

1 Was ist ein Stellenwertsystem

Heute stellen wir Zahlen unter zu Hilfenahme eines Stellenwertsystems dar. Welch Vorzüge dieses bietet, können Sie nachvollziehen, wenn Sie die mühsame Entwicklung an ausgewählten Beispielen über die Jahrhunderte und Kulturen verfolgen.

1.1 Unterschiedliche Zahldarstellungen in der Geschichte

Die Entwicklung einer Kultur brachte immer die Notwendigkeit mit sich Mengen quantitativ zu erfassen, sich darüber zu verständigen und dies auch zu verschriftlichen. Folgen wir also der Geschichte wie Zahlen durch die Kulturen dargestellt wurden.

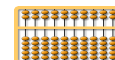
1.1.1 Ägypter

Die Ägypter bedienten sich eines Zehnersystems. In der **hieroglyphischen Schrift**¹ (ab 3200 v. Chr.) besaßen sie zur Zahldarstellung für jede 10er-Potenz ein eigenes Zeichen. Ihre Methode, hiermit Zahlen zu schreiben, war rein additiv (das Zeichen einer jeden Ordnung wurde so oft wiederholt wie es vorkommen sollte). Die Reihenfolge der Zeichen gehorchte dem Gesetz der Größenfolge mit noch wechselnder Schriftrichtung, d. h. willkürlich wurde mal rechts- und mal linksläufig geschrieben.

