

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
ФАКУЛЬТЕТ ОБЩЕЙ И ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКИ

КУРСОВАЯ РАБОТА ПО ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ

« Реализация схемы расщепления для двумерного уравнения
теплопроводности. »

Работу выполнил:
Студента 3 курса группы Б02-114
Лямин Василий Сергеевич

Долгопрудный, 2023

Содержание

1. Физическая постановка задачи	3
2. Математическая постановка задачи	3
3. Метод численного решения, его свойства	3
4. Тестирование программы на точном решении	4
5. Результаты расчётов	5
6. Выводы	8
7. Список литературы	9

1. Физическая постановка задачи

Представим себе металлическую пластину, части которой получают тепло от источника. Задача состоит в том, чтобы определить распределение температуры в каждый момент времени. Источником тепла может быть, например, нагревательный элемент, равномерно нагревающий одну сторону пластины. Мы хотим знать, как температура будет распределяться по плате благодаря этому эффекту и как быстро произойдет это изменение.

2. Математическая постановка задачи

Рассмотрим двумерную область в форме квадрата $\Omega = [0, L] \times [0, L]$ с координатами (x, y) . Температура внутри области описывается функцией $u(x, y, t)$, где t - время, k - коэффициент теплопроводности. Уравнение теплопроводности для неоднородной среды в области Ω имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t) \quad (1)$$

с начальным условием:

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y) \quad (2)$$

и граничными условиями на квадратной границе, которые задаются следующим образом:

$$u(x, 0, t) = g_1(x, t), \quad u(x, L, t) = g_2(x, t) \quad \text{при } 0 \leq x \leq L \quad (3)$$

$$u(0, y, t) = h_1(y, t), \quad u(L, y, t) = h_2(y, t) \quad \text{при } 0 \leq y \leq L \quad (4)$$

3. Метод численного решения, его свойства

Для решения поставленной задачи воспользуемся методом расщепления. Так как дифференциальный оператор в правой части уравнения теплопроводности представим в виде суммы, то и дифференциальный оператор тоже можно определить в виде суммы и решать уравнение в два шага: сначала по одной координате, затем по второй.

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\tau} = \Lambda_{xx} u^{n+1} \quad (5)$$

$$\frac{u^{n+1/2} - u^n}{\tau} = \Lambda_{yy} u^{n+1/2} + f^n \quad (6)$$

Найдем невязку для этого метода, подставляя выражение для $u^{n+1/2}$ из первого уравнения во второе и разкладывая в ряд Тейлора.

$$r_n = \frac{\tau}{2} u''_{tt} - \tau u'''_{yyt} - \frac{h^2}{12} u''''_{xxx} - \frac{h^2}{12} u''''_{yyy} + O(h^4, \tau^2, \frac{\tau}{h^2}) \quad (7)$$

