POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

LE GÉNIE EN PREMIÈRE CLASSE

Devoir N1

MTH6312 - METHODES STATISTIQUES D'APPRENTISSAGE

21 September 2018

Lyes Heythem Bettache -1923715

Question N°1

$\{(x_i, y_i),\ i = 1, \dots, n\}$, $P = 1$, n observations indépendantes

1.a - Estimation : Maximum de vraisemblance

$\hat{\theta}$?

x_i : donné , $Y_i \sim$ exponentielle $(x_i \theta)$

$\theta > 0$, $x_i > 0$

$$f(y / x_i \theta) = x_i \theta . \exp(-x_i \theta y_i$$

. fonction de perte :

. $L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(y_i / x_i \theta)$

$$= \prod_{i=1}^{n} x_i \theta . \exp(-x_i \theta y_i)$$

$$= \theta^n . \prod_{i=1}^{n} x_i \exp(-x_i \theta y_i)$$

- $l(\theta) = \ln(L(\theta)) = n \ln \theta + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i . \theta$
- $\hat{\theta}_n$ solution de $\frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta} = 0$
- $S(\theta) = \frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta} + 0 - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

$$= \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 0$$

$$\boxed{\hat{\theta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}}$$

- La distribution asymptotique de $\hat{\theta}$:

- On a $\sqrt{n}\,(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow[n \to \infty]{} N\left(0, \frac{1}{I(\theta)}\right)$

- $I(\theta)$? : Information de Fisher

- $\frac{\partial l^2(\theta)}{\partial \theta^2} = \frac{-n}{\theta^2} - 0 \quad = \frac{\partial}{\partial \theta^2}\left(\frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)$

$= \frac{-n}{\theta^2}$

- d'aprés le cours : . si n grand alors $\hat{\theta}_n \sim$ Normale

$$I(\theta) = -E\left[\frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta^2}\right] = -E\left[-\frac{n}{\theta^2}\right]$$

Nous savons que. $\hat{\theta}_n \sim$ Normale , $E[\hat{\theta}_n] \simeq \theta$ et $V(\hat{\theta}_n) = 1/I(\theta)$

$$\boxed{I(\theta) = \frac{n}{\theta^2}}$$

$E[\hat{\theta}_n] \simeq \theta \quad , V(\hat{\theta}_n) = \frac{\theta^2}{n} = 1/I$

1.b - Estimation - Approche Bayésienne

$\hat{\theta}_\lambda$?

Rq : L est quadratique

$Y \sim$ exponentielle$(\theta) \longrightarrow f(y/\theta) = \theta \exp(-\theta y)$

$\theta \sim$ exponentielle $(\lambda) \longrightarrow \Pi(\theta/\lambda) = \lambda \exp(-\lambda\theta)$

$n=1$

• la distribution a posteriori de θ

→ On a $\Pi(\theta/y) = \dfrac{f(y/\theta)\cdot\Pi(\theta/\lambda)}{\int_0^\infty f(y/\theta)\cdot\Pi(\theta/\lambda)\,d\theta}$

• $\int_0^\infty f(y/\theta)\cdot\Pi(\theta/\lambda)\,d\theta = \int_0^\infty \theta\cdot\exp(-\theta y)\cdot\lambda\exp(-\lambda\theta)\,d\theta$

$= \int_0^{+\infty} \theta\cdot\lambda\exp[-\theta(y+\lambda)]\,d\theta$

$= \left[\dfrac{-\theta}{y+\lambda}\cdot\exp[-\theta(y+\lambda)]\right]_0^\infty + \int_0^\infty \dfrac{\lambda}{y+\lambda}\exp[-\theta(y+\lambda)]\cdot d\theta$

$= -\left[\dfrac{\lambda}{(y+\lambda)^2}\exp[-\theta(y+\lambda)]\right]_0^{+\infty}$