I	∩	👤	👤	👤	👤	👤
1	10	100	1000	10000	100000	1000000

Abbildung 1.1: Zahlzeichen

1234567891011121314151617181920212223242526272829303132333435363738394041424344454647484950515253545556575859606162636465666768697071727374757677787980818283848586878889909192939495969798991001011021031041051061071081091101111121131141151161171181191201211221231241251261271281291301311321331341351361371381391401411421431441451461471481491501511521531541551561571581591601611621631641651661671681691701711721731741751761771781791801811821831841851861871881891901911921931941951961971981992002012022032042052062072082092102112122132142152162172182192202212222232242252262272282292302312322332342352362372382392402412422432442452462472482492502512522532542552562572582592602612622632642652662672682692702712722732742752762772782792802812822832842852862872882892902912922932942952962972982993003013023033043053063073083093103113123133143153163173183193203213223233243253263273283293303313323333343353363373383393403413423433443453463473483493503513523533543553563573583593603613623633643653663673683693703713723733743753763773783793803813823833843853863873883893903913923933943953963973983994004014024034044054064074084094104114124134144154164174184194204214224234244254264274284294304314324334344354364374384394404414424434444454464474484494504514524534544554564574584594604614624634644654664674684694704714724734744754764774784794804814824834844854864874884894904914924934944954964974984995005015025035045055065075085095105115125135145155165175185195205215225235245255265275285295305315325335345355365375385395405415425435445455465475485495505515525535545555565575585595605615625635645655665675685695705715725735745755765775785795805815825835845855865875885895905915925935945955965975985996006016026036046056066076086096106116126136146156166176186196206216226236246256266276286296306316326336346356366376386396406416426436446456466476486496506516526536546556566576586596606616626636646656666676686696706716726736746756766776786796806816826836846856866876886896906916926936946956966976986997007017027037047057067077087097107117127137147157167177187197207217227237247257267277287297307317327337347357367377387397407417427437447457467477487497507517527537547557567577587597607617627637647657667677687697707717727737747757767777787797807817827837847857867877887897907917927937947957967977987998008018028038048058068078088098108118128138148158168178188198208218228238248258268278288298308318328338348358368378388398408418428438448458468478488498508518528538548558568578588598608618628638648658668678688698708718728738748758768778788798808818828838848858868878888898908918928938948958968978988999009019029039049059069079089099109119129139149159169179189199209219229239249259269279289299309319329339349359369379389399409419429439449459469479489499509519529539549559569579589599609619629639649659669679689699709719729739749759769779789799809819829839849859869879889899909919929939949959969979989991000100110021003100410051006100710081009101010111012101310141015101610171018101910201021102210231024102510261027102810291030103110321033103410351036103710381039104010411042104310441045104610471048104910501051105210531054105510561057105810591060106110621063106410651066106710681069107010711072107310741075107610771078107910801081108210831084108510861087108810891090109110921093109410951096109710981099110011011102110311041105110611071108110911101111111211131114111511161117111811191120112111221123112411251126112711281129113011311132113311341135113611371138113911401141114211431144114511461147114811491150115111521153115411551156115711581159116011611162116311641165116611671168116911701171117211731174117511761177117811791180118111821183118411851186118711881189119011911192119311941195119611971198119912001201120212031204120512061207120812091210121112121213121412151216121712181219122012211222122312241225122612271228122912301231123212331234123512361237123812391240124112421243124412451246124712481249125012511252125312541255125612571258125912601261126212631264126512661267126812691270127112721273127412751276127712781279128012811282128312841285128612871288128912901291129212931294129512961297129812991300130113021303130413051306130713081309131013111312131313141315131613171318131913201321132213231324132513261327132813291330133113321333133413351336133713381339134013411342134313441345134613471348134913501351135213531354135513561357135813591360136113621363136413651366136713681369137013711372137313741375137613771378137913801381138213831384138513861387138813891390139113921393139413951396139713981399140014011402140314041405140614071408140914101411141214131414141514161417141814191420142114221423142414251426142714281429143014311432143314341435143614371438143914401441144214431444144514461447144814491450145114521453145414551456145714581459146014611462146314641465146614671468146914701471147214731474147514761477147814791480148114821483148414851486148714881489149014911492149314941495149614971498149915001501150215031504150515061507150815091510151115121513151415151516151715181519152015211522152315241525152615271528152915301531153215331534153515361537153815391540154115421543154415451546154715481549155015511552155315541555155615571558155915601561156215631564156515661567156815691570157115721573157415751576157715781579158015811582158315841585158615871588158915901591159215931594159515961597159815991600160116021603160416051606160716081609161016111612161316141615161616171618161916201621162216231624162516261627162816291630163116321633163416351636163716381639164016411642164316441645164616471648164916501651165216531654165516561657165816591660166116621663166416651666166716681669167016711672167316741675167616771678167916801681168216831684168516861687168816891690169116921693169416951696169716981699170017011702170317041705170617071708170917101