,

Chapitre 1
Méthodes directes de résolution des systèmes linéaires

HADDADOU Hamid

Plan

Position du problème et Idée de résolution

Considérons le système $Au = b$ avec $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{C})$ inversible et $b \in \mathbb{C}^n$ tq

$$A = (a_1, \cdots, a_n) \;\; et \;\; b = (b_1, \cdots, b_n)$$

où a_k est le k^{me} vecteur colonne de A.
On dit qu'une **méthode est directe** si elle donne **la solution exacte** en un nombre fini d'opérations élémentaires.

Par exemple la formule de Cramer est une méthode directe qui donne

$$u_k = \frac{\det(a_1, \cdots, \widehat{a_k} \cdots, a_n)}{\det A}$$

Sachant que le calcul d'un det. d'une matrice pleine d'ordre n demande $\simeq nn!$ d'opér. élém., alors on a un $\simeq n(n+1)!$ d'opérations à effectuer.

Si on a un ordi. qui effectue 10^9 d'opér. par seconde, il faudrait un temps de calcul équivalent à $\frac{n(n+1)!}{10^9}\ s$.

Par exemple un système d'ordre 50 demande un équivalent de temps $\frac{50(51)!}{10^9}\ s$.

C'est à dire $\frac{50(51)!}{10^9 \times 3600 \times 24 \times 365}$ *années* $\simeq 2,45\ 10^{51}$ *années*

Cas A triangulaire

Méthode de remontée : **Exemple :** On a

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 1, \\ \qquad\quad 3x_2 + x_3 = \frac{1}{2}, \\ \qquad\qquad\quad 7x_3 = -\frac{3}{2}, \end{cases} \quad \overset{\textit{méthode de}}{\underset{\textit{relontée}}{\Longrightarrow}} \quad \begin{cases} x_3 = -\frac{3}{14}, \\ x_2 = \frac{5}{21}, \\ x_1 = \frac{17}{42}. \end{cases}$$

Si A est triangulaire supérieure inversible, le système à résoudre se présente sous la forme suivante :

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + \cdots\cdots\cdots\cdots + a_{1n}u_n = b_1 \\ \quad \ddots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad a_{(n-1)(n-1)}u_{n-1} + a_{n(n-1)}u_n = b_{n-1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}u_n = b_n \end{cases}$$

On calcule u_n puis on remonte $\begin{cases} u_n = \frac{b_n}{a_{nn}} \\ u_{n-1} = \frac{1}{a_{(n-1)(n-1)}}\left(b_{n-1} - a_{n(n-1)}u_n\right) \\ \vdots \\ u_1 = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - (a_{12}u_2 + \cdots + a_{1n}u_n)\right). \end{cases}$

Nombre d'opérations

$$\left.\begin{array}{r} n\text{divisions} \\ 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2} \text{ multiplications} \\ 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2} \text{ additions} \end{array}\right\} = n^2 \text{ opérations}$$

Cas A triangulaire

Méthode de remontée : **Exemple :** On a

$$\left\{\begin{array}{r} 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 1, \\ 3x_2 + x_3 = \frac{1}{2}, \\ 7x_3 = -\frac{3}{2}, \end{array}\right. \quad \underset{\textit{relontée}}{\overset{\textit{méthode de}}{\Longrightarrow}} \quad \left\{\begin{array}{l} x_3 = -\frac{3}{14}, \\ x_2 = \frac{5}{21}, \\ x_1 = \frac{17}{42}. \end{array}\right.$$

Si A est triangulaire supérieure inversible, le système à résoudre se présente sous la forme suivante :

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}u_1 + \cdots\cdots\cdots\cdots + a_{1n}u_n = b_1 \\ \quad \ddots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad a_{(n-1)(n-1)}u_{n-1} + a_{n(n-1)}u_n = b_{n-1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}u_n = b_n \end{array}\right.$$

On calcule u_n puis on remonte $\left\{\begin{array}{l} u_n = \frac{b_n}{a_{nn}} \\ u_{n-1} = \frac{1}{a_{(n-1)(n-1)}}\left(b_{n-1} - a_{n(n-1)}u_n\right) \\ \vdots \\ u_1 = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - (a_{12}u_2 + \cdots + a_{1n}u_n)\right). \end{array}\right.$

Nombre d'opérations

$$\left.\begin{array}{c} n\text{divisions} \\ 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2} \text{ multiplications} \\ 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2} \text{ additions} \end{array}\right\} = n^2 \text{ opérations}$$

Cas A triangulaire

Méthode de remontée : **Exemple :** On a

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 1, \\ 3x_2 + x_3 = \frac{1}{2}, \\ 7x_3 = -\frac{3}{2}, \end{cases} \xrightarrow[\textit{relontée}]{\textit{méthode de}} \begin{cases} x_3 = -\frac{3}{14}, \\ x_2 = \frac{5}{21}, \\ x_1 = \frac{17}{42}. \end{cases}$$

Si A est triangulaire supérieure inversible, le système à résoudre se présente sous la forme suivante :

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + \cdots\cdots\cdots + a_{1n}u_n = b_1 \\ \ddots \qquad \vdots \\ a_{(n-1)(n-1)}u_{n-1} + a_{n(n-1)}u_n = b_{n-1} \\ a_{nn}u_n = b_n \end{cases}$$

On calcule u_n puis on remonte
$$\begin{cases} u_n = \frac{b_n}{a_{nn}} \\ u_{n-1} = \frac{1}{a_{(n-1)(n-1)}}\left(b_{n-1} - a_{n(n-1)}u_n\right) \\ \vdots \\ u_1 = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - (a_{12}u_2 + \cdots + a_{1n}u_n)\right). \end{cases}$$

Nombre d'opérations

$$\left.\begin{array}{r} n\text{divisions} \\ 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2} \text{ multiplications} \\ 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2} \text{ additions} \end{array}\right\} = n^2 \text{ opérations}$$

Cas A triangulaire

Méthode de remontée : **Exemple :** On a

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 1, \\ \qquad 3x_2 + x_3 = \frac{1}{2}, \\ \qquad\qquad 7x_3 = -\frac{3}{2}, \end{cases} \xRightarrow[\textit{relontée}]{\textit{méthode de}} \begin{cases} x_3 = -\frac{3}{14}, \\ x_2 = \frac{5}{21}, \\ x_1 = \frac{17}{42}. \end{cases}$$

Si A est triangulaire supérieure inversible, le système à résoudre se présente sous la forme suivante :

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + \cdots\cdots\cdots + a_{1n}u_n = b_1 \\ \quad \ddots \qquad\qquad \vdots \\ \quad a_{(n-1)(n-1)}u_{n-1} + a_{n(n-1)}u_n = b_{n-1} \\ \qquad\qquad\qquad a_{nn}u_n = b_n \end{cases}$$

On calcule u_n puis on remonte
$$\begin{cases} u_n = \frac{b_n}{a_{nn}} \\ u_{n-1} = \frac{1}{a_{(n-1)(n-1)}}\left(b_{n-1} - a_{n(n-1)}u_n\right) \\ \vdots \\ u_1 = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - (a_{12}u_2 + \cdots + a_{1n}u_n)\right). \end{cases}$$

Nombre d'opérations

$$\left.\begin{array}{r} n\text{divisions} \\ 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2} \text{ multiplications} \\ 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2} \text{ additions} \end{array}\right\} = n^2 \text{ opérations}$$

