МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
ФАКУЛЬТЕТ ОБЩЕЙ И ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКИ

КУРСОВАЯ РАБОТА ПО ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ

« Реализация схемы расщепления для двумерного уравнения теплопроводности. »

Работу выполнил:
Студента 3 курса группы Б02-114
Лямин Василий Сергеевич

Долгопрудный, 2024

Содержание

1. Физическая постановка задачи

Представим себе металлическую пластину, части которой получают тепло от источкика. Задача состоит в том, чтобы определить распределение температуры в каждый момент времени. Источником тепла может быть, например, нагревательный элемент, равномерно нагревающий одну сторону пластины. Мы хотим знать, как температура будет распределяться по плате благодаря этому эффекту и как быстро произойдет это изменение.

2. Математическая постановка задачи

Рассмотрим двумерную область в форме квадрата $\Omega = [0,L] \times [0,L]$ с координатами (x,y). Температура внутри области описывается функцией $u(x,y,t)$, где t - время, k - коэффициент тепропроводности. Уравнение теплопроводности для неоднородной среды в области Ω имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + f(x,y,t) \tag{1}$$

с начальным условием:

$$u(x,y,0) = u_0(x,y) \tag{2}$$

и граничными условиями на квадратной границе, которые задаются следующим образом:

$$u(x,0,t) = g_1(x,t), \quad u(x,L,t) = g_2(x,t) \text{ при } 0 \le x \le L \tag{3}$$

$$u(0,y,t) = h_1(y,t), \quad u(L,y,t) = h_2(y,t) \text{ при } 0 \le y \le L \tag{4}$$

3. Метод численного решения, его свойства

Для решения поставленной задачи воспользуемся методом расщепления. Так как дифференциальный оператор в правой части уравнения теплопроводности представим в виде суммы, то и дифференциальный опратор тоже можн опредсатвить в виде суммы и решать уравнение в два шага: сначала по одной координате, затем по второй.

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\tau} = \Lambda_{xx} u^{n+1} \tag{5}$$

$$\frac{u^{n+1/2} - u^{n}}{\tau} = \Lambda_{yy} u^{n+1/2} + f^n \tag{6}$$

Найдем невязку для этого метода, подставляя выражение для $u^{n+1/2}$ из первого уравнения во второе и разкладывая в ряд Тейлора.

$$r_n = \frac{\tau}{2} u''_{tt} - \tau u'''_{yyt} - \frac{h^2}{12} u''''_{xxxx} - \frac{h^2}{12} u_{yyyy} + O(h^4, \tau^2, \frac{\tau}{h^2}) \tag{7}$$

$$r_n = O(h^2,\tau,\sigma) \tag{8}$$

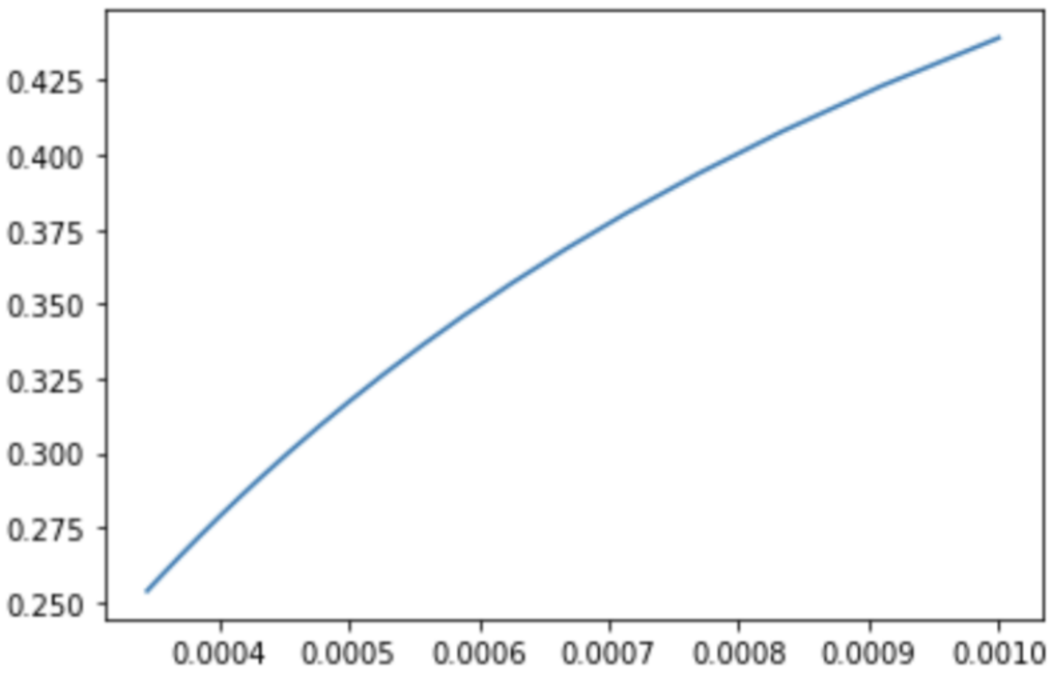
Метод имеет первый порядок аппроксимации по времени и второй по пространству. Теперь рассмотрим устойчивость. Схема будет устойчива, если каждый из ее шагов устойчив. Сделаем подстановку $u_m^n = \lambda^n e^{im\phi}$ и найдем значение λ

