一类倒向随机微分方程 L^p $(p \geq 1)$ 解的存在惟一性及生成元的表示定理

姓名: 肖 立 顺

导师: 范 胜 君

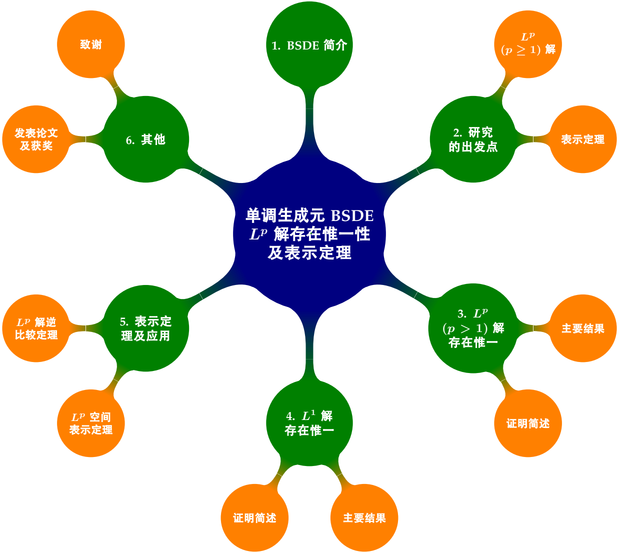
专业: 应用数学

方向: 随机分析

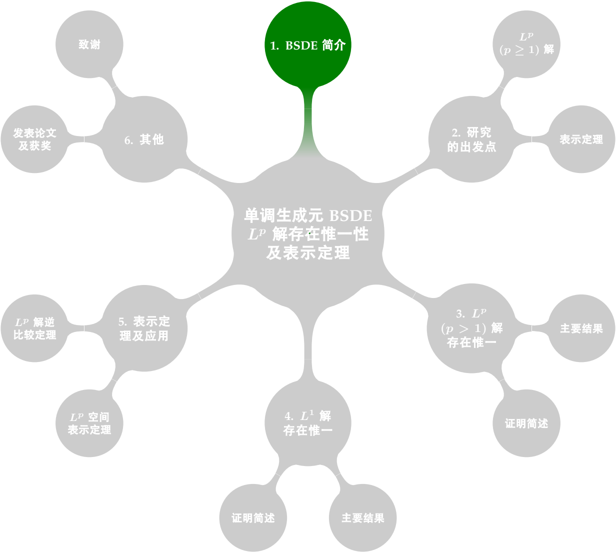
2010 级硕士学位论文答辩

2013-05-21

内容提纲


单调生成元 BSDE
L^p 解存在惟一性
及表示定理
1. BSDE 简介
2. 研究的出发点
L^p $(p \geq 1)$ 解
表示定理
3. L^p $(p > 1)$ 解存在惟一
主要结果
证明简述
4. L^1 解存在惟一
证明简述
主要结果
5. 表示定理及应用
L^p 解逆比较定理
L^p 空间表示定理
6. 其他
致谢
发表论文及获奖

倒向随机微分方程 (BSDE) 简介



倒向随机微分方程 (BSDE) 简介

线性的倒向随机微分方程 (BSDE) 由 [Bismut(1973)] 提出;

[Pardoux-Peng(1990)] 提出非线性 BSDE 如下:

$$y_t = \xi + \int_t^T g(s, y_s, z_s)\,\mathrm{d}s - \int_t^T z_s\,\mathrm{d}B_s, \quad t \in [0, T]. \tag{1}$$

T	终端时间, $0 \le T \le +\infty$
ξ	终端条件, 可测随机变量
g	生成元, $g(\omega, t, y, z) : \Omega \times [0, T] \times \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{k\times d} \to \mathbf{R}^k$
(ξ, T, g)	BSDE 的参数
$(y_t, z_t)_{t\in[0,T]}$	BSDE 的适应解

倒向随机微分方程 (BSDE) 简介

线性的倒向随机微分方程 (BSDE) 由 [Bismut(1973)] 提出;

[Pardoux-Peng(1990)] 提出非线性 BSDE 如下:

$$y_t = \xi + \int_t^T g(s, y_s, z_s)\,\mathrm{d}s - \int_t^T z_s\,\mathrm{d}B_s, \quad t \in [0, T]. \tag{1}$$

T	终端时间, $0 \le T \le +\infty$
ξ	终端条件, 可测随机变量
g	生成元, $g(\omega, t, y, z) : \Omega \times [0, T] \times \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{k\times d} \to \mathbf{R}^k$
(ξ, T, g)	BSDE 的参数
$(y_t, z_t)_{t\in[0,T]}$	BSDE 的适应解

倒向随机微分方程 (BSDE) 简介

线性的倒向随机微分方程 (BSDE) 由 [Bismut(1973)] 提出;
[Pardoux-Peng(1990)] 提出非线性 BSDE 如下:

$$y_t = \xi + \int_t^T g(s, y_s, z_s)\,\mathrm{d}s - \int_t^T z_s\,\mathrm{d}B_s, \quad t \in [0, T]. \tag{1}$$

T	终端时间, $0 \le T \le +\infty$
ξ	终端条件, 可测随机变量
g	生成元, $g(\omega, t, y, z) : \Omega \times [0, T] \times \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{k\times d} \to \mathbf{R}^k$
(ξ, T, g)	BSDE 的参数
$(y_t, z_t)_{t\in[0,T]}$	BSDE 的适应解

倒向随机微分方程 (BSDE) 简介

线性的倒向随机微分方程 (BSDE) 由 [Bismut(1973)] 提出;

[Pardoux-Peng(1990)] 提出非线性 BSDE 如下:

$$y_t = \xi + \int_t^T g(s, y_s, z_s)\,\mathrm{d}s - \int_t^T z_s\,\mathrm{d}B_s, \quad t \in [0, T]. \tag{1}$$

T	终端时间, $0 \le T \le +\infty$
ξ	终端条件, 可测随机变量
g	生成元, $g(\omega, t, y, z) : \Omega \times [0, T] \times \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{k\times d} \to \mathbf{R}^k$
(ξ, T, g)	BSDE 的参数
$(y_t, z_t)_{t\in[0,T]}$	BSDE 的适应解

倒向随机微分方程 (BSDE) 简介

线性的倒向随机微分方程 (BSDE) 由 [Bismut(1973)] 提出;
[Pardoux-Peng(1990)] 提出非线性 BSDE 如下:

$$y_t = \xi + \int_t^T g(s, y_s, z_s)\,\mathrm{d}s - \int_t^T z_s\,\mathrm{d}B_s, \quad t \in [0, T]. \tag{1}$$

T	终端时间, $0 \le T \le +\infty$
ξ	终端条件, 可测随机变量
g	生成元, $g(\omega, t, y, z) : \Omega \times [0, T] \times \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{k\times d} \to \mathbf{R}^k$
(ξ, T, g)	BSDE 的参数
$(y_t, z_t)_{t\in[0,T]}$	BSDE 的适应解

倒向随机微分方程 (BSDE) 简介

线性的倒向随机微分方程 (BSDE) 由 [Bismut(1973)] 提出;
[Pardoux-Peng(1990)] 提出非线性 BSDE 如下:

$$y_t = \xi + \int_t^T g(s, y_s, z_s)\,\mathrm{d}s - \int_t^T z_s\,\mathrm{d}B_s, \quad t \in [0, T]. \tag{1}$$

T	终端时间, $0 \le T \le +\infty$
ξ	终端条件, 可测随机变量
g	生成元, $g(\omega, t, y, z) : \Omega \times [0, T] \times \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{k\times d} \to \mathbf{R}^k$
(ξ, T, g)	BSDE 的参数
$(y_t, z_t)_{t\in[0,T]}$	BSDE 的适应解

倒向随机微分方程 (BSDE) 简介

- [Duffie-Epstein(1992)], 效用函数理论;
- [Peng(1991)], 反应扩散方程和 Navier-Stokes 方程;
- [El Karoui-Peng-Quenez(1997b)], 派生证券 (如期权期货等);
- [Peng(1997)], g-期望和条件 g-期望, 金融风险度量;
- 反射倒向随机微分方程 (RBSDE), 正倒向随机微分方程 (FBSDE), 倒向重随机微分方程 (BDSDE), 以及带跳的、超前的 BSDE;
- 解的性质: [Peng(1992)] 提出 BSDE 解的比较定理;
- [Briand-Coquet-Hu-Mémin-Peng(2000)] 提出解的逆比较定理, 生成元表示定理;
- …… ……

倒向随机微分方程 (BSDE) 简介

$(Y_t)_{t\in[0,T]}$ 所在的空间

$\mathcal{S}^p(0,T;\mathbf{R}^k)$ 表示 $\mathbf{R}^k$-值, 适应且满足

$$\|Y\|_{\mathcal{S}^p} := \left(\mathbf{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}|Y_t|^p\right]\right)^{1\wedge 1/p} < +\infty$$

的连续过程 $(Y_t)_{t\in[0,T]}$ 全体.

$(Z_t)_{t\in[0,T]}$ 所在的空间

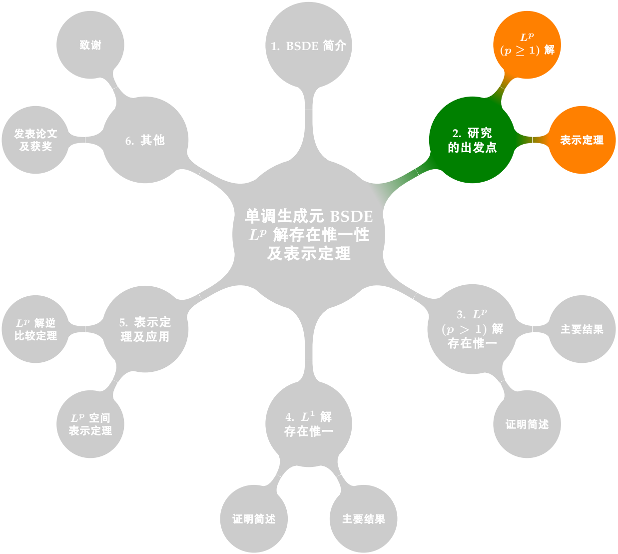
$\mathrm{M}^p(0,T;\mathbf{R}^{k\times d})$ 表示 $\mathbf{R}^{k\times d}$-值, $(\mathcal{F}_t)$-循序可测且满足

$$\|Z\|_{\mathrm{M}^p} := \left\{\mathbf{E}\left[\left(\int_0^T |Z_t|^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{p}{2}}\right]\right\}^{1\wedge 1/p} < +\infty$$

的连续过程 $(Z_t)_{t\in[0,T]}$ 全体.

连续过程 $(Y_t)_{t\in[0,T]}$ 属于 (D) 类是指, 随机过程族 $\{Y_\tau : \tau\in\Sigma_T\}$ 是一致可积的, 其中 Σ_T 表示所有满足 $\tau\le T$ 的停时全体.

