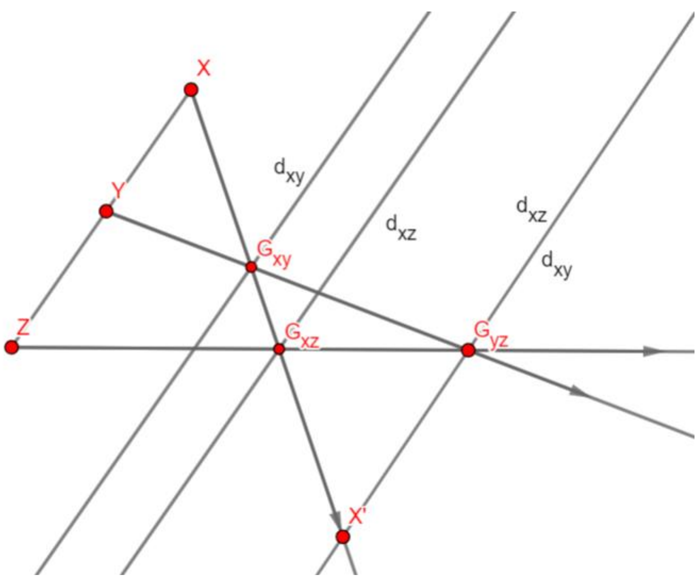
Mà theo (1):

Đường thẳng d_{XY} luôn song song với XY

Đường thẳng d_{XZ} luôn song song với XZ

Ta suy ra $XY \,//\, XZ$

Theo tiên đề Ơ-clit, X,Y,Z thẳng hàng.

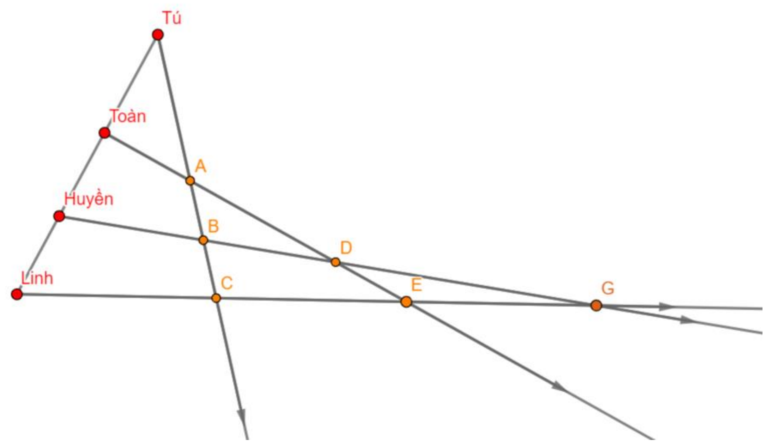


Khi đó, d_{XY}, d_{XZ} luôn song song hoặc trùng nhau

Vậy vị trí cả 3 người sau khi bắt đầu di chuyển luôn nằm trên một đường thẳng song song với đường thẳng đi qua vị trí lúc đầu của 3 người (cố định)

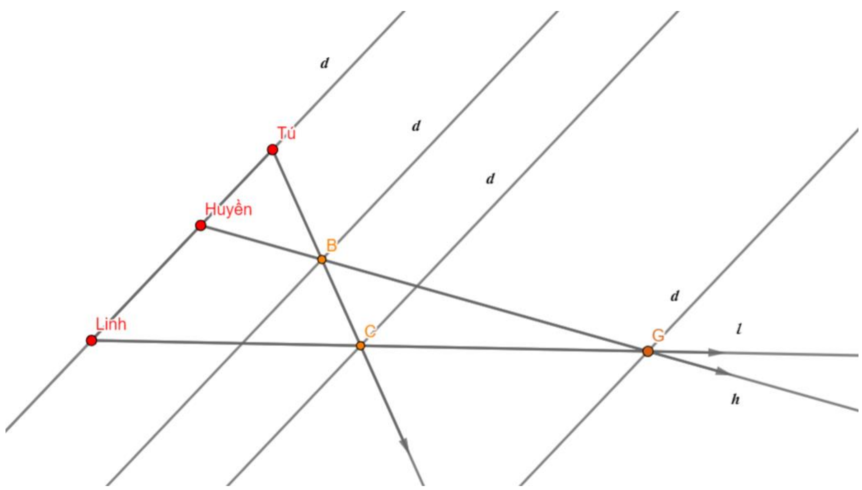
Quay lại bài toán chính:

Áp dụng (2) cho từng bộ 3 người đôi một gặp nhau Tú, Toàn, Huyền và Tú, Toàn, Linh. Ta suy ra được vị trí xuất phát của Tú, Toàn, Huyền nằm trên một đường thẳng và vị trí xuất phát của Tú, Toàn, Linh cũng nằm trên một đường thẳng.



Vậy vị trí xuất phát lúc đầu của cả 4 người đều nằm trên một đường thẳng và khi di chuyển, trong cùng một thời điểm, vị trí cả 4 người sau khi bắt đầu di chuyển luôn nằm trên một đường thẳng song song với đường thẳng nối 4 người ban đầu.

Khi đó vị trí của 3 người Tú, Huyền, Linh sẽ luôn trên nằm trên một đường thẳng (d) và đường này luôn giao với đường đi của Huyền (h) và Linh (l).



Vậy Huyền và Linh có gặp nhau và thời điểm họ gặp nhau chính là khi 3 đường thẳng d,l,h đồng quy tại chính điểm hai người này gặp nhau.