711171217131714171517161717171817191720172117221723172417251726172717281729173017311732173317341735173617371738173917401741174217431744174517461747174817491750175117521753175417551756175717581759176017611762176317641765176617671768176917701771177217731774177517761777177817791780178117821783178417851786178717881789179017911792179317941795179617971798179918001801180218031804180518061807180818091810181118121813181418151816181718181819182018211822182318241825182618271828182918301831183218331834183518361837183818391840184118421843184418451846184718481849185018511852185318541855185618571858185918601861186218631864186518661867186818691870187118721873187418751876187718781879188018811882188318841885188618871888188918901891189218931894189518961897189818991900190119021903190419051906190719081909191019111912191319141915191619171918191919201921192219231924192519261927192819291930193119321933193419351936193719381939194019411942194319441945194619471948194919501951195219531954195519561957195819591960196119621963196419651966196719681969197019711972197319741975197619771978197919801981198219831984198519861987198819891990199119921993199419951996199719981999200020012002200320042005200620072008200920102011201220132014201520162017201820192020202120222023202420252026202720282029203020312032203320342035203620372038203920402041204220432044204520462047204820492050205120522053205420552056205720582059206020612062206320642065206620672068206920702071207220732074207520762077207820792080208120822083208420852086208720882089209020912092209320942095209620972098209921002101210221032104210521062107210821092110211121122113211421152116211721182119212021212122212321242125212621272128212921302131213221332134213521362137213821392140214121422143214421452146214721482149215021512152215321542155215621572158215921602161216221632164216521662167216821692170217121722173217421752176217721782179218021812182218321842185218621872188218921902191219221932194219521962197219821992200220122022203220422052206220722082209221022112212221322142215221622172218221922202221222222232224222522262227222822292230223122322233223422352236223722382239224022412242224322442245224622472248224922502251225222532254225522562257225822592260226122622263226422652266226722682269227022712272227322742275227622772278227922802281228222832284228522862287228822892290229122922293229422952296229722982299230023012302230323042305230623072308230923102311231223132314231523162317231823192320232123222323232423252326232723282329233023312332233323342335233623372338233923402341234223432344234523462347234823492350235123522353235423552356235723582359236023612362236323642365236623672368236923702371237223732374237523762377237823792380238123822383238423852386238723882389239023912392239323942395239623972398239924002401240224032404240524062407240824092410241124122413241424152416241724182419242024212422242324242425242624272428242924302431243224332434243524362437243824392440244124422443244424452446244724482449245024512452245324542455245624572458245924602461246224632464246524662467246824692470247124722473247424752476247724782479248024812482248324842485248624872488248924902491249224932494249524962497249824992500250125022503250425052506250725082509251025112512251325142515251625172518251925202521252225232524252525262527252825292530253125322533253425352536253725382539254025412542254325442545254625472548254925502551255225532554255525562557255825592560256125622563256425652566256725682569257025712572257325742575257625772578257925802581258225832584258525862587258825892590259125922593259425952596259725982599260026012602260326042605260626072608260926102611261226132614261526162617261826192620262126222623262426252626262726282629263026312632263326342635263626372638263926402641264226432644264526462647264826492650265126522653265426552656265726582659266026612662266326642665266626672668266926702671267226732674267526762677267826792680268126822683268426852686268726882689269026912692269326942695269626972698269927002701270227032704270527062707270827092710271127122713271427152716271727182719272027212722272327242725272627272728272927302731273227332734273527362737273827392740274127422743274427452746274727482749275027512752275327542755275627572758275927602761276227632764276527662767276827692770277127722773277427752776277727782779278027812782278327842785278627872788278927902791279227932794279527962797279827992800280128022803280428052806280728082809281028112812281328142815281628172818281928202821282228232824282528262827282828292830283128322833283428352836283728382839284028412842284328442845284628472848284928502851285228532854285528562857285828592860286128622863286428652866286728682869287028712872287328742875287628772878287928802881288228832884288528862887288828892890289128922893289428952896289728982899290029012902290329042905290629072908290929102911291229132914291529162917291829192920292129222923292429252926292729282929293029312932293329342935293629372938293929402941294229432944294529462947294829492950295129522953295429552956295729582959296029612962296329642965296629672968296929702971297229732974297529762977297829792980298129822983298429852986298729882989299029912992299329942995299629972998299930003001300230033004300530063007300830093010301130123013301430153016301730183019302030213022302330243025302630273028302930303031303230333034303530363037303830393040304130423043304430453046304730483049305030513052305330543055305630573058305930603061306230633064306530663067306830693070307130723073307430753076307730783079308030813082308330843085308630873088308930903091309230933094309530963097309830993100310131023103310431053106310731083109311031113112311331143115311631173118311931203121312231233124312531263127312831293130313131323133313431353136313731383139314031413142314331443145314631473148314931503151315231533154315531563157315831593160316131



