Universidade do Minho
Escola de Engenharia
Departamento de Produção e Sistemas

# Caminho preferido bi-objectivo

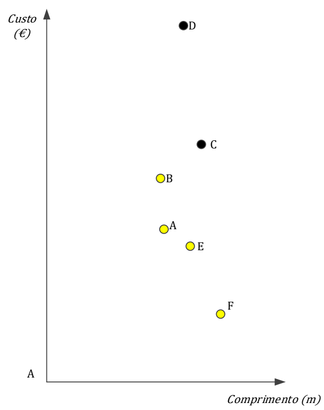
Filipe Alvelos
falvelos@dps.uminho.pt

Março 2014
Fevereiro, 2016

## Caminho preferido bi-objectivo

- Considere-se um problema em que se pretende instalar um cabo entre dois pontos. Existem seis caminhos alternativos, cada um deles envolvendo um determinado comprimento e um determinado custo (que se pretendem minimizar). Identifique as soluções dominadas.

| | Comprimento (m) | Custo (€) |
|---|---|---|
| A | 687 | 900 |
| B | 667 | 1200 |
| C | 906 | 1400 |
| D | 801 | 2100 |
| E | 841 | 800 |
| F | 1019 | 400 |



## Caminho preferido bi-objectivo

- Seleccionar um caminho tendo em conta dois objectivos (por exemplo custo e duração)
- Modelo

$$Min\ z_1 = \sum_{ij \in A} c_{ij} x_{ij}$$

$$Min\ z_2 = \sum_{ij \in A} t_{ij} x_{ij}$$

$$sujeito\ a:$$

$$\sum_{j:ij \in A} x_{ij} - \sum_{j:ji \in A} x_{ji} = \begin{cases} 1, se\ i = o \\ 0, se\ i \neq d, i \neq d\ , \forall i \in N \\ -1, se\ i = d \end{cases}$$

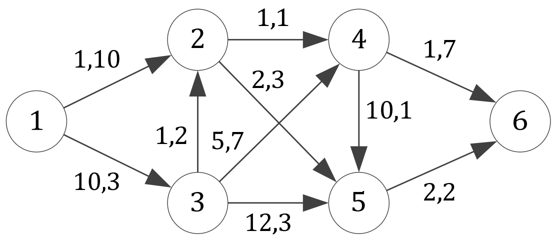
$$x_{ij} \in \{0,1\}, \forall ij \in A$$

em que a cada arco está associado um custo, $c_{ij}$, e uma duração, $t_{ij}$, $\forall ij \in A$.



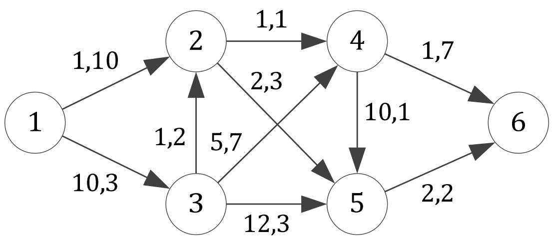
## Caminho preferido bi-objectivo

- Junto a cada arco é dado o seu custo (em €) e a sua duração (em horas), por esta ordem



## Caminho preferido bi-objectivo

- As duas funções objectivo são
- $Min\ z_1 = x_{12} + 10\ x_{13} + x_{24} + 2\ x_{25} + x_{32} + 5\ x_{34} + 12\ x_{35} + 10\ x_{45} + x_{46} + 2\ x_{56}$
- $Min\ z_2 = 10\ x_{12} + 3\ x_{13} + x_{24} + 3\ x_{25} + 2\ x_{32} + 7\ x_{34} + 3\ x_{35} + x_{45} + 7\ x_{46} + 2\ x_{56}$