Cas A triangulaire

Méthode de remontée : **Exemple :** On a

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 1, \\ \quad\quad 3x_2 + x_3 = \frac{1}{2}, \\ \quad\quad\quad 7x_3 = -\frac{3}{2}, \end{cases} \quad \underset{\textit{relontée}}{\overset{\textit{méthode de}}{\Longrightarrow}} \quad \begin{cases} x_3 = -\frac{3}{14}, \\ x_2 = \frac{5}{21}, \\ x_1 = \frac{17}{42}. \end{cases}$$

Si A est triangulaire supérieure inversible, le système à résoudre se présente sous la forme suivante :

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + \cdots\cdots\cdots\cdots + a_{1n}u_n = b_1 \\ \quad \ddots \quad\quad\quad\quad \vdots \\ \quad a_{(n-1)(n-1)}u_{n-1} + a_{n(n-1)}u_n = b_{n-1} \\ \quad\quad\quad\quad a_{nn}u_n = b_n \end{cases}$$

On calcule u_n puis on remonte
$$\begin{cases} u_n = \frac{b_n}{a_{nn}} \\ u_{n-1} = \frac{1}{a_{(n-1)(n-1)}}\left(b_{n-1} - a_{n(n-1)}u_n\right) \\ \vdots \\ u_1 = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - (a_{12}u_2 + \cdots + a_{1n}u_n)\right). \end{cases}$$

Nombre d'opérations

$$\left.\begin{array}{r} n\text{divisions} \\ 1+2+\cdots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2} \text{ multiplications} \\ 1+2+\cdots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2} \text{ additions} \end{array}\right\} = n^2 \text{ opérations}$$

Cas A triangulaire

Méthode de remontée : **Exemple :** On a

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 1, \\ 3x_2 + x_3 = \frac{1}{2}, \\ 7x_3 = -\frac{3}{2}, \end{cases} \underset{\textit{relontée}}{\overset{\textit{méthode de}}{\Longrightarrow}} \begin{cases} x_3 = -\frac{3}{14}, \\ x_2 = \frac{5}{21}, \\ x_1 = \frac{17}{42}. \end{cases}$$

Si A est triangulaire supérieure inversible, le système à résoudre se présente sous la forme suivante :

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + a_{1n}u_n = b_1 \\ \quad \ddots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad a_{(n-1)(n-1)}u_{n-1} + a_{n(n-1)}u_n = b_{n-1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}u_n = b_n \end{cases}$$

On calcule u_n puis on remonte
$$\begin{cases} u_n = \frac{b_n}{a_{nn}} \\ u_{n-1} = \frac{1}{a_{(n-1)(n-1)}}\left(b_{n-1} - a_{n(n-1)}u_n\right) \\ \vdots \\ u_1 = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - (a_{12}u_2 + \cdots + a_{1n}u_n)\right). \end{cases}$$

Nombre d'opérations

$$\left.\begin{array}{r} n\text{divisions} \\ 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2} \text{ multiplications} \\ 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2} \text{ additions} \end{array}\right\} = n^2 \text{ opérations}$$

La méthode d'élimination de Gauss

Idée de résolution Transformer $AX = b$ à un système équivalent dont la matrice est triangulaire et de tel sorte que la transformation nécessite un nombre d'opérations élémentaires négligeable devant $n!$.

Elle est constituée de 3 étapes

1) Procédure d'élimination : déterminer M telle que MA soit triang. sup.,
2) calculer Mb,
3) résolution de $MAu = Mb$.

Remarque

Dans la pratique, on peut faire les combinaisons linéaires entre les équations et ceci donne directement MA et Mb en même temps.

Remarque

Échanger 2 lignes l_j et l_k dans une matrice équivaut à la multiplier à gauche par la matrice de transposition $T(l_j, l_k)$ obtenue en échangeant les lignes l_j et l_k dans la matrice identité I_n.

La méthode d'élimination de Gauss

Idée de résolution Transformer $AX = b$ à un système équivalent dont la matrice est triangulaire et de tel sorte que la transformation nécessite un nombre d'opérations élémentaires négligeable devant $n!$.

Elle est constituée de 3 étapes

1) Procédure d'élimination : déterminer M telle que MA soit triang. sup.,
2) calculer Mb,
3) résolution de $MAu = Mb$.

Remarque

Dans la pratique, on peut faire les combinaisons linéaires entre les équations et ceci donne directement MA et Mb en même temps.

Remarque

Échanger 2 lignes l_j et l_k dans une matrice équivaut à la multiplier à gauche par la matrice de transposition $T(l_j, l_k)$ obtenue en échangeant les lignes l_j et l_k dans la matrice identité I_n.

Procédure d'élimination (Exemple)

On explique cette méthode par un exemple. Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Étape 1 : Notons A la matrice du système et posons $A_1 = A$ et $b_1 = b$. Alors,

$$A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -4 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \begin{array}{l} l_1 \\ l_2 - \frac{3}{2} l_1 \\ l_3 + \frac{1}{2} l_1 \end{array} \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 2 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & 1 \end{array}}_{A_2} \middle| \underbrace{\begin{array}{c} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array}}_{b_2} \right)$$

Remarquons les tranformation effectués se traduisent au sens de produit matriciel par : on a obtenu A_2 et b_2 par : $A_2 = E_1 P_1 A$ et $b_2 = E_1 P_1 b$ avec

$$P_1 = I_3 \quad et \quad E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ +\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Procédure d'élimination (Exemple)

On explique cette méthode par un exemple. Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Étape 1 : Notons A la matrice du système et posons $A_1 = A$ et $b_1 = b$. Alors,

$$A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -4 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{l} l_1 \\ l_2 - \frac{3}{2}l_1 \\ l_3 + \frac{1}{2}l_1 \end{array} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_{A_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{b_2}$$

Remarquons les tranformation effectués se traduisent au sens de produit matriciel par : on a obtenu A_2 et b_2 par : $A_2 = E_1P_1A$ et $b_2 = E_1P_1b$ avec

$$P_1 = I_3 \quad et \quad E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ +\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Procédure d'élimination (Exemple)

On explique cette méthode par un exemple. Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Étape 1 : Notons A la matrice du système et posons $A_1 = A$ et $b_1 = b$. Alors,

$$A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -4 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{l} l_1 \\ l_2 - \frac{3}{2} l_1 \\ l_3 + \frac{1}{2} l_1 \end{array} \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 2 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & 1 \end{array}}_{A_2} \middle| \underbrace{\begin{array}{c} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array}}_{b_2} \right)$$

Remarquons les tranformation effectués se traduisent au sens de produit matriciel par : on a obtenu A_2 et b_2 par : $A_2 = E_1 P_1 A$ et $b_2 = E_1 P_1 b$ avec

$$P_1 = I_3 \quad et \quad E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ +\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Procédure d'élimination (Exemple)

On explique cette méthode par un exemple. Considérons le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{r} 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{array}\right.$$

Étape 1 : Notons A la matrice du système et posons $A_1 = A$ et $b_1 = b$. Alors,

$$A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -4 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{l} l_1 \\ l_2 - \frac{3}{2} l_1 \\ l_3 + \frac{1}{2} l_1 \end{array} \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 2 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & 1 \end{array}}_{A_2} \middle| \underbrace{\begin{array}{c} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array}}_{b_2}\right)$$