Zahlen aber erheblich mehr Zeichen, da sie sich für die je neun möglichen Anzahlen einer jeden Ordnung unterschiedlicher Zeichen bediente; das sparte Platz, erschwerte jedoch das Schreiben und Lesen.

1–9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10–90	10	20	30	40	50	60	70	80	90
100–900	100	200	300	400	500	600	700	800	900
1 000–9 000	1 000	2 000	3 000	4 000	5 000	6 000	7 000	8 000	9 000

Abbildung 1.3: demotische Zahlzeichen⁴





Abbildung 1.4: Zahlbeispiel mit Originalschreibrichtung von rechts nach links (4-20)⁵

Für die Null, das Nichtvorhandensein einer Stelle, war bei den Schreibweisen der Ägypter noch kein Zeichen erforderlich, da die 10er-Potenz am Zeichen ablesbar ist.

1.1.2 Babylonier⁶

Die horizontal von links nach rechts verlaufende Keilschrift der Babylonier, deren Ursprung bei den Sumerern⁷ zu suchen ist, erreichte unter semitischem⁸ Einfluss (3. Jahrtausend v. Chr.) ihre hohe Ausbildung und fand für die anspruchsvolle Zahldarstellung Anwendung.

Neben einer Schreibweise, die dezimalen Charakter trägt und für jede Potenz ein eigenes Zeichen kennt (wie bei der Hieroglyphenschrift⁹ der Ägypter), gab es noch eine, die auf dem Sexagesimalsystem¹⁰ beruht. In diesem 60er-System wurden die Zahlzeichen mittels zweier Zeichen – dem Vertikalkeil  mit dem Wert 1 und dem Winkelkeil  mit dem Wert 10 – dem Prinzip der Größenfolge gehorchend und sich berührend dargestellt. Aus diesen Zeichen wurden durch vielfaches Aneinanderfügen die Anzahlen für jede Stelle im 60er-System dargestellt.

⁴ aus Tropicke S. 25

⁵ aus Tropicke S. 26

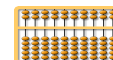
⁶ siehe Kapitel 5.1 Lexikon

⁷ siehe Kapitel 5.1 Lexikon

⁸ siehe Kapitel 5.1 Lexikon

⁹ siehe Kapitel 5.1 Lexikon

¹⁰ siehe Kapitel 5.1 Lexikon



Herodian¹⁵ beschrieben und nach ihm benannt.

	Π	Ι ^α	Ι ^β	Ι ^γ	Ι ^δ
	5	50	500	5000	50000
I	Δ	H	X	M	
1	10	100	1000	10000	

Abbildung 1.7: herodianische Zahlzeichen

45678 ≙ MMMM^γΙ^βΗ^αΔΔΠΠΠ

Abbildung 1.8: Zahlbeispiel

Im Gegensatz dazu entstand auch bei den Griechen mit dem **hellenischen System**¹⁶ (Mitte des 4. Jahrhunderts v. Chr.) ein viel kürzeres, aber nicht so übersichtliches System. In diesem System erfolgte die Darstellung von Zahlen ebenfalls durch Zahlbuchstaben. Hierzu wurden die 24 Buchstaben des griechischen Alphabets – erweitert um die drei Epismen Vau, Koppa, und Sampi – in drei Gruppen zu je 9 Zeichen für Einer, Zehner, Hunderter eingeteilt:

α	β	γ	δ	ε	ς	ζ	η	θ
1	2	3	4	5	6	7	8	9
ι	κ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	ρ
10	20	30	40	50	60	70	80	90
ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	ς
100	200	300	400	500	600	700	800	900

Abbildung 1.9: hellenische Zahlzeichen

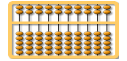
45678 ≙ μ ε χ ο θ

Abbildung 1.10: Zahlbeispiel

Die Kennzeichnung der Tausender erfolgte durch das Vorsetzen eines kleinen Beistriches, wie z. B. α = 1000, und die der Zehntausender durch ein M mit dem darüber geschriebenen Zahlbuchstaben, wie z.B. $\overset{\epsilon}{M}$ = 50000. Um die Worte von den Zahlbuchstaben unterscheiden zu können, wurden (sofern sorgfältig geschrieben wurde) Zahlen überstrichen.

¹⁵ siehe Kapitel 5.1 Lexikon

¹⁶ siehe Kapitel 5.1 Lexikon



Ganze Zahlen stellten sie im Dezimalsystem dar. Für astronomische Rechnungen/Bruchdarstellungen nutzen sie das sumerische Sexagesimalsystem der Babylonier mit den Zeichen des hellenischen Systems. Dabei kennzeichneten sie Leerstellen durch ein überstrichenes Omikron \bar{o} (Abkürzung für οὐδέν = nichts).

1.1.4 Römer

Bei der Zahlschreibung der Römer ist wieder ein dezimales System zu finden. Sie verwendeten – ähnlich den Griechen im attischen System – Individualzeichen für die Zehnerpotenzen mit Zwischenstufen bei 5, 50,

V	L	D	I))	I)))		
5	50	500	5000	50000		
I	X	C	(I)	((I))	((((I)))	\overline{X}
1	10	100	1000	10000	100000	1000000

Abbildung 1.11: römische Zahlzeichen

12345678 \overline{X} (((I))) (((I))) ((I)) ((I)) ((I)) ((I)) (I) (I) (I) (I) D L X V II

45678 \overline{X} (((I))) (((I))) (((I))) (((I))) I) D C L XX V III

Abbildung 1.12: Zahlbeispiele

Bei zusammengesetzten Zahlen, wie z.B. XXXX oder LXXXVIII findet das additive Verfahren Verwendung. Erst im Mittelalter setzt sich dann zunehmend auch das subtraktive Prinzip, indem 1-2 Zeichen der Stufe vorangestellt werden und diese um sie vermindert wird, durch:

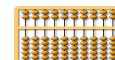
$$IV = 4$$

$$IIX \text{ oder } XIX = 19$$

Über die Zahlzeichen der Zwischenstufen wird angenommen, dass sie aus den Buchstaben der 10er-Potenzen durch halbieren abgeleitet wurden.

