Structure algébrique

Lyght28

12 février 2021

Table des matières

Première partie
Magma

1 Définition

On définit un magma à partir d'un ensemble, et d'une opération.
Ainsi, si l'on note E un ensemble et $*$ une opération, on peut définir le magma $(E, *)$.
On définit l'ensemble tel que : $E = \{\triangle, \diamond, \bigcirc\}$.
Pour définir l'opération $*$, on va définir sa table (ici, il n'y a aucune règle, j'ai choisis les résultats arbitrairement) :

$*$	$\triangle$	$\diamond$	$\bigcirc$
$\triangle$	$\triangle$	$\bigcirc$	$\diamond$
$\diamond$	$\bigcirc$	$\diamond$	$\diamond$
$\bigcirc$	$\triangle$	$\diamond$	$\bigcirc$

Donc, si je veux calculer $\diamond * \bigcirc$, je regarde dans mon tableau et trouve : $\diamond * \bigcirc = \diamond$.
Dans la même idée, si je veux résoudre une équation avec $x \in E$ en inconnue : $\bigcirc * x = \diamond$.
On regarde dans le tableau et on voit que $\bigcirc * \diamond = \diamond$, donc $x = \diamond$.

2 Propriétés de l'opération

Le nom mathématique pour opération est "loi de composition interne".
- loi car une opération est une règle de fonctionnement.
- de composition car on prend deux éléments et on les compose ensemble pour obtenir un autre ensemble.
- interne car le nouvel élément créé se trouve dans le même ensemble que les deux éléments que l'on a composé.

Nos magmas peuvent avoir plusieurs propriétés :
- Commutativité (d'une opération) : on peut inverser l'ordre des éléments lors de l'opération.
  L'addition ou la multiplication sont commutatives : que l'on fasse $3 + 5$ ou $5 + 3$, le résultat sera toujours 15, donc $3 + 5 = 5 + 3$.
  À l'opposé, la soustraction ne l'est pas : $5 - 3 \neq 3 - 5$.
  On la note : $\forall x, y \in E, x * y = y * x$.
- Associativité : on peut composer à la suite plus de deux éléments de notre ensemble.
  L'addition ou la multiplication sont associatives : on a $3 \times 5 \times 7 = (3 \times 5) \times 7 = 3 \times (5 \times 7)$.
  On voit qu'on peut mettre les parenthèses comme l'on veut, cela ne changera rien.
  On la note : $\forall x, y, z \in E, (x * y) * z = x * (y * z)$.

- Élément neutre : c'est un élément qui appartient à notre ensemble et qui, si on le compose à n'importe quel autre élément, cela ne modifie pas cet autre élément.
  L'élélement neutre de l'addition est 0, celui de la multiplication est 1.
  On le note : $e \in E, \forall x \in E, x * e = e * x = x$.

Deuxième partie
Monoïde

3 Définition

Un monoïde est un magma associatif et unifère.$(E, *)$
Autrement dit, c'est un ensemble, pourvu d'une loi de composition interne qui est associative et possède un élément neutre, mais celle-ci n'est pas forcément commutative.

4 Exemples

4.1 Monoïdes basés sur des ensembles de nombres

On prend l'ensemble des entiers naturels et on le munit de l'addition, on a donc $(\mathbb{N}, +)$, est-ce un monoïde ?

- C'est un magma car l'addition est bien une loi de composition interne : si on additionne deux entiers naturels, on obtient bien un autre entier naturel.
- L'addition est bien associative $(1 + 2 + 3 = (1 + 2) + 3 = 1 + (2 + 3)$.
- On a un élément neutre : 0 $(\forall n \in \mathbb{N}, n + 0 = n)$.

Donc $(\mathbb{N}, +)$ est bien un monoïde.

On prend l'ensemble des réels et on le munit de la multiplication, on a donc $(\mathbb{R}, \times)$, est-ce un monoïde ?

- C'est un magma car la multiplication est bien une loi de composition interne : si on multiplie deux réels entre eux, on obtient bien un autre réel.
- La multiplication est bien associative $(1 \times 2 \times 3 = (1 \times 2) \times 3 = 1 \times (2 \times 3)$.
- On a un élément neutre : 1 $(\forall x \in \mathbb{R}, x \times 1 = x)$.

Donc $(\mathbb{R}, \times)$ est bien un monoïde.

On prend l'ensemble des entiers négatif et on le munit de la multiplication, on a donc $(\mathbb{Z}^-, \times)$, est-ce un monoïde ?

- Ce n'est un magma car si l'on multiplie deux entiers négatifs, on obtient un entier positif, qui n'est pas dans $\mathbb{Z}^-$. Il n'y a donc pas de loi de composition interne.

Donc $(\mathbb{Z}^-, \times)$ n'est pas un monoïde.

On prend l'ensemble des nombres pairs et on le munit de la multiplication, on a donc $(2\mathbb{Z}, \times)$, est-ce un monoïde ?