Remarquons les tranformation effectués se traduisent au sens de produit matriciel par : on a obtenu A_2 et b_2 par : $A_2 = E_1 P_1 A$ et $b_2 = E_1 P_1 b$ avec

$$P_1 = I_3 \quad et \quad E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ +\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Procédure d'élimination (suite)

Étape 2 : On a

$$A_2|b_2 \sim \begin{array}{c} l_1 \\ l_3 \\ l_2 \end{array} \underbrace{\left(\begin{array}{ccc} 2 & 4 & -4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{array}\right.}_{A_3} \underbrace{\left|\begin{array}{c} 2 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{array}\right)}_{b_3}$$

Remarquons les tranformation effectués se traduisent au sens de produit matriciel par : o a obtenu A_3 et b_3 par : $A_3 = E_2P_2A_2$ et $b_3 = E_2P_2b_2$ avec

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad et \quad E_2 = I_3$$

Ainsi, $AX = b \Leftrightarrow E_2P_2E_1P_1AX = E_2P_2E_1P_1b \Leftrightarrow A_3X = b_3$

$$\left\{\begin{array}{r} 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 1, \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 1, \\ 3x_2 + x_3 = \frac{1}{2}, \\ 7x_3 = -\frac{3}{2}, \end{array}\right. \underset{\text{relontée}}{\overset{\text{méthode de}}{\Longrightarrow}} \left\{\begin{array}{l} x_3 = -\frac{3}{14}, \\ x_2 = \frac{5}{21}, \\ x_1 = \frac{17}{42}. \end{array}\right.$$

Procédure d'élimination (suite)

Étape 2 : On a

$$A_2|b_2 \sim \begin{array}{c} l_1 \\ l_3 \\ l_2 \end{array} \underbrace{\left(\begin{array}{ccc} 2 & 4 & -4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{array}\right.}_{A_3} \underbrace{\left|\begin{array}{c} 2 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{array}\right)}_{b_3}$$

Remarquons les tranformation effectués se traduisent au sens de produit matriciel par : o a obtenu A_3 et b_3 par : $A_3 = E_2P_2A_2$ et $b_3 = E_2P_2b_2$ avec

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad et \quad E_2 = I_3$$

Ainsi, $AX = b \Leftrightarrow E_2P_2E_1P_1AX = E_2P_2E_1P_1b \Leftrightarrow A_3X = b_3$

$$\left\{\begin{array}{r} 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 1, \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 1, \\ 3x_2 + x_3 = \frac{1}{2}, \\ 7x_3 = -\frac{3}{2}, \end{array}\right. \underset{relontée}{\overset{méthode\ de}{\Longrightarrow}} \left\{\begin{array}{l} x_3 = -\frac{3}{14}, \\ x_2 = \frac{5}{21}, \\ x_1 = \frac{17}{42}. \end{array}\right.$$

Procédure d'élimination (suite)

Étape 2 : On a

$$A_2|b_2 \sim \begin{array}{c} l_1 \\ l_3 \\ l_2 \end{array} \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 2 & 4 & -4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{array}}_{A_3} \left| \underbrace{\begin{array}{c} 2 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{array}}_{b_3} \right. \right)$$

Remarquons les tranformation effectués se traduisent au sens de produit matriciel par : o a obtenu A_3 et b_3 par : $A_3 = E_2 P_2 A_2$ et $b_3 = E_2 P_2 b_2$ avec

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad et \quad E_2 = I_3$$

Ainsi, $AX = b \Leftrightarrow E_2 P_2 E_1 P_1 AX = E_2 P_2 E_1 P_1 b \Leftrightarrow A_3 X = b_3$

$$\left\{ \begin{array}{r} 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 1, \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 1, \\ 3x_2 + x_3 = \frac{1}{2}, \\ 7x_3 = -\frac{3}{2}, \end{array} \right. \overset{\text{méthode de}}{\underset{\text{relontée}}{\Longrightarrow}} \left\{ \begin{array}{l} x_3 = -\frac{3}{14}, \\ x_2 = \frac{5}{21}, \\ x_1 = \frac{17}{42}. \end{array} \right.$$

Procédure d'élimination (suite)

Étape 2 : On a

$$A_2|b_2 \sim \begin{array}{c} l_1 \\ l_3 \\ l_2 \end{array} \underbrace{\left(\begin{array}{ccc} 2 & 4 & -4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{array}\right.}_{A_3} \underbrace{\left|\begin{array}{c} 2 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{array}\right)}_{b_3}$$

Remarquons les tranformation effectués se traduisent au sens de produit matriciel par : o a obtenu A_3 et b_3 par : $A_3 = E_2 P_2 A_2$ et $b_3 = E_2 P_2 b_2$ avec

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad et \quad E_2 = I_3$$

Ainsi, $AX = b \Leftrightarrow E_2 P_2 E_1 P_1 AX = E_2 P_2 E_1 P_1 b \Leftrightarrow A_3 X = b_3$

$$\left\{\begin{array}{r} 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 1, \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 1, \\ 3x_2 + x_3 = \frac{1}{2}, \\ 7x_3 = -\frac{3}{2}, \end{array}\right. \underset{relontée}{\overset{méthode\ de}{\Longrightarrow}} \left\{\begin{array}{l} x_3 = -\frac{3}{14}, \\ x_2 = \frac{5}{21}, \\ x_1 = \frac{17}{42}. \end{array}\right.$$

Procédure d'élimination (suite)

En résumé d'une façon général pour une matrice inversible de taille n,

la procédure d'élimination de Gauss se traduit par

$$AX = b \Leftrightarrow \underbrace{E_{n-1}P_{n-1}...E_1P_1}_{M}Ax = E_{n-1}P_{n-1}...E_1P_1b$$

où les P_i sont les matrices de permutation, et E_i sont les matrices d'élimination.

Corollaire

Si on pose $A_n = MA$, alors $det(A) = (-1)^p det(A_n)$, où p est le nombre total des permutations de lignes effectuées.

Démonstration au tableau

Remarque

Pour n assez grand, le nombre d'opérations dédié à la méthode Gauss est équivalent à $\frac{2}{3}n^3$

Exemple (Trouver la première colonne de A^{-1} par Guasse et déduiree $det(A)$ avec)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}$$

Choix du pivot

Pour appliquer la méthode, il suffit de prendre des éléments non nuls comme pivots.

Problème : Erreurs d'arrondis

stocke les nombres ds les machines sous la forme $x = \pm b^m a$. On choisit une mantisse à 3 chiffres décimaux et la base 10. On aura

$$\begin{array}{ll} 1 - 10^4 \simeq -9990, & 2 - 10^4 \simeq -9990 \\ -2 \times 10^{-4} + 1 \simeq 0,999 & 1 - 10^{-4} \simeq 0,999 \end{array}$$

Prenons l'exemple du système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} 10^{-4} u_1 + u_2 = 1 \\ u_1 + u_2 = 2 \end{array} \right. \quad \text{la solution exacte est } \simeq (1.00010.., 0.99990) \qquad (1)$$

$\longrightarrow$ On prend 10^{-4} comme pivot, le système (2) est équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{l} 10^{-4} u_1 + u_2 = 1 \\ (1 - 10^4)\ u_2 = 2 - 10^4 \end{array} \right. \underset{\text{la machine}}{\overset{\text{pour}}{\Rightarrow}} \left\{ \begin{array}{l} 10^{-4} u_1 + u_2 = 1 \\ -9990\ u_2 = -9990 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u_1 = 0, \\ u_2 = 1 \end{array} \right. \quad \textit{mauvaise}$$

$\longrightarrow$ On prend 1 comme pivot, le système (2) est équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 + u_2 = 2 \\ (1 - 10^{-4})\ u_2 = -2 \times 10^{-4} + 1 \end{array} \right. \underset{\text{la machine}}{\overset{\text{pour}}{\Rightarrow}} \left\{ \begin{array}{l} u_1 + u_2 = 2 \\ 0,999\ u_2 = 0,999 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u_1 = 1, \\ u_2 = 1 \end{array} \right. \quad \textit{acceptable.}$$

Choix du pivot

Pour appliquer la méthode, il suffit de prendre des éléments non nuls comme pivots.