1.1.5 Chinesen

Nach einer Begriffsschrift im Zehnersystem bedienten die Chinesen sich ab dem 3. Jahrhundert v. Chr. Individualzeichen für die Werte 1-9 und die Potenzen der Basis 10. Die Bildungsgesetze der Zahlwörter sind bei ihnen, anders als bei uns, noch deutlich zu erkennen. Es heißt



also nicht *dreißig* sondern *dreizehn* und *zehnwei* anstelle von *zwölf*. Es gilt die Regel, wenn einer größeren eine kleinere Zahl folgt, so werden sie addiert ($\text{十三} \triangleq 10+3 = 13$), folgt einer kleineren aber eine größere Zahl, so werden sie multipliziert ($\text{三十} \triangleq 3 \cdot 10 = 30$)¹⁷.

零 oder ○	0	十	10
一	1	百	100
二 oder 兩	2	千	1000
三	3	萬	10.000
四	4	億	100.000.000
五	5	兆	1.000.000.000.000
六	6		
七	7		
八	8		
九	9		

Abbildung 1.13: Zahlzeichen

1234567△	百 二 十 三 萬 四 千 五 百 六 十 七	45678△	四 萬 五 千 六 百 七 十 八
----------	--	--------	---

Abbildung 1.14: Zahlbeispiele

Da die Potenzen noch mit angegeben wurden, war das Einführen eines Fehlzeichens also einer Null hier noch nicht nötig.

Neben der bisher dargestellten Schrift aus Grundziffern und Potenzen wurden ab dem 2. Jahrhundert v. Chr. zunächst auf dem Rechenbrett Zahlen auch durch die Stäbchen- oder Strichschrift dargestellt. Mit Holz- oder Bambusstäbchen wurde die Zahlen 1-9 in die Kolumnen gelegt.

¹⁷ original werden die Zeichen untereinander geschrieben

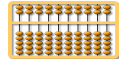


Abbildung 1.15: Strichzahlzeichen

Schließlich wurden auch unabhängig von Rechenbrettern Strichzahlen geschrieben. Um die Stellen auseinander halten zu können, wurden dabei die Zeichen an Positionen ungerader oder gerader Ordnung um 90° gedreht.

123456789 \triangleq $\begin{array}{c} | \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} || \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} ||| \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} |||| \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} ||||| \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} \text{—} \\ | \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} \text{—} \\ || \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} \text{—} \\ ||| \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} \text{—} \\ |||| \\ \hline \end{array}$

12003 \triangleq $\begin{array}{c} | \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} || \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} ||| \\ \hline \end{array}$

Abbildung 1.16: Zahlbeispiele

Nachdem im 8. Jh. n. Chr. statt einer Lücke für eine fehlende Position die Null eingesetzt wurde (zunächst als Punkt, später dann als *Kreis*), war das dezimale Positionssystem¹⁸ vollkommen und 12003 wurde $\begin{array}{c} | \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} || \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} ||| \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \hline \end{array}$ dargestellt.

In diesem System konnten auch reelle Zahlen – schon ähnlich wie bei uns – dargestellt werden. Die Stellen/Potenzen wurden in diesem Fall erkennbar durch Markieren der Einer oder Zehntel. Der gesamte Bruchteil konnte aber auch einem Index ähnlich geschrieben (12,003 \triangleq $\begin{array}{c} | \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} || \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} ||| \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} || \\ \hline \end{array}$) werden.

