

1 주차 워크북 — 정답과 해설지(아주 자세한 풀이)

표기는 문제집의 동일 번호를 따른다. 각 풀이에 **정의·성질·검산**을 포함해 단계별로 서술했다.

I. 집합(Set)

A. 연습문제 — 기본(★)

1. $U=\{1,\dots,9\}$, $A=\{\text{짝수}\}=\{2,4,6,8\}$, $B=\{3 \text{의 배수}\}=\{3,6,9\}$

- (a) $A \cap B$: **정의상** 교집합은 두 집합에 **동시에** 속하는 원소. 짝수이면서 3의 배수 $\Rightarrow 6$.
 $\Rightarrow A \cap B = \{6\}$
- (b) $A \cup B$: **정의상** 합집합은 두 집합 중 **하나라도** 속하면 포함.
 $\Rightarrow \{2,3,4,6,8,9\}$ (정렬)
- (c) A^c : **여집합**은 전체집합에서 A 를 제외.
 $\Rightarrow U - A = \{1,3,5,7,9\}$

2. $A \subseteq B$, $B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

- **전달성**: 임의의 $x \in A$ 를 잡으면, 가정 $A \subseteq B$ 로 $x \in B$. 다시 $B \subseteq C$ 로 $x \in C$.
 - 모든 $x \in A$ 에 대해 성립하므로 $A \subseteq C$.
-

B. 연습문제 — 응용(★★)

3. $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{3,4,5,6\}$, $C=\{2,3,5\}$

- $B \cup C = \{2,3,4,5,6\}$

- $A \cap (B \cup C)$: A와 공통인 원소 {2,3,4}
- $A \cap B = \{3,4\}$, $A \cap C = \{2,3\} \Rightarrow (A \cap B) \cup (A \cap C) = \{2,3,4\}$
- **결론**: 두 표현 동일. 이는 **분배법칙**의 구체 예다.

4. $U = \{1, \dots, 20\}$, $A = \text{소수} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ (8 개), $B = \text{짝수}$ (10 개)

- $A \cap B = \{2\}$ (소수이면서 짝수는 2 만 존재)
- 포함배제: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 8 + 10 - 1 = 17$
- 비교: $|A \cap B| = 1$, $|A \cup B| = 17$.

C. 연습문제 — 심화(★★★)

5. $A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$

- $(\subseteq) x \in A \triangle B \leftrightarrow (x \in A \text{ 또는 } x \in B)$ **이면서** $(x \notin A \cap B)$. 즉 x 는 $A \cup B$ 에는 속하되 $A \cap B$ 에는 속하지 않는다. $\Rightarrow x \in (A \cup B) - (A \cap B)$.
- $(\supseteq) x \in (A \cup B) - (A \cap B) \leftrightarrow (x \in A \text{ 또는 } x \in B)$ **이고** $(x \notin A \cap B)$. 즉 한쪽에만 속한다. $\Rightarrow x \in A \triangle B$.
- 양방향 포함 성립 \Rightarrow 등식 성립.

6. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

- $(\subseteq) x \in (A \cap B)^c \leftrightarrow x \notin A \cap B \leftrightarrow (x \notin A \text{ 또는 } x \notin B) \leftrightarrow x \in A^c \cup B^c$.
- $(\supseteq) x \in A^c \cup B^c \leftrightarrow (x \notin A \text{ 또는 } x \notin B) \leftrightarrow x \notin A \cap B \leftrightarrow x \in (A \cap B)^c$.

D. 복습 퀴즈(자세 해설)

Q1. $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$

- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A \cap B = \{1, 3\}$
- $A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B) = \{2, 4, 5\}$
- **검산**: A에만 {5}, B에만 {2,4}, 공통 {1,3}. 대칭차는 "한쪽에만" $\Rightarrow \{2, 4, 5\}$.