Problème : Erreurs d'arrondis

stocke les nombres ds les machines sous la forme $x = \pm b^m a$. On choisit une mantisse à 3 chiffres décimaux et la base 10. On aura

$$\begin{array}{ll} 1 - 10^4 \simeq -9990, & 2 - 10^4 \simeq -9990 \\ -2 \times 10^{-4} + 1 \simeq 0,999 & 1 - 10^{-4} \simeq 0,999 \end{array}$$

Prenons l'exemple du système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} 10^{-4} u_1 + u_2 = 1 \\ u_1 + u_2 = 2 \end{array} \right. \text{ la solution exacte est } \simeq (1.00010.., 0.99990) \qquad (1)$$

$\longrightarrow$ On prend 10^{-4} comme pivot, le système (2) est équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{l} 10^{-4} u_1 + u_2 = 1 \\ (1 - 10^4)\ u_2 = 2 - 10^4 \end{array} \right. \underset{\textit{la machine}}{\overset{\textit{pour}}{\Rightarrow}} \left\{ \begin{array}{l} 10^{-4} u_1 + u_2 = 1 \\ -9990\ u_2 = -9990 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u_1 = 0, \\ u_2 = 1 \end{array} \right. \textit{mauvaise}$$

$\longrightarrow$ On prend 1 comme pivot, le système (2) est équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 + u_2 = 2 \\ (1 - 10^{-4})\ u_2 = -2 \times 10^{-4} + 1 \end{array} \right. \underset{\textit{la machine}}{\overset{\textit{pour}}{\Rightarrow}} \left\{ \begin{array}{l} u_1 + u_2 = 2 \\ 0,999\ u_2 = 0,999 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u_1 = 1, \\ u_2 = 1 \end{array} \right. \textit{acceptable.}$$

Choix du pivot

Pour appliquer la méthode, il suffit de prendre des éléments non nuls comme pivots.

Problème : Erreurs d'arrondis

stocke les nombres ds les machines sous la forme $x = \pm b^m a$. On choisit une mantisse à 3 chiffres décimaux et la base 10. On aura

$$\begin{array}{ll} 1 - 10^4 \simeq -9990, & 2 - 10^4 \simeq -9990 \\ -2 \times 10^{-4} + 1 \simeq 0,999 & 1 - 10^{-4} \simeq 0,999 \end{array}$$

Prenons l'exemple du système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} 10^{-4} u_1 + u_2 = 1 \\ u_1 + u_2 = 2 \end{array} \right. \text{ la solution exacte est } \simeq (1.00010.., 0.99990) \qquad (1)$$

$\longrightarrow$ On prend 10^{-4} comme pivot, le système (2) est équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{l} 10^{-4} u_1 + u_2 = 1 \\ (1 - 10^4)\ u_2 = 2 - 10^4 \end{array} \right. \underset{\textit{la machine}}{\overset{\textit{pour}}{\Rightarrow}} \left\{ \begin{array}{l} 10^{-4} u_1 + u_2 = 1 \\ -9990\ u_2 = -9990 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u_1 = 0, \\ u_2 = 1 \end{array} \right. \textit{mauvaise}$$

$\longrightarrow$ On prend 1 comme pivot, le système (2) est équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 + u_2 = 2 \\ (1 - 10^{-4})\ u_2 = -2 \times 10^{-4} + 1 \end{array} \right. \underset{\textit{la machine}}{\overset{\textit{pour}}{\Rightarrow}} \left\{ \begin{array}{l} u_1 + u_2 = 2 \\ 0,999\ u_2 = 0,999 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u_1 = 1, \\ u_2 = 1 \end{array} \right. \textit{acceptable.}$$

Stratégie des choix

En général les pivots petits en valeurs absolues sont mauvais. On peut alors développer des strategies dans le choix des pivots.

Les principales Si on note $A^k \doteq (a_{ik}^{(k)})$ la matrice obtenue à l'étape k en appliquant l'élimination de Guass à A.

1) Stratégie du pivot partiel : On prend à l'étape k comme pivot

$$a_{ik}^{(k)} = \max_{k \leq l \leq n} \left| a_{lk}^{(k)} \right| .$$

1) Stratégie du pivot total : On prend à l'étape k comme pivot

$$a_{ik}^{(k)} = \max_{k \leq l, h \leq n} \left| a_{lh}^{(k)} \right| .$$

Méthode de la factorisation LU (de Gauss)

Dans le cas où $\det A \neq 0$, la méthode de Guass est applicable et on a MA est triangulaire supérieur.
Alors, en posant $U = MA \;\; et \;\; L \doteq M^{-1}$ où $M = E_{n-1}P_{n-1}...E_1P_1$. on obtient

$$A = LU$$

Supposons maintenant **qu'on a jamais échangé des lignes**. Alors,

$$L = (E_1)^{-1} \cdots (E_{n-1})^{-1}$$

avec

$$E_k = \left(\begin{array}{cccccc} 1 & & & \cdots & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & -l_{(k+1)k} & \ddots & & \\ & & \vdots & & 1 & \\ & & -l_{nk} & & & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \ldots\ldots \text{ligne } k \\ \ldots\ldots \text{ligne } (k+1) \\ \\ \\ \end{array}$$

et où l'on a posé $l_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$.

On montre que

$$E_k^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \cdots & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & l_{(k+1)k} & \ddots & & \\ & & \vdots & & 1 & \\ & & l_{nk} & & & 1 \end{pmatrix} \quad puis \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & \cdots & l_{n(n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple (Factorisation LU)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} l_1 \\ l_2 - 3l_1 \\ l_3 - 2l_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} l_1 \\ l_2 \\ l_3 - \frac{1}{6} l_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

La méthode de Gauss est applicable avec $P_1 = P_2 = I_3$, et

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{6} & 1 \end{pmatrix}.$$

Ce qui implique $\quad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \quad et \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{6} & 1 \end{pmatrix}$

Condition suffisante pour la factorisation LU d'une matrice

Théorème

Soit $A = (a_{ij})$ *et* $\forall k = 1, \dots, n$, $\Delta_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}$. *Alors, la matrice* A *admet une unique factorisation* LU *de Gauss si et seulement si* $\forall k = 1, \dots, n, \ \det(\Delta_k) \neq 0$.