1.1.6 Inder

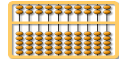
Ab 300 n. Chr. traten Wortzahlen als ein dezimales Positionssystem auf. Im 5. Jh. n. Chr. trat bei den Indern das erste alphabetische Zahlensystem auf. Jeder durch Vokale dargestellten 10er-Potenz wurde ein Konsonant als Multiplikator beigelegt.

Weiter entwickelte sich mit dem Katapayadi-System ein echtes alphabetisches dezimales Positionssystem. Den Ziffern 1 bis 9 und der Null blieben Konsonanten zugeordnet:

1	k, t, p, y	6	c, t, ś
2	kh, th, ph, r	7	ch, th, s
3	g, ḍ, b, l	8	j, d, h
4	gh, ḍh, bh, v	9	jh, dh
5	ṇ, ṇ, m, ś	0	ñ, n

Abbildung 1.17: Buchstabenziffern des Katapayadi-Systems

¹⁸ siehe Kapitel 5.1 Lexikon



Zahlen wurden daraus gebildet, indem die Konsonanten, durch beliebige Vokale voneinander getrennt, von rechts nach links abbauend niedergeschrieben wurden. Die Konsonanten und Vokale wurden dabei so gewählt, dass die Zahlen sich gut lesen ließen oder sogar gleichzeitig noch eine Wortbedeutung hatten.

1234567 ≙ satumovigekhak

12003 ≙ loninephak

Abbildung 1.18: Zahlbeispiele mit Schreibrichtung von rechts nach links

Neben den *Wort-* und *Buchstabenzahlen* gab es ab dem 4. Jh. v. Chr. auch durch Ziffern dargestellte Zahlen. Zunächst mit den *Kharosthi-Ziffern*¹⁹, die ein Vierersystem erkennen ließen, ab dem 3. Jh. mit den *Brahmi-Ziffern*²⁰. Im 4. Jh. n. Chr. wurde die Null – zunächst als Punkt – eingeführt. Durch eine Inschrift 595 n. Chr. ist ein voll entwickeltes dezimales Positionssystem mit Ziffern zur Zahlendarstellung erstmalig belegt.

१	२	३	४	५	६	७	८	९	.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

Abbildung 1.19: Brahmi-Ziffern

1234567 ≙ १२३४५६७

12003 ≙ १२००३

Abbildung 1.20: Zahlbeispiele

Das Dezimalsystem, das in Indien bei den ganzen Zahlen angewendet wird, wurde auf die Brüche nicht übertragen. In der Astronomie wurde spätestens ab dem 6. Jh. n. Chr. mit Sexagesimalbrüchen gearbeitet, was auf babylonischen Einfluss schließen lässt. Das Dezimalsystem wurde bei Brüchen erst in neuerer Zeit eingeführt.

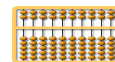
1.1.7 Araber

Zu den Arabern werden in diesem Zusammenhang alle die Kulturkreise gezählt, deren Religion der Islam und deren Sprache arabisch oder persisch waren.

Die 1. Möglichkeit der schriftlichen Zahlendarstellung übernahmen die

¹⁹ siehe Kapitel 5.1 Lexikon

²⁰ siehe Kapitel 5.1 Lexikon



Araber aus den Gebieten, in die sie eingefallen waren, so z.B. aus dem östlichen Mittelmeerraum die griechischen Zahlbuchstaben. Mit dieser Zahlschreibung, die bis ins 12. Jh. anzutreffen ist, wurden auch Brüche dargestellt.

Als eine weitere Möglichkeit Zahlen darzustellen, traten erstmalig im 8. Jh. die **Gummalzahlen** auf. Zur Anwendung kam diese Zahlschreibung in Rechen- und astronomischen Lehrbüchern, in denen überwiegend im Sexagesimalsystem gearbeitet wurde, sodass für das Positionssystem die Zahlen bis 59 von besonderer Bedeutung waren. Als Zahlzeichen wurden Buchstaben ihres Alphabets benutzt, denen Zahlenwerte zugeordnet wurden. Die additiv zusammengesetzten Zahlzeichen für jede Position des Sexagesimalsystems wurden in der arabischen Schriftrichtung (von rechts nach links), mit dem größten Wert beginnend aneinander gefügt.

