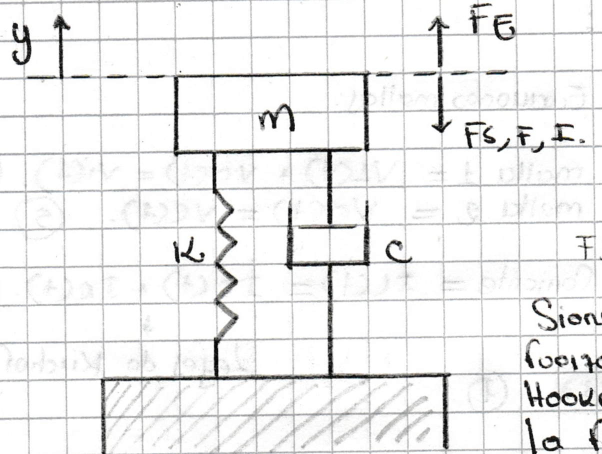
Parcial 3 – Señales y Sistemas.

Primer punto: Lazo Abierto.

- Función de transferencia sistema masa, resorte, amortiguador:



Para encontrar la ecuación diferencial del sistema, se toman en cuenta las variables del diagrama de fuerza; es decir, se deben considerar las fuerzas en equilibrio ejercidas sobre la masa:

$$F_S(t) + F_F(t) + F_I(t) = F_E(t) \quad \text{eq 1.}$$

Siendo $F_E(t)$ una fuerza externa, $F_S(t)$ la fuerza inducida por el resorte dada por la ley de Hooke, $F_F(t)$ la fuerza de fricción y $F_I(t)$ la fuerza inercial por la aceleración de la masa.

Cada una definida como:

$$F_S(t) = K y(t) \; ; \; F_F(t) = c \frac{\partial y(t)}{\partial t} \; ; \; F_I(t) = m \frac{\partial^2 y(t)}{\partial t^2}$$

Reemplazando en eq 1, y organizando términos se obtiene:

$$m \frac{\partial^2 y(t)}{\partial t^2} + c \frac{\partial y(t)}{\partial t} + K y(t) = F_E(t)$$

En donde $F_E(t)$ se puede interpretar como la entrada de un SLIT y $y(t)$ como la señal de salida al ser el desplazamiento de la masa.

Para hallar la función de transferencia que describe el sistema se pasa al dominio de Laplace.

$$F_E(s) = m s^2 y(s) + c s y(t) + K y(s)$$

Factorizando:

$$F_E(s) = y(s)[m s^2 + c s + K]$$

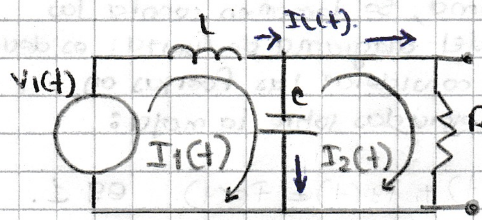
Haciendo la relación de entrada / salida para hallar su función de transferencia, se obtiene:

$$\frac{F_E(s)}{y(s)} = \frac{1}{m s^2 + c s + K}$$

Siendo su forma canónica la siguiente:

$$H(s) = \frac{1/m}{s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m}}$$

- Función de transferencia circuito RLC:



Ecuaciones mallas:

malla 1 = $V_L(t) + V_C(t) = V_i(t)$ (4)

malla 2 = $V_C(t) = V_R(t)$. (5)

Corriente = $I_L(t) = I_C(t) + I_R(t)$ (6).

↓

Leyes de Kirchoff.

Tensión y corriente en componentes:

Corriente Capacitor = $I_C(t) = C\frac{dV_C(t)}{dt}$ (1)

Voltaje Inductor = $V_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$ (2)

Corriente Resistencia = $I_R(t) = \frac{V_R(t)}{R}$ (3) → Ley de Ohm

Reemplazando las ecuaciones 2 y 3 en 4, tenemos que:

$$V_i(t) = L\frac{d}{dt}\left(I_C(t) + I_R(t)\right) + V_C(t) \quad (7)$$

Reemplazando las ecuaciones 1 y 3 en 7:

$$V_i(t) = L\frac{d}{dt}\left[C\frac{dV_C(t)}{dt} + \frac{V_R(t)}{R}\right] + V_C(t). \quad (8)$$