研究的出发点


单调生成元 BSDE
L^p 解存在惟一性
及表示定理
1. BSDE 简介
2. 研究的出发点
L^p $(p \geq 1)$ 解
表示定理
3. L^p $(p > 1)$ 解存在惟一
主要结果
证明简述
4. L^1 解存在惟一
证明简述
主要结果
5. 表示定理及应用
L^p 解逆比较定理
L^p 空间表示定理
6. 其他
发表论文及获奖
致谢

L^p $(p \geq 1)$ 解的存在惟一性

- Pardoux-Peng [1990]

  g 关于 (y, z) Lipschitz

L^p $(p \geq 1)$ 解的存在惟一性

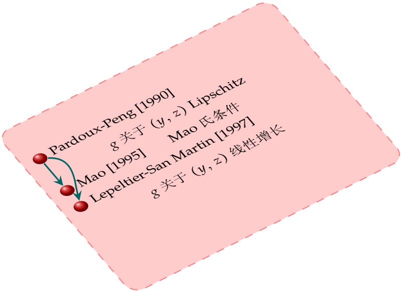
已有结果 $\longrightarrow$ 进行推广

Pardoux-Peng [1990]
g 关于 (y, z) Lipschitz

Mao [1995]
Mao 氏条件

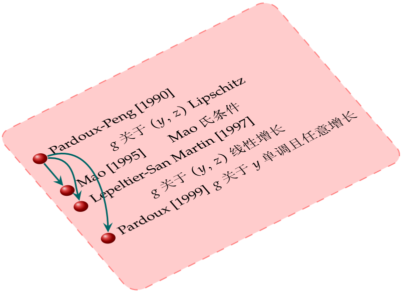
L^p $(p \geq 1)$ 解的存在惟一性

已有结果 ⟶ 进行推广



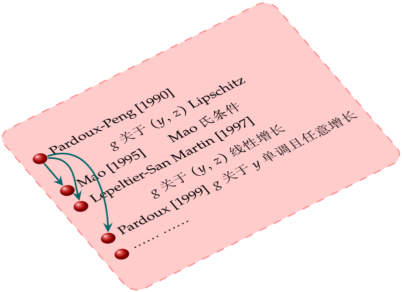
L^p $(p \geq 1)$ 解的存在惟一性

已有结果 $\longrightarrow$ 进行推广



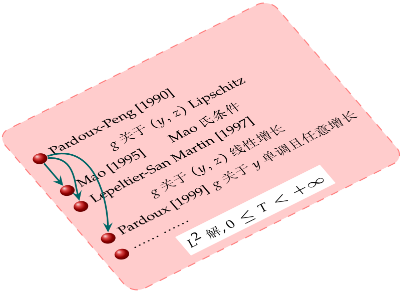
L^p $(p \geq 1)$ 解的存在惟一性

已有结果 ⟶ 进行推广



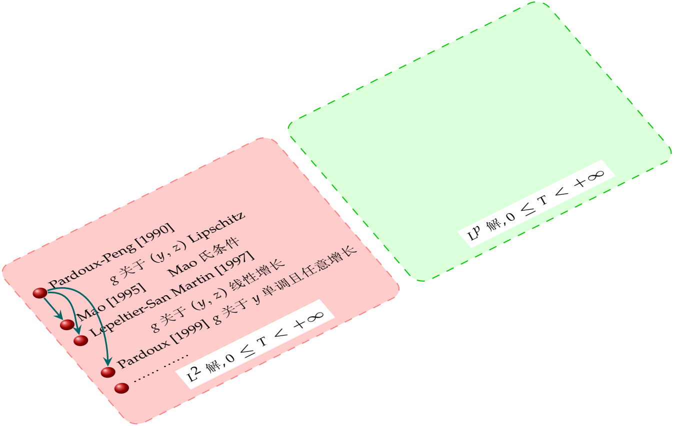
L^p $(p \geq 1)$ 解的存在惟一性

已有结果 ⟶ 进行推广



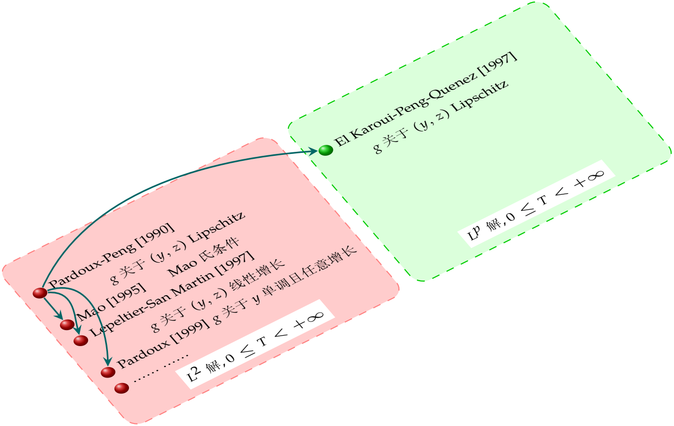
L^p $(p \geq 1)$ 解的存在惟一性

已有结果 $\longrightarrow$ 进行推广



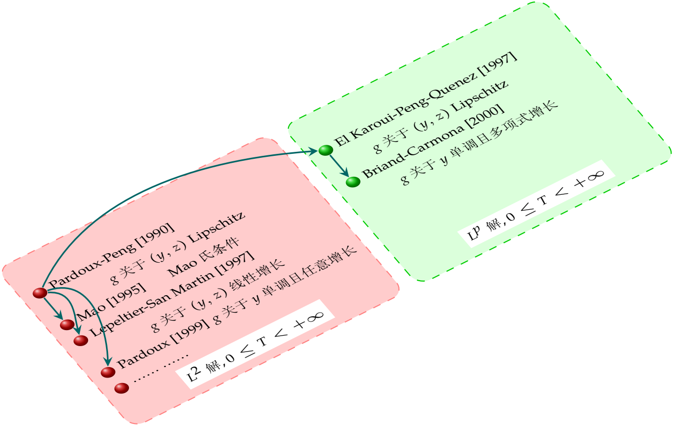
L^p $(p \geq 1)$ 解的存在惟一性

已有结果 ⟶ 进行推广



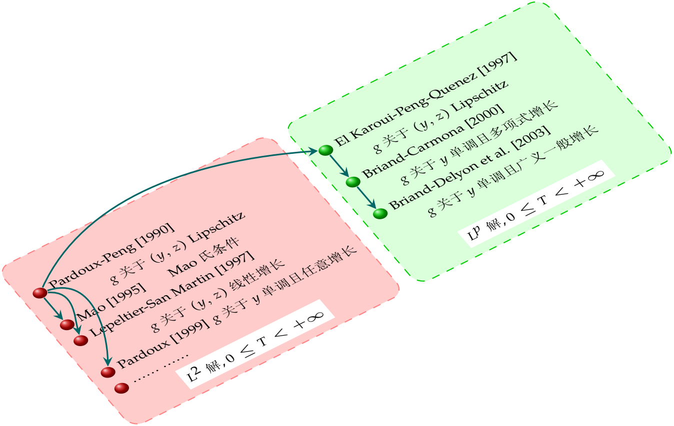
L^p $(p \geq 1)$ 解的存在惟一性