## Caminho preferido bi-objectivo

- Tipicamente os objectivos são conflitusos e portanto não existe um caminho óptimo, mas um caminho preferido escolhido de entre o conjunto de caminhos eficientes
- Um caminho é eficiente se não existe nenhum outro caminho melhor ou igual nos dois objectivos
- A optimização tem como papel identificar
  - um caminho preferido de acordo com informação prestada pelo agente de decisão ou
  - um (sub)conjunto de soluções eficientes para posterior análise por parte do agente de decisão
- Optimização multi-critério pode ser dividida em dois grupos
  - Nos problemas multi-atributo as soluções possíveis são conhecidas explicitamente
  - Nos problemas multi-objectivo as soluções possíveis são conhecidas implicitamente

## Caminho preferido bi-objectivo

- **Método de agregação por pesos** para obter uma solução preferida
- Problema é transformado num problema de objectivo único por atribuição de um peso a cada função objectivo original

$$Min\ z = \lambda_1 \sum_{ij \in A} c_{ij} x_{ij} + \lambda_2 \sum_{ij \in A} t_{ij} x_{ij}$$

$$sujeito\ a:$$

$$\sum_{j:ij \in A} x_{ij} - \sum_{j:ji \in A} x_{ji} = \begin{cases} 1, se\ i = o \\ 0, se\ i \neq d, i \neq d \\ -1, se\ i = d \end{cases}, \forall i \in N$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \forall ij \in A$$

- O agente de decisão está disposto a pagar mais $\lambda_2$ € por reduzir a duração em $\lambda_1$ horas (cada hora vale $\lambda_2/\lambda_1$€)
- Exemplo, $\lambda_2 \backslash \lambda_1 = 5$ (cada hora vale 5€), solução com custo 5 e duração 10 e solução com custo 10 e duração 9 são equivalentes (assumindo que o agente de decisão se revê nestes pesos)

## Caminho preferido bi-objectivo

- Custo (em €) é dez vezes mais importante do que o comprimento (em m)

| | Comprimento (m) | Custo (€) | |
|---|---|---|---|
| | 1 | 10 | Total |
| A | 687 | 900 | 9687 |
| B | 667 | 1200 | 12667 |
| C | 906 | 1400 | 14906 |
| D | 801 | 2100 | 21801 |
| E | 841 | 800 | 8841 |
| F | 1019 | 400 | 5019 |

## Caminho preferido bi-objectivo

- **Método de geração através de pesos** para obter um conjunto de soluções eficientes
- Primeiro passo: normalizar
  - $z^{norm} = \frac{z^{orig} - z^{min}}{z^{max} - z^{min}}$
    em que $z^{max}$ e $z^{min}$ são o maior e menor valores, respectivamente, que a função objectivo em causa podem tomar considerando a optimização isolada de cada objectivo
  - No exemplo,
    - $z_1^n = \frac{x_{12} + 10\,x_{13} + x_{24} + 2\,x_{25} + x_{32} + 5\,x_{34} + 12\,x_{35} + 10\,x_{45} + x_{46} + 2\,x_{56} - 3}{24 - 3}$
    - $z_2^n = \frac{10\,x_{12} + 3\,x_{13} + x_{24} + 3\,x_{25} + 2\,x_{32} + 7\,x_{34} + 3\,x_{35} + x_{45} + 7\,x_{46} + 2\,x_{56} - 8}{18 - 8}$
- Segundo passo, decidir quantas optimizações efectuar ($q$)
- Optimizar $q$ modelos de $\lambda_1 = 0$ até $\lambda_1 = 1$ com um incremento de $\frac{1}{(q-1)}$. O peso da segunda função objectivo é dado por $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$