Il y a deux cas particuliers de matrices admettant la factorisation LU, plus précisement

- A est symétrique définie positive $\Rightarrow \det(\Delta_k) > 0, \forall k = 1, \dots, n$
- A est à diagonale strictement dominante $\Rightarrow \det(\Delta_k) \neq 0, \ \forall k = 1, \dots, n$

Remarque

Une matrice carrée A *est dite à diagonale strictement dominante*

• *par lignes si* $\forall i, \ |a_{ii}| > \sum_{j,\ j \neq i} |a_{ij}|$,

ou

• *par colonnes si* $\forall j, \ |a_{jj}| > \sum_{i,\ i \neq j} |a_{ij}|$,

Factorisation PLU

Théorème (Factorisation PLU)

Soit A inversible. Alors, il existe une matrice de permutation P, une matrice $L = (l_{ij})$ triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale et une matrice U triangulaire supérieure telles que $PA = LU$.

Démonstration. Cas 1 : Si on n'a pas échangé des lignes lors de la procédure d'élimination de Gauss, on prend $P = I_n$.
Cas 2 : Si on a échangé des lignes lors de la procédure d'élimination de Gauss, alors $M = E_{n-1}P_{n-1}\dots E_1P_1$. Puisque $P_kP_k = I_n$, on peut écrire

$$M = E_{n-1}E'_{n-2}\dots E'_1 P$$

avec P représente toutes les permutations effectuées,
$E'_k = P_{n-1}\dots P_{k+1}E_kP_{k+1}\dots P_{n-1}$ et $P = P_{n-1}\dots P_1$. Posons

$$\begin{cases} L = (E_{n-1}E'_{n-2}\dots E'_1)^{-1}, \\ U = MA. \end{cases}$$

Alors, $PA = LU$ avec U triangulaire supérieure par construction et L triangulaire inférieure avec $l_{kk} = 1$. Pour le montrer il suffit de constater que chaque matrice E'_k est une matrice d'élimination. (indication : pour montrer cela, vérifier que $P_{k+1}E_kP_{k+1}$ a cette forme, puis étendre à E'_k par récurrence). ■

Résolution d'un système à partir de la factorisation LU ou PLU

Si l'on a à résoudre plusieurs systèmes avec la même matrice, la décomposition LU se révèle trés utile. On résout donc par Gauss une fois un système et on déduit la décomposition LU ou PLU.
- Si $A = LU$, on résout dans l'ordre :
1) On trouve la solution de $LY = b$ par la méthode de descente
2) Après on trouve X en utilisant la méthode de remontéé $UX = Y$
car L et U sont triangulaires respectivement inférieur et supérieure.

- Si $PA = LU$, il vient $PAX = Pb$. On résout dans l'ordre :
1) $LY = Pb$
2) $UX = Y$
Or L et U sont triangulaires, il suffit d'utiliser respectivement la méthode de remontée et la méthode de descente.

Remarque

Pour une matrice A, la commande matlab pour effectuer une factorisation PLU est : lu(A), c'est à dire :
$>> [\mathbf{L}, \mathbf{U}, \mathbf{P}] = \mathbf{lu}(\mathbf{A})$

La factorisation et la méthode de Cholesky

On considère ici des matrices **réelles symétriques et définies positives.**

Définition

On dit qu'une matrice symétrique $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *est définie positive si*

$$^tXAX > 0, \quad \forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}.$$

Exemple

La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ est symétrique et définie positive

Théorème

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*. Alors, on a les équivalences suivantes :*
A est définie positive $\Leftrightarrow SP(A) \subset R_+^* \Leftrightarrow \det \Delta_k > 0$ *(critère de Sylvester).*

Remarque

- *Remarquons que ces matrices admettent la factorisation* **LU**, *mais on va donner une "meilleure" factorisation.*
- *Si une matrice A est symétrique et définie positive, alors* $a_{ii} \in \mathbb{R}_+^*$*. Pour le constater il suffit de prendre dans la définition* $X = e_i$ *(le ième vecteur de la base canonique).*

Théorème (Factorisation de Cholesky)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive. Alors, il existe une matrice réelle triangulaire inférieure $C = (c_{ij})$ (pas unique) telle que $A = C\,{}^tC$ qui est appellée factorisation de Cholesky. De plus, il existe une seule décomposition de Cholesky de A avec $c_{ii} > 0, \ \ \forall i = 1, \dots, n$.

Remarque

Inversement si la matrice inversible A admet une décomposition de Cholesky, alors elle est symétrique définie positive.

Interêt

- Résolution des systèmes de la forme $Au = b$,
- Remplacer A par C.

Exemple

La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 14 \end{pmatrix}$$

admet une décomposition de Cholesky.

Calcul de C pour une matrice symétrique et définie positive

En utilisant la factorisation LU

Si on a déja calculé L et U. On prend (de la démonstration du dernier théorème !) $C = L\Lambda$ avec (Λ est bien définie car $u_{ii} > 0$)

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \sqrt{u_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sqrt{u_{nn}}. \end{pmatrix}$$

Cholesky sans utiliser la factorisation LU

On peut calculer C d'une manière pratique sans utiliser la factorisation LU. On pose $C = (c_{ij})$ (C est triangulaire supérieure) et on suppose que $A = C\,{}^tC$.

Alors, $a_{ij} = (C\,{}^tC)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} c_{ik}c_{jk}$

Remarque

La commande Matlab pour obtenir une factorisation de Cholesky est chol(.)

$>>$ **C = chol(A)**

Exemple

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 14 \end{pmatrix}$ admet une factorisation de Cholosky et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Méthode de Cholesky de résolution du système

Soit A une matrice symétrique définie positive et $Au = b$ avec b donné. Alors, on procède de la manière suivante :

- factorisation de Cholesky
- on résout $CY = b$
- et ensuite on résout ${}^tCu = Y$

Le nombres d'opérations

Pour n assez grand le nombre d'opérations élémentaires nécessaires pour résoudre un système par la méthode de Cholesky dans le cas où on utilise la deuxième méthode pour calculer C, est équivalent à $\frac{1}{3}n^3$ opérations.

Factorisation QR : But, Théorie et Intérêt

But

Le but est d'écrire toute matrice A sous la forme QR avec Q matrice orthogonale et R matrice triangulaire supérieure.

Définition

On dit qu'une matrice $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si $Q^{-1} = {}^tQ$.

Théorème

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On peut toujours factoriser A sous la forme QR. De plus on peut toujours s'arranger pour que tous les coefficients diagonaux de R soient tous positifs ou nul.

Intérêt

- Résolution de systèmes linéaires. Sachant la décomposition QR d'une matrice A carrée ou non , la résolution d'un système $AX = b$ revient à calculer ${}^tQb$ et résoudre ensuite le système $RX =^t Qb$.
- Si A est carrée, $|\det A| = |r_{11} \times \ldots \times r_{nn}|$ car $\det(Q) = \pm 1$.
- Calcul des Valeurs propres.

Factorisation QR : But, Théorie et Intérêt

But

Le but est d'écrire toute matrice A sous la forme QR avec Q matrice orthogonale et R matrice triangulaire supérieure.

Définition

On dit qu'une matrice $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si $Q^{-1} = {}^tQ$.

Théorème

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On peut toujours factoriser A sous la forme QR. De plus on peut toujours s'arranger pour que tous les coefficients diagonaux de R soient tous positifs ou nul.

Intérêt

- Résolution de systèmes linéaires. Sachant la décomposition QR d'une matrice A carrée ou non , la résolution d'un système $AX = b$ revient à calculer ${}^tQb$ et résoudre ensuite le système $RX =^t Qb$.
- Si A est carrée, $|\det A| = |r_{11} \times \ldots \times r_{nn}|$ car $\det(Q) = \pm 1$.
- Calcul des Valeurs propres.

