Exemplo: O Princípio de indução estrutural para C (associado à definição indutiva do conjunto C no exemplo inicial) é o seguinte:

Seja $P(n)$ uma condição sobre $n \in C$.

Se:

1. $P(0)$;
2. se $P(k)$, então $P(k+2)$, para todo o $k \in C$;

então $P(n)$, para todo o $n \in C$.

Definição: A função $var : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{V}^{CP})$, que a cada fórmula faz corresponder o conjunto das variáveis proposicionais que nela ocorrem, é definida, por recursão estrutural em fórmulas do CP, do seguinte modo:

a) $var(\bot) = \emptyset$;

b) $var(p) = \{p\}$, para todo $p \in \mathcal{V}^{CP}$;

c) $var(\neg\varphi) = var(\varphi)$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$;

d) $var(\varphi \Box \psi) = var(\varphi) \cup var(\psi)$, para todo $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$.

Definição: A função $subf : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{F}^{CP})$ é definida, por recursão estrutural em fórmulas do CP, do seguinte modo:

a) $subf(\varphi) = \{\varphi\}$, para todo $\varphi \in \mathcal{V}^{CP} \cup \{\bot\}$;

b) $subf(\neg\varphi) = \{\neg\varphi\} \cup subf(\varphi)$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$;

c) $subf(\varphi \Box \psi) = \{\varphi \Box \psi\} \cup subf(\varphi) \cup subf(\psi)$, para todo $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$.

Dadas fórmulas φ e ψ, diremos que φ é uma *subfórmula* de ψ quando $\varphi \in subf(\psi)$.

Definição: Sejam p uma variável proposicional e $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$.
A função $[\psi/p] : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{F}^{CP}$, que a cada fórmula φ faz corresponder $\varphi[\psi/p]$, a fórmula que resulta de φ por *substituição* das ocorrências de p por ψ, é definida, por recursão estrutural em fórmulas do CP, do seguinte modo:

a) $\bot[\psi/p] = \bot$;

b) $p_i[\psi/p] = \begin{cases} \psi & \text{se } p_i = p \\ p_i & \text{se } p_i \neq p \end{cases}$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$;

c) $(\neg\varphi_1)[\psi/p] = \neg\varphi_1[\psi/p]$, para todo $\varphi_1 \in \mathcal{F}^{CP}$;

d) $(\varphi_1 \Box \varphi_2)[\psi/p] = \varphi_1[\psi/p] \Box \varphi_2[\psi/p]$, para todo $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$.

Teorema (Princípio de indução estrutural para fórmulas do CP):
Seja $P(\varphi)$ uma condição sobre $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$.
Se:

a) $P(\bot)$;

b) $P(p)$, para todo $p \in \mathcal{V}^{CP}$;

c) $P(\psi) \implies P(\neg\psi)$, para todo $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$;

d) $P(\psi_1)$ e $P(\psi_2) \implies P(\psi_1 \Box \psi_2)$, para todo $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e para todo $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$;

então $P(\varphi)$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$.

Definição: Uma função $v : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \{0, 1\}$ é uma *valoração* quando satisfaz as seguintes condições:

a) $v(\bot) = 0$,

b) $v(\neg\varphi) = f_\neg(v(\varphi))$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$,

c) $v(\varphi \Box \psi) = f_\Box(v(\varphi), v(\psi))$, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$ e para todo $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$,

onde $f_\neg, f_\wedge, f_\vee, f_\rightarrow, f_\leftrightarrow$ são as *funções boleanas* determinadas pelas *tabelas de verdade* dos respetivos conetivos; designadamente:

Definição:
1. Uma fórmula φ é uma *tautologia* quando, para qualquer valoração v, $v(\varphi) = 1$.
2. Uma fórmula φ é uma *contradição* quando, para qualquer valoração v, $v(\varphi) = 0$.

A notação $\models \varphi$ significará que φ é uma tautologia.
A notação $\not\models \varphi$ significará que φ não é uma tautologia.

1. φ é tautologia se e só se $\neg\varphi$ é contradição;
2. φ é contradição se e só se $\neg\varphi$ é tautologia.

Proposição: As seguintes equivalências lógicas são válidas.