$= 0 + \boxed{\dfrac{\lambda}{(y+\lambda)^2}}$

→ $\Pi(\theta/y) = \dfrac{\theta\cancel{\lambda}\cdot\exp[-\theta(y+\lambda)]}{\dfrac{\cancel{\lambda}}{(y+\lambda)^2}} = \theta(y+\lambda)^2\exp[-\theta(y+\lambda)]$

$= \boxed{\dfrac{\theta^{2-1}\exp[-\theta/\frac{1}{y+\lambda}]}{1\cdot(1/y+\lambda)^2}}$ *

On remarque que θ/y suit la loi gamma

$X \sim \Gamma(k,\beta)$, $f(x) = \dfrac{x^{k-1}\,e^{-x/\beta}}{\Gamma(k)\,\beta^k}$

Telque. $$\Pi(\theta/y) = \frac{\theta^{2-1} \exp[-\theta/y+\lambda]}{\Gamma(2)\cdot(1/y+\lambda)^2}$$

$$K = 2 \ , \quad P = \frac{1}{y+\lambda} \quad , \quad \Gamma(2) = 1$$

$$\theta/y \sim \Gamma(2, \frac{1}{y+\lambda})$$

- l'estemateur de Bayes

$$\hat{\theta}_\lambda = E(\theta/y) = \frac{2}{y+\lambda} \quad \text{(loi gamma)}$$

$$V(\theta/y) = \frac{2}{(y+\lambda)^2}$$

$$\boxed{\hat{\theta}_\lambda = \frac{2}{y+\lambda}}$$

1.C - Estimation - Maximum de vraisemblance

$\hat{\theta}$? $\quad Y_i \sim \mathcal{N}(x_i\theta, 9)$, $i = 1, \dots, n$

$$f(x) = \frac{1}{(3\sqrt{2\pi})} \cdot \exp\left[-\frac{1}{18}(Y_i - X_i\theta)^2\right]$$

- $L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(Y_i | x_i\theta)$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(3\sqrt{2\pi})} \cdot \exp\left[-\frac{1}{18} \cdot (Y_i - X_i\theta)^2\right]$$

$$= \frac{1}{(3\sqrt{2\pi})^n} \cdot \exp\left[\sum_{i=1}^{n} -\frac{1}{18}(Y_i - X_i\theta)^2\right]$$

- $l(\theta) = \ln(L(\theta)) = -n\ln(3\sqrt{2\pi}) - \frac{1}{18}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - X_i\theta)^2$

- $\hat{\theta}$ solution de $\frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta} = 0$

→ $S(\theta) = \frac{\partial l}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left[-n\ln(3\sqrt{2\pi}) - \frac{1}{18}\sum_{i=1}^{n}(Y_i^2 - 2Y_iX_i\theta + X_i^2\theta^2)\right.$

$$= 0 - \frac{1}{18}\left[\sum_{i=1}^{n}(0 - 2Y_iX_i + 2\theta X_i^2)\right]$$

- $S(\theta) = 0$

$$= -\frac{1}{18}\left[\sum_{i=1}^{n}(-2Y_iX_i + 2\theta X_i^2)\right] = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} X_iY_i = \hat{\theta}\sum X_i^2$$

$$\boxed{\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_iY_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}}$$

- La distribution asymptotique de $\hat{\theta}$

- on a. $\sqrt{n} \cdot (\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow[n \to \infty]{} \mathcal{N} \cdot (0, \frac{1}{I(\theta)})$

- $\underline{I(\theta)?}$: Information de Fisher

- $\frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta^2} = \frac{\partial S}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left[-\frac{1}{18} \sum_{i=1}^{n} (-2 y_i x_i + 2 \theta x_i^2) \right]$

$$= -\frac{1}{9} \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

- d'après le cours : si n grand alors $\hat{\theta} \sim$ Normale

$$n I(\theta) = -E\left[\frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta^2}\right] = -E\left[-\frac{1}{9} \sum x_i^2\right]$$

$$n I(\theta) = \frac{\sum x_i^2}{9}$$

$$\boxed{I(\theta) = \frac{\sum x_i^2}{9n}}$$

- Nous savons que $\hat{\theta}_n \sim$ Normale, $E[\hat{\theta}_n] \simeq \theta$ et $V(\hat{\theta}_n) = \frac{1}{I(\theta)}$

$$I = \frac{\sum x_i^2}{9n}$$

$$E[\hat{\theta}_n] \simeq \theta \quad , \quad V(\hat{\theta}_n) = \frac{9n}{\sum x_i^2}$$