Simplificando y teniendo en cuenta que $V_C(t) = V_R(t)$ porque los componentes están conectados en paralelo, tenemos que:

$$V_i(t) = LC\frac{d^2}{dt}V_R(t) + \frac{L}{R}\frac{d}{dt}V_R(t) + V_R(t). \quad (9)$$

Aplicando Laplace a la ecuación 9, obtenemos; y factorizando:

$$V_i(s) = V_R(s)\left[LCs^2 + \frac{L}{R}s + 1\right]$$

Haciendo la función de transferencia y su forma canónica:

$$\frac{V_i(s)}{V_R(s)} = \frac{1}{LCs^2 + L/Rs + 1} \longrightarrow H(s) = \frac{1/LC}{s^2 + 1/RCs + 1/LC}$$

Valores tipos de Sistemas.

Sistema Masa-Resorte:

- Subamortiguado:

Si tomamos la función de transferencia del sistema masa-resorte en su forma no canónica, hallamos los valores necesarios para que el sistema sea subamortiguado, teniendo en cuenta que:

ξ = factor de amortiguamiento $\quad 0 < \xi < 1$: SLIT subamortiguado.

$$G(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k} \qquad \begin{aligned} m &= a_2 \\ c &= a_1 \\ k &= a_0 \end{aligned}$$

Para hallar:

ω_n: frecuencia natural no amortiguada.
ω_d: frecuencia natural amortiguada.
T_p: tiempo pico.
T_s: Tiempo de establecimiento.
K: constante.

Tenemos en cuenta que:

$$K = \frac{1}{a_0}, \quad \omega_n^2 = \frac{a_0}{a_2}$$

$$\xi = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0 a_2}} \qquad \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} \qquad T_s = \frac{3}{\xi\omega_n}$$

Entonces, si tomamos:

$m = a_2 = 4$
$c = a_1 = 2$
$k = a_0 = 1.$

$$\xi = \frac{2}{2\sqrt{1 \cdot 4}} = 0.5 \rightarrow 0 < \xi < 1. ; \quad K = \frac{1}{1} = 1.$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{1}{4}} = 0.5, \quad \omega_d = 0.5\sqrt{1-0.5^2} = 0.4330.$$

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{0.433} = 7.2554, \quad T_s = \frac{3}{0.5 \times 0.43} = 13.8568.$$

RLC

- Subamortiguado =

Haciendo la comparación con la función de transferencia del sistema masa-resorte:

$$G(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k} = \frac{1}{LCs^2 + \frac{L}{R}s + 1.}$$

Tenemos que:

$CL = m = 4$

$\frac{L}{R} = C = 2$

$K = 1 = 1$

Despejando:

$L = 40H$

$C = 100mF$

$R = 20\Omega.$

Entonces, la G(s) en su forma no canónica es:

$$G(s) = \frac{1}{LCs^2 + \frac{L}{R}(s) + 1} = \frac{1}{4s^2 + 2s + 1}$$

Con esto es posible encontrar los valores $\omega n, \omega d, tp, ts, \mathcal{E}$:

$$\mathcal{E} = \frac{2}{2\sqrt{1 \cdot 4}} = 0.5 \rightarrow \text{Subamortiguado.}$$

$$\omega n = \sqrt{\frac{1}{4}} = 0.5$$

Es posible comprobar que los sistemas son equivalentes, pues tienen las mismas frecuencias y tiempos.

$$\omega d = 0.5\sqrt{1 - 0.5^2} = 0.4330$$

$$Tp = \frac{\pi}{0.433}$$

$$Ts = \frac{3}{0.5 * 0.43} = 13.85$$

Sistema Masa-Resorte:

- Sobreamortiguado:

Para que un sistema sea sobreamortiguado su factor de amortiguamiento debe ser mayor a 1, por esto se toman los valores de:

$m = 1.$

$c = 4$

$K = 1.$

Por lo tanto, la ecuación: $\xi = \frac{4}{2\sqrt{1 \cdot 1}} = 2$

Teniendo este dato, es posible calcular las frecuencias y tiempos:

$$K = \frac{1}{1} = 1.$$

$$\omega n = \sqrt{\frac{1}{1}} = 1$$

$$\omega d = 1\sqrt{4-1} \approx 1.732$$

$$Tp = \frac{\pi}{1\sqrt{4-1}} \approx 1.8137$$

$$Ts = \frac{3}{2 \cdot 1} = \frac{3}{2}$$

RLC:

- Sobreamortiguado:

Haciendo la comparación con la función de transferencia del sistema masa-resorte, encontramos los valores del sistema RLC.

$$G(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k} = \frac{1}{LCs^2 + \frac{L}{R}s + 1}$$

Entonces:

$CL = m = 1$

$\frac{L}{R} = C = 4$

$K = 1 = 1$

Despejando:

$L = 10H$

$R = 2.5\Omega$

$C = 100mF$

Función de transferencia forma no canónica:

$$G(s) = \frac{1}{LCs^2 + \frac{L}{R}(s) + 1} = \frac{1}{1s^2 + 4s + 1}.$$

Por lo tanto, las frecuencias y los tiempos, teniendo en cuenta las fórmulas son:

$K = \frac{1}{1} = 1$

$\omega n = \sqrt{\frac{1}{1}} = 1$

$\omega d = 1\sqrt{4-1} \approx 1.732$

$Ts = \frac{3}{2 \cdot 1} = \frac{3}{2}$

$TP = \frac{\pi}{1\sqrt{4-1}} \approx 1.8137$

Sistema Masa Resorte.

- Amortiguamiento Crítico.

Para que un sistema tenga amortiguamiento crítico su factor de amortiguamiento Es debe ser igual a 1,

Se toman los siguientes valores teniendo en cuenta esta condición.

$m = a_2 = 1.$

$C = a_1 = 2$

$K = a_0 = 1$

Por lo tanto. $\mathcal{E}_2 = \frac{2}{2\sqrt{1 \cdot 1}} = 1.$

Teniendo este valor, entonces:

$\omega n = \sqrt{\frac{1}{1}} = 1$ $\quad \omega d = 1\sqrt{1-1} = 0$ $\quad TP = \frac{\pi}{0\sqrt{1-1}} =$ Indefinido.

$Ts = \frac{3}{1} = 3.$

En este sistema, la frecuencia natural amortiguada ωd es cero ya que el sistema no exhibe oscilaciones, resultando en una respuesta donde el sistema retorna a su posición de equilibrio sin oscilaciones debido al amortiguamiento crítico que disipa la energía del sistema sin generación de oscilaciones posteriores.

RLC.

- Amortiguamiento Crítico.

Si hacemos la comparación con el sistema masa-resorte podemos encontrar los valores del RLC, siendo:

$CL = M = 1$ Despejando:

$\frac{L}{R} = C = 2$ $L = 10H$

$C = 100mF \rightarrow$ Valor comercial del capacitor.

$K = 1 = 1$ $R = 5\Omega$.

Por lo tanto la función de transferencia en su forma no canónica es:

$$G(s) = \frac{1}{LCs^2 + \frac{L}{R}s + 1} = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

Encontramos las frecuencias naturales y los tiempos de pico máximo y establecimiento.

$$\xi = \frac{2}{2\sqrt{1 \cdot 1}} = 1 \qquad \omega_n = \sqrt{\frac{1}{1}} = 1. \qquad \omega_d = 1\sqrt{1-1} = 0$$

$$T_s = \frac{3}{1} = 3 \qquad T_P = \frac{\pi}{0} = \text{Indefinido}.$$

Lazo Cerrado: Para encontrar la función de transferencia en un sistema lazo cerrado se usa la siguiente ecuación:

$$HLC(s) = \frac{H(s)}{1 + A(s)H(s)}$$

siendo $H(s)$ la función de transferencia en lazo abierto.

$A(s)$ valor que tomaremos como 1 y significa la función de transferencia de la retroalimentación o el controlador.