Factorisation QR : But, Théorie et Intérêt

But

Le but est d'écrire toute matrice A sous la forme QR avec Q matrice orthogonale et R matrice triangulaire supérieure.

Définition

On dit qu'une matrice $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si $Q^{-1} = {}^tQ$.

Théorème

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On peut toujours factoriser A sous la forme QR. De plus on peut toujours s'arranger pour que tous les coefficients diagonaux de R soient tous positifs ou nul.

Intérêt

- Résolution de systèmes linéaires. Sachant la décomposition QR d'une matrice A carrée ou non , la résolution d'un système $AX = b$ revient à calculer ${}^tQb$ et résoudre ensuite le système $RX =^t Qb$.
- Si A est carrée, $|\det A| = |r_{11} \times \ldots \times r_{nn}|$ car $\det(Q) = \pm 1$.
- Calcul des Valeurs propres.

Factorisation QR : But, Théorie et Intérêt

But

Le but est d'écrire toute matrice A sous la forme QR avec Q matrice orthogonale et R matrice triangulaire supérieure.

Définition

On dit qu'une matrice $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si $Q^{-1} = {}^tQ$.

Théorème

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On peut toujours factoriser A sous la forme QR. De plus on peut toujours s'arranger pour que tous les coefficients diagonaux de R soient tous positifs ou nul.

Intérêt

- Résolution de systèmes linéaires. Sachant la décomposition QR d'une matrice A carrée ou non , la résolution d'un système $AX = b$ revient à calculer ${}^tQb$ et résoudre ensuite le système $RX =^t Qb$.
- Si A est carrée, $|\det A| = |r_{11} \times \ldots \times r_{nn}|$ car $\det(Q) = \pm 1$.
- Calcul des Valeurs propres.

La factorisation QR en utilisant Cholesky !(Première idée)

Dans le cas des **matrices carrées inversible**

En utilisant la factorisation de Cholesky !

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible.

1) On pose $B = {}^tA\,A$. Montrons que B admet une factorisation de Cholesky de la forme $C\,{}^tC$ avec C une matrice triangulaire inférieure.

2) Montrons que la matrice $A({}^tC)^{-1}$ est orthogonale.

3) Déduisons que A admet une factorisation QR en posant

$$Q = A({}^tC)^{-1} \quad et \quad R = {}^tC.$$

Remarque

Ce procédé est coûteux en opérations donc pas pratique, néanmoins il présente une preuve que tout matrice inversible peut s'écrire sous la forme QR.

Factorisation QR par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Ici on considère toujours le cas des **matrices carrées inversible**

Théorème

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ **inversible**. *Alors, il existe une matrice orthogonale* Q *et une matrice triangulaire supérieure* R *à diagonale positive telles que* $A = QR$. *De plus cette décomposition est unique et peut être obtenue par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt de la base formée des vecteurs colonnes de* A*, c'est à dire : Si* $A = (a_1, ..., a_n)$

$$\begin{cases} r_{11} = \|a_1\|_2 \, , \\ q_1 = \frac{1}{r_{11}} a_1 , \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} r_{im} = \langle q_i, a_m \rangle \, , \quad m = 2, \ldots, n \quad et \quad i = 1, \ldots, m-1, \\ \widetilde{a}_m = a_m - \sum_{i=1}^{m-1} r_{im} q_i \, , \\ r_{mm} = \|\widetilde{a}_m\|_2 \, , \quad q_m = \frac{1}{r_{mm}} \widetilde{a}_m , \end{cases}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *désigne le produit scalaire.*

Exemple et Défaut

Exemple

Décomposer la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ sous la forme QR

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{3}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Remarque

- *La factorisation QR en utilisant Ckelesky est trés coûteuse en nombre d'opérations relativement aux autres méthodes*
- *Le procédée d'orthonormalisation de Gram-Schmidt de factorisation sous la forme QR est peu stable.*
- *il y a d'autres méthodes pour factoriser sous forme QR. Par exemple,une qui utilise ce qu'on appelle les rotations de Givensn, ou une autre dite de Householder qui est plus stable que le procédée dorthonormalisation de Gram-Schmidt. De plus, plus général, vu qu'elle traite tout type de matrice (carrée ou non carrée). Cette dernière méthode est décrite dans l'annexe. de ce chapitre.*

Exemple et Défaut

Exemple

Décomposer la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ sous la forme QR

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{3}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Remarque

- *La factorisation QR en utilisant Ckelesky est trés coûteuse en nombre d'opérations relativement aux autres méthodes*
- *Le procédée d'orthonormalisation de Gram-Schmidt de factorisation sous la forme QR est peu stable.*
- *il y a d'autres méthodes pour factoriser sous forme QR. Par exemple,une qui utilise ce qu'on appelle les rotations de Givensn, ou une autre dite de Householder qui est plus stable que le procédée dorthonormalisation de Gram-Schmidt. De plus, plus général, vu qu'elle traite tout type de matrice (carrée ou non carrée). Cette dernière méthode est décrite dans l'annexe. de ce chapitre.*

Exemple introductif au conditionnement(en utilisant Matlab)

Prenons l'exemple classique suivant (dû à R. S.Wilson) :

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b' = \begin{pmatrix} 32,1 \\ 22,9 \\ 33,1 \\ 30,9 \end{pmatrix}.$$

Les solutions des systèmes $AX = b$ et $AX' = b'$ sont respectivement

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X' = \begin{pmatrix} 9,2 \\ -12,6 \\ 4,5 \\ -1,1 \end{pmatrix}.$$

On remarque que

$$b' - b = \begin{pmatrix} 0,1 \\ -0,1 \\ 0,1 \\ -0.1 \end{pmatrix} \quad et \quad X' - X = \begin{pmatrix} -8,2 \\ 13,- \\ 0-3,5 \\ 2,1 \end{pmatrix}$$

Donc, une petite perturbation sur le membre de droite a conduit un grand changement dans la solution. Chose qui semble être étrange à première vu. Pour expliquer ce phénomene on est conduit à parler de la notion de conditionnement.

Définition et propriétés

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$. Alors, pour une norme matricielle induite donnée $\|\cdot\|$, le conditionnement de la matrice A est défini par $cond(A) = \|A\| \; \|A^{-1}\|$.

Proposition

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ inversible, On a
(1) $cond(A) = cond(A^{-1})$,
(2) $cond(\alpha A) = cond(A)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}^*$,
(3) $cond(A) \geq 1$,
(4) $cond_2(A) = \dfrac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$ ($\lambda_{\max}$ et $\lambda_{\min}$ sont la plus grande et la plus petite valeurs singulières de A).
(5) De plus, pour le cas particulier de la normé $\|\cdot\|_2$, pour une matrice A est orthogonale, on a $cond_2(A) = 1$.

Remarque

Pour une matrice inversible $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$. Les valeurs sigulières d'une matrice A sont les racines carrées des valeurs propres de la matrice ${}^tA\,A$.