1.d

$\hat{\beta}_0$? le but est de Trouvée β_0 qui minimise $RSS(\beta_0)$

On a $\hat{\beta}_0 = \operatorname{argmin} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \beta_0)^2$

$$\Longrightarrow RSS(\beta_0) := \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \beta_0)^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i^2 + \beta_0^2 - 2\beta_0 Y_i)$$

- $$\frac{\partial RSS}{\partial \beta_0} = \frac{\partial}{\partial \beta_0} \left[\cancel{\sum_{i=1}^{n} Y_i^2}^{\,0} + n\beta_0^2 - 2\beta_0 \sum_{i=1}^{n} Y_i \right]$$

$$= 0 + 2n\beta_0 - 2\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0$$

$$\boxed{\hat{\beta}_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n} = \bar{Y}}$$

- $$\frac{\partial^2 RSS}{\partial \beta_0^2} = 2n > 0 \Rightarrow \text{un minimum}$$

$\hat{\beta}_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}$ est minimale pour $RSS(\beta_0)$

$\hat{\beta}_1$? Trouver β_1 qui minimise $RSS(\beta_1)$

On a. $\hat{\beta}_1 = \arg\min \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \beta_1 X_i)^2$

$$\Longrightarrow RSS(\beta_1) = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \beta_1 X_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i^2 + \beta_1^2 X_i^2 - 2 Y_i \beta_1 X_i)$$

- $$\frac{\partial RSS}{\partial \beta_1} = \frac{\partial}{\partial \beta_1} \left[\cancel{\sum_{i=1}^{n} Y_i^2} + \beta_1^2 \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\beta_1 \sum_{i=1}^{n} Y_i X_i \right]$$

$$= 2\beta_1 \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2 \sum_{i=1}^{n} Y_i X_i = 0$$

$$\boxed{\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i X_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}}$$

- $$\frac{\partial^2 RSS}{\partial \beta_1^2} = 2 \sum_{i=1}^{n} X_i^2 > 0 \Longrightarrow \text{un minimum.}$$

$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i X_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}$ est minimale pour $RSS(\beta_1)$

1. e

$\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$? Trouver β_0 et β_1 qui minimise $RSS(\beta_0, \beta_1)$

On a $$(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = \text{argmin} \cdot \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i)^2.$$

$$\Rightarrow RSS(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (Y_i^2 + \beta_0^2 - 2Y\beta_0 + \beta_1^2 X_i^2 - 2\beta_1 X_i Y_i + 2\beta_1\beta_0 X_i)$$

- $$\frac{\partial RSS(\beta_0, \beta_1)}{\partial \beta_0} = \sum_{i=1}^{n} [2\beta_0 - 2Y + 2\beta_1 X_i] = 0$$

$$= \cancel{2} n \beta_0 - \cancel{2} \sum_{i=1}^{n} Y + \cancel{2}\beta_1 \sum_{i=1}^{n} X_i = 0$$

$$\Rightarrow \hat{\beta}_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y}{n} - \beta_1 \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

$$\boxed{\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}} \quad \dots (1)$$

- $$\frac{\partial RSS(\beta_0, \beta_1)}{\partial \beta_1} = 0$$

On a $$RSS = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i)^2$$

on remplace (1) dans RSS

$$RSS = \sum_{i=1}^{n} (Y_i + \beta_1 \bar{X}_1 - \bar{Y} - \beta_1 X)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-\beta_1 X_i + \beta_1 \bar{X} - \bar{Y} + Y_i)^2$$

$$RSS = \sum_{i=1}^{n} \left(\beta_1^2 (x_i - \bar{x})^2 \right) + 2 \sum_{i=1}^{n} \left(\beta_1 (x_i - \bar{x})(y - \bar{y}) \right)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} (y - \bar{y})^2$$

$$\cdot \frac{\partial RSS}{\partial \beta_1} = \sum_{i=1}^{n} \cancel{2} \beta_1 (x_i - \bar{x})^2 - \cancel{2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y - \bar{y}) = 0$$