$$\lambda = \frac{1}{1 + 4\sigma \sin^2 \frac{\phi}{2}} < 1 \tag{9}$$

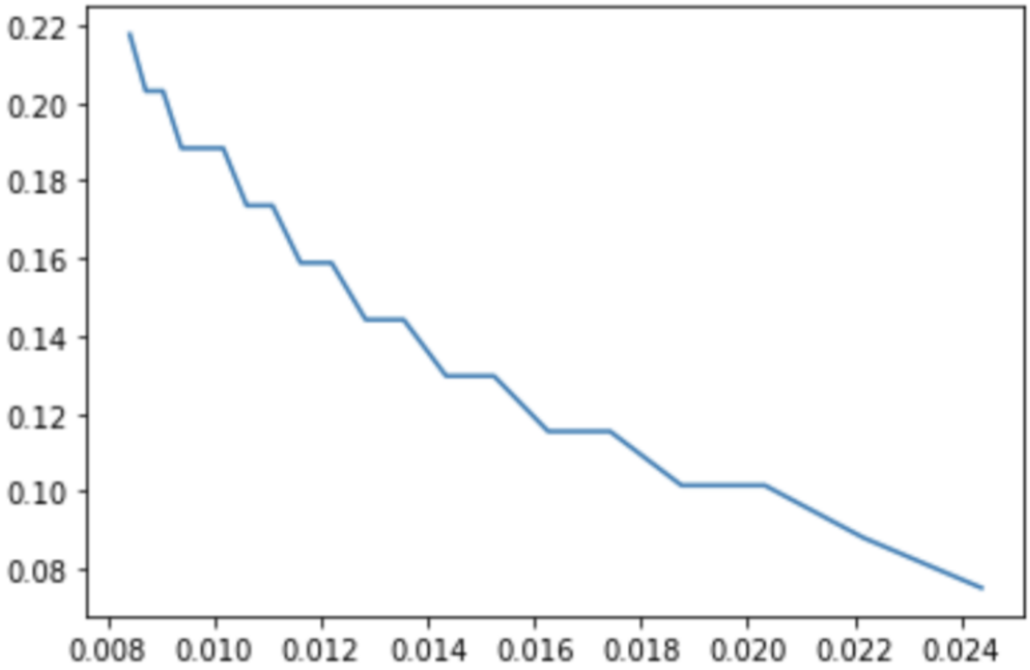
Значения λ получились меньше 1 при любых значениях параметров, а значит метод является абсолютно устойчивым, что и следовало ожидать от неявного метода.