$$r_n = O(h^2, \tau, \sigma) \quad (8)$$

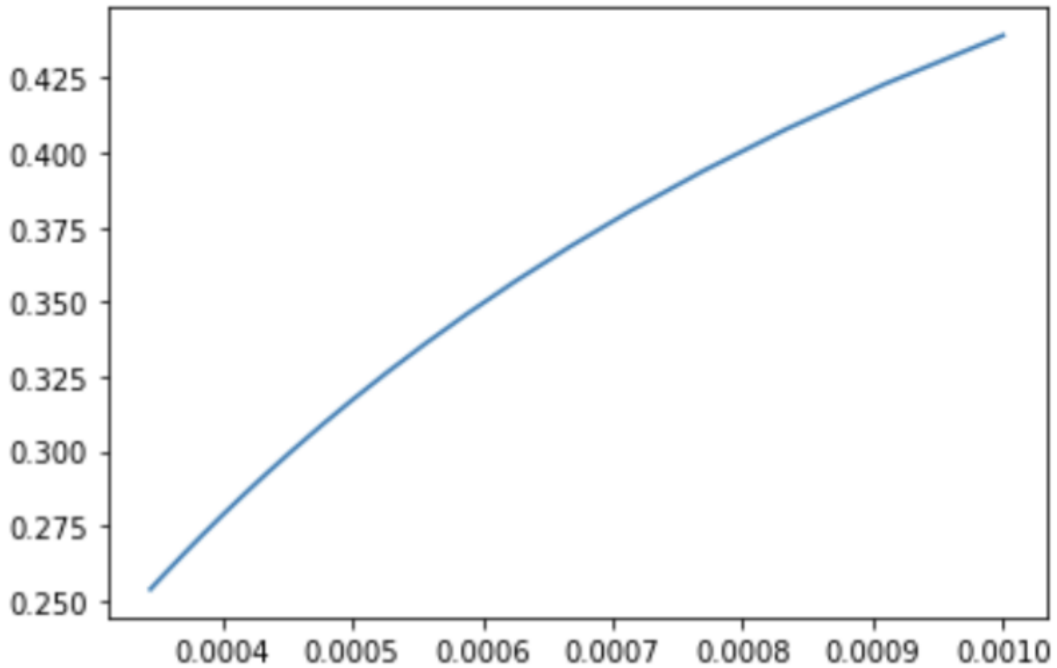
Метод имеет первый порядок аппроксимации по времени и второй по пространству. Теперь рассмотрим устойчивость. Схема будет устойчива, если каждый из ее шагов устойчив. Сделаем подстановку $u_m^n = \lambda^n e^{im\phi}$ и найдем значение λ

$$\lambda = \frac{1}{1 + 4\sigma \sin^2 \frac{\phi}{2}} < 1 \quad (9)$$

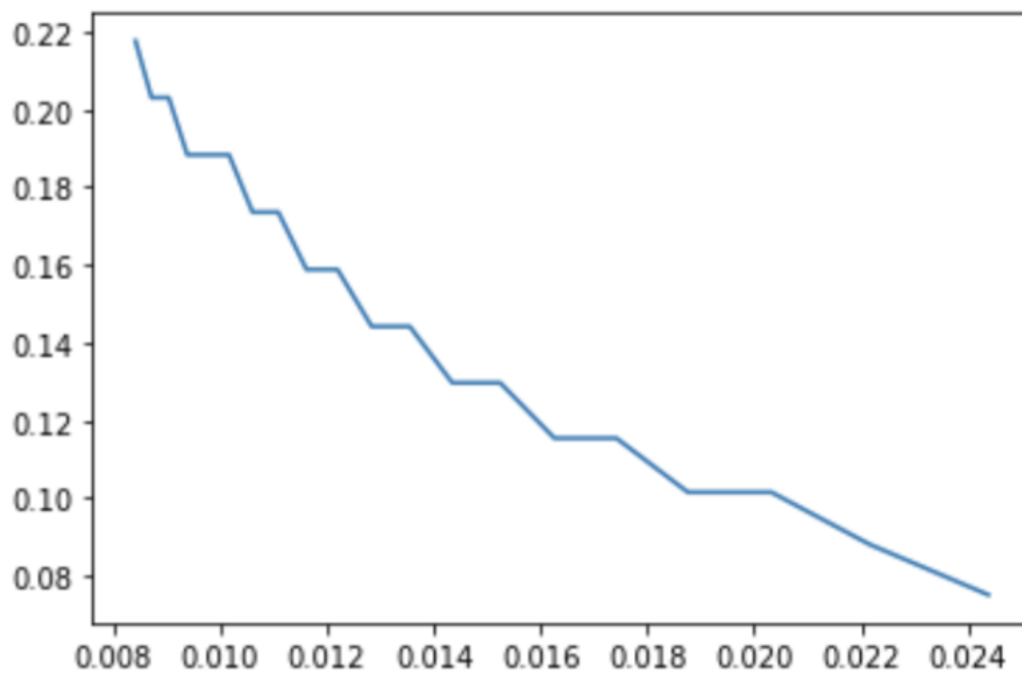
Значения λ получились меньше 1 при любых значениях параметров, а значит метод является абсолютно устойчивым, что и следовало ожидать от неявного метода.