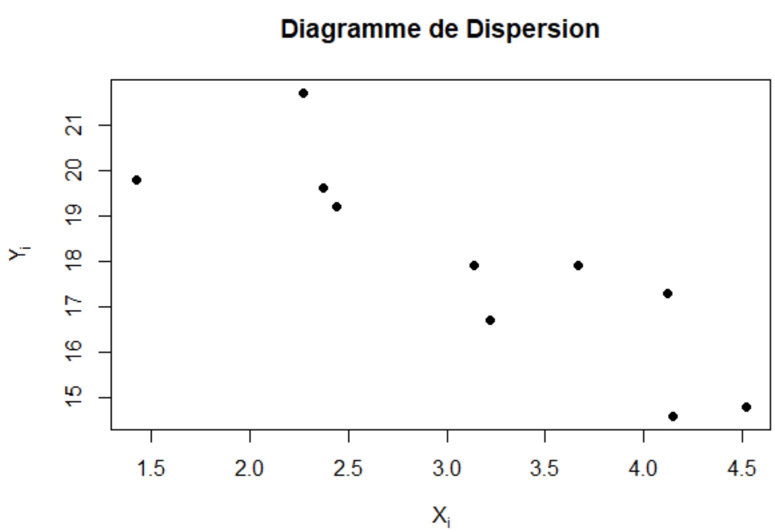
$$\boxed{\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_i)^2}}$$

QUESTION No 2

2.a) diagramme de dispersion (nuage de points) pour les 10 observations

Code

```
#on déclare la série Xi et Yi

Xi<-c(2.37,1.42,3.14,4.15,4.52,3.67,3.22,2.27,2.44,4.12)

Yi<-c(19.6,19.8,17.9,14.6,14.8,17.9,16.7,21.7,19.2,17.3)

#on trace le diagramme de disperesion on utilise la fonction plot()

plot(Xi,Yi,main='Diagramme de Dispersion',xlab=expression(X[i]),ylab=expression(Y[i]),pch=19)
```



On remarque que les points sont dispersés ce qui donne un nuage de point

Dans cette partie on va calculer les valeurs algébriques de $\hat{\beta}_0$ et $\hat{\beta}_1$ a partir de les équations qu'on a obtenu 1.d et 1.e

2.a-1.d) la valeur numérique de solution 1.d

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y}$$

Code

```
beta0d=sum(Yi)/length(Yi)

> beta0d
[1] 17.95
```

On a trouvé

$$\beta_0 = 17{,}95$$

2.a-1.e) les valeurs numérique de solution 1.e

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \qquad \hat{\beta}_0 = \bar{y} - \beta_1\bar{x}$$

Code

```
beta1e=sum((Xi-mean(Xi))*(Yi-mean(Yi)))/sum((Xi-mean(Xi))**2)

beta0e=mean(Yi)-beta1e*mean(Xi)

> beta1e
[1] -1.904622
> beta0e
[1] 23.91528
```