已有结果 ⟶ 进行推广



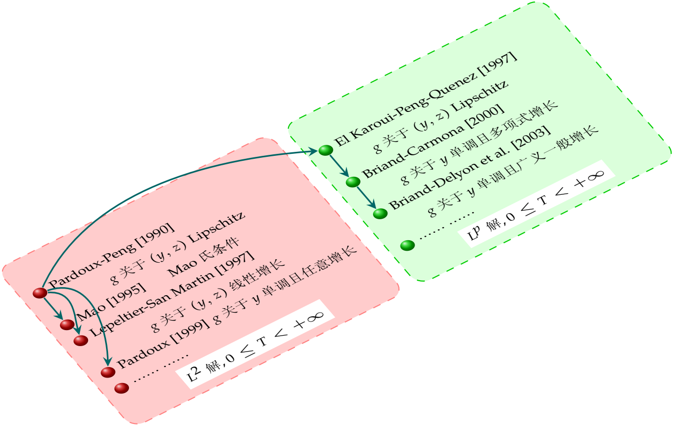
L^p $(p \geq 1)$ 解的存在惟一性

已有结果 $\longrightarrow$ 进行推广



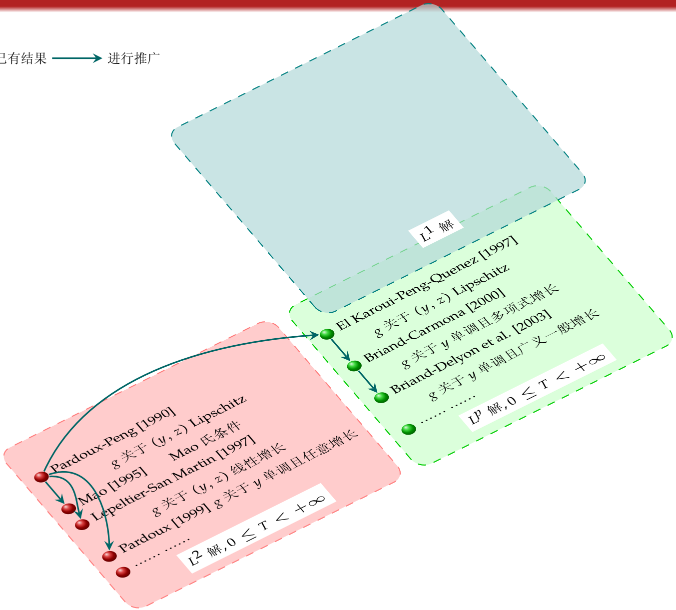
L^p $(p \geq 1)$ 解的存在惟一性

已有结果 $\longrightarrow$ 进行推广

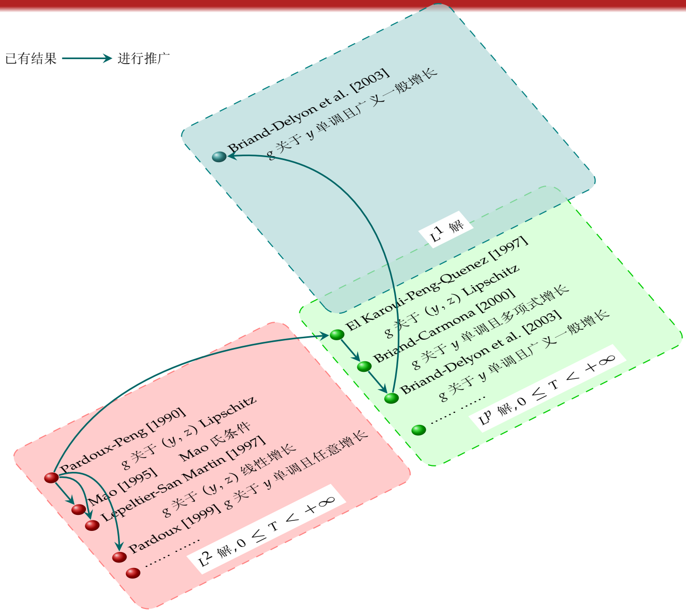


L^p $(p \geq 1)$ 解的存在惟一性

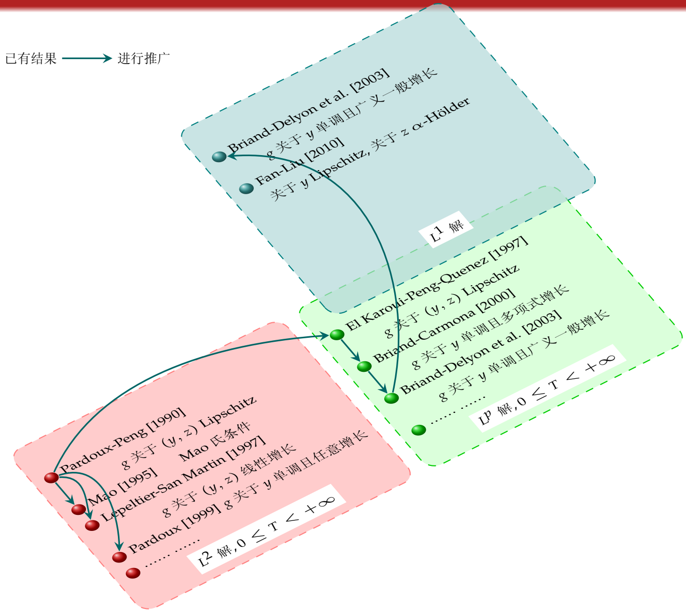
已有结果 ⟶ 进行推广



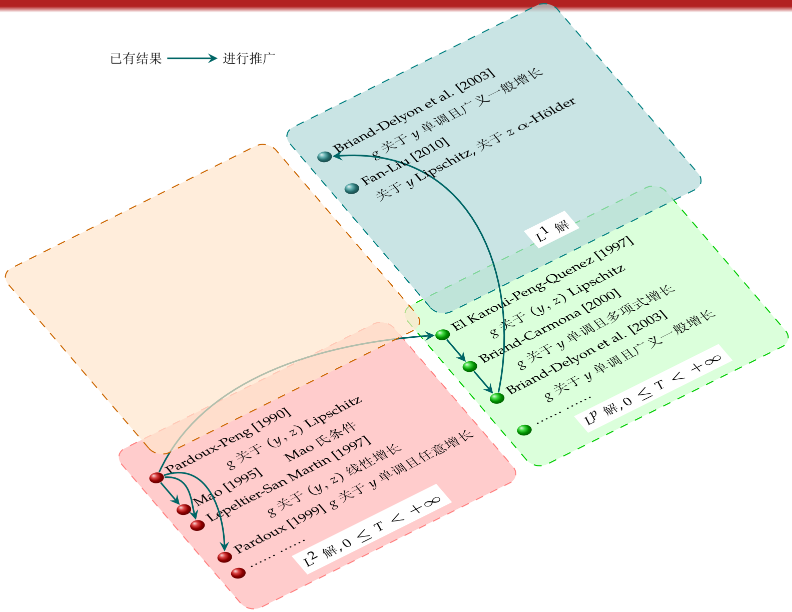
L^p $(p \geq 1)$ 解的存在惟一性



L^p ($p \geq 1$) 解的存在惟一性

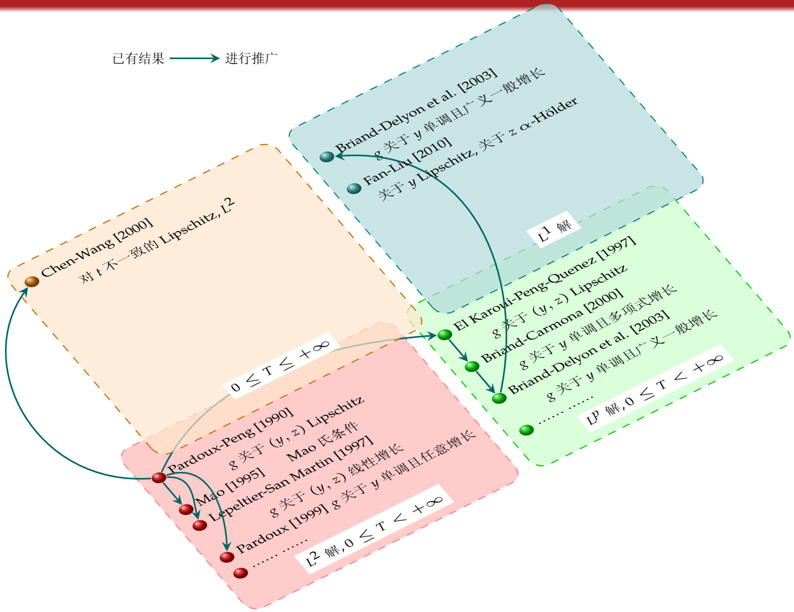


L^p $(p \geq 1)$ 解的存在惟一性

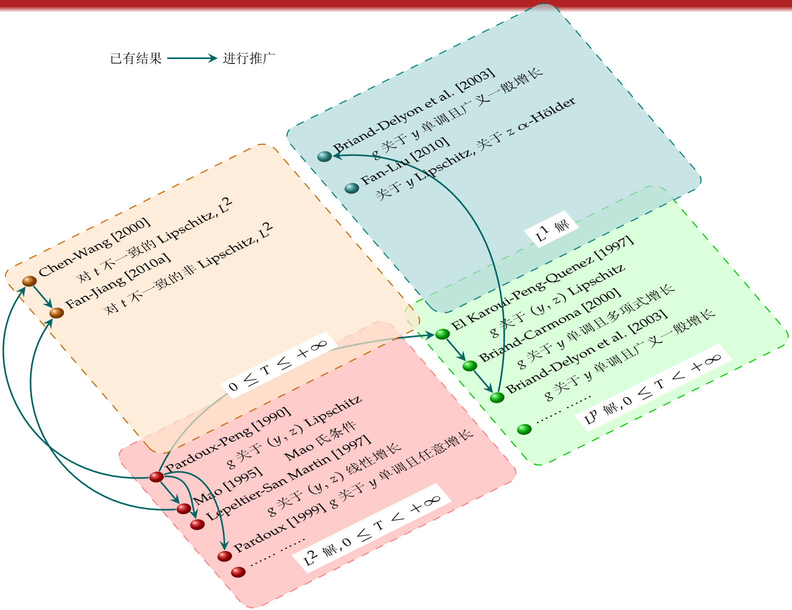


L^p $(p \geq 1)$ 解的存在惟一性

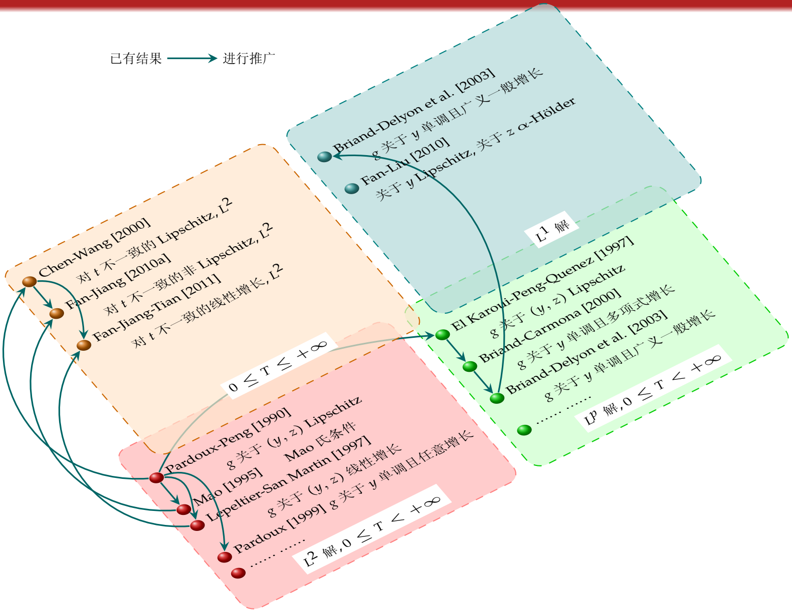
已有结果 ⟶ 进行推广



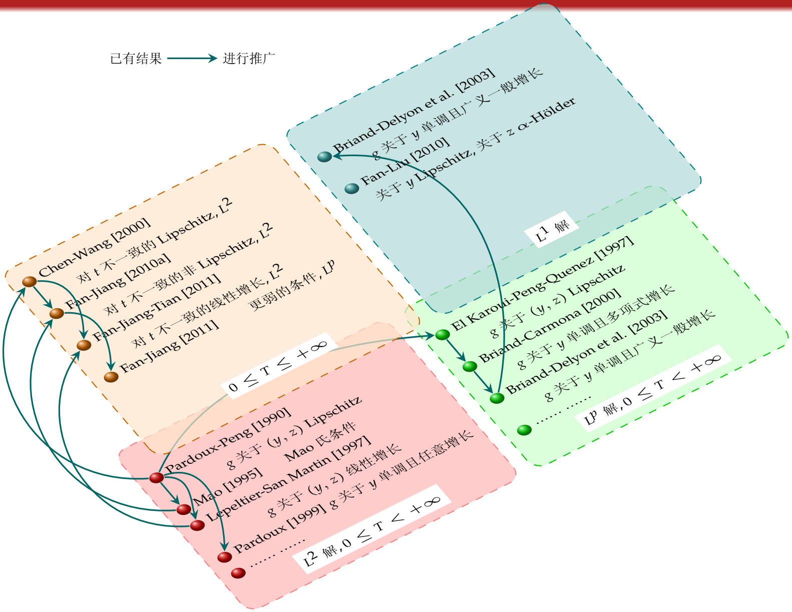
L^p $(p \geq 1)$ 解的存在惟一性



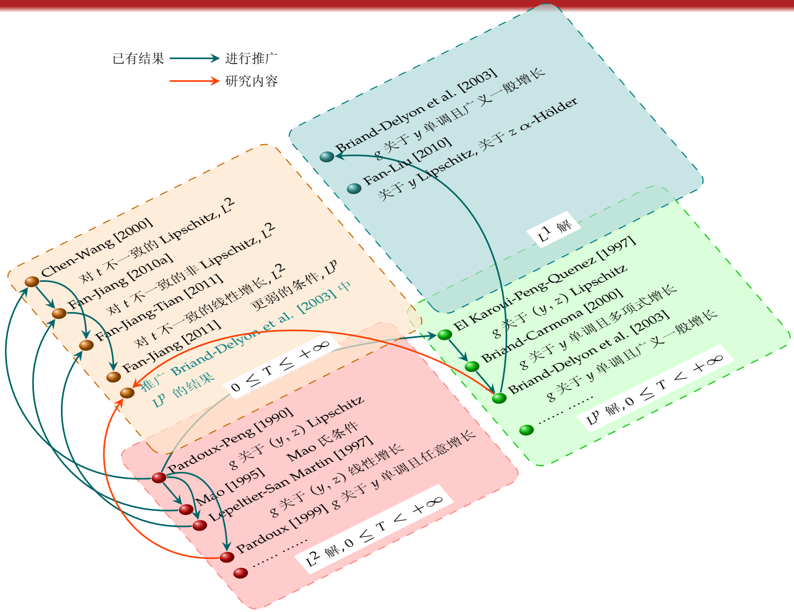
L^p $(p \geq 1)$ 解的存在惟一性



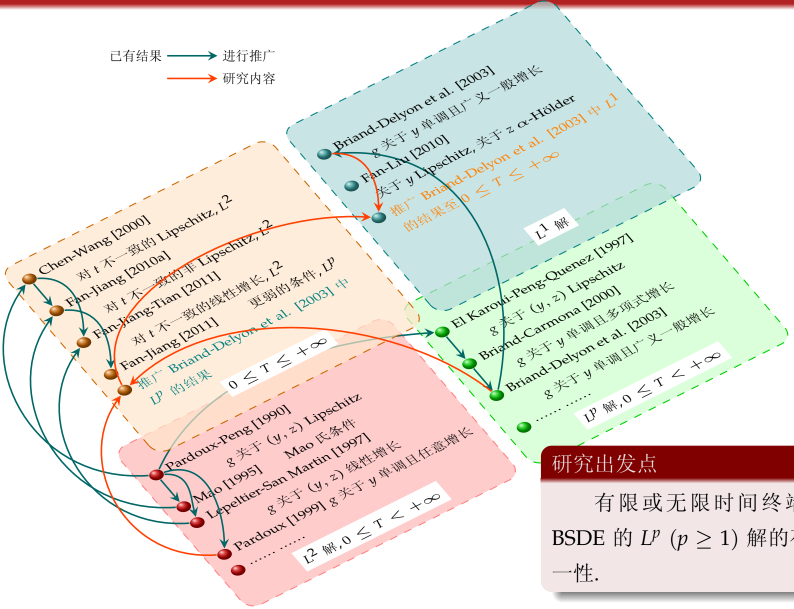
L^p $(p \geq 1)$ 解的存在惟一性



L^p $(p \geq 1)$ 解的存在惟一性



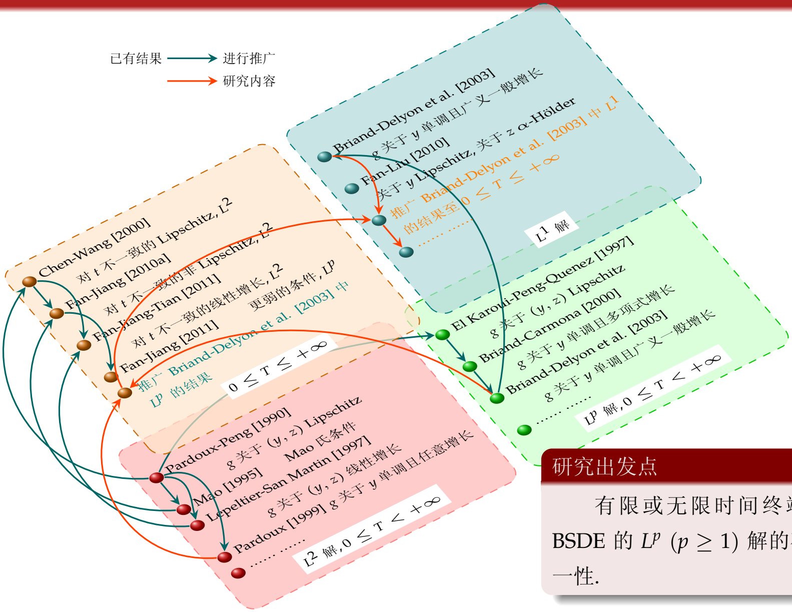
L^p $(p \geq 1)$ 解的存在惟一性



研究出发点

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^p $(p \geq 1)$ 解的存在惟一性.