4. Тестирование программы на точном решении

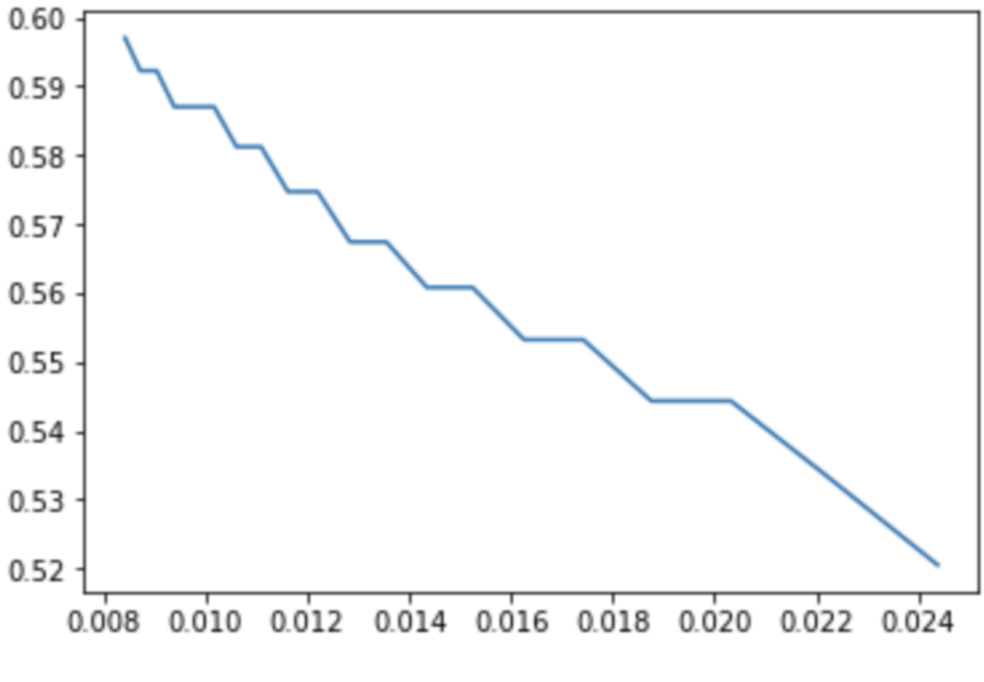
Протестируем программу известном точном решении. Рассмотрим начальное условие $u_0 = \exp(-(x^2+y^2))$ на на квадрате с единичной длиной сторны. Граничные условия возьмем ограничение функции $g = \exp(\frac{-(x^2+y^2)}{1+4t})/(1+4t)$ на стононы квадрата. Тогда решением уравнения должна являться сама фукция g. Построим график зависимости ошибки от шпга по времени