On a trouvé

$$\beta_1 = -1.90$$

$$\beta_0 = 23.91$$

2.b) graphe $RSS = f(\beta_0)$

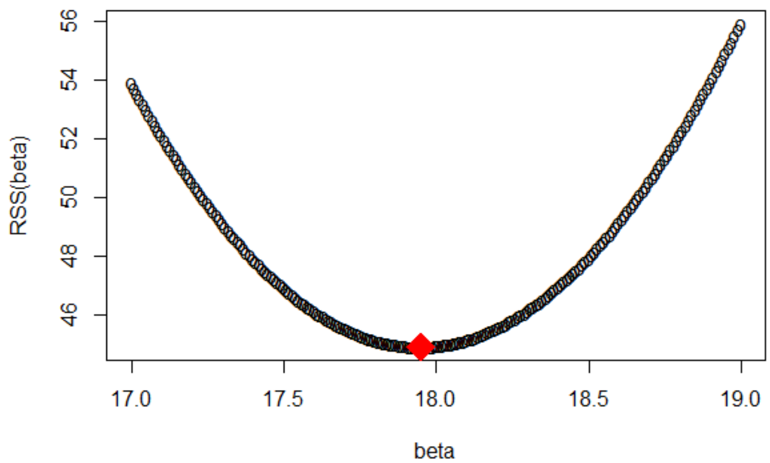
Dans cette partie on va tracer le graphe $RSS = f(\beta_0)$

$$RSS(\beta_0) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_0)^2$$

Code

```
#on définit la fonction RSS
RSS <- function(B) {

    s=0

    for (i in 1:10) {   s=s+((Yi[i]-B)^2) }

    return(s) }

beta<-seq(17,19 ,by=0.01)

#on trace la function RSS(β0)

plot(beta,RSS(beta), type="p", pch="o")

#on ajoute le point min dans notre graphe

points(beta[which.min(RSS(beta))], RSS(beta[which.min(RSS(beta))]),cex=3,col="red",pch=18)

beta[which.min(RSS(beta))]

>beta[which.min(RSS(beta))]
[1] 17.95
```

$$\beta_0 = 17{,}95$$



D’après le graphe on remarque que la valeur obtenue graphiquement 2.b presque égale la valeur obtenue algébriquement 2.a ($\beta_0 = 17{,}95$)

Notre but dans cette partie est de trouver β_0 qui minimise notre somme des carrés résiduels RSS et pour faire ça on doit choisir un intervalle et pas bien précis pour β_0,

La minimisation de RSS implique la performance de notre système.

On remarque que le vecteur β_0 joue un rôle important dans la solution graphique (le pas et l’intervalle).