4. Тестирование программы на точном решении

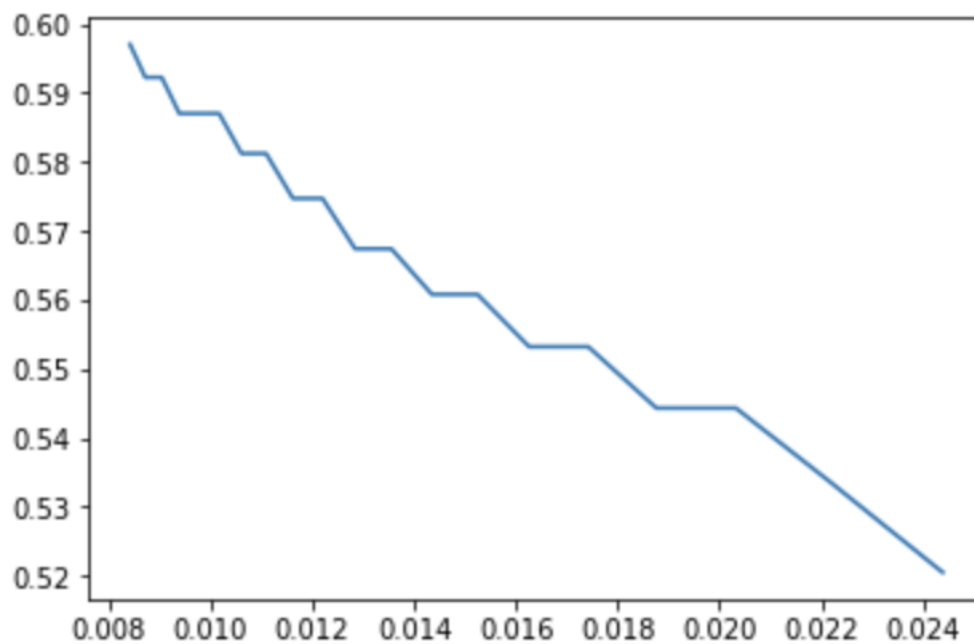
Протестируем программу известном точном решении. Рассмотрим начальное условие $u_0 = \exp(-(x^2 + y^2))$ на квадрате с единичной длиной стороны. Граничные условия возьмем ограничение функции $g = \exp(\frac{-(x^2+y^2)}{1+4t})/(1+4t)$ на стороны квадрата. Тогда решением уравнения должна являться сама функция g . Построим график зависимости ошибки от шага по времени