L^p $(p \geq 1)$ 解的存在惟一性



研究出发点

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^p $(p \geq 1)$ 解的存在惟一性.

生成元表示定理

生成元表示定理

- Briand-Coquet et al. [2000], 在经典 Lipschitz 条件及两个附加条件下得到表示定理

生成元表示定理

- Briand-Coquet et al. [2000], 在经典 Lipschitz 条件及两个附加条件下得到表示定理
- Jiang [2005a,b,c],Jiang [2006], Jiang [2008], 去掉了两个附加条件

已有结果 $\longrightarrow$ 进行推广

生成元表示定理

- Briand-Coquet et al. [2000], 在经典 Lipschitz 条件及两个附加条件下得到表示定理
- Jiang [2005a,b,c],Jiang [2006], Jiang [2008], 去掉了两个附加条件
- 贾广岩 [2008] 弱化 Jiang [2008] 中的 Lipschitz 条件为线性增长, 在解不惟一的情况下得到生成元的不变表示定理

已有结果 $\longrightarrow$ 进行推广

生成元表示定理

- Briand-Coquet et al. [2000], 在经典 Lipschitz 条件及两个附加条件下得到表示定理
- Jiang [2005a,b,c],Jiang [2006], Jiang [2008], 去掉了两个附加条件
- 贾广岩 [2008] 弱化 Jiang [2008] 中的 Lipschitz 条件为线性增长, 在解不惟一的情况下得到生成元的不变表示定理
- Zhang-Fan [2013] 建立有限或无限时间终端 BSDE 生成元表示定理, 其中生成元满足对 t 不一致的线性增长条件

已有结果 $\longrightarrow$ 进行推广

生成元表示定理

- Briand-Coquet et al. [2000], 在经典 Lipschitz 条件及两个附加条件下得到表示定理
- Jiang [2005a,b,c],Jiang [2006], Jiang [2008], 去掉了两个附加条件
- 贾广岩 [2008] 弱化 Jiang [2008] 中的 Lipschitz 条件为线性增长, 在解不惟一的情况下得到生成元的不变表示定理
- Zhang-Fan [2013] 建立有限或无限时间终端 BSDE 生成元表示定理, 其中生成元满足对 t 不一致的线性增长条件

L^2 随机变量空间

已有结果 $\longrightarrow$ 进行推广

生成元表示定理

- Briand-Coquet et al. [2000], 在经典 Lipschitz 条件及两个附加条件下得到表示定理
- Jiang [2005a,b,c],Jiang [2006], Jiang [2008], 去掉了两个附加条件
- 贾广岩 [2008] 弱化 Jiang [2008] 中的 Lipschitz 条件为线性增长, 在解不惟一的情况下得到生成元的不变表示定理
- Zhang-Fan [2013] 建立有限或无限时间终端 BSDE 生成元表示定理, 其中生成元满足对 t 不一致的线性增长条件
- Fan-Jiang-XU [2011] 在随机过程空间中得到生成元表示定理, 其中生成元关于 y 单调和多项式增长

L^2 随机变量空间

已有结果 ⟶ 进行推广

生成元表示定理

- 问题一:
  在 L^p ($p>1$) 空间中表示定理是否仍然成立?

L^p ($p>1$) 随机变量空间

- Briand-Coquet et al. [2000], 在经典 Lipschitz 条件及两个附加条件下得到表示定理
- Jiang [2005a,b,c],Jiang [2006], Jiang [2008], 去掉了两个附加条件
- 贾广岩 [2008] 弱化 Jiang [2008] 中的 Lipschitz 条件为线性增长, 在解不惟一的情况下得到生成元的不变表示定理
- Zhang-Fan [2013] 建立有限或无限时间终端 BSDE 生成元表示定理, 其中生成元满足对 t 不一致的线性增长条件
- Fan-Jiang-XU [2011] 在随机过程空间中得到生成元表示定理, 其中生成元关于 y 单调和多项式增长

L^2 随机变量空间

已有结果 $\longrightarrow$ 进行推广

生成元表示定理

- 问题一: 在 L^p ($p > 1$) 空间中表示定理是否仍然成立?
- Song-Hu-Chen [2012] 在 L^p ($p > 1$) 空间中得到表示定理, 生成元满足一致 Lipschitz 条件

L^p ($p > 1$) 随机变量空间

- Briand-Coquet et al. [2000], 在经典 Lipschitz 条件及两个附加条件下得到表示定理
- Jiang [2005a,b,c],Jiang [2006], Jiang [2008], 去掉了两个附加条件
- 贾广岩 [2008] 弱化 Jiang [2008] 中的 Lipschitz 条件为线性增长, 在解不惟一的情况下得到生成元的不变表示定理
- Zhang-Fan [2013] 建立有限或无限时间终端 BSDE 生成元表示定理, 其中生成元满足对 t 不一致的线性增长条件
- Fan-Jiang-XU [2011] 在随机过程空间中得到生成元表示定理, 其中生成元关于 y 单调和多项式增长

L^2 随机变量空间

已有结果 $\longrightarrow$ 进行推广

生成元表示定理

- 问题一: 在 L^p ($p>1$) 空间中表示定理是否仍然成立?
- Song-Hu-Chen [2012] 在 L^p ($p>1$) 空间中得到表示定理, 生成元满足一致 Lipschitz 条件
- 问题二: 终端时间无限, L^p ($p>1$) 空间中生成元表示定理是否成立?

L^p ($p>1$) 随机变量空间

- Briand-Coquet et al. [2000], 在经典 Lipschitz 条件及两个附加条件下得到表示定理
- Jiang [2005a,b,c],Jiang [2006], Jiang [2008], 去掉了两个附加条件
- 贾广岩 [2008] 弱化 Jiang [2008] 中的 Lipschitz 条件为线性增长, 在解不惟一的情况下得到生成元的不变表示定理
- Zhang-Fan [2013] 建立有限或无限时间终端 BSDE 生成元表示定理, 其中生成元满足对 t 不一致的线性增长条件
- Fan-Jiang-XU [2011] 在随机过程空间中得到生成元表示定理, 其中生成元关于 y 单调和多项式增长

L^2 随机变量空间

已有结果 ⟶ 进行推广

生成元表示定理

- 问题一:
  在 L^p ($p>1$) 空间中表示定理是否仍然成立?
- Song-Hu-Chen [2012] 在 L^p ($p>1$) 空间中得到表示定理, 生成元满足一致 Lipschitz 条件
- 问题二:
  终端时间无限, L^p ($p>1$) 空间中生成元表示定理是否成立?
- 改进 Song-Hu-Chen [2012] 的结果, 推广到无限时间终端, 生成元条件弱化为多项式增长

L^p ($p>1$) 随机变量空间

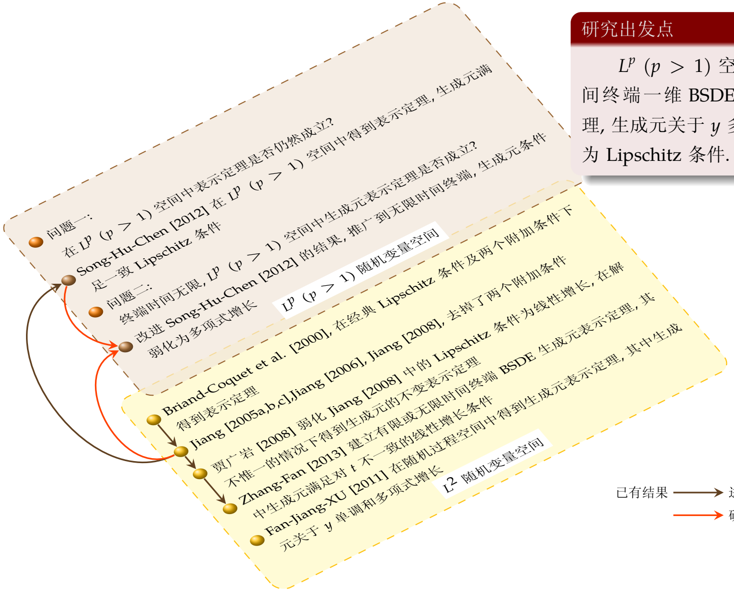
- Briand-Coquet et al. [2000], 在经典 Lipschitz 条件及两个附加条件下得到表示定理
- Jiang [2005a,b,c],Jiang [2006], Jiang [2008], 去掉了两个附加条件
- 贾广岩 [2008] 弱化 Jiang [2008] 中的 Lipschitz 条件为线性增长, 在解不惟一的情况下得到生成元的不变表示定理
- Zhang-Fan [2013] 建立有限或无限时间终端 BSDE 生成元表示定理, 其中生成元满足对 t 不一致的线性增长条件
- Fan-Jiang-XU [2011] 在随机过程空间中得到生成元表示定理, 其中生成元关于 y 单调和多项式增长

L^2 随机变量空间

已有结果 → 进行推广

→ 研究内容

生成元表示定理



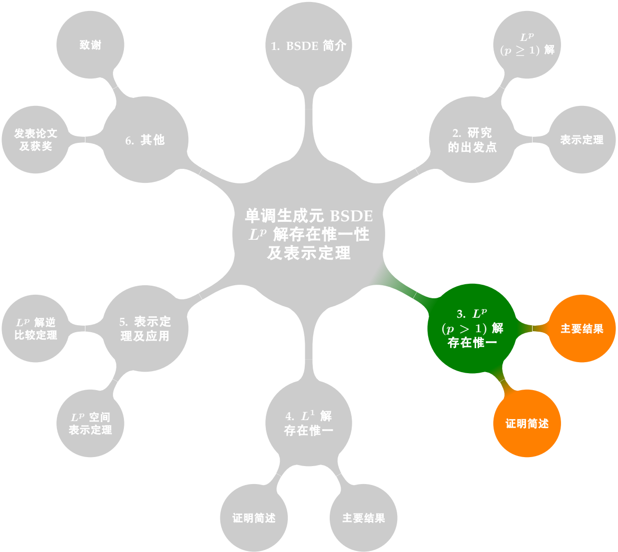
研究出发点

L^p $(p > 1)$ 空间, 有限或无限时间终端一维 BSDE 的生成元表示定理, 生成元关于 y 多项式增长, 关于 z 为 Lipschitz 条件.