Построим график зависимости ошибки от шага по пространству

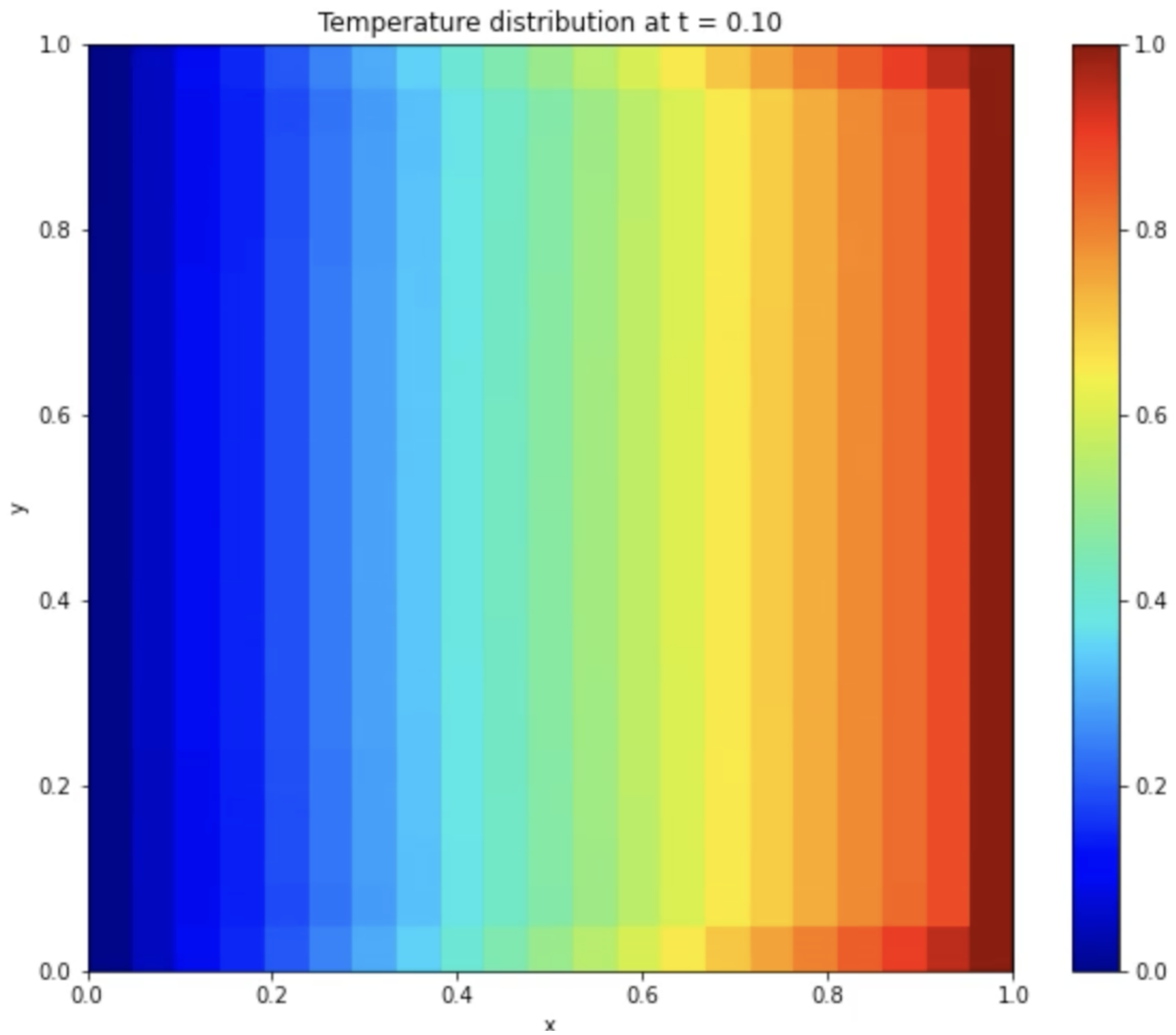


Как мы видим при меньших шагах получаем результы худшие результаты. Это связано с тем, что аппроксимация условная. Теперь посторим график с постоянной σ