Построим график зависимости ошибки от шага по пространству



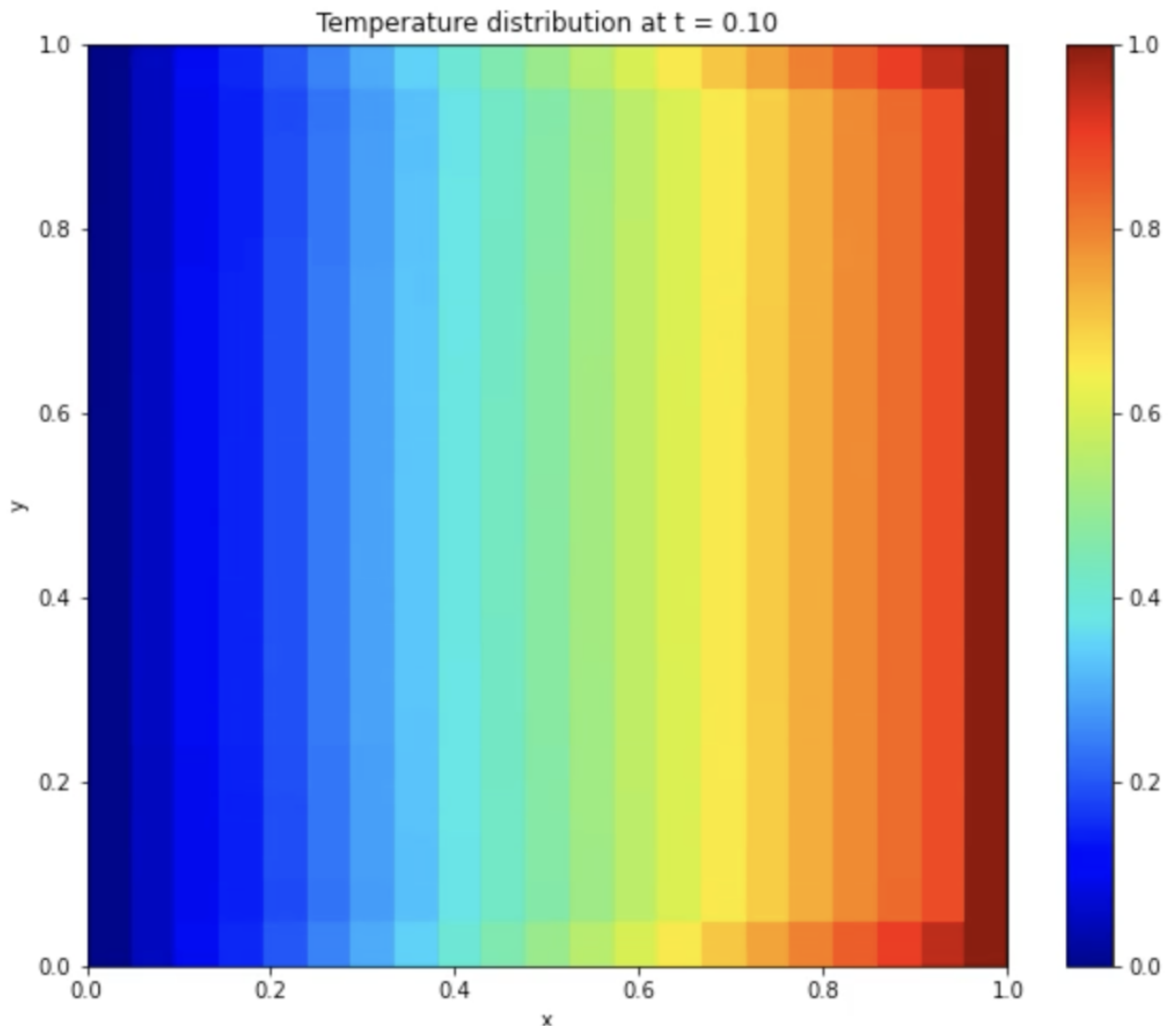
Как мы видим при меньших шагах получаем результаты худшие результаты. Это связано с тем, что аппроксимация условная. Теперь построим график с постоянной σ