已有结果 $\longrightarrow$ 进行推广

$\longrightarrow$ 研究内容

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^p $(p>1)$ 解的存在惟一性



有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^p $(p>1)$ 解 --- 主要结果

令 $p>1, u(t), v(t):[0,T]\mapsto \mathbf{R}^+$ 满足 $\int_0^T \left(u(t)+v^2(t)\right) \mathrm{d}t < +\infty$.

生成元 g 的主要假设, $0\le T\le +\infty$

(H1) $\mathbf{E}\left[\left(\int_0^T |g(t,0,0)|\,\mathrm{d}t\right)^p\right] < +\infty$;

(H2) $\mathrm{d}\mathbf{P}\times\ \mathrm{d}t-$ a.e., $\forall z\in\mathbf{R}^{k\times d}, y\mapsto g(t,y,z)$ 连续;

(H3) g 关于 y 满足广义一般增长条件:

$$\forall r'\in\mathbf{R}^+,\ \psi_{r'}(t):=\sup_{|y|\le r'}|g(t,y,0)-g(t,0,0)|\in L^1([0,T]\times\Omega);$$

(H4) g 关于 y 满足对 t 不一致的单调条件:

$$\langle y_1-y_2, g(t,y_1,z)-g(t,y_2,z)\rangle \le u(t)|y_1-y_2|^2;$$

(H5) g 关于 z 满足对 t 不一致的 Lipschitz 连续条件:

$$|g(t,y,z_1)-g(t,y,z_2)|\le v(t)|z_1-z_2|.$$

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^p $(p>1)$ 解 --- 主要结果

令 $p>1, u(t), v(t) : [0,T] \mapsto \mathbf{R}^+$ 满足 $\int_0^T \left(u(t)+v^2(t)\right) \mathrm{d}t < +\infty$.

生成元 g 的主要假设, $0 \le T \le +\infty$

(H1) $\mathbf{E}\left[\left(\int_0^T |g(t,0,0)|\,\mathrm{d}t\right)^p\right] < +\infty$;

(H2) $\mathrm{d}\mathbf{P} \times \mathrm{d}t - \text{a.e.}, \forall z \in \mathbf{R}^{k\times d}, y \mapsto g(t,y,z)$ 连续;

(H3) g 关于 y 满足广义一般增长条件:

$$\forall r' \in \mathbf{R}^+,\ \psi_{r'}(t) := \sup_{|y|\le r'} |g(t,y,0)-g(t,0,0)| \in L^1([0,T]\times\Omega);$$

(H4) g 关于 y 满足对 t 不一致的单调条件:

$$\langle y_1-y_2, g(t,y_1,z)-g(t,y_2,z)\rangle \le u(t)|y_1-y_2|^2;$$

(H5) g 关于 z 满足对 t 不一致的 Lipschitz 连续条件:

$$|g(t,y,z_1)-g(t,y,z_2)| \le v(t)|z_1-z_2|.$$

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^p $(p>1)$ 解 --- 主要结果

令 $p>1$, $u(t), v(t):[0,T]\mapsto \mathbf{R}^+$ 满足 $\int_0^T \left(u(t)+v^2(t)\right) \mathrm{d}t < +\infty$.

生成元 g 的主要假设, $0\leq T\leq +\infty$

(H1) $\mathbf{E}\left[\left(\int_0^T |g(t,0,0)|\,\mathrm{d}t\right)^p\right] < +\infty$;

(H2) $\mathrm{d}\mathbf{P}\times \mathrm{d}t$ – a.e., $\forall z\in \mathbf{R}^{k\times d}$, $y\mapsto g(t,y,z)$ 连续;

(H3) g 关于 y 满足广义一般增长条件;

(H4) g 关于 y 满足对 t 不一致的单调条件;

(H5) g 关于 z 满足对 t 不一致的 Lipschitz 连续条件.

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^p $(p>1)$ 解 --- 主要结果

令 $p>1$, $u(t), v(t):[0,T]\mapsto \mathbf{R}^+$ 满足 $\int_0^T \left(u(t)+v^2(t)\right) \mathrm{d}t < +\infty$.

生成元 g 的主要假设, $0\le T\le +\infty$

(H1) $\mathbf{E}\left[\left(\int_0^T |g(t,0,0)|\,\mathrm{d}t\right)^p\right] < +\infty$;

(H2) $\mathrm{d}\mathbf{P}\times \mathrm{d}t-$ a.e., $\forall z\in \mathbf{R}^{k\times d}$, $y\mapsto g(t,y,z)$ 连续;

(H3) g 关于 y 满足广义一般增长条件;

(H4) g 关于 y 满足对 t 不一致的单调条件;

(H5) g 关于 z 满足对 t 不一致的 Lipschitz 连续条件.

定理 2.3. [P8]: L^p $(p>1)$ 解的存在惟一性

如果 $0\le T\le +\infty$, $p>1$ 且 g 满足 (H1)–(H5), 则 $\forall \xi\in L^p(\Omega,\mathcal{F}_T,\mathbf{P};\mathbf{R}^k)$, BSDE (ξ,T,g) 存在惟一解 $(y_t,z_t)_{t\in[0,T]}\in \mathcal{S}^p\times \mathrm{M}^p$.

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^p $(p>1)$ 解 --- 主要结果

令 $p>1, u(t), v(t) : [0,T] \mapsto \mathbf{R}^+$ 满足 $\int_0^T \left(u(t)+v^2(t)\right) \mathrm{d}t < +\infty$.

生成元 g 的主要假设, $0 \le T \le +\infty$

(H1) $\mathbf{E}\left[\left(\int_0^T |g(t,0,0)|\,\mathrm{d}t\right)^p\right] < +\infty$;

(H2) $\mathrm{d}\mathbf{P} \times \mathrm{d}t - \text{a.e.}, \forall z \in \mathbf{R}^{k\times d}, y \mapsto g(t,y,z)$ 连续;

(H3) g 关于 y 满足广义一般增长条件;

(H4) g 关于 y 满足对 t 不一致的单调条件;

(H5) g 关于 z 满足对 t 不一致的 Lipschitz 连续条件.

定理 2.4.[P9]: L^p $(p>1)$ 解的比较定理, $0 \le T \le +\infty$

BSDE (ξ^i, T, g_i) 存在惟一解 $(y^i_\cdot, z^i_\cdot) \in \mathcal{S}^p \times \mathrm{M}^p$. 如果 $\xi^1 \le \xi^2$, g 满足 (H4) – (H5), 且 $g_1(t, y_t^2, z_t^2) \le g_2(t, y_t^2, z_t^2)$, 则 $\forall t \in [0,T]$, 有 $y_t^1 \le y_t^2$.

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^p $(p>1)$ 解 --- 惟一性证明

先验估计的假设: $0 \le T \le +\infty$

(A) $\forall (y,z) \in \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{k\times d}$, $\mathbf{E}\left[\left(\int_0^T f_t \,\mathrm{d}t\right)^p\right] < +\infty$

$$\langle y, g(t,y,z)\rangle \le u(t)|y|^2 + v(t)|y||z| + f_t|y|.$$

命题 2.9. [P14]: L^p $(p>1)$ 解的先验估计

令 $0 \le T \le +\infty$, g 满足 (A), $\forall p > 1$, 则 $\exists C_p > 0$ 使得 $\forall\, 0 \le r \le t \le T$,

$$\mathbf{E}\left[\sup_{s\in[t,T]} |y_s|^p \middle| \mathcal{F}_r\right] + \mathbf{E}\left[\left(\int_t^T |z_s|^2 \,\mathrm{d}s\right)^{\frac{p}{2}} \middle| \mathcal{F}_r\right] \le C_p \mathbf{E}\left[|\xi|^p + \left(\int_t^T f_s \,\mathrm{d}s\right)^p \middle| \mathcal{F}_r\right].$$

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^p $(p>1)$ 解 --- 证明困难之处

(H3') g 关于 y 满足一般增长条件: $|g(t,y,z)| \le |g(t,0,z)| + u(t)\varphi(|y|)$.

$0 \le T < +\infty$		$0 \le T \le +\infty$	
$\|y\|_{M^p}^p := \mathbf{E}\left[\int_0^T \|y_s\|^p \mathrm{d}s\right] < +\infty$		$\|y\|_{S^p}^p := \mathbf{E}\left[\sup_{s\in[0,T]} \|y_s\|^p\right] < +\infty$	
$\mathbf{E}\left[\int_0^T \|g(t,0,0)\|^p \mathrm{d}t\right] < +\infty$		$\mathbf{E}\left[\left(\int_0^T \|g(t,0,0)\| \mathrm{d}t\right)^p\right] < +\infty$	
$\int_0^T C\,\mathrm{d}t = CT < +\infty$	✔	$\int_0^T C\,\mathrm{d}t \not< +\infty$	✘
$\|X\|_{M^p} \le C\|X\|_{S^p}$	✔	$\|X\|_{M^p} \not\le C\|X\|_{S^p}$	✘
$\int_0^T v^2(s)\mathrm{d}s < +\infty \Rightarrow \int_0^T v(s)\mathrm{d}s < +\infty$	✔	$\int_0^T v^2(s)\mathrm{d}s < +\infty \nRightarrow \int_0^T v(s)\mathrm{d}s < +\infty$	✘
(H3') [Pardoux(1999)]	✔	(H3') 推广到终端时间无限	✘

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^p $(p>1)$ 解 --- 证明困难之处

(H3') g 关于 y 满足一般增长条件: $|g(t,y,z)| \le |g(t,0,z)| + u(t)\varphi(|y|)$.

$0 \le T < +\infty$		$0 \le T \le +\infty$	
$\|y\|^p_{\mathrm{M}^p} := \mathbf{E}\left[\int_0^T \|y_s\|^p \mathrm{d}s\right] < +\infty$		$\|y\|^p_{\mathcal{S}^p} := \mathbf{E}\left[\sup_{s\in[0,T]} \|y_s\|^p\right] < +\infty$	
$\mathbf{E}\left[\int_0^T \|g(t,0,0)\|^p \,\mathrm{d}t\right] < +\infty$		$\mathbf{E}\left[\left(\int_0^T \|g(t,0,0)\| \,\mathrm{d}t\right)^p\right] < +\infty$	
$\int_0^T C\,\mathrm{d}t = CT < +\infty$	✔	$\int_0^T C\,\mathrm{d}t \nless +\infty$	✘
$\|X\|_{\mathrm{M}^p} \le C\|X\|_{\mathcal{S}^p}$	✔	$\|X\|_{\mathrm{M}^p} \nleq C\|X\|_{\mathcal{S}^p}$	✘
$\int_0^T v^2(s)\mathrm{d}s < +\infty \Rightarrow \int_0^T v(s)\mathrm{d}s < +\infty$	✔	$\int_0^T v^2(s)\mathrm{d}s < +\infty \nRightarrow \int_0^T v(s)\mathrm{d}s < +\infty$	✘
(H3') [Pardoux(1999)]	✔	(H3') 推广到终端时间无限	✘

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^p $(p>1)$ 解 --- 证明困难之处

(H3') g 关于 y 满足一般增长条件: $|g(t,y,z)| \le |g(t,0,z)| + u(t)\varphi(|y|)$.