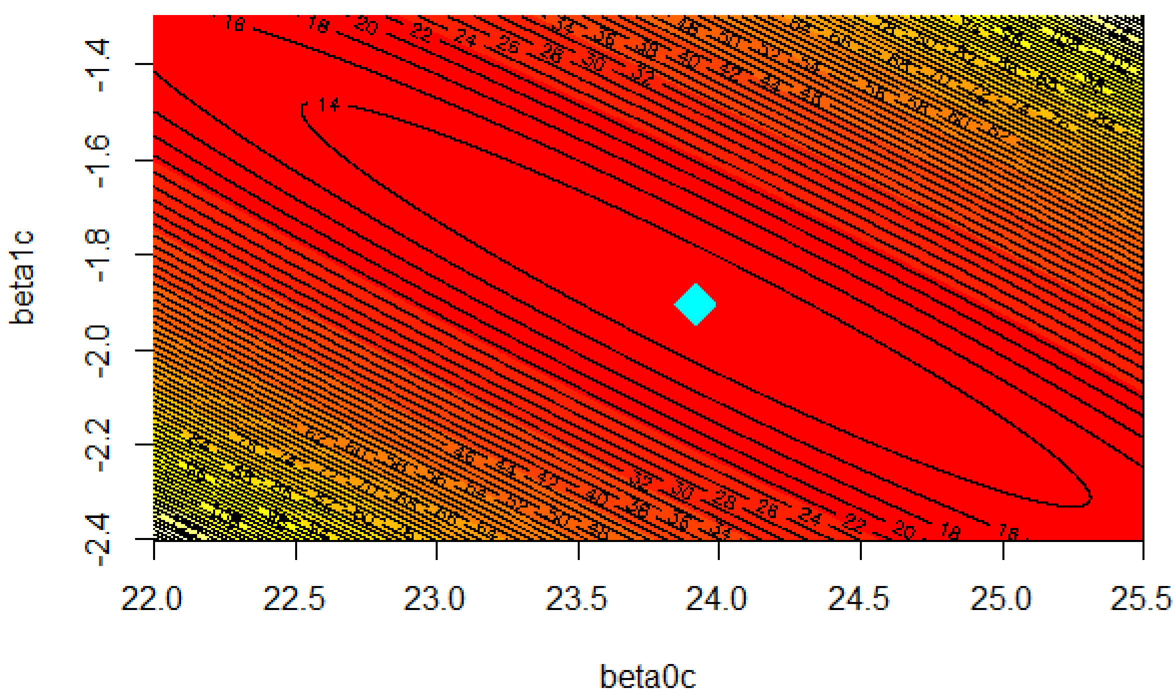
2.c) graphe $RSS = f(\beta_0, \beta_1)$

Dans cette partie on va tracer le graphe $RSS = f(\beta_0, \beta_1)$

$$RSS(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_0 - x_i\beta_1)^2$$

Code

```
#notre fonction RSS(β_0, β_1)

beta0c <- seq(22, 25.5, by=0.001)

beta1c <- seq(-2.4, -1.3, by=0.001)

res <- matrix(nrow=length(beta0c), ncol=length(beta1c))

for (i in 1:length(beta0c)){

  for (j in 1:length(beta1c)) {

    res[i,j]=sum((Yi-beta0c[i]-beta1c[j]*Xi)**2)}}

RSSc=outer(beta0c,beta1c,function (beta0c,beta1c) res)

#on trace le contour de notre fonction

image(beta0c, beta1c, RSSc)

contour(beta0c, beta1c, RSSc,nlevels=45,add=T)

#on ajoute le point min dans notre graphe

points(beta0c[which(RSSc == min(RSSc), arr.ind = TRUE)[1]],beta1c[which(RSSc == min(RSSc), arr.ind = TRUE)[2]],cex=3,col="13",pch=18)
```



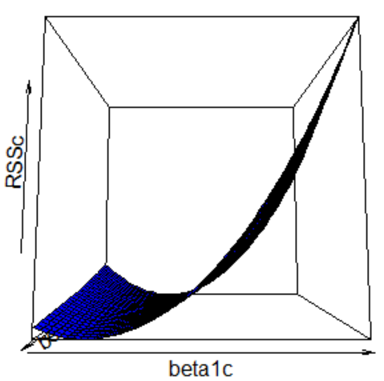
D’après le graphe on remarque que la valeur obtenue graphiquement 2.c presque égale la valeur obtenue algébriquement 2.a ($\beta_0 = 23.91$, $\beta_1 = -1.90$)

Notre but dans cette partie est de trouver β_0 , β_1 qui minimise notre somme des carrés résiduels RSS et pour faire ça on doit choisir un intervalle et pas bien précis pour β_0,

La minimisation de RSS implique la performance de notre système.

On remarque que le vecteur β_0 , β_1 joue un rôle important dans la solution graphique (le pas et l’intervalle).

```
#on trace la function RSS sur le plan 3D

persp(beta0c, beta1c, RSSc, theta = 50, phi= 50, expand= 1, col="blue")
```



Lyes Heythem BETTACHE
1923715

2.d)

Dans cette partie on utilise la fonction optimize() pour trouver β_0 qui minimise $RSS = f(\beta_0)$

$$RSS(\beta_0) = \sum_{i=1}^{n} (y_i \; - \; \beta_0 \,)^2$$

```
optimize(RSS,c(-50,50))

> optimize(RSS,c(-50,50))
$minimum
[1] 17.95
```

On a trouvé

$$\beta_0 = 17{,}95$$

On remarque que la solution d'optimisation numérique obtenu est égale la solution exacte (théorique)
On remarque que La fonction optimize() donne une valeur exact quel que soit l'intervalle choisi de valeur β_0, et aussi on remarque que la fonction va suivre la même méthode théorique.