$(\varphi \vee \psi) \vee \sigma \Leftrightarrow \varphi \vee (\psi \vee \sigma)$ $\quad$ $(\varphi \wedge \psi) \wedge \sigma \Leftrightarrow \varphi \wedge (\psi \wedge \sigma)$
(*associatividade*)

$\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \psi \vee \varphi$ $\quad$ $\varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \psi \wedge \varphi$
(*comutatitvidade*)

$\varphi \vee \varphi \Leftrightarrow \varphi$ $\quad$ $\varphi \wedge \varphi \Leftrightarrow \varphi$
(*idempotência*)

$\varphi \vee \bot \Leftrightarrow \varphi$ $\quad$ $\varphi \wedge \neg\bot \Leftrightarrow \varphi$
(*elemento neutro*)

$\varphi \vee \neg\bot \Leftrightarrow \neg\bot$ $\quad$ $\varphi \wedge \bot \Leftrightarrow \bot$
(*elemento absorvente*)

$\varphi \vee (\psi \wedge \sigma) \Leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \sigma)$ $\quad$ $\varphi \wedge (\psi \vee \sigma) \Leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \sigma)$
(*distributividade*)

$\neg(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi$ $\quad$ $\neg(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi$
(*leis de De Morgan*)

$\neg\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi$ $\quad$ $\varphi \rightarrow \psi \Leftrightarrow \neg\psi \rightarrow \neg\varphi$
(*lei da dupla negação*) $\quad$ (*contrarrecíproco*)

$\varphi \leftrightarrow \psi \Leftrightarrow (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$ $\quad$ $\varphi \rightarrow \psi \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \psi$

$\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \neg\varphi \rightarrow \psi$ $\quad$ $\varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$

$\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi \rightarrow \bot$ $\quad$ $\bot \Leftrightarrow \varphi \wedge \neg\varphi$

(*expressão de um conetivo em termos de outros conetiv*

Teorema (Substituição): Sejam $p \in \mathcal{V}^{CP}$ e $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$. Então $\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2$ sse para todo $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\psi[\varphi_1/p] \Leftrightarrow \psi[\varphi_2/p]$.

Seja $X \subseteq \{\bot, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ um conjunto de conetivos.

X diz-se *completo* quando, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, existe $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$ tal que $\varphi \Leftrightarrow \psi$ e todos os conetivos de ψ pertencem a X.

Proposição: Os conjuntos de conetivos $\{\rightarrow, \neg\}$, $\{\rightarrow, \bot\}$, $\{\wedge, \neg\}$ e $\{\vee, \neg\}$ são completos.

Definição: Uma fórmula proposicional diz-se um *literal* se for uma variável proposicional ou se for a negação de uma de variável proposicional.

i) $(l_{11} \vee \ldots \vee l_{1m_1}) \wedge \ldots \wedge (l_{n1} \vee \ldots \vee l_{nm_n})$ **FNC**

ii) $(l_{11} \wedge \ldots \wedge l_{1m_1}) \vee \ldots \vee (l_{n1} \wedge \ldots \wedge l_{nm_n})$ **FND**

Mais geralmente, conjunções de literais e disjunções de literais são, em simultâneo, formas normais conjuntivas e disjuntivas.

Todo o literal l é simultaneamente uma FNC e uma FND (nas

Proposição: Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$:
(i) existem FNC's logicamente equivalentes a φ; e
(ii) existem FND's logicamente equivalentes a φ.

p_1	p_2	φ
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

$\varphi^d = (p_1 \wedge \neg p_2) \vee (\neg p_1 \wedge p_2)$
é uma FND logicamente equivalente a φ.

p_1	p_2	φ
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

$\varphi^c = (\neg p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_1 \vee p_2)$
é uma FNC logicamente equivalente a φ

1. Dada uma fórmula do CP φ, dizemos que *v satisfaz φ* (ou que *v é modelo de φ*), e escrevemos $v \models \varphi$, quando $v(\varphi) = 1$.

   Quando *v não satisfaz φ* (*i.e.*, quando $v(\varphi) = 0$), escrevemos $v \not\models \varphi$.

2. Dado um conjunto de fórmulas do CP Γ, dizemos que *v satisfaz Γ* (ou que *v é modelo de Γ*), e escrevemos $v \models \Gamma$, quando v satisfaz todas as fórmulas de Γ.

   Quando *v não satisfaz Γ* (*i.e.*, quando existe $\varphi \in \Gamma$ t.q. $v \not\models \varphi$ ou, equivalentemente, quando existe $\varphi \in \Gamma$ t.q. $v(\varphi) = 0$) escrevemos $v \not\models \Gamma$.

para toda a valoração v, $v \models \emptyset$.

1. Γ diz-se um conjunto (*semanticamente*) *consistente* ou *satisfazível* quando alguma valoração satisfaz Γ.
2. Γ diz-se um conjunto (*semanticamente*) *inconsistente* ou *insatisfazível* quando não há valorações que satisfaçam Γ.

Proposição: Sejam Γ e Δ conjuntos de fórmulas do CP tais que $\Gamma \subseteq \Delta$. Então:

i) se Δ é consistente, então Γ é consistente;

ii) se Γ é inconsistente, então Δ é inconsistente.