$0 \le T < +\infty$		$0 \le T \le +\infty$	
$\|y\|^p_{\mathrm{M}^p} := \mathbf{E}\left[\int_0^T \lvert y_s\rvert^p \mathrm{d}s\right] < +\infty$		$\|y\|^p_{\mathcal{S}^p} := \mathbf{E}\left[\sup_{s\in[0,T]} \lvert y_s\rvert^p\right] < +\infty$	
$\mathbf{E}\left[\int_0^T \lvert g(t,0,0)\rvert^p \, \mathrm{d}t\right] < +\infty$		$\mathbf{E}\left[\left(\int_0^T \lvert g(t,0,0)\rvert \, \mathrm{d}t\right)^p\right] < +\infty$	
$\int_0^T C \, \mathrm{d}t = CT < +\infty$	✔	$\int_0^T C \, \mathrm{d}t \not< +\infty$	✘
$\|X\|_{\mathrm{M}^p} \le C\|X\|_{\mathcal{S}^p}$	✔	$\|X\|_{\mathrm{M}^p} \not\le C\|X\|_{\mathcal{S}^p}$	✘
$\int_0^T v^2(s)\mathrm{d}s < +\infty \Rightarrow \int_0^T v(s)\mathrm{d}s < +\infty$	✔	$\int_0^T v^2(s)\mathrm{d}s < +\infty \not\Rightarrow \int_0^T v(s)\mathrm{d}s < +\infty$	✘
(H3') [Pardoux(1999)]	✔	(H3') 推广到终端时间无限	✘

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^p $(p>1)$ 解 --- 证明困难之处

(H3′) g 关于 y 满足一般增长条件: $|g(t,y,z)| \le |g(t,0,z)| + u(t)\varphi(|y|)$.

$0 \le T < +\infty$		$0 \le T \le +\infty$	
$\|y\|_{M^p}^p := \mathbf{E}\left[\int_0^T \|y_s\|^p \mathrm{d}s\right] < +\infty$		$\|y\|_{\mathcal{S}^p}^p := \mathbf{E}\left[\sup_{s\in[0,T]} \|y_s\|^p\right] < +\infty$	
$\mathbf{E}\left[\int_0^T \|g(t,0,0)\|^p \,\mathrm{d}t\right] < +\infty$		$\mathbf{E}\left[\left(\int_0^T \|g(t,0,0)\| \,\mathrm{d}t\right)^p\right] < +\infty$	
$\int_0^T C\,\mathrm{d}t = CT < +\infty$	✔	$\int_0^T C\,\mathrm{d}t \nless +\infty$	✘
$\|X\|_{M^p} \le C\|X\|_{\mathcal{S}^p}$	✔	$\|X\|_{M^p} \nleq C\|X\|_{\mathcal{S}^p}$	✘
$\int_0^T v^2(s)\mathrm{d}s < +\infty \Rightarrow \int_0^T v(s)\mathrm{d}s < +\infty$	✔	$\int_0^T v^2(s)\mathrm{d}s < +\infty \nRightarrow \int_0^T v(s)\mathrm{d}s < +\infty$	✘
(H3′) [Pardoux(1999)]	✔	(H3′) 推广到终端时间无限	✘

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^p $(p>1)$ 解 --- 证明困难之处

(H3') g 关于 y 满足一般增长条件: $|g(t,y,z)| \le |g(t,0,z)| + u(t)\varphi(|y|)$.

$0 \le T < +\infty$		$0 \le T \le +\infty$	
$\|y\|_{\mathrm{M}^p}^p := \mathbf{E}\left[\int_0^T \|y_s\|^p \mathrm{d}s\right] < +\infty$		$\|y\|_{\mathcal{S}^p}^p := \mathbf{E}\left[\sup_{s\in[0,T]} \|y_s\|^p\right] < +\infty$	
$\mathbf{E}\left[\int_0^T \|g(t,0,0)\|^p \,\mathrm{d}t\right] < +\infty$		$\mathbf{E}\left[\left(\int_0^T \|g(t,0,0)\| \,\mathrm{d}t\right)^p\right] < +\infty$	
$\int_0^T C \,\mathrm{d}t = CT < +\infty$	✔	$\int_0^T C \,\mathrm{d}t \not< +\infty$	✘
$\|X\|_{\mathrm{M}^p} \le C\|X\|_{\mathcal{S}^p}$	✔	$\|X\|_{\mathrm{M}^p} \not\le C\|X\|_{\mathcal{S}^p}$	✘
$\int_0^T v^2(s)\mathrm{d}s < +\infty \Rightarrow \int_0^T v(s)\mathrm{d}s < +\infty$	✔	$\int_0^T v^2(s)\mathrm{d}s < +\infty \not\Rightarrow \int_0^T v(s)\mathrm{d}s < +\infty$	✘
(H3') [Pardoux(1999)]	✔	(H3') 推广到终端时间无限	✘

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^p $(p>1)$ 解 --- 证明困难之处

(H3′) g 关于 y 满足一般增长条件: $|g(t,y,z)| \le |g(t,0,z)| + u(t)\varphi(|y|)$.

$0 \le T < +\infty$		$0 \le T \le +\infty$	
$\|y\|_{\mathrm{M}^p}^p := \mathbf{E}\left[\int_0^T \|y_s\|^p \mathrm{d}s\right] < +\infty$		$\|y\|_{\mathcal{S}^p}^p := \mathbf{E}\left[\sup_{s\in[0,T]} \|y_s\|^p\right] < +\infty$	
$\mathbf{E}\left[\int_0^T \|g(t,0,0)\|^p \,\mathrm{d}t\right] < +\infty$		$\mathbf{E}\left[\left(\int_0^T \|g(t,0,0)\| \,\mathrm{d}t\right)^p\right] < +\infty$	
$\int_0^T C\,\mathrm{d}t = CT < +\infty$	✔	$\int_0^T C\,\mathrm{d}t \nless +\infty$	✘
$\|X\|_{\mathrm{M}^p} \le C\|X\|_{\mathcal{S}^p}$	✔	$\|X\|_{\mathrm{M}^p} \nleq C\|X\|_{\mathcal{S}^p}$	✘
$\int_0^T v^2(s)\mathrm{d}s < +\infty \Rightarrow \int_0^T v(s)\mathrm{d}s < +\infty$	✔	$\int_0^T v^2(s)\mathrm{d}s < +\infty \nRightarrow \int_0^T v(s)\mathrm{d}s < +\infty$	✘
(H3′) [Pardoux(1999)]	✔	(H3′) 推广到终端时间无限	✘

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^p $(p>1)$ 解 --- 存在性证明

第一步:

假设 g 满足 (H2), (H3'), (H4) 和 (H5), $V \in \mathrm{M}^p$,

$$|\xi| \le K,\ \mathrm{d}\mathbf{P} - \mathrm{a.s.}, \qquad |g(t,0,V_t)| \le Ke^{-t},\ \mathrm{d}\mathbf{P} \times \mathrm{d}t - \mathrm{a.e.}. \tag{2}$$

证明 BSDE (3) 在空间 $\mathcal{S}^2 \times \mathrm{M}^2$ 中存在解,

$$y_t = \xi + \int_t^T g(s, y_s, V_s)\,\mathrm{d}s - \int_t^T z_s\,\mathrm{d}B_s, \quad t \in [0,T]; \tag{3}$$

- 对 g 与 ρ_n 关于 y 做卷积得到 g_n, 关于 y 局部 Lipschitz 连续;
- 对 g_n 截断得到 $g_{n,q}$, 关于 y 是 Lipschitz 连续;
- BSDE $(\xi, T, g_{n,q})$ 有解 $(y^{n,q}, z^{n,q}) \in \mathcal{S}^2 \times \mathrm{M}^2$, $(y^n, z^n) \in \mathcal{S}^2 \times \mathrm{M}^2$;
- 对 BSDE (ξ, T, g_n) 两侧取弱极限.

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^p $(p>1)$ 解 --- 存在性证明

第一步:

假设 g 满足 (H2), (H3'), (H4) 和 (H5), $V \in \mathrm{M}^p$,

$$|\xi| \le K,\ \mathrm{d}\mathbf{P}-\text{a.s.}, \qquad |g(t,0,V_t)| \le Ke^{-t},\ \mathrm{d}\mathbf{P}\times \mathrm{d}t-\text{a.e.}. \tag{2}$$

证明 BSDE (3) 在空间 $\mathcal{S}^2 \times \mathrm{M}^2$ 中存在解,

$$y_t = \xi + \int_t^T g(s,y_s,V_s)\,\mathrm{d}s - \int_t^T z_s\,\mathrm{d}B_s, \quad t\in[0,T]; \tag{3}$$

- 对 g 与 ρ_n 关于 y 做卷积得到 g_n, 关于 y 局部 Lipschitz 连续;
- 对 g_n 截断得到 $g_{n,q}$, 关于 y 是 Lipschitz 连续;
- BSDE $(\xi, T, g_{n,q})$ 有解 $(y^{n,q}, z^{n,q}) \in \mathcal{S}^2 \times \mathrm{M}^2$, $(y^n, z^n) \in \mathcal{S}^2 \times \mathrm{M}^2$;
- 对 BSDE (ξ, T, g_n) 两侧取弱极限.

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^p $(p>1)$ 解 --- 存在性证明

第一步: P16–P22, 共 6 页

假设 g 满足 (H2), (H3'), (H4) 和 (H5), $V \in \mathrm{M}^p$,

$$|\xi| \le K,\ \mathrm{d}\mathbf{P}-\text{a.s.}, \qquad |g(t,0,V_t)| \le Ke^{-t},\ \mathrm{d}\mathbf{P}\times\mathrm{d}t-\text{a.e.}. \tag{2}$$

证明 BSDE (3) 在空间 $\mathcal{S}^2 \times \mathrm{M}^2$ 中存在解,

$$y_t = \xi + \int_t^T g(s,y_s,V_s)\,\mathrm{d}s - \int_t^T z_s\,\mathrm{d}B_s, \quad t\in[0,T]; \tag{3}$$

- 对 g 与 ρ_n 关于 y 做卷积得到 g_n, 关于 y 局部 Lipschitz 连续;
- 对 g_n 截断得到 $g_{n,q}$, 关于 y 是 Lipschitz 连续;
- BSDE $(\xi, T, g_{n,q})$ 有解 $(y^{n,q}, z^{n,q}) \in \mathcal{S}^2 \times \mathrm{M}^2$, $(y^n, z^n) \in \mathcal{S}^2 \times \mathrm{M}^2$;
- 对 BSDE (ξ, T, g_n) 两侧取弱极限.

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^p $(p > 1)$ 解 --- 存在性证明

第二步

通过改进的特殊截断技术, 将假设 (H3′) 弱化为 (H3);

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^p $(p>1)$ 解 --- 存在性证明

第二步

通过改进的特殊截断技术, 将假设 (H3′) 弱化为 (H3);

困难之处: 此时需在 g 不依赖于 z 时进行截断, 且为第三步做铺垫.

$$\pi_u(x) := \frac{ux}{u \vee |x|}, \quad \forall u \in \mathbf{R};$$

$$h_n(t,y,V_t) := \theta_{r'}(y)\big(g(t,y,\pi_{ne^{-t}}(V_t)) - g(t,0,\pi_{ne^{-t}}(V_t))\big)\frac{ne^{-t}}{\psi_{r'+1}(t) \vee (ne^{-t})} + g(t,0,V_t).$$

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^p $(p>1)$ 解 --- 存在性证明

第二步

通过改进的特殊截断技术, 将假设 (H3′) 弱化为 (H3);

第三步

再次使用截断技术, 去掉假设 (2), 同时证明 $\forall V \in \mathcal{M}^p$, BSDE (3) 在假设 (H1) – (H5) 下有 $\mathcal{S}^p \times \mathcal{M}^p$ 解;

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^p $(p>1)$ 解 --- 存在性证明

第二步

通过改进的特殊截断技术, 将假设 (H3′) 弱化为 (H3);

第三步

再次使用截断技术, 去掉假设 (2), 同时证明 $\forall V \in \mathrm{M}^p$, BSDE (3) 在假设 (H1) – (H5) 下有 $\mathcal{S}^p \times \mathrm{M}^p$ 解;

$$\xi^n := \pi_n(\xi), \quad g^n(t,y,V_t) := g(t,y,V_t) - g(t,0,V_t) + \pi_{ne^{-t}}(g(t,0,V_t)).$$