## Caminho preferido bi-objectivo

| $\lambda_1$ | $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$ | Custo | Duração | Caminho |
|---|---|---|---|---|
| 0.00 | 1.00 | 24 | 8 | 1-3-5-6 |
| 0.11 | 0.89 | 24 | 8 | 1-3-5-6 |
| 0.22 | 0.78 | 24 | 8 | 1-3-5-6 |
| 0.33 | 0.67 | 15 | 10 | 1-3-2-5-6 |
| 0.44 | 0.56 | 15 | 10 | 1-3-2-5-6 |
| 0.55 | 0.45 | 5 | 15 | 1-2-5-6 |
| 0.66 | 0.34 | 5 | 15 | 1-2-5-6 |
| 0.77 | 0.23 | 3 | 18 | 1-2-4-6 |
| 0.88 | 0.12 | 3 | 18 | 1-2-4-6 |
| 0.99 | 0.01 | 3 | 18 | 1-2-4-6 |

# Caminho preferido bi-objectivo

- **Distância ao ideal –** método para indicar uma solução preferida

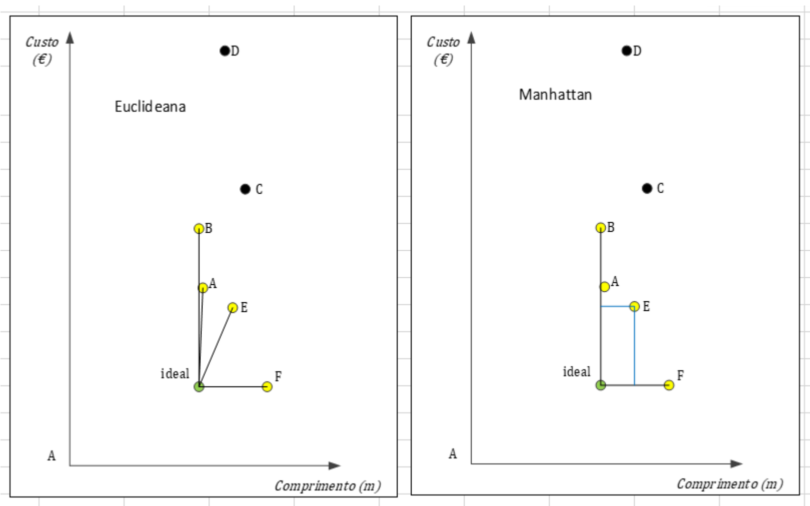
| | comp | custo | métrica Euclideana | métrica de Manhattan |
|---|---|---|---|---|
| A | 687 | 900 | 500 | 520 |
| B | 667 | 1200 | 800 | 800 |
| C | 906 | 1400 | 1028 | 1239 |
| D | 801 | 2100 | 1705 | 1834 |
| E | 841 | 800 | 436 | 574 |
| F | 1019 | 400 | 352 | 352 |
| ideal | **667** | **400** | 352 | 352 |

$\sqrt{(687-667)^2+(900-400)^2}$

$(687-667)+(900-400)$



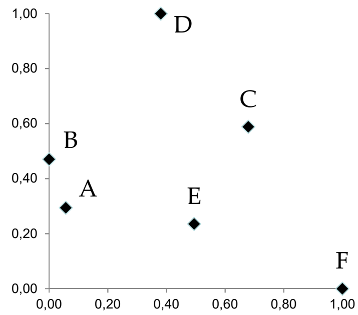
# Caminho preferido bi-objectivo



# Caminho preferido bi-objectivo

- Com atributos normalizados

| | Comprimento | Custo | Distância ao ideal (métrica de Manhattan) |
|---|---|---|---|
| A | 0.06 | 0.29 | **0.35** |
| B | 0.00 | 0.47 | 0.47 |
| C | 0.68 | 0.59 | 1.27 |
| D | 0.38 | 1.00 | 1.38 |
| E | 0.49 | 0.24 | 0.73 |
| F | 1.00 | 0.00 | 1.00 |
| Ideal | 0 | 0 | |