Entonces la función $HLC(s)$ para el sistema masa-resorte estaría dada por:

Sistema masa-resorte

$$HLC(s) = \frac{\frac{1}{ms^2 + cs + k}}{1 + \frac{1}{ms^2 + cs + k}} = \frac{\frac{1}{\cancel{ms^2 + cs + k}}}{\frac{ms^2 + cs + k + 1}{\cancel{ms^2 + cs + k}}}$$

$$= \frac{1}{ms^2 + cs + k + 1}$$

Sistema RLC:

$$HLC(S) = \frac{\frac{1}{LCS^2 + \frac{L}{R}S + 1}}{1 + \frac{1}{LCS^2 + \frac{L}{R}S + 1}} = \frac{\frac{1}{\cancel{LCS^2 + \frac{L}{R}S + 1}}}{\frac{LCS^2 + \frac{L}{R}S + 1 + 1}{\cancel{LCS^2 + \frac{L}{R}S + 1}}}$$

$$HLC(S) = \frac{1}{LCS^2 + \frac{L}{R}S + 2}.$$

Haciendo la comparación entre ambos circuitos, tenemos que:

$$HLC(S)_1 = \frac{1}{ms^2 + cs + K} = \frac{1}{LCS^2 + \frac{L}{R}S + 2}$$

Por tanto:

Tomamos el sistema masa-resorte en lazo abierto para encontrar mejores valores para el sistema:

$m = LC$

$c = \frac{L}{R}$

$K = 2.$

Tipos de Sistemas:

Como en el proceso anterior para encontrar cada tipo de sistema, se escogen valores para m, c y k y se comparan con los del sistema RLC.

Teniendo en cuenta las siguientes fórmulas y relaciones:

$m = a_2 = LC$

$c = a_1 = L/R$

$K = a_0 = 2$

$$\xi = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0 a_2}} \qquad \omega n^2 = \frac{a_0}{a_2} \qquad \omega d = \omega n\sqrt{1-\xi^2}$$

$$Tp = \frac{\pi}{\omega n\sqrt{1-\xi^2}} \qquad Ts = \frac{3}{\xi \cdot \omega n}$$

Sistema subamortiguado RLC: $0 < \xi < 1.$

Tomando

$m = 1 = LC$

$c = 1 = L/R$

$K = 2 = 2$

Para despejar las variables tomamos $C = 100mF$ ya que es un valor comercial:

$L \cdot 100mF = 1.$ $\quad L = 10H$

$\frac{10H}{R} = 1.$ $\quad R = 10\Omega.$

$C = 100mF.$

$$\xi = \frac{1}{2\sqrt{2 \cdot 1}}$$

$\xi = 0.35 \rightarrow$ Subamortiguado $0 < 0.35 < 1.$

Por lo tanto:

$K = \frac{1}{a_0} = \frac{1}{2} = 0.5.$ → Representa una ganancia.

$\omega_n = \sqrt{\frac{2}{1}} \approx 1.41$ → frecuencia natural no amortiguada.

$\omega_d = 1.41\sqrt{1-\xi^2} = 1.32$ → Frecuencia natural amortiguada.

$T_P = \frac{\pi}{1.32} = 2.378$ → Tiempo pico.

$T_s = \frac{3}{0.35 \cdot 1.41} = 6.079$ → Tiempo de establecimiento.

Amortiguamiento Crítico $\xi = 1.$

Tomando $\xi = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{2\sqrt{2\cdot 1}} = 1.$

$m = 1 = LC$
$c = 2\sqrt{2} = L/R$
$k = 2 = 2$

Despejando; tomando $C = 100mF.$

$L \cdot 100mF = 1. \quad L = 10H.$

$\frac{10H}{R} = 2\sqrt{2} \quad R = \frac{5\sqrt{2}}{2} = 3.535\Omega.$

Entonces:

$K = \frac{1}{a_0} = \frac{1}{2} = 0.5. \qquad \omega_n = \sqrt{\frac{2}{1}} = \sqrt{2} \approx 1.41$

$\omega_d = \sqrt{2}\cdot\sqrt{1-1} = 0 \qquad T_P = \frac{\pi}{0} = \text{Indefinido}.$

$T_s = \frac{3}{3.53\cdot\sqrt{2}} = 0.6009.$

Como en el ejercicio anterior, el sistema retorna a su posición de equilibrio sin oscilaciones.

Sistema Sobreamortiguamiento $\varepsilon > 1$:

Tomando

$m = 2 = kc$

$c = 5 = 4e$

$k = 2 = 2$

$$\varepsilon = \frac{5}{2\sqrt{2 \cdot 2}} = 1.25$$

Entonces:

$$\omega n = \sqrt{\frac{2}{2}} = 1 \qquad \omega d = 2\sqrt{1.25 - 1} = 1.$$

$$Tp = \frac{\pi}{1} = \pi \qquad Ts = \frac{3}{1.25 \cdot 1} = 2.4.$$