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^p $(p>1)$ 解 --- 存在性证明

第二步

通过改进的特殊截断技术, 将假设 (H3′) 弱化为 (H3);

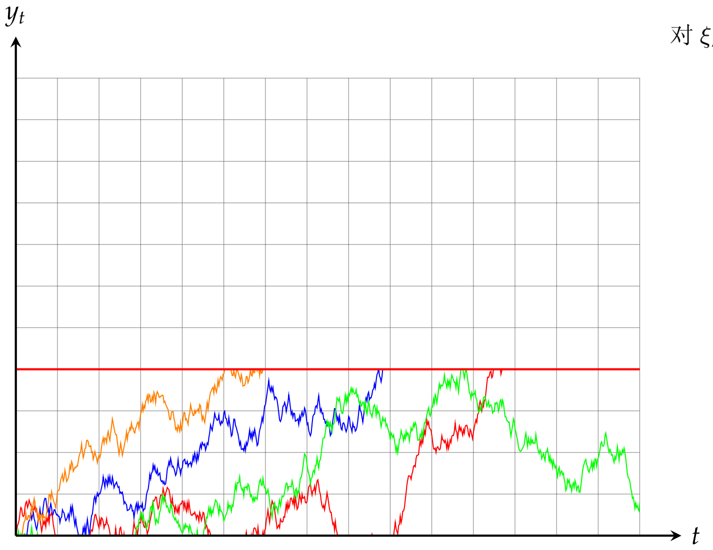
第三步

再次使用截断技术, 去掉假设 (2), 同时证明 $\forall V \in \mathcal{M}^p$, BSDE (3) 在假设 (H1) – (H5) 下有 $\mathcal{S}^p \times \mathcal{M}^p$ 解;

第四步

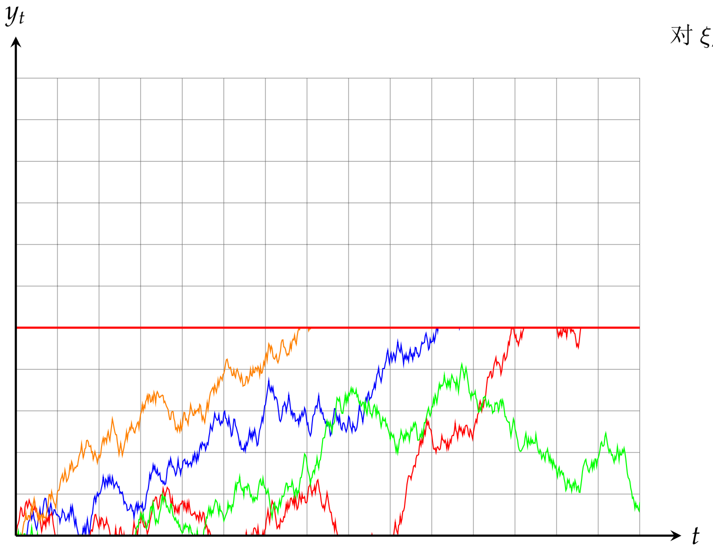
类似于 [Fan-Jiang(2012a)] 通过先验估计, 分区间构建压缩映射, 证明 BSDE (ξ, T, g) 在假设 (H1) – (H5) 下有 $\mathcal{S}^p \times \mathcal{M}^p$ 解.

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^p $(p>1)$ 解 --- 截断技术



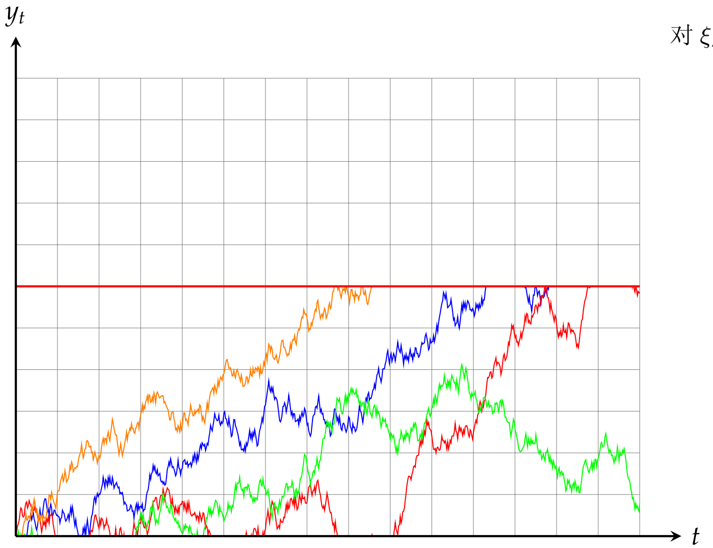
对 ξ, g 截断

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^p $(p > 1)$ 解 --- 截断技术



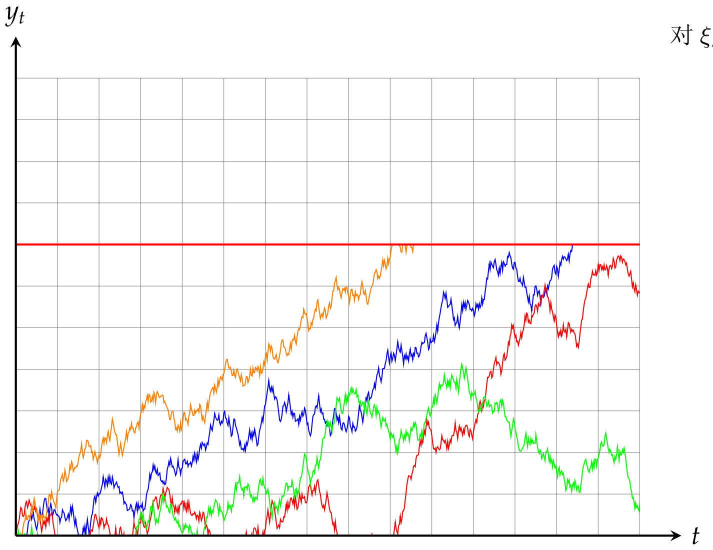
对 ξ, g 截断

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^p $(p>1)$ 解 --- 截断技术



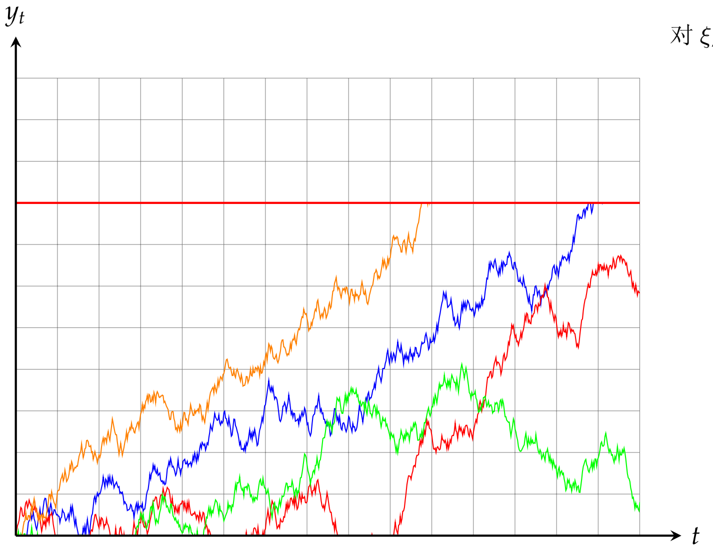
对 ξ, g 截断

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^p $(p>1)$ 解 --- 截断技术



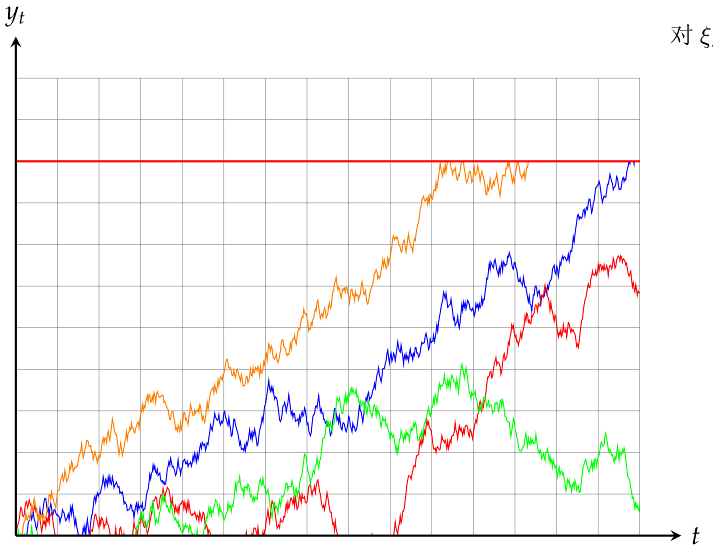
对 ξ, g 截断

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^p $(p > 1)$ 解 --- 截断技术



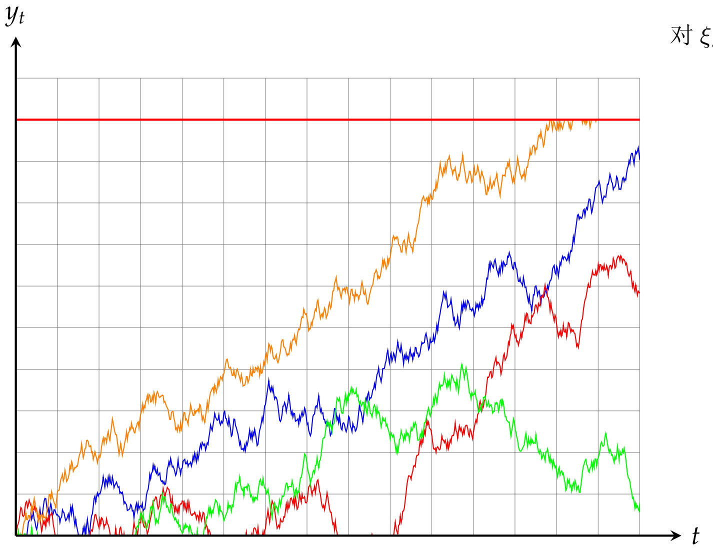
对 ξ, g 截断

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^p $(p > 1)$ 解 --- 截断技术



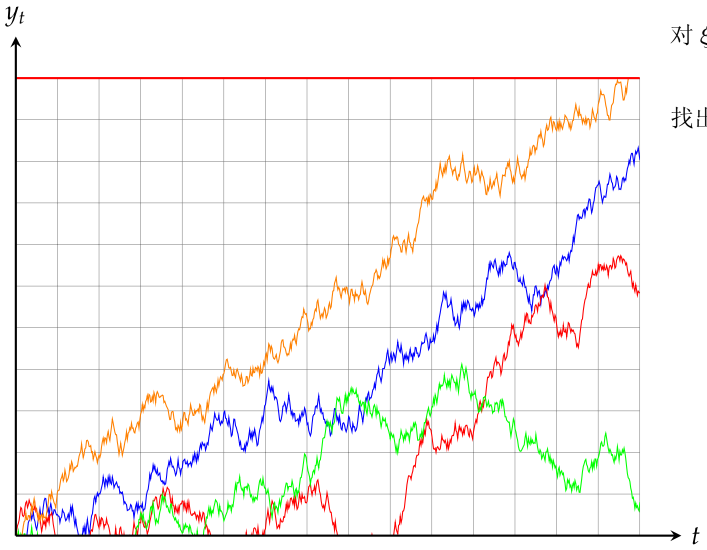
对 ξ, g 截断

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^p $(p>1)$ 解 --- 截断技术



对 ξ, g 截断

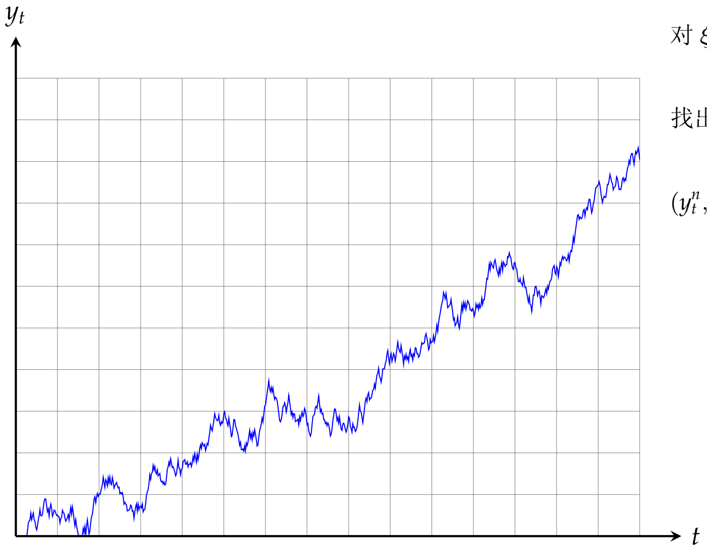
有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^p $(p>1)$ 解 --- 截断技术