Q2. 드모르간

- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ (증명은 위 6 번과 동일 논리)

Q3. $U=\{1, \dots, 10\}$, $A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B=\{2, 3, 5, 7\}$

- $A^c = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
- $A^c \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$ (2 가 추가됨에 주의)
- $(A^c \cup B) \cap A = \{2\}$ (A 의 짝수 집합에서 교집합 되는 것은 2 만 가능)

II. 함수(Function)

A. 연습문제 — 기본(★)

1. $f(x)=x^2$, $g(x)=x+1$

- $(g \circ f)(x) = g(x^2) = x^2 + 1$
- $(f \circ g)(x) = f(x+1) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$
- **비고:** 합성은 일반적으로 교환되지 않는다.

2. $f(x)=ax+b (\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$ 전단사 조건

- **일대일:** $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow a(x_1-x_2)=0 \Rightarrow a \neq 0$ 이면 $x_1=x_2$.
- **전사:** 임의 $y \in \mathbb{R}$, $x=(y-b)/a$ 로 $f(x)=y$ 가능 (단 $a \neq 0$).
- **결론:** 전단사 조건은 $a \neq 0$ (b 는 임의).

B. 연습문제 — 응용(★★)

3. $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{a, b, c\}$ 일대일

- 정의역·공역 크기 동일 ($3 \leftrightarrow 3$). 일대일이면 자동 전사.
- 경우의 수: 서로 다른 3 개에 대한 전단사 $\rightarrow 3! = 6$.

4. $y=x^3$ 일대일 판정

- 단조성: $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3$. 또는 $f'(x)=3x^2 \geq 0$ 로 감소구간 없음.
 - 결론: 일대일.
-

C. 연습문제 — 심화(★★★)

5. $f(x)=x^2$ (정의역 \mathbb{R})은 역함수 없음

- 이유: x 와 $-x$ 가 같은 값으로 대응(일대일 실패).
- 정의역 제한: $[0, \infty)$ 로 제한하면 단조증가 $\rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt{x}$ (또는 $(-\infty, 0]$ 에서 $-\sqrt{x}$).
- 계산: $f(f^{-1}(x))=x$, $f^{-1}(f(x))=x$ (정의역 내에서).

6. $g(x)=\sqrt{x}$ (정의역 $x \geq 0$), $f(x)=x^2$

- $(g \circ f)(x)=\sqrt{(x^2)}=|x|$ (정의역 \mathbb{R} , 치역 $[0, \infty)$)
 - $(f \circ g)(x)=(\sqrt{x})^2=x$ (정의역 $x \geq 0$)
 - 차이 원인: 정의역 제약과 절댓값 발생.
-

D. 복습 퀴즈(자세 해설)

Q1. $f(x)=3x-2$

- $y=3x-2 \Rightarrow x=(y+2)/3$
- $f^{-1}(x)=(x+2)/3$
- 계산: $f(f^{-1}(x))=x$, $f^{-1}(f(x))=x$.

Q2. 개념

- 일대일: 서로 다른 입력 \rightarrow 서로 다른 출력
- 전사: 공역의 모든 값에 상응 입력 존재

- 전단사: 둘 다 만족(역함수 존재)

Q3. $f(x)=x^2$, $g(x)=\sqrt{x}$

- $(f \circ g)(x)=x$ (단 $x \geq 0$), $(g \circ f)(x)=|x|$ (정의역 \mathbb{R})
- **핵심:** $\sqrt{(x^2)}=|x|$.

Ⅲ. 주간 종합(★~★★★★, 자세 해설)

1(★★, 복습) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

- (\subseteq) $x \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow x \in A$ 이고 $(x \in B \text{ 또는 } x \in C) \Rightarrow x \in (A \cap B) \text{ 또는 } x \in (A \cap C) \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- (\supseteq) $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \Rightarrow (x \in A \cap B) \text{ 또는 } (x \in A \cap C) \Rightarrow$ 항상 $x \in A$ 이고 또한 $x \in B \cup C \Rightarrow x \in A \cap (B \cup C)$.