Ensuite on a utilisé la fonction optim() pour trouver β_0, β_1 qui minimise $RSS = f(\beta_0, \beta_1)$

$$RSS(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^{n} (y_i \; - \; \beta_0 \; - x_i\beta_1 \;)^2$$

```
f2<- function(x) sum((Yi-x[1]-(x[2]*Xi))**2)

optim(c(0,0),f2)

> optim(c(0,0),f2)
$par
[1] 23.91233 -1.90365
```

On a trouvé

$$\beta_1 = -1.903$$

$$\beta_0 = 23.912$$

Lyes Heythem BETTACHE
1923715

On remarque que la solution d'optimisation numérique obtenu est égale la solution exacte (théorique)
On remarque que La fonction optim() donne une valeur exact quel que soit l'intervalle choisi de valeur β_0, et aussi on remarque que la fonction va suivre la même méthode théorique.

Conclusion générale

Dans la 1^er partie de devoir on a vu la méthode d'estimateur du maximum de vraisemblance et l'Approche Bayésienne pour estimé $\hat{\theta}$ qui minimise le risque, et on a vu aussi comment minimise la somme des carrés résiduels RSS.

Ensuite dans la partie 2 on a vu plusieurs méthodes numérique et graphique pour trouver les paramètres qui minimise RSS,

Et on a remarqué que le choix d'intervalle et le pas joue un rôle important dans la solution.

La minimisation de RSS implique la performance de notre système.

Lyes Heythem BETTACHE
1923715

Annexe

Code R

```
"***************************************************************************"
"QUESTION No 2"
"***************************************************************************"

"2.a)  le diagramme de dispersion"
Xi<-c(2.37,1.42,3.14,4.15,4.52,3.67,3.22,2.27,2.44,4.12)
Yi<-c(19.6,19.8,17.9,14.6,14.8,17.9,16.7,21.7,19.2,17.3)
plot(Xi,Yi,main='Diagramme de Dispersion',xlab=expression(X[i]),ylab=expression(Y[i]),pch=19)
"la valeur numérique de solution 1.d"
beta0d=sum(Yi)/length(Yi)
prd=0
xi2d=0
for (k in 1:length(Yi)){
  prd=prd+Yi[k]*Xi[k]
  xi2d=xi2d+Xi[k]*Xi[k]}
beta1d=prd/xi2d
"la valeur numérique de solution 1.e"
beta1e=sum((Xi-mean(Xi))*(Yi-mean(Yi)))/sum((Xi-mean(Xi))**2)
beta0e=mean(Yi)-beta1e*mean(Xi)
"***************************************************************************"
"2.b)  graphe de RSS=f(beta0)"
RSS <- function(B) {
  s=0
  for (i in 1:10) {
    s=s+((Yi[i]-B)^2)
  }
```

```
  return(s)
}
beta<-seq(17,19 ,by=0.01)
plot(beta,RSS(beta), type="p", pch="o")
points(beta[which.min(RSS(beta))], RSS(beta[which.min(RSS(beta))]),cex=3,col="red",pch=18)

beta[which.min(RSS(beta))]
"**************************************************************************"
"2.c)  graphe de RSSc=f(beta0,beta1) "

beta0c <- seq(22, 25.5, by=0.001)
beta1c <- seq(-2.4, -1.3, by=0.001)

res <- matrix(nrow=length(beta0c), ncol=length(beta1c))

for (i in 1:length(beta0c)){

  for (j in 1:length(beta1c)) {



    res[i,j]=sum((Yi-beta0c[i]-beta1c[j]*Xi)**2)


  }
}
RSSc=outer(beta0c,beta1c,function (beta0c,beta1c) res)
image(beta0c, beta1c, RSSc)
contour(beta0c, beta1c, RSSc,nlevels=45,add=T)
which(RSSc == min(RSSc), arr.ind = TRUE)
points(beta0c[1917],beta1c[496],cex=3,col="13",pch=18)
persp(beta0c, beta1c, RSSc, theta = 50, phi= 50, expand= 1, col="blue")
```

Lyes Heythem BETTACHE
1923715

```
"***********************************************************************************"
optimize(RSS,c(-50,50))

"*****************************************************************************"

f2<- function(x) sum((Yi-x[1]-(x[2]*Xi))**2)

optim(c(0,0),f2)

"%*****************************************************"
```

Lyes Heythem BETTACHE
1923715