# Caminho preferido bi-objectivo

- **Distância ao ideal (métrica de Manhattan)** – método para indicar uma solução preferida
- $s_1$ - distância ao ideal da primeira função objectivo
- $s_2$ - distância ao ideal da segunda função objectivo

$$Min\ s_1 + s_2$$

$$sujeito\ a:$$

$$x\ \acute{e}\ um\ caminho$$

$$s_1 = x_{12} + 10\,x_{13} + x_{24} + 2\,x_{25} + x_{32} + 5\,x_{34} + 12\,x_{35} + 10\,x_{45} + x_{46} + 2\,x_{56} - 3$$

$$s_2 = 10\,x_{12} + 3\,x_{13} + x_{24} + 3\,x_{25} + 2\,x_{32} + 7\,x_{34} + 3\,x_{35} + x_{45} + 7\,x_{46} + 2\,x_{56} - 8$$

$$s_1, s_2 \geq 0$$

## Caminho preferido bi-objectivo

- **Optimização lexicográfica**
- Agente de decisão estabelece hierarquia para os objectivos
- Uma solução com melhor valor do que outra no primeiro objectivo é preferível a essa outra quaisquer que sejam os valores de ambas nos restantes objectivos. Se duas soluções tiverem o mesmo valor no primeiro objectivo, o raciocínio anterior aplica-se ao segundo objectivo e assim sucessivamente
- O primeiro problema a resolver é

$$\begin{array}{l} Min\ z_1 = f_1(x) \\ sujeito\ a: \\ x \in X \end{array}$$

representando por $z_1^*$ o valor óptimo deste problema o segundo problema a resolver é

$$\begin{array}{c} Min\ z_2 = f_2(x) \\ sujeito\ a: \\ x \in X \\ f(x) = z_1^* \end{array}$$



## Caminho preferido bi-objectivo

Consideram-se seis possíveis configurações para a expansão de uma rede de telecomunicações e dois objectivos: minimizar o custo estimado da expansão da rede (em €) e a duração dessa expansão (em meses). Na tabela seguinte apresentam-se os valores de cada um dos objectivos para cada uma das configurações.

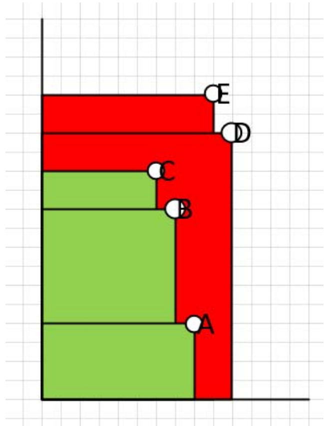
| Configuração | Custo (€) | Duração (meses) |
|---|---|---|
| A | 200 | 8 |
| B | 500 | 7 |
| C | 600 | 6 |
| D | 700 | 10 |
| E | 800 | 9 |

**a)** Indique as configurações eficientes e, para as restantes, indique quais as configurações que as dominam.

**b)** Considerando que o agente de decisão atribui um valor de 300€ a cada mês que a construção demora, qual a solução preferida?

**c)** Indique a solução mais próxima da solução ideal após proceder à normalização dos objectivos.

# Caminho preferido bi-objectivo




| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| b) | A | 200 | 8 | 2400 | 2600 | | |
| | B | 500 | 7 | 2100 | 2600 | | |
| | C | 600 | 6 | 1800 | 2400 | | |
| | D | 700 | 10 | 3000 | 3700 | | |
| | E | 800 | 9 | 2700 | 3500 | | |
| | | | | | | | |
| | | | | normalização | | euclideana | manhanttan |
| c) | A | 200 | 8 | 0,00 | 0,50 | 0,50 | 0,50 |
| | B | 500 | 7 | 0,50 | 0,25 | 0,56 | 0,75 |
| | C | 600 | 6 | 0,67 | 0,00 | 0,67 | 0,67 |
| | D | 700 | 10 | 0,83 | 1,00 | 1,30 | 1,83 |
| | E | 800 | 9 | 1,00 | 0,75 | 1,25 | 1,75 |
| | min | 200 | 6 | | | | |
| | max | 800 | 10 | | | | |