ا	ب	ح	د	ه	و	ز	ح	ط	ی	ک	ل	م	ن
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40	50

Abbildung 1.21: einfache Gummalzahlzeichen

$$1234567 = 5 \cdot 60^3 + 42 \cdot 60^2 + 56 \cdot 60 + 7 \triangleq \text{Gerade}^{21} \text{ ه م ب نو ز}$$

$$45678 = 12 \cdot 60^2 + 41 \cdot 60 + 18 \cdot 1 \triangleq \text{Gerade} \text{ ی ما ی ح}$$

Abbildung 1.22: Zahlbeispiele in arabischer Schriftrichtung von rechts nach links

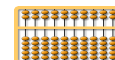
Um die Position/Stelle sichtbar zu machen wurden im Anschluss die Stellen bezeichnet. 4 25 40 Erhöhtes, Gerade und Minuten (wäre im Arabischen von rechts nach links geschrieben) hätte den Wert $4 \cdot 60^1 + 25 \cdot 60^0 + 40 \cdot 60^{-1} = 265 \frac{2}{3}$. Bei langen Zahlen wurden nur die erste und letzte Stelle oder nur die kleinste Stelle benannt.

Durch eine indische Gesandtschaft, die 773 an den Hof des Kalifen in Bagdad kam, bekamen die Araber Kenntnis von den **indischen Zahlen**, die sich schnell verbreiteten. So lernten sie die Null und die neun Ziffern kennen.

Das älteste arabische Rechenbuch mit indisch-arabischen Zahlen ist von 952/953 n. Chr.. Die leicht abgewandelt übernommenen Zahlzeichen der Inder veränderten sich im Laufe der Zeit, wie sie auch im arabischen Kulturkreis variierten.

Obwohl die Araber linksläufig schreiben, blieben sie dabei – sofern indische Ziffern verwendet wurden – wie in Indien die höchsten Stellen links und die kleinsten am weitesten rechts zu schreiben.

²¹ Gerade deutet hier die Potenz 10^0 an, d. h. Einer sind hier die kleinste Stelle



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
1.	—	=	≡	⋈	⋈	⋈	⋈	⋈	⋈	
2.	ॐ	ॐ	ॐ	ॐ	ॐ	ॐ	ॐ	ॐ	ॐ	ॐ
3.	ॐ	ॐ	ॐ	ॐ	ॐ	ॐ	ॐ	ॐ	ॐ	ॐ
4.	ॐ	ॐ	ॐ	ॐ	ॐ	ॐ	ॐ	ॐ	ॐ	ॐ
5.	ॐ	ॐ	ॐ	ॐ	ॐ	ॐ	ॐ	ॐ	ॐ	ॐ
6.	ॐ	ॐ	ॐ	ॐ	ॐ	ॐ	ॐ	ॐ	ॐ	ॐ
7.	ॐ	ॐ	ॐ	ॐ	ॐ	ॐ	ॐ	ॐ	ॐ	ॐ
8.	ॐ	ॐ	ॐ	ॐ	ॐ	ॐ	ॐ	ॐ	ॐ	ॐ
9.	ॐ	ॐ	ॐ	ॐ	ॐ	ॐ	ॐ	ॐ	ॐ	ॐ

Inder

1. Brāhmī-Ziffern [Menninger; 2, 233].
2. Bakhshālī-Manuskript [Table IV, 7].
3. Gwalior-Inschriften [BSS; 177].
4. Sanskrit (Nāgarī) [DS; I, 120].

Araber

Ostarabisch (s. S. 53):

5. al-Uqlīdisī [Uqlīdisī 2; 355], Kūšyār ibn Labbān (10./11. Jh.) [47], al-Nasawī (11. Jh.) [Uqlīdisī 2; 355], al-Kāšī (15. Jh.) [4^v].
6. Manuskript aus Schiraz (um 970) [Woepcke 5; 75].

Westarabisch (s. S. 54):

7. al-Ḥaṣṣār (Ms. von 1432) [Suter 3; 15].
8. al-Umawī (Ms. von 1373) [Uqlīdisī 2; 355].
9. al-Qalaṣādī [Woepcke 5; 62], [Woepcke 2; 358].

