

1 주차 워크북 — 문제집(풀이 없음)

I. 집합(Set)

A. 공식 설명(핵심 정리)

- 집합: 특정 조건을 만족하는 대상(원소)의 모임, $\{ \}$ 로 표기
- 원소 표기: $a \in A$, $b \notin A$
- 부분집합/진부분집합: $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$, $A \subset B$ (단 $A \neq B$)
- 합/교/여: $A \cup B$ (또는), $A \cap B$ (그리고), A^c (전체집합 U 기준 보충집합)
- 드모르간 법칙: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
- 기본 법칙: 교환·결합·분배법칙, 대칭차 $A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$ 등

B. 예제(풀이 없음)

예제 1

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ 일 때

① $A \cup B$ ② $A \cap B$ ③ A^c ④ $(A \cap B)^c$ 를 구하라.

예제 2(드모르간)

임의의 집합 A, B 에 대하여 $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ 임을 증명하라.

C. 연습문제

기본(★)

1. $U = \{1, \dots, 9\}$, $A = \{\text{짝수}\}$, $B = \{3 \text{의 배수}\}$. (a) $A \cap B$, (b) $A \cup B$, (c) A^c .
2. $A \subseteq B$, $B \subseteq C$ 일 때 A 와 C 의 포함관계를 서술하라.

응용(★★)

3. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, $C = \{2, 3, 5\}$. $A \cap (B \cup C)$ 와 $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ 가 같은지

확인하라.

4. $U=\{1,...,20\}$, $A=\{\text{소수}\}$, $B=\{\text{짝수}\}$. $A \cup B$, $A \cap B$ 를 구하고 각 원소 개수를 비교하라.

심화(★★★)

5. 대칭차 $A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$ 임을 원소 논법으로 증명하라.

6. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ (드모르간)을 원소 포함관계로 증명하라.

D. 복습 퀴즈(풀이 없음)

- Q1. $A=\{1,3,5\}$, $B=\{1,2,3,4\}$. $A \triangle B$ 를 구하라.
 - Q2. 드모르간 법칙 두 가지를 서술하라.
 - Q3. $U=\{1,...,10\}$, $A=\{\text{짝수}\}$, $B=\{\text{소수}\}$. $(A^c \cup B) \cap A$ 를 구하라.
-

II. 함수(Function)

A. 공식 설명(핵심 정리)

- 함수 표기: $f: X \rightarrow Y$ (정의역 X , 공역 Y , 치역 $f(X)$)
- 일대일(단사): $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
- 전사: 임의 $y \in Y$ 에 대해 $\exists x \in X$ s.t. $f(x)=y$
- 전단사: 일대일+전사(역함수 존재)
- 역함수: f 가 전단사일 때 $f^{-1}: Y \rightarrow X$, $f(f^{-1}(y))=y$, $f^{-1}(f(x))=x$
- 합성함수: $(g \circ f)(x)=g(f(x))$ (정의역·공역 호환 주의)

B. 예제(풀이 없음)

예제 1(역함수)

$f(x)=2x+3$ (정의역 \mathbb{R} , 공역 \mathbb{R}). $f^{-1}(x)$ 를 구하라.

C. 연습문제

기본(★)

1. $f(x)=x^2$, $g(x)=x+1$. $(g \circ f)(x)$, $(f \circ g)(x)$.
2. $f(x)=ax+b$ (정의역 \mathbb{R} , 공역 \mathbb{R}). 전단사가 되기 위한 a, b 조건.

응용(★★)

3. $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{a, b, c\}$ 가 일대일일 때 가능한 경우의 수.
4. $y=x^3$ 가 일대일인지 판정하고 근거를 제시하라.

심화(★★★)

5. $f(x)=x^2$ (정의역 \mathbb{R})은 왜 역함수가 없는가? 정의역을 제한하여 역함수를 구성하라.
6. $g(x)=\sqrt{x}$, $f(x)=x^2$. $(g \circ f)(x)$, $(f \circ g)(x)$ 를 구하고, 각 정의역을 비교하라.

D. 복습 퀴즈(풀이 없음)

- Q1. $f(x)=3x-2$. $f^{-1}(x)$ 를 구하라.
- Q2. 일대일·전사·전단사의 차이를 간단히 서술하라.
- Q3. $f(x)=x^2$, $g(x)=\sqrt{x}$. $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$ 를 각각 구하라.

Ⅲ. 주간 종합(금·60 분, 복습+기출 변형, 풀이 없음)

난이도: ★(기초) / ★★(응용) / ★★★(심화)

1. ★★(복습) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ 를 원소 포함관계로 증명하라.
2. ★★(복습) $f(x)=2x+1$, $g(x)=x^2-1$. $(g \circ f)(x)$, $(f \circ g)(x)$ 를 구하고 서로 다른 이유를 설명하라.
3. ★(기출 변형) $U=\{1, \dots, 20\}$, $A=\{\text{짝수}\}$, $B=\{3 \text{의 배수}\}$. $|A \cup B|$, $|A \cap B|$.
4. ★(기출 변형) $f(x)=x^2$, $g(x)=x+1$. $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$ 및 차이를 설명하라.
5. ★★★(실전 응용) $y=x^3+1$ 의 역함수 f^{-1} 을 구하고, f^{-1} 가 일대일임을 보이라.

IV. 주말 미니 테스트(10~15 분, 풀이 없음)

1. ★ 드모르간 법칙 두 가지를 서술하라.
2. ★★ $U=\{1,...,12\}$, $A=\{4 \text{의 배수}\}$, $B=\{3 \text{의 배수}\}$. $|A \cup B|$, $|A \cap B|$, $|A^c|$.
3. ★ $f(x)=2x+1$. $f^{-1}(x)$ 및 $f \circ f^{-1}$, $f^{-1} \circ f$ 가 항등임을 확인하라.
4. ★★ $f(x)=x^2$, $g(x)=\sqrt{x}$. $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$ 와 정의역 차이를 설명하라.
5. ★★★ $y=x^3$ 가 일대일임을 미적분을 사용해 증명하라.