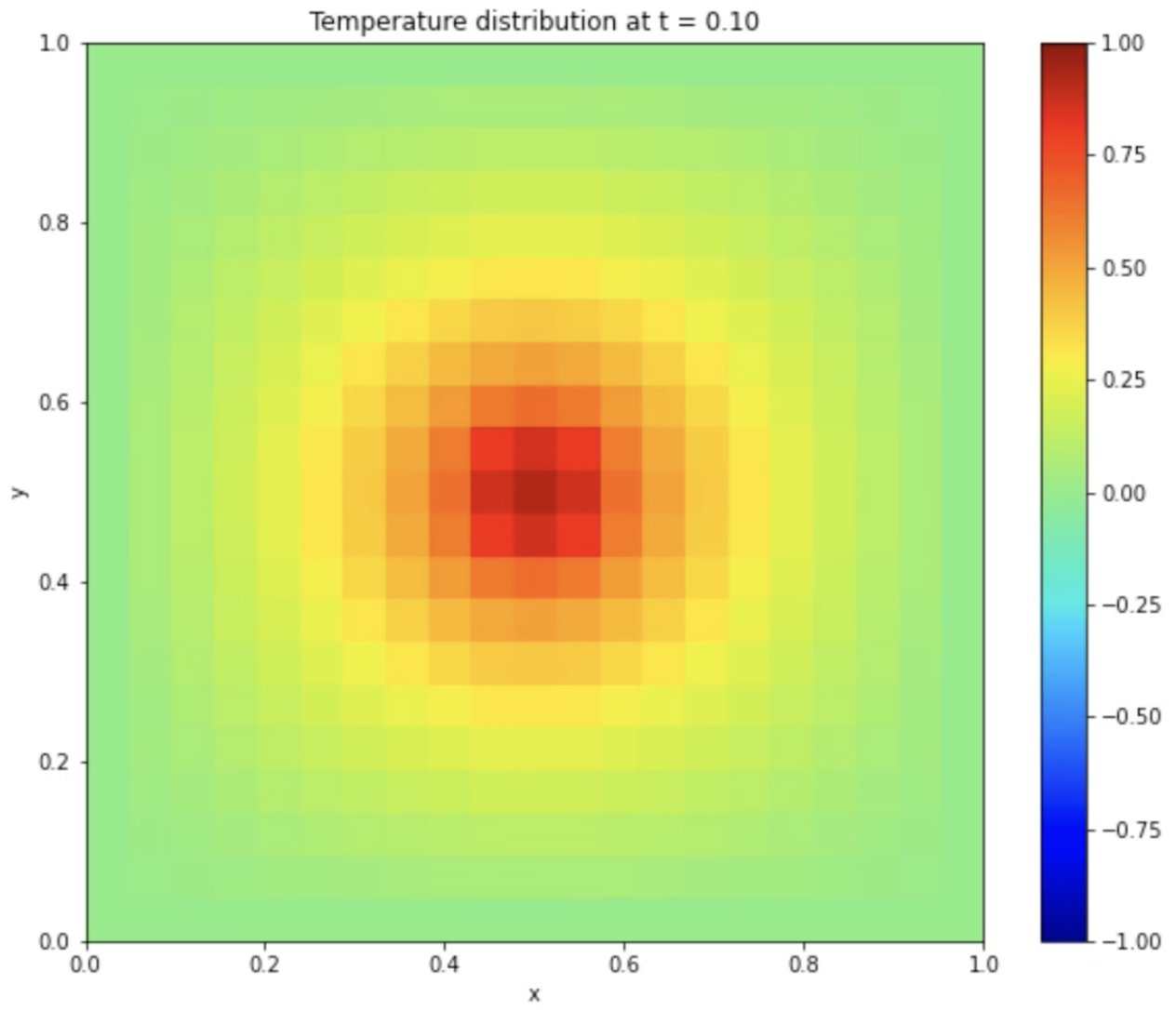
5. Результаты расчётов

Рассчитаем несколько задач:

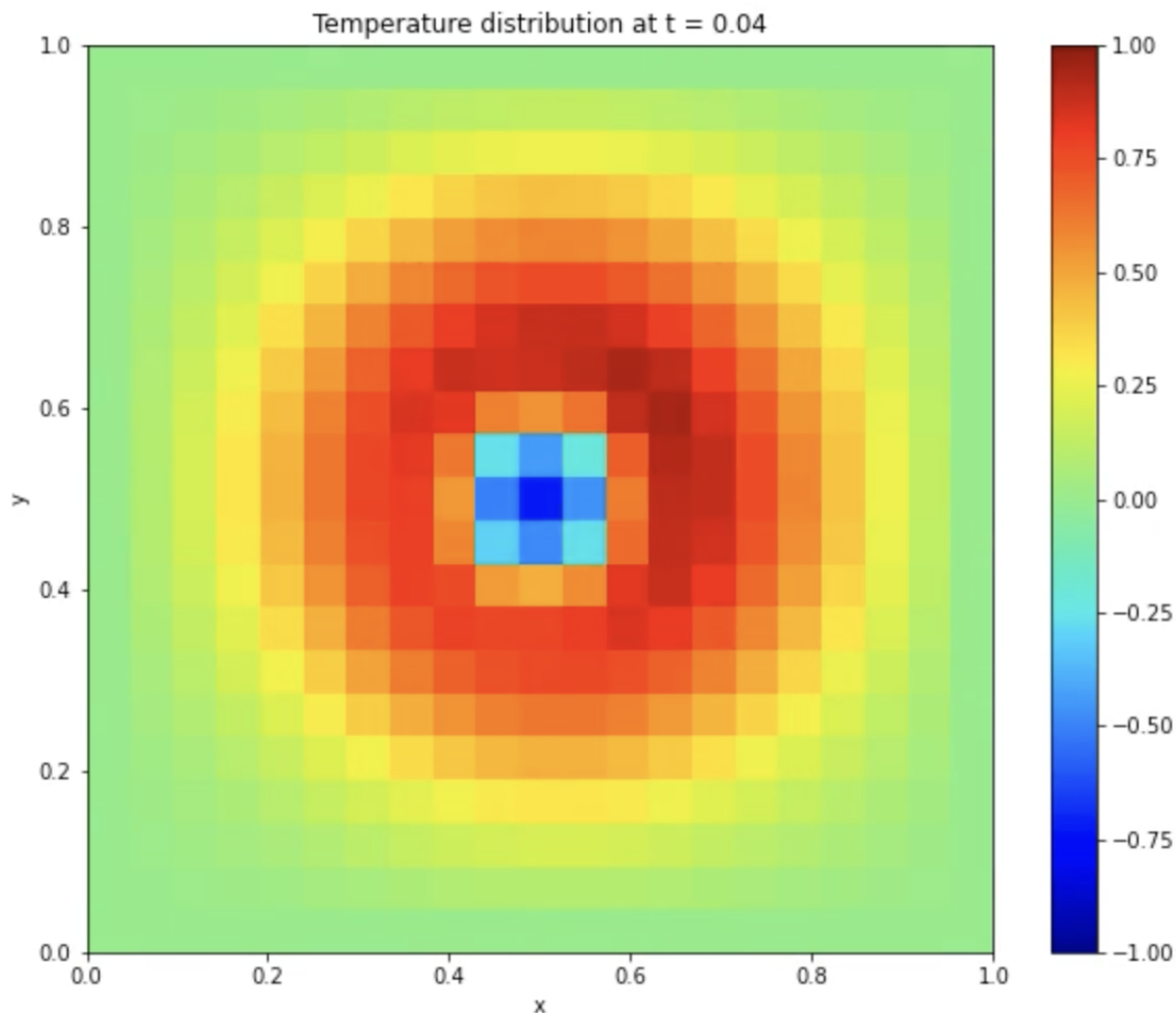
1) $f = 0, \phi_{left} = 0, \phi_{right} = 1, \phi_{top} = \phi_{bottom} = x, u_0 = 0.5$



2) $f = 100(0.4 < x < 0.6, 0.4 < y < 0.6), \phi_{left} = 0, \phi_{right} = 0, \phi_{top} = \phi_{bottom} = 0, u_0 = 0.5$



2) $f = 1000 * \sin(2 * \pi * t)(0.4 < x < 0.6, 0.4 < y < 0.6), \phi_{left} = 0, \phi_{right} = 0, \phi_{top} = \phi_{bottom} = 0, u_0 = \sin(x + y)$



6. Выводы

1. Была проведена математическая постановка задачи о распределении температуры в металлической пластине, получающей тепло от источника.
2. Для численного решения задачи использовался метод расщепления, который позволил эффективно решать уравнение теплопроводности в двумерном пространстве.
3. Были изучены свойства метода, его аппроксимация и устойчивость. Метод оказался абсолютно устойчивым и имел второй порядок аппроксимации по пространству и первый по времени.
4. Программа была протестирована на точном решении, что позволило оценить ее практическую точность и сходимость при различных шагах по времени и пространству.
5. Проведены расчеты различных задач с заданными параметрами и начальными условиями, что позволило получить графическое представление о распределении температуры в пластине.
6. Выводы из проведенных расчетов и тестирования позволяют сделать заключение о применимости метода расщепления для решения задачи о распределении температуры.

Таким образом, выполненная курсовая работа позволила изучить метод расщепления для численного решения уравнения теплопроводности, провести тестирование программы на различных задачах и сделать выводы о его эффективности.

7. Список литературы

<https://intuit.ru/studies/courses/1170/213/lecture/5503?page=2>