1. Dizemos que *φ é consequência semântica de Γ*, e escrevemos $\Gamma \models \varphi$, quando, para toda a valoração v, se $v \models \Gamma$, então $v \models \varphi$.
2. Escrevemos $\Gamma \not\models \varphi$ quando *φ não é consequência semântica de Γ*, *i.e.*, quando para alguma valoração v se tem $v \models \Gamma$ e, no entanto, $v \not\models \varphi$.

1. $\Gamma \models \varphi$ sse para toda a valoração v, se para todo $\psi \in \Gamma$, $v(\psi) = 1$, então $v(\varphi) = 1$.
2. $\Gamma \not\models \varphi$ sse para alguma valoração v se tem, para todo $\psi \in \Gamma$, $v(\psi) = 1$, bem como $v(\varphi) = 0$.

a) Se $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \models \varphi$.

b) Se $\Gamma \models \varphi$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Delta \models \varphi$.

c) Se $\Gamma \models \varphi$ e $\Delta, \varphi \models \psi$, então $\Delta, \Gamma \models \psi$.

d) $\Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$ se e só se $\Gamma, \varphi \models \psi$.

e) Se $\Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$ e $\Gamma \models \varphi$, então $\Gamma \models \psi$.

$\Gamma \models \varphi$ se e só se $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é semanticamente inconsistente.

DNP

de φ e $\varphi \rightarrow \psi$ podemos concluir ψ.

$$\dfrac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$$

se assumindo φ por hipótese podemos concluir ψ, então podemos concluir $\varphi \rightarrow \psi$.

$$\dfrac{\begin{matrix}\cancel{\varphi}\\ \vdots \\ \psi\end{matrix}}{\varphi \rightarrow \psi}$$

Neste raciocínio, φ é uma *hipótese temporária* usada para concluir ψ.

A notação $\cancel{\varphi}$ reflete o facto de que a conclusão $\varphi \rightarrow \psi$ *já não depende* da hipótese temporária φ.

Utilizemos a notação $\begin{matrix}\varphi\\ \vdots \\ \psi\end{matrix}$ para simbolizar a possibilidade de concluir ψ a partir de φ.

Regras de Introdução $\quad$ *Regras de Eliminação*

$$\dfrac{\begin{matrix}\cancel{\varphi}\\ \vdots \\ \psi\end{matrix}}{\varphi \rightarrow \psi} \rightarrow I \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \varphi\end{matrix} \quad \begin{matrix}\vdots \\ \varphi \rightarrow \psi\end{matrix}}{\psi} \rightarrow E$$

Regras de Introdução $\quad$ *Regras de Eliminação*

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \varphi\end{matrix} \quad \begin{matrix}\vdots \\ \psi\end{matrix}}{\varphi \wedge \psi} \wedge I \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \varphi \wedge \psi\end{matrix}}{\varphi} \wedge_1 E \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \varphi \wedge \psi\end{matrix}}{\psi} \wedge_2 E$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\cancel{\varphi}\\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{\neg\varphi} \neg I \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \varphi\end{matrix} \quad \begin{matrix}\vdots \\ \neg\varphi\end{matrix}}{\bot} \neg E$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\cancel{\neg\varphi}\\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{\varphi} (RAA) \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \bot\end{matrix}}{\varphi} (\bot)$$

Regras de Introdução $\quad$ *Regras de Eliminação*

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \varphi\end{matrix}}{\varphi \vee \psi} \vee_1 I \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \psi\end{matrix}}{\varphi \vee \psi} \vee_2 I \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \varphi \vee \psi\end{matrix} \quad \begin{matrix}\cancel{\varphi}\\ \vdots \\ \sigma\end{matrix} \quad \begin{matrix}\cancel{\psi}\\ \vdots \\ \sigma\end{matrix}}{\sigma} \vee E$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\cancel{\varphi}\\ \vdots \\ \psi\end{matrix} \quad \begin{matrix}\cancel{\psi}\\ \vdots \\ \varphi\end{matrix}}{\varphi \leftrightarrow \psi} \leftrightarrow I \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \varphi\end{matrix} \quad \begin{matrix}\vdots \\ \varphi \leftrightarrow \psi\end{matrix}}{\psi} \leftrightarrow_1 E \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \psi\end{matrix} \quad \begin{matrix}\vdots \\ \varphi \leftrightarrow \psi\end{matrix}}{\varphi} \leftrightarrow_2 E$$