Résultats importants

Les deux résultats suivants expliquent le phénomène illustré par l'exemple ci-dessus :

Théorème

Soient $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ et $b, b' \in \mathbb{R}^n$ avec $b \neq 0$.. Alors si X et X' sont solutions de $AX = b$ et $AX' = b'$, on a

$$\frac{\|X' - X\|}{\|X\|} \leq cond(A)\frac{\|b' - b\|}{\|b\|}.$$

Théorème

Soient $A, A' \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$ avec $A \neq 0$ et $b' \neq 0$. Alors si X et X' sont solutions de $AX = b$ et $A'X' = b$, on a

$$\frac{\|X' - X\|}{\|X'\|} \leq cond(A)\frac{\|A' - A\|}{\|A\|}.$$

Notions et discussions

Le conditionnement donne une idée de la sensibilité de la solution d'un système aux erreurs sur les données, à savoir sur la matrice A ainsi que sur le membre à droite b. Si

• le conditionnement est très élevé par rapport à 1 $cond(A) >> 1$, alors le système est dit mal conditionné,

• le conditionnement est très proche de 1, alors le système est dit bien conditionné.

Le système est parfaitement bien conditionné donc si $cond(A) = 1$, c'est le cas des matrices orthogonales. Il est à signalé enfin que le conditionnement d'un système d'équations linéaires dépend de la norme et aussi (seulement) de la matrice du système.

L'analyse de sensibilité de la solution aux perturbations sur les données demande le calcul de $cond(A)$, mais son calcul demande le calcul de l'inverse de A qui est trop coûteux en complexité (de l'ordre de $O(n^3)$). Dans la pratique, on préfere calculer une approximation du $cond(A)$, pour cela ils existent des algorithmes pour calculer l'inverse du $cond(A)$ avec une complexité d'ordre $O(n^2)$. L'algorithme LAPACK est un exemple de ceux ci et la cammande *rcond* de matlab l'utilise.

Exemple donnant une idée comment améliorer le conditionnement

Soit la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a $Cond_\infty(A) = 100$.
Mais, si on multiplie A à Gauche par la matrice D où

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{100} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on obtient $Cond_\infty(DA) = 1$.
Donc, au lieu de résoudre un système de la forme $AX = b$ (système mal conditionné), on résoud le système équivalent $DAX = Db$ qui est bien conditionné.

Exemple motivant

Une entreprise de fabrication de souvenirs veut organiser la production de trois types de souvenirs $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$ et $\mathbf{S}_3$ sur trois machines M_1, M_2 et M_3 disponibles respectivement que pendant 5 heures, 3 heures et 4 heures, tels que
- $\mathbf{S}_1$ nécessite 1 minute sur M_1, et 2 minutes sur M_2 et sur M_3,
- $\mathbf{S}_2$ nécessite 2 minutes sur M_1, et 1 minute sur M_2 et sur M_3,
- $\mathbf{S}_3$ nécessite 2 minutes sur M_1 et sur M_3, et 1 minute sur M_2..

Le directeur de la production veut déterminer x_1(resp. x_2 et x_3) le nombre de souvenirs de type $\mathbf{S}_1$(resp. $\mathbf{S}_2$ et $\mathbf{S}_3$) que l'entreprise doit fabriquer pour utiliser tout le temps disponible sur les 3 machines. Le tableau suivant résume les données

	$\mathbf{S}_1$	$\mathbf{S}_2$	$\mathbf{S}_3$	Temps diponible (en minutes)
Temps nécessaire sur M_1	1	2	2	300
Temps nécessaire sur M_2	2	1	1	180
Temps nécessaire sur M_3	2	1	2	240

Ce problème peut être donc formalisé à l'aide d'un système linéaire $AX = b$,

avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 300 \\ 180 \\ 240 \end{pmatrix}.$$

1- Appliquer la méthode de Gauss, pour trouver une solution au problème posé.

2- Déduire une factorisation PLU de la matrice du système.

3- Est ce que la matrice du système admet une factorisation de Cholesky ? Justifier.

4- On généralise au cas de 50 types de souvenirs sur 50 machines disponibles pour des temps limités. Supposons que vous disposez d'un ordinateur qui effectue un milliard d'opérations par seconde et que la matrice du système associé est inversible,

a) estimer le temps théorique d'exécution en année (resp. en secondes !) nécéssaire pour résoudre le nouveau problème par la méthode de Cramer (resp de Gauss).

b) Si la matrice du système est symétrique et que l'exécution de l'instruction "*chol*" de matlab sur cette matrice se fait sans erreur, proposer un autre algorithme qui peut donner la solution en un temps plus réduit (à estimer en secondes). Justifier

1- On a par la procédure d'élimination de Gauss :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 300 \\ 2 & 1 & 1 & 180 \\ 2 & 1 & 2 & 240 \end{pmatrix} \begin{array}{l} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 300 \\ 0 & -3 & -3 & -420 \\ 0 & -3 & -2 & -360 \end{pmatrix} \begin{array}{l} l_1 \\ l_2 - 2l_1 \\ l_3 - 2l_1 \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 300 \\ 0 & -3 & -3 & -420 \\ 0 & 0 & 1 & -360 \end{pmatrix} \begin{array}{l} l_1 \\ l_2 - 2l_1 \\ l_3 - l_1 \end{array}$$ .Donc, $AX = b \Leftrightarrow X =^t (20\ 80\ 60)$

2- On en déduit que

$$P = I_3, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3- A n'admet pas une factorisation de Cholesky car elle n'est pas définie positive ($\det \Delta_2 < 0$).

4- **a)** Comme $n = 50$ est grand, l'algorithmes de Cramer (resp. de Gauss) demande l'équivalent de 50(51!) opérations (resp. $\frac{2}{3}50^3$ opérations), ainsi il demande $\approx \frac{50(51)!}{3600\times24\times365\times10^9} \approx 245 \times 10^{48}$ années (resp. $\approx \frac{\frac{2}{3}(50)^3}{10^9} \approx 0,00008\ s$).

b) Comme la matrice est symétrique et définie positive (car chol s'exécute sans erreur sur matlab), alors on propose la méthod de Cholesky qui demande $\approx \frac{\frac{1}{3}(50)^3}{10^9} \approx 0,00004\ s$.

Annexe : La factorisation QR par Householder

Définition

On appelle matrice ou réflexion de Householder relative à un vecteur $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$*, la matrice* H_v *définie par*

$$H_v \doteq I_n - \frac{2}{{}^t v \; v} v \; {}^t v.$$

Convention : *On considéra que la matrice identité est de Householder.*

Exemple

Si $a =^t (1, 1)$ alors $H_a = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Proposition

On a

- *Les matrices de Householder sont symétriques et orthogonales.*
- *La matrice* $H_v - I_n$ *est de rang* 1*.*
- $H_{\lambda v} = H_v$ *tout scalair* $\lambda \neq 0$*.*

La factorisation QR par Householder (suite)

Proposition

Soient e_1 *le premier vecteur de la base canonique de* $\mathbb{R}^n$ *et* $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *avec* $\sum_{i=2}^{n} |a_i| \neq 0$*. Alors, si on note* $v_+ = a + \|a\|_2\, e_1$ *et* $v_- = a - \|a\|_2\, e_1$*, on a*

$$H_{v_+} a = -\|a\|_2\, e_1 \quad \text{et} \quad H_{v_-} a = \|a\|_2\, e_1,$$

c'est à dire

$$\begin{cases} H_{v_+} a = \begin{pmatrix} -\|a\|_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \\ H_{v_-} a = \begin{pmatrix} +\|a\|_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Les étapes de la factorisation QR par Householder

Étape 1

On pose $A = A_1$ et on note a_1 la premiere colonne de A.
Si $a_1 = 0$ on prend $H_1 = I_n$,
si non, on pose $v_1 = a_1 + \|a_1\|_2 e_1$ ou $v_1 = a_1 - \|a_1\|_2 e_1$) ce qui implique

$$H_{v_1} a = \begin{pmatrix} -\|a_1\|_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad H_{v_1} a = \begin{pmatrix} \|a_1\|_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On note alors

$$H_1 = H_{v_1} \quad \text{et} \quad A_2 = H_1 A_1$$

par suite on obtient

$$A_2 = \begin{pmatrix} * & * & \dots & * \\ 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & \dots & * \end{pmatrix}$$

Étape 2

Notons maintenant a_2 le vecteur de $\mathbb{R}^{n-1}$ obtenu en prenant les $(n-1)$ dernières composantes de la deuxième colonne de A_2.