对 ξ, g 截断

找出 (y_t^n, z_t^n) 的轨迹

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^p $(p > 1)$ 解 --- 截断技术



对 ξ, g 截断

找出 (y_t^n, z_t^n) 的轨迹

(y_t^n, z_t^n) 收敛到 (y_t, z_t)

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^p $(p>1)$ 解 --- 举例

例 2.16. [P29]: 终端时间有限 $0 \le T < +\infty$, 一维情况

$$g(t,y,z) = |\ln t|(-e^y + |y|) + \frac{1}{\sqrt[4]{t}}|z| + |B_t|.$$

例 2.17. [P30]: 终端时间无限 $0 \le T \le +\infty$, 二维情况

$$g(t,y,z) = t^2 e^{-t}\begin{bmatrix} -y_1^3 + y_2 \\ -y_2^5 - y_1 \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\begin{bmatrix} |z_1| \\ |z_2| \end{bmatrix} + \frac{t^2}{t^4+1}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

g 满足 (H1) – (H5). BSDE (ξ, T, g) 在空间 $\mathcal{S}^p \times \mathrm{M}^p$ 中有惟一解.

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^p $(p>1)$ 解 --- 举例

例 2.16. [P29]: 终端时间有限 $0 \le T < +\infty$, 一维情况

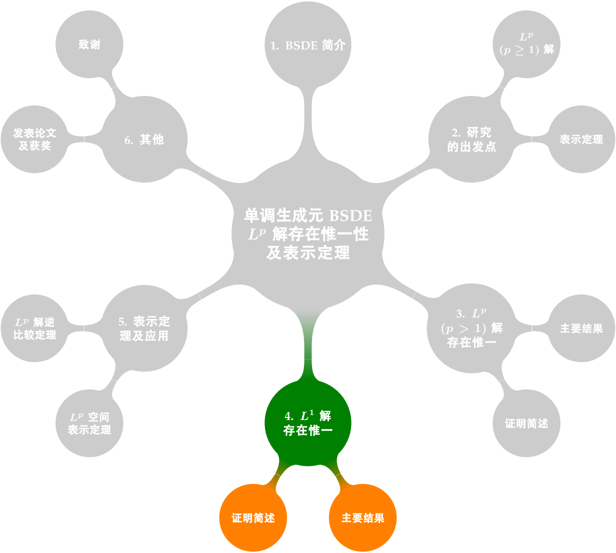
$$g(t,y,z) = |\ln t|(-e^y + |y|) + \frac{1}{\sqrt[4]{t}}|z| + |B_t|.$$

例 2.17. [P30]: 终端时间无限 $0 \le T \le +\infty$, 二维情况

$$g(t,y,z) = t^2 e^{-t} \begin{bmatrix} -y_1^3 + y_2 \\ -y_2^5 - y_1 \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \begin{bmatrix} |z_1| \\ |z_2| \end{bmatrix} + \frac{t^2}{t^4+1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

g 满足 (H1) – (H5). BSDE (ξ, T, g) 在空间 $\mathcal{S}^p \times \mathrm{M}^p$ 中有惟一解.

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^1 解



有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^1 解 --- 主要结果

生成元 g 的假设: $0 \le T \le +\infty$

(H1') $\mathbf{E}\left[\int_0^T |g(t,0,0)|\,\mathrm{d}t\right] < +\infty$;

(H6) $\exists \alpha \in (0,1)$, $\int_0^T \left(\gamma(t)+\gamma^{1/(1-\alpha)}(t)+\gamma^{2/(2-\alpha)}(t)\right)\mathrm{d}t < +\infty$, $\mathbf{E}[\int_0^T g_t \mathrm{d}t] < +\infty$,

$$|g(t,y,z)-g(t,y,0)| \le \gamma(t)(g_t+|y|+|z|)^{\alpha}.$$

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^1 解 --- 主要结果

生成元 g 的假设: $0\leq T\leq +\infty$

(H1′) $\mathbf{E}\left[\int_0^T |g(t,0,0)|\,\mathrm{d}t\right] < +\infty$;

(H6) $\exists\alpha\in(0,1)$, $\int_0^T\big(\gamma(t)+\gamma^{1/(1-\alpha)}(t)+\gamma^{2/(2-\alpha)}(t)\big)\mathrm{d}t<+\infty$, $\mathbf{E}[\int_0^T g_t\mathrm{d}t]<+\infty$,

$$|g(t,y,z)-g(t,y,0)|\leq\gamma(t)(g_t+|y|+|z|)^{\alpha}.$$

定理 3.1. [P31]: L^1 解的存在惟一性

令 $0\leq T\leq+\infty$ 且 g 满足 (H1′), (H2) – (H6), 则 $\forall\xi\in L^1$ 及 $\beta\in(0,1)$, BSDE (ξ,T,g) 存在解 $(y_\cdot,z_\cdot)\in\mathcal{S}^\beta\times\mathrm{M}^\beta$, 且 $(y_\cdot)$ 属于 (D) 类; $\forall\beta\in(\alpha,1)$, 解惟一.

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^1 解 --- 主要结果

生成元 g 的假设: $0 \le T \le +\infty$

(H1′) $\mathbf{E}\left[\int_0^T |g(t,0,0)|\,\mathrm{d}t\right] < +\infty$;

(H6) $\exists \alpha \in (0,1)$, $\int_0^T (\gamma(t)+\gamma^{1/(1-\alpha)}(t)+\gamma^{2/(2-\alpha)}(t))\mathrm{d}t < +\infty$, $\mathbf{E}[\int_0^T g_t \mathrm{d}t] < +\infty$,

$$|g(t,y,z)-g(t,y,0)| \le \gamma(t)(g_t+|y|+|z|)^{\alpha}.$$

定理 3.1. [P31]: L^1 解的存在惟一性

令 $0 \le T \le +\infty$ 且 g 满足 (H1′), (H2) – (H6), 则 $\forall \xi \in L^1$ 及 $\beta \in (0,1)$, BSDE (ξ, T, g) 存在解 $(y_\cdot, z_\cdot) \in \mathcal{S}^\beta \times \mathrm{M}^\beta$, 且 $(y_\cdot)$ 属于 (D) 类; $\forall \beta \in (\alpha, 1)$, 解惟一.

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^1 解 --- 主要结果

生成元 g 的假设: $0 \le T \le +\infty$

(H1′) $\mathbf{E}\left[\int_0^T |g(t,0,0)|\,\mathrm{d}t\right] < +\infty$;

(H6) $\exists \alpha \in (0,1)$, $\int_0^T \big(\gamma(t)+\gamma^{1/(1-\alpha)}(t)+\gamma^{2/(2-\alpha)}(t)\big)\mathrm{d}t < +\infty$, $\mathbf{E}[\int_0^T g_t \mathrm{d}t] < +\infty$,

$$|g(t,y,z)-g(t,y,0)| \le \gamma(t)(g_t+|y|+|z|)^{\alpha}.$$

受 [Fan-Jiang(2012b)] 及 [Fan-Liu(2010)] 启发.

定理 3.6. [38]: L^1 解的比较定理, $0 \le T \le +\infty$

$\xi^i \in L^1$, $\beta \in (\alpha,1)$, BSDE (ξ^i, T, g_i) 存在惟一解 $(y^i_\cdot, z^i_\cdot) \in \mathcal{S}^\beta \times \mathrm{M}^\beta$, 且 $(y^i_\cdot)$ 属于 (D) 类. 若 $\xi^1 \le \xi^2$, g 满足 (H4) – (H6), 且 $g_1(t,y_t^2,z_t^2) \le g_2(t,y_t^2,z_t^2)$, 则 $\forall t \in [0,T]$, 有 $y_t^1 \le y_t^2$.

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^1 解 --- 证明思路

借鉴 [Briand et al.(2003)] 的证明方法.

惟一性

1. 假设存在两对 L^1 解 $(y_t,z_t)_{t\in[0,T]}$ 和 $(y'_t,z'_t)_{t\in[0,T]}$;
2. 作差得 $\hat{y}_\cdot=y_\cdot-y'_\cdot, \hat{z}_\cdot=z_\cdot-z'_\cdot, (\hat{y}_\cdot,\hat{z}_\cdot)\in\mathcal{S}^p\times \mathrm{M}^p$;
3. 利用 L^p 解的先验估计得 $\hat{y}_\cdot=0, \hat{z}_\cdot=0$.

存在性

1. g 不依赖于 z 时, 利用截断技术得到 L^1 解的存在性;
2. g 依赖于 z 时, 使用 Picard 迭代分区间构造压缩映射证明 L^1 解的存在性.

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^1 解 --- 证明思路

借鉴 [Briand et al.(2003)] 的证明方法.

惟一性

1. 假设存在两对 L^1 解 $(y_t, z_t)_{t\in[0,T]}$ 和 $(y'_t, z'_t)_{t\in[0,T]}$;
2. 作差得 $\hat{y}_. = y_. - y'_., \hat{z}_. = z_. - z'_., (\hat{y}_., \hat{z}_.) \in \mathcal{S}^p \times \mathrm{M}^p$;
3. 利用 L^p 解的先验估计得 $\hat{y}_. = 0, \hat{z}_. = 0$.

存在性

1. g 不依赖于 z 时, 利用截断技术得到 L^1 解的存在性;
2. g 依赖于 z 时, 使用 Picard 迭代分区间构造压缩映射证明 L^1 解的存在性.

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^1 解 --- 举例

例 3.4. [P37]: 终端时间有限 $0 \le T < +\infty$, 一维情况

$$g(t,y,z) = \frac{1}{\sqrt[3]{t}}\left(e^{-y}\mathbf{1}_{y\le 0} + (1-y^2)\mathbf{1}_{y>0}\right) + \frac{t+1}{\sqrt[4]{t}}\left(|z|^2 \wedge \sqrt{|z|}\right) + \frac{1}{1+t^4}.$$

例 3.5. [P38]: 终端时间无限 $0 \le T \le +\infty$, 二维情况

$$g(t,y,z) = \frac{1}{1+t^2}\begin{bmatrix} e^{-y_1} + 3y_2 \\ -e^{y_2} - 3y_1 \end{bmatrix} + e^{-t}\begin{bmatrix} \sin|z_1| \\ \sin|z_2| \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{-t}\sin t \\ te^{-t} \end{bmatrix}.$$

g 满足 (H1′), (H2) – (H6). $\forall \beta \in (\alpha, 1)$, BSDE (ξ, T, g) 存在惟一解 $(y_\cdot, z_\cdot) \in \mathcal{S}^\beta \times \mathrm{M}^\beta$.

L^p $(p>1)$ 空间中的表示定理及应用