- C'est un magma car la multiplication est bien une loi de composition interne ici : si on multiplie deux nombres pairs entre eux, on obtient bien un autre nombre pair.

- La multiplication est bien associative ($2\times4\times6=(2\times4)\times6=2\times(4\times6)$.
- Mais, on n'a pas d'élément neutre car 1 n'est pas un nombre pair.

Donc $(2\mathbb{Z},\times)$ n'est pas un monoïde.

4.2 Monoïdes basés sur des ensembles de fonctions

On prend l'ensemble des fonctions réelles $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (les fonctions qui prennent un nombre réel, et renvoie un nombre réel) et on le munit d'une opération appelée composition des fonctions $\circ$.
Exemple de composition de fonction :
On a les fonctions :

$$f : x \mapsto 2x \;\; f(3) = 6$$
$$g : x \mapsto x^2 \;\; g(3) = 9$$
$$f \circ g : x \mapsto 2x^2 \;\; f \circ g(3) = 2 \times 3^2 = 18$$

Donc, est-ce que $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}},\circ)$ est un monoïde ?

- C'est un magma car lorsqu'on compose deux fonction réelles, on obtient une autre fonction réelle, c'est donc bien une loi de composition interne.
- La composition est bien associative : $f\circ g\circ h=(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$.
- On a un élément neutre : la fonction identité ($id : x\mapsto x$).

Donc $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}},\circ)$ est bien un monoïde.

Cela peut aussi s'étendre à beaucoup d'autres types de fonctions différentes, comme des fonctions géométriques (symétrie, rotation, géométrie, etc) qu'on peut munir d'une opération de composition.

5 Explication de la non-commutativité

Reprenons notre exemple précédent :

$$f : x \mapsto 2x \;\; f(3) = 6$$
$$g : x \mapsto x^2 \;\; g(3) = 9$$
$$f \circ g : x \mapsto 2x^2 \;\; f \circ g(3) = 2 \times 3^2 = 18$$
$$g \circ f : x \mapsto (2x)^2 \;\; g \circ f(3) = (2 \times 3)^2 = 36$$

On voit que $f\circ g\neq g\circ f$, donc il n'y pas de commutativité.
L'étude des structures algébriques étant là pour généraliser et englober le plus de cas particuliers possibles, pour ne pas exclure les ensembles de fonctions (qui représente une grande partie des exemples des monoïdes) des monoïdes, la commutativité n'est donc pas présente dans la définition des monoïdes.

6 Un théorème de la théorie des monoïdes

On a un monoïde $(E, *)$ et on se pose cette équation : $a * x = a * b$.
Intuitivement, on pense que $x = b$, mais peut-on en conclure que b est la seule solution de cette équation ?

6.1 Défintions

Pour cela, on vient poser deux définitions :

1. On dit qu'un élément $a \in E$ est <u>simplifiable</u> si, à chaque fois qu'on a $a * y = a * z$ on peut en déduire que $y = z$.
2. On dit qu'un élément $a \in e$ est <u>symétrisable</u> si il existe un autre élément $\bar{a} \in E$ tel que $a * \bar{a} = \bar{a} * a = e$. $\bar{a}$ est appelé le symétrique de a.

6.2 Théorème

Grâce à ces définitions, on peut poser un <u>théorème</u> :
Si $a \in E$ est symétrisable, alors il est simplifiable.

6.3 Démonstration

Pour notre équation $a * x = a * b$, on suppose que a est symétrisable.

$$\begin{aligned} &\bar{a} * (a * x) = \bar{a} * (a * b) \\ \Longrightarrow\ &(\bar{a} * a) * x = (\bar{a} * a) * b \\ \Longrightarrow\ &e * x = e * b \\ \Longrightarrow\ &x = b \end{aligned}$$

6.4 Solution au problème

Si, pour notre problème : $a*x = a*b$, on se place dans le cas d'une addition, par exemple, si l'on prend $3 + x = 3 + 7$. Les réels dans l'addition possède bien un symétrique ($\forall x \in \mathbb{R}, \bar{x} + x = e \Longrightarrow \bar{x} + x = 0 \Longrightarrow -x + x = 0$), qui est l'opposé du réels en question, donc c'est aussi simplifiable. Dans notre cas, le symétrique de 3 vaut -3 donc on peut en conclure que $x = 7$.

Mais si on prend une multiplication, avec $a = 0$, on a donc $0 \times x = 0 \times b$. Le symétrique d'un réel par la multiplication est l'inverse de ce réel ($\forall x \in \mathbb{R}^*, x \times \bar{x} = e \Longrightarrow x \times \bar{x} = 1 \Longrightarrow x \times \frac{1}{x} = 1$). Mais dans notre cas, cela reviendrait à diviser par 0, ce n'est donc ni symétrisable, ni simplifiable. Donc, pour on a $0 \times x = 0 \times b \Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, x = b$.