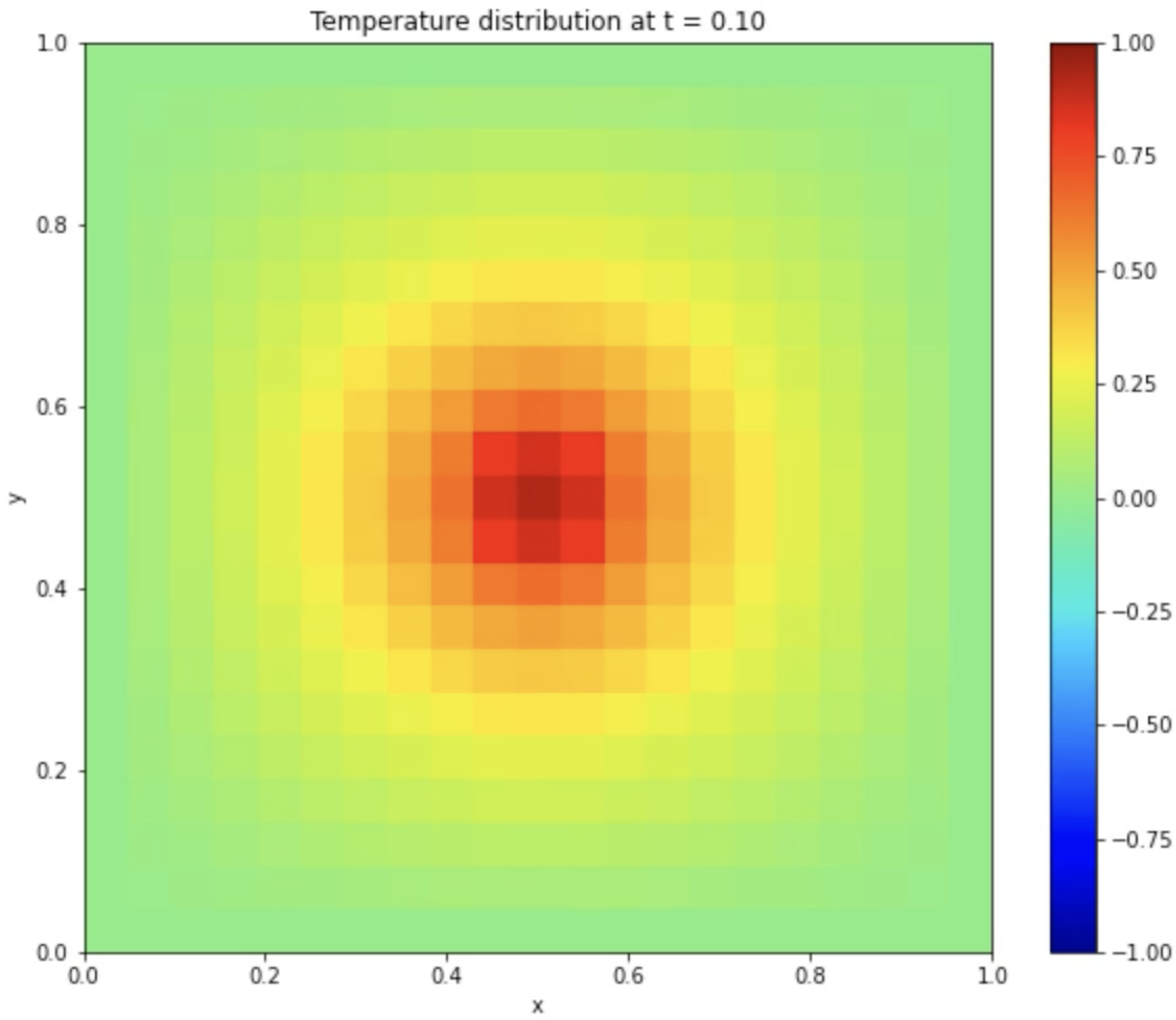


5. Результаты расчётов

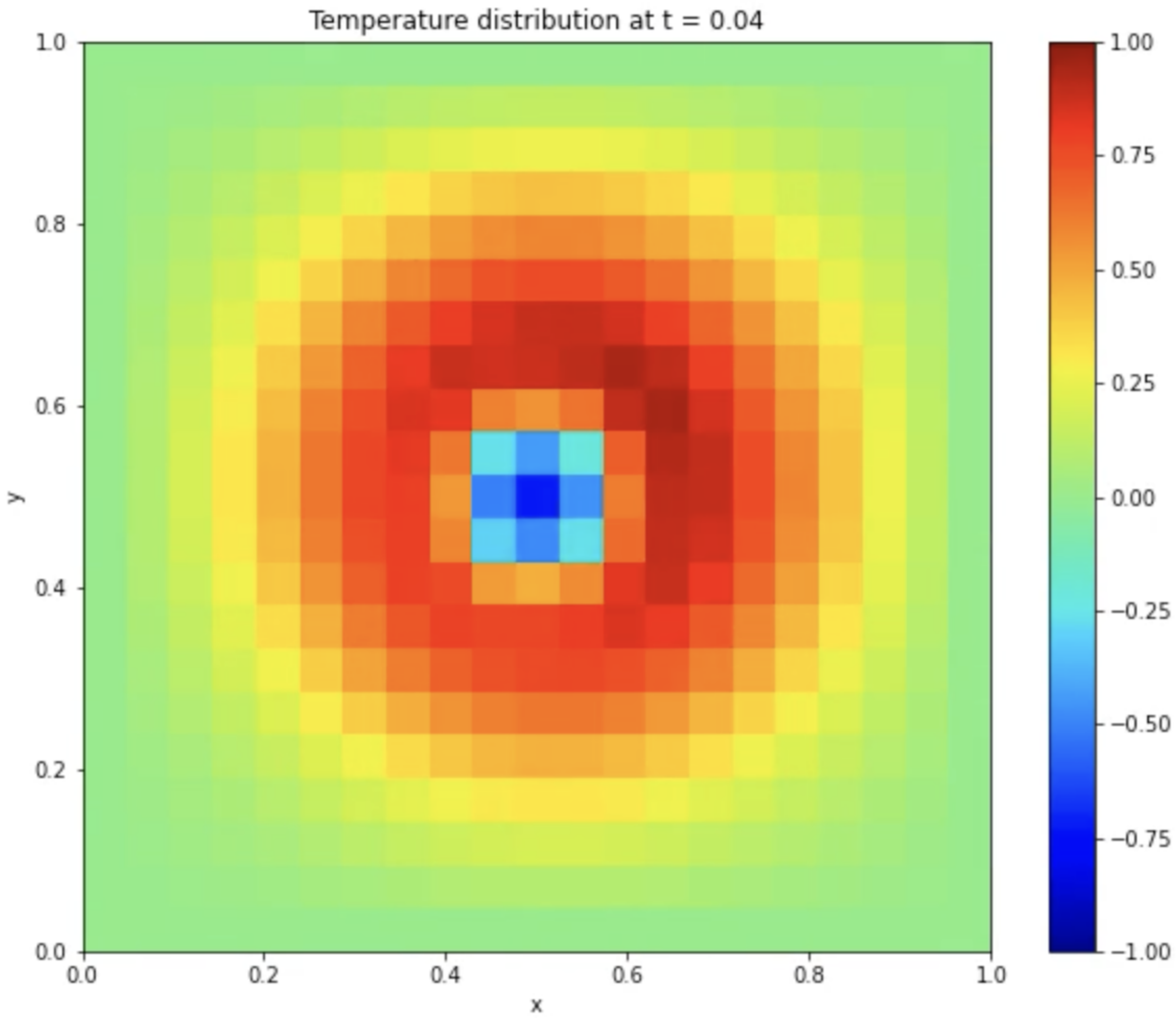
Расчетаем несколько задач:
1) $f = 0, \phi_{left} = 0, \phi right = 1, \phi top = \phi_{bottom} = x, u_0 = 0.5$



2) $f = 100(0.4 < x < 0.6, 0.4 < y < 0.6)$, $\phi_{left} = 0$, $\phi right = 0$, $\phi top = \phi_{bottom} = 0$, $u_0 = 0.5$



2) $f = 1000 * sin(2 * \pi * t)(0.4 < x < 0.6, 0.4 < y < 0.6), \phi_{left} = 0, \phi right = 0, \phi top = \phi_{bottom} = 0, u_0 = \sin(x + y)$



6. Выводы

Таким образом, выполненная курсовая работа позволила изучить метод расщепления для численного решения уравнения теплопроводности, провести тестирование программы на различных задачах и сделать выводы о его эффективности.

1. Математическая постановка задачи о распределении температуры в металлической пластине, получающей тепло от источника тепла.

2. В задаче численного решения принят метод расщепления, позволяющий эффективно решать уравнение теплопроводности в двумерном пространстве.

3. Изучены свойства, аппроксимация и устойчивость метода. Доказано, что метод абсолютно устойчив и имеет аппроксимацию второго порядка по пространству и первого порядка по времени.

4. Программа была протестирована на точном решении, что позволило оценить ее практическую точность и сходимость отдельных шагов во времени и пространстве.

5. Проведены расчеты для различных задач с заданными параметрами и начальными условиями, в результате чего получено графическое представление распределения температуры внутри пластины.

6. Результаты расчетов и испытаний позволяют сделать выводы о пригодности метода расщепления для решения задач распределения температуры.

7. Список литературы

`https://intuit.ru/studies/courses/1170/213/lecture/5503?page=2`