Abbildung 1.23: Entwicklung der Ziffern²²

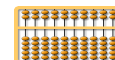
1.1.8 Europa

Anfangs übernahmen die jungen Völker zunächst die dezimale Zahlendarstellung der Römer. Für die schriftliche Niederlegung von Zahlen, wie es z.B. in den Rechenbüchern von Kaufleuten, Klosterverwaltern etc. notwendig war, wurden die kursiv abgewandelten römischen Zahlzeichen bis weit ins 16. Jh. hinein verwendet.

Die indisch-arabischen Ziffern im dezimalen Stellenwertsystem wurden über Spanien in Europa bekannt. Das Rechenbuch von *Mohammad ibn Musa al-Chwarizmi*²³ war für ihre Verbreitung von größter Bedeutung. Aber erst mit dem Aufkommen des Buchdrucks (Mitte des 15. Jahrhundert) verwendeten alle Rechenbücher die neuen arabischen Ziffern. Die durch den Druck festgelegten Formen der Ziffern haben sich bis auf die der 4, 5 und 7 bis in die heutige Zeit unverändert erhalten.

²² aus Tropfke, S. 66

²³ siehe Kapitel 5.1 Lexikon



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
1.	I	ʒ	ʒ	ʒ	ʒ	ʒ	ʒ	ʒ	ʒ	
2.	I	ʒ	ʒ	ʒ	ʒ	ʒ	ʒ	ʒ	ʒ	ʒ
3.	I	ʒ	ʒ	ʒ	ʒ	ʒ	ʒ	ʒ	ʒ	
4.	1	ʒ	ʒ	ʒ	ʒ	ʒ	ʒ	ʒ	ʒ	0
5.	1	ʒ	ʒ	ʒ	ʒ	ʒ	ʒ	ʒ	ʒ	0
6.	1	ʒ	ʒ	ʒ	ʒ	ʒ	ʒ	ʒ	ʒ	0
7.	1	ʒ	ʒ	ʒ	ʒ	ʒ	ʒ	ʒ	ʒ	0
8.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
9.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
10.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
11.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

1. Cod. Vigilanus (aus dem Jahre 976) [Ewald; 356].
2. Cod. Erlangen, Universitätsbibl. 379 („Boetius“-Geometrie, Mitte des 11. Jhs.) [Folkerts 1; Tafel 1]: Ziffern auf dem Abakus.
3. Clm 13021 („Boetius“-Geometrie, 13. Jh.) [Folkerts 1; Tafel 2].
4. Cod. Vindob. 275 (Algorismusschrift A1, von 1143) [al-Hwārizmī 2; 51].
5. Cod. Par. bibl. nat. 16208 (Algorismusschrift A3, vor 1180) [al-Hwārizmī 2; 51].
6. Cod. Par. bibl. nat. 16202 (Algorismusschrift H1, Anfang des 13. Jhs.), Cod. Par. bibl. nat. 7359 (Algorismusschrift H4, um 1300) [al-Hwārizmī 2; 51].
7. Columbia-Algorismus (14. Jh.) [Vogel 24; 12].
8. Algorismus Ratisbonensis [Vogel 11; Tafel VI].
9. Treviso-Arithmetik von 1478 [1^v].
10. Bamberger Rechenbuch von 1483 [9^r].
11. Dürer [42].

Abbildung 1.24: Entwicklung der indisch-arabischen Ziffern in Europa²⁴

Die heutige geöffnete Form der 4 im Gegensatz zu der geschlossenen Form der 4 tritt erst im 19. Jh. auf. Zur Darstellung großer Zahlen benutzte man in Europa ebenso wie im arabischen Raum, die Einteilung größerer Zahlen in Gruppen zu je drei Ziffern, wobei die Tausender entweder durch einen Bogen zusammengefasst oder durch einen Punkt markiert wurden.

1.2 Unterschiedliche Zahldarstellungen in der Praxis

1.2.1 Fingerdarstellung

Wie auch alle anderen Kulturen kannten die Araber die Möglichkeit Zahlen mit Hilfe ihrer Finger darzustellen. Sie nutzten die unterschiedlichen Möglichkeiten ihre Finger in den Gelenken umzuknicken und waren dadurch in der Lage mit ihren zwei Händen Zahlen von 1 bis 9999 darzustellen.

²⁴ aus Tropfke, S. 67