Tests Paramétriques et Non Paramétriques

Théorie, Formules, Conditions et Exemples

1 Cadre général des tests statistiques

On observe un échantillon aléatoire $X_1, \ldots, X_n$ issu d'une population inconnue. Un test statistique repose sur :

— une **hypothèse nulle** H_0,

— une **hypothèse alternative** H_1,

— une **statistique de test** $T(X)$,

— une **règle de décision** au niveau α.

On rejette H_0 si la statistique observée appartient à la région critique.

Hypothèses

Un test statistique repose sur deux hypothèses :

— **Hypothèse nulle** H_0 : hypothèse de référence (exemples : *pas d'effet*, $\mu = \mu_0$).

— **Hypothèse alternative** H_1 : hypothèse contraire (exemples : *il existe un effet*, $\mu \neq \mu_0$).

Statistique de test

On calcule à partir des données observées $X = (X_1, \ldots, X_n)$ une statistique de test $T(X)$.
Sous l'hypothèse nulle H_0, la loi de $T(X)$ est connue ou approximée.

Région critique et règle de décision

— On fixe un niveau de signification α (souvent $\alpha = 5\%$).

— On définit une région critique C telle que :

$$\mathbb{P}_{H_0}(X \in C) = \alpha.$$

— Si $X \in C$, on rejette l'hypothèse nulle H_0.

— Si $X \notin C$, on ne rejette pas H_0.

Valeur-p (p-value)

La **p-value** est définie par :

$$p = \mathbb{P}_{H_0}\Big(\text{obtenir un résultat au moins aussi extrême que celui observé}\Big).$$

Règle de décision :

si $p \leq \alpha$, on rejette H_0.

Erreurs et puissance du test

— **Erreur de type I** : rejeter H_0 alors qu'elle est vraie. Probabilité : α.
— **Erreur de type II** : ne pas rejeter H_0 alors que H_1 est vraie. Probabilité : β.
— **Puissance du test** :
$$1 - \beta$$
qui représente la probabilité de détecter un effet lorsqu'il existe réellement.

Intuition

Un test statistique consiste à supposer l'hypothèse nulle H_0 vraie et à mesurer à quel point les données observées sont incompatibles avec cette hypothèse.

2 Tests Paramétriques

Les tests paramétriques supposent que les données suivent une **loi connue** (généralement normale) et portent sur les **paramètres** de cette loi (moyenne, variance, proportion).

2.1 Test Z (moyenne, variance connue)

Conditions d'utilisation

— Variable quantitative continue
— Population normale
— Variance σ^2 connue **ou** n grand

Hypothèses

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

Statistique de test

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \quad \text{avec} \quad Z \sim \mathcal{N}(0, 1) \text{ sous } H_0$$

Intuition

On mesure l'écart entre la moyenne observée et la moyenne théorique en nombre d'écarts-types.

Exemple

$$\mu_0 = 100,\ \sigma = 10,\ n = 36,\ \bar{x} = 103$$
$$Z = \frac{103 - 100}{10/\sqrt{36}} = 1.8$$

Au seuil 5%, on ne rejette pas H_0.

—

2.2 Test t de Student (1 échantillon)

Conditions

- Variable quantitative
- Variance inconnue
- Normalité (ou n suffisamment grand)

Statistique

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \quad \text{avec} \quad T \sim t_{n-1}$$

où

$$\boxed{S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}}$$

Exemple

$$\bar{x} = 52,\ s = 4,\ n = 25,\ \mu_0 = 50$$
$$T = \frac{2}{4/\sqrt{25}} = 2.5$$

On rejette H_0 au seuil 5%.

—

2.3 Test t de Student (2 échantillons indépendants – Welch)

Conditions

- Deux groupes indépendants
- Variances inconnues et différentes

Hypothèse

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

Statistique

$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

Exemple

$$\bar{x}_1 = 20,\ s_1 = 3,\ n_1 = 30, \quad \bar{x}_2 = 18,\ s_2 = 4,\ n_2 = 25$$
$$T \approx 2.06$$

Intuition

Comparer la différence des moyennes à la **variabilité totale**. —

2.4 Test du Khi-deux d'indépendance

Conditions

- Deux variables qualitatives
- Tableau de contingence

Hypothèse

$$H_0 : indpendance$$

Statistique

$$\chi^2 = \sum_{i,j} \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} \quad \text{avec} \quad E_{ij} = \frac{n_{i\cdot} n_{\cdot j}}{n}$$

Loi

$$\chi^2 \sim \chi^2_{(r-1)(c-1)}$$

Intuition

Comparer ce qu'on **observe** à ce qu'on **attend** si les variables sont indépendantes.

Exemple

Genre $\times$ choix produit $\rightarrow$ dépendance ou non. —

3 Tests Non Paramétriques

Les tests non paramétriques :

- ne supposent pas de loi particulière,
- sont basés sur les **rangs**,
- sont plus robustes aux valeurs aberrantes.

—

3.1 Test de Wilcoxon (signé)

Conditions

- Alternative au t-test apparié
- Données non normales

Principe

1. Calculer les différences
2. Classer les valeurs absolues
3. Additionner les rangs positifs

Hypothèse

$$H_0 : \text{médiane} = m_0$$

—

3.2 Test de Mann–Whitney

Conditions

- Deux groupes indépendants
- Données ordinales ou asymétriques

Hypothèse

$$H_0 : \text{les distribution sont identiques}$$

Statistique

$$U = R_1 - \frac{n_1(n_1+1)}{2}$$

Intuition

Si les distributions sont identiques, les rangs sont mélangés.
—

3.3 Test de Kruskal–Wallis

Conditions

- Plus de deux groupes indépendants
- Alternative non paramétrique à l'ANOVA

Statistique

$$H = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{k} \frac{R_i^2}{n_i} - 3(n+1)$$

$$H \sim \chi^2_{k-1}$$

—

3.4 Test de Kolmogorov–Smirnov

Objectif

Tester l'adéquation d'une loi théorique F à un échantillon.

Statistique

$$D = \sup_x |F_n(x) - F(x)|$$

3.5 Notations utilisées dans les tests non paramétriques

3.5.1 Rangs et sommes de rangs

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des observations issues de plusieurs groupes. On attribue à chaque observation un *rang* obtenu en classant toutes les observations par ordre croissant.

- R : somme des rangs d'un groupe,
- R_i : somme des rangs du groupe i,
- n_i : taille du groupe i,
- $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$: taille totale de l'échantillon.

Ces quantités sont utilisées dans les tests de Mann–Whitney et de Kruskal–Wallis.

3.5.2 Fonction de répartition empirique

La fonction de répartition empirique est définie par :

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{X_i \leq x\}}$$

Elle représente la proportion d'observations inférieures ou égales à x.

Dans le test de Kolmogorov–Smirnov, on considère la statistique :

$$D = \sup_x |F_n(x) - F(x)|$$

qui mesure l'écart maximal entre la loi empirique et la loi théorique.

—

4 Tableau récapitulatif

Objectif	Paramétrique	Non paramétrique
1 moyenne	Test t	Wilcoxon
2 moyennes	Test t Welch	Mann–Whitney
Avant / après	Test t apparié	Wilcoxon
$>$ 2 groupes	ANOVA	Kruskal–Wallis
Qualitatif	Khi-deux	Fisher exact
Ajustement	Khi-deux	KS