2(★★, 복습) $f(x)=2x+1$, $g(x)=x^2-1$

- $(g \circ f)(x)=g(2x+1)=(2x+1)^2-1=4x^2+4x$
- $(f \circ g)(x)=f(x^2-1)=2(x^2-1)+1=2x^2-1$
- **차이:** 합성은 일반적으로 교환되지 않음(중간 함수가 다르다).

3(★, 기출 변형) $U=\{1, \dots, 20\}$, $A=\{\text{짝수}\}$, $B=\{3 \text{의 배수}\}$

- 짝수(≤ 20) 10 개, 3의 배수 6 개, 공통은 6의 배수 3 개(6, 12, 18).
- $|A \cup B|=10+6-3=13$, $|A \cap B|=3$.

4(★, 기출 변형) $f(x)=x^2$, $g(x)=x+1$

- $(f \circ g)(x)=(x+1)^2=x^2+2x+1$
- $(g \circ f)(x)=x^2+1$
- **설명:** 입력 처리 순서 차이로 결과가 달라진다.

5(★★★★, 실전 응용) $y=x^3+1$

- $x^3=y-1 \Rightarrow x=\sqrt[3]{y-1}$
 - $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-1}$
 - 일대일성: $f'(x)=3x^2 \geq 0$ 로 단조증가, 서로 다른 입력에 같은 출력 불가 \Rightarrow 역함수 존재. 역함수도 단조증가로 일대일.
-

IV. 주말 미니 테스트(자세 해설)

1(★) 드모르간

- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ (증명은 I-C-6 참조)

2(★★) $U=\{1, \dots, 12\}$, $A=\{4, 8, 12\}$, $B=\{3, 6, 9, 12\}$

- $A \cap B = \{12\} \rightarrow |A \cap B| = 1$
- $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 3 + 4 - 1 = 6$
- $|A^c| = |U| - |A| = 12 - 3 = 9$

3(★) $f(x)=2x+1$

- $y=2x+1 \Rightarrow x=(y-1)/2$
- $f^{-1}(x)=(x-1)/2$
- 합성 확인: $f(f^{-1}(x))=x$, $f^{-1}(f(x))=x$.

4(★★) $f=x^2$, $g=\sqrt{x}$

- $(f \circ g)(x)=x$ (정의역 $x \geq 0$)
- $(g \circ f)(x)=|x|$ (정의역 \mathbb{R})
- 차이: 정의역 제약과 절댓값.

5(★★★) $y=x^3$ 일대일(미적분)

- $f'(x)=3x^2 \geq 0$, 감소구간 없음 \rightarrow 전구간 단조증가 \Rightarrow 일대일.
-

✓ 빠른 정답 모음(최종 값만)

- I -기본 1: $\{6\}$, $\{2,3,4,6,8,9\}$, $\{1,3,5,7,9\}$
- I -기본 2: $A \subseteq C$
- I -응용 3: 동일($\{2,3,4\}$)
- I -응용 4: $|A \cup B|=17$, $A \cap B=\{2\}$
- I -심화 5: 등식 성립, I -심화 6: 드모르간 성립
- I -퀴즈: $\{2,4,5\}$ / 드모르간 2 식 / $\{2\}$
- II-기본 1: x^2+1 , x^2+2x+1
- II-기본 2: $a \neq 0$
- II-응용 3: 6 가지
- II-응용 4: 일대일
- II-심화 5: $[0, \infty)$ 에서 \sqrt{x} (또는 $(-\infty, 0]$ 에서 $-\sqrt{x}$)
- II-심화 6: $(g \circ f)=|x|$, $(f \circ g)=x(x \geq 0)$
- 주간 종합: (1)증명 성립 (2) $4x^2+4x$, $2x^2-1$ (3)13, 3 (4) x^2+2x+1 / x^2+1
(5) $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-1}$
- 주말 미니: (1)드모르간 (2)6,1,9 (3) $(x-1)/2$ (4) x , $|x|$ (5)일대일