- Si $a_2 = 0$, on prend $H_2 = I_n$.
- Si non, c-à-d : si $a_2 \neq 0$, on sait déterminer un vecteur v_2 non nul tel que

$$H_{v_2} a = \begin{pmatrix} -\|a_2\|_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad H_{v_2} a = \begin{pmatrix} \|a_2\|_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On note alors

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H_{v_2} \end{pmatrix}$$

.

Ainsi, en posant $A_3 = H_2 A_2 = H_2 H_1 A_1$, il vient

$$A_2 = \begin{pmatrix} * & * & * & \dots & * \\ 0 & * & * & \dots & * \\ 0 & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & * & \dots & * \end{pmatrix}$$

Étape finale

On peut itére ce procédé $(n-1)$ fois pour construire $(n-1)$ matrices $H_1, \dots, H_{(n-1)}$ symétriques orthogonales telles que $H_{(n-1)} \dots H_1 A_1$ soit une matrice triangulaire supérieure $R = H_{(n-1)} \dots H_1 A$. Donc,

$$A = (H_{(n-1)} \dots H_1)^{-1} R$$

Comme les H_i sont symétriques orthogonales, on en déduit

$$\begin{aligned} (H_{(n-1)} \dots H_1)^{-1} &= (H_1)^{-1} \dots \ (H_{n-1})^{-1} \\ &= {}^tH_1 \dots \ {}^tH_{n-1} \\ &= H_1 \dots \ H_{n-1} \end{aligned}$$

Ainsi, si on pose

$$Q = H_1 \dots \ H_{n-1}$$

on obtient

$$A = QR$$

avec R une matrice triangulaire supérieure et Q une matrice orthogonale (car $Q^{-1} = (H_{n-1})^{-1} \dots (H_1)^{-1} = {}^tH_{n-1} \dots {}^tH_1 = {}^tQ$).

Résultat général de la factorisation QR

Ici on considère le cas général **(matrices carrées ou non carrées)**. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ (avec $n \geq m$). Alors, il existe une matrice orthogonale $Q \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ et une matrice trapézoïdale supérieure $R \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ dont les lignes sont nulles à partir de (m+1)ème c'est à dire sous la forme

$$\begin{pmatrix} * & * & * & \dots & * \\ 0 & * & * & \dots & * \\ 0 & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple de factorisation QR par Householder

Déterminer la factorisation QR de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{46}{5} & -\frac{43}{5} \\ 2 & 8 & 23 \\ -2 & -\frac{28}{5} & \frac{26}{5} \end{pmatrix}.$$

Étape 1 : On pose $A_1 = A$ et $a_1 = {}^t(1 \;\; 2 \;\; -2)$ et prenons (on travaille dans $\mathbb{R}^3$)

$$\begin{aligned} v_1 &= a_1 - \|a_1\|_2 \; e_1 \\ &= {}^t(-2 \; 2 \; -2). \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} H_1 &\equiv H_{v_1} \equiv I_3 - \frac{2}{{}^t v_1 \cdot v_1} v_1 \, {}^t v_1 \\ &= I_3 - \frac{2}{(-2 \;\; 2 \; -2)\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} (-2 \;\; 2 \; -2) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$
\begin{aligned}
A_2 &\equiv H_1 A_1 \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{46}{5} & -\frac{43}{5} \\ 2 & 8 & 23 \\ -2 & -\frac{28}{5} & \frac{26}{5} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & -\frac{36}{5} & \frac{27}{5} \\ 0 & \frac{48}{5} & \frac{114}{5} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Étape 2 : On pose $a_2 = {}^t\begin{pmatrix} -\frac{36}{5} & \frac{48}{5} \end{pmatrix}$ et prenons (on travaille dans $\mathbb{R}^2$)

$$
\begin{aligned}
v_2 &= a_2 + \|a_2\|_2 \; e_1 \\
&= {}^t\begin{pmatrix} \frac{24}{5} & \frac{48}{5} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Alors,

$$
\begin{aligned}
H_{v2} &\equiv I_2 - \frac{2}{{}^t v_2 \cdot v_2} v_2 \, {}^t v_2 = I_2 - \frac{2}{\begin{pmatrix} \frac{24}{5} & \frac{48}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{24}{5} \\ \frac{48}{5} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \frac{24}{5} \\ \frac{48}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{24}{5} & \frac{44}{5} \end{pmatrix} \\
&= I_2 - \frac{2}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Ainsi,

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

et donc

$$\begin{aligned} A_3 &\equiv H_2 A_2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & -\frac{36}{5} & \frac{27}{5} \\ 0 & \frac{48}{5} & \frac{114}{5} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & -12 & -15 \\ 0 & 0 & -18 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On en déduit que $A = QR$ avec

- $R \equiv H_2 H_1 A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & -12 & -15 \\ 0 & 0 & -18 \end{pmatrix}$

- $$\begin{aligned} Q &= (H_2H_1)^{-1} = H_1^{-1} H_2^{-1} = H_1 H_2 \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{14}{15} & -\frac{2}{15} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{15} & -\frac{11}{15} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De plus, si par exemple le système $AX = {}^t(1 \quad 0 \quad 0)$ devient

$$\begin{aligned} Ax &= {}^t(1 \quad 0 \quad 0) \Leftrightarrow QRx = {}^t(1 \quad 0 \quad 0) \\ &\Leftrightarrow Rx = {}^tQ\ {}^t(1 \quad 0 \quad 0) \\ &\Leftrightarrow Rx = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{14}{15} \\ -\frac{2}{15} \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow x = \begin{pmatrix} \frac{71}{270} & -\frac{47}{540} & \frac{1}{135} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Théorème

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On peut trouver une factorisation QR telle que tous les coefficients diagonaux de R sont tous positifs ou nul. Dans ce cas, si A est inversible, cette factorisation est unique.

L'idée de la démonstration

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors, d'aprés ce qui précède il existe une matrice R' triangulaire supérieure et une matrice Q' orthogonale telles que $A = Q'R'$. Notons la matrice $D = diag(d_1, \ldots, d_n)$ avec

$$d_i = \begin{cases} \dfrac{r_{ii}}{|r_{ii}|} & \text{si} \quad r_{ii} = 0, \\ 1 \quad \text{si} \; r_{ii} = 0. \end{cases}$$

Posons $Q = Q'D^{-1}$ et $R = DR'$, alors

$$\begin{cases} A = QR, \\ Q \text{ est orthogonale}, \\ R \text{ est triangulaire supérieure}, \\ r_{ii} \geq 0, \; \forall i \in \{1, \ldots n\}. \end{cases}$$