Definição: O *conjunto $\mathcal{D}^{DNP}$ das derivações de* DNP é o menor conjunto X, de árvores finitas de fórmulas, com folhas possivelmente canceladas, tal que:

a) para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, a árvore cujo único nodo é φ pertence a X;

b) X é *fechado* para cada uma das regras de inferência de DNP; por exemplo, X é fechado para as regras $\rightarrow E$ e $\rightarrow I$ quando as seguintes condições são satisfeitas (respetivamente):

i) $\begin{matrix}D_1\\ \varphi\end{matrix} \in X$ e $\begin{matrix}D_2\\ \varphi \rightarrow \psi\end{matrix} \in X \implies \dfrac{\begin{matrix}D_1\\ \varphi\end{matrix} \quad \begin{matrix}D_2\\ \varphi \rightarrow \psi\end{matrix}}{\psi} \rightarrow E \in X$;

ii) $\begin{matrix}D\\ \psi\end{matrix} \in X \implies \dfrac{\begin{matrix}\cancel{\varphi}\\ D\\ \psi\end{matrix}}{\varphi \rightarrow \psi} \rightarrow I \in X$

- a raiz é chamada a *conclusão* de D;
- as folhas são chamadas as *hipóteses* de D;
- as folhas canceladas são chamadas as *hipóteses canceladas* de D;
- as folhas não canceladas são chamadas as *hipóteses não canceladas* de D.

- Diremos que D é uma *derivação de φ a partir de* um conjunto de fórmulas Γ quando φ é a conclusão de D e o conjunto das hipóteses não canceladas de D é um subconjunto de Γ.
- Diremos que D é uma *demonstração de φ* quando D é uma derivação de φ a partir do conjunto vazio.

Uma fórmula φ diz-se *derivável a partir de* um conjunto de fórmulas Γ ou uma *consequência sintática de* Γ (notação: $\Gamma \vdash \varphi$) quando existem derivações em DNP de φ a partir de Γ.

Escreveremos $\Gamma \nvdash \varphi$ para denotar que φ não é derivável a partir de Γ.

Uma fórmula φ diz-se um *teorema* de DNP (notação: $\vdash \varphi$) quando existe uma demonstração de φ em DNP.

Escreveremos $\nvdash \varphi$ para denotar que φ não é teorema de DNP.

Proposição: Para toda a fórmula proposicional φ, φ é teorema de DNP se e só se $\emptyset \vdash \varphi$.

Definição: Seja Γ um conjunto de fórmulas proposicionais.

Γ diz-se *sintaticamente inconsistente* quando $\Gamma \vdash \bot$.

Γ dir-se-á *sintaticamente consistente* no caso contrário, i.e. quando $\Gamma \nvdash \bot$, ou seja, quando não existem derivações de $\bot$ a partir de Γ.

As seguintes afirmações são equivalentes:

a) Γ é sintaticamente inconsistente;
b) para algum $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \vdash \neg\varphi$;
c) para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\Gamma \vdash \varphi$.

a) Se $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \vdash \varphi$.
b) Se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Delta \vdash \varphi$.
c) Se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Delta, \varphi \vdash \psi$, então $\Delta, \Gamma \vdash \psi$.
d) $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ se e só se $\Gamma, \varphi \vdash \psi$.
e) Se $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ e $\Delta \vdash \varphi$, então $\Gamma, \Delta \vdash \psi$.

Teorema (*Correção*): Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ e para todo $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$,

se $\Gamma \vdash \varphi$, então $\Gamma \models \varphi$.

Lema: Para todo $D \in \mathcal{D}^{DNP}$, se D é uma derivação de φ a partir de Γ, então $\Gamma \models \varphi$.

De facto, do Teorema da Correção segue que

$$\Gamma \not\models \varphi \Longrightarrow \Gamma \nvdash \varphi,$$

o que significa que, para mostrar que não existem derivações em DNP de uma fórmula φ a partir de um conjunto de fórmulas Γ, basta mostar que φ não é consequência semântica de Γ.

Proposição: Seja Γ um conjunto de fórmulas proposicionais. Γ é sintaticamente consistente sse Γ é semanticamente consistente.

Teorema (Completude): Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ e para todo $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$,

se $\Gamma \models \varphi$, então $\Gamma \vdash \varphi$.

Teorema (Adequação): Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ e para todo $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$,

$\Gamma \vdash \varphi$ se e só se $\Gamma \models \varphi$.

Corolário: Para toda a fórmula proposicional φ, φ é um teorema de DNP se e só se φ é uma tautologia.

Definição: O conjunto $\mathcal{T}_L$ é o menor conjunto de palavras sobre $\mathcal{A}_L$ que satisfaz as seguintes condições:
a) para todo $x \in \mathcal{V}$, $x \in \mathcal{T}_L$;
b) para toda a constante c de L, $c \in \mathcal{T}_L$;
c) para todo o símbolo de função f de L, de aridade $n \geq 1$,

$$t_1 \in \mathcal{T}_L \text{ e ... e } t_n \in \mathcal{T}_L \implies f(t_1, ..., t_n) \in \mathcal{T}_L, \text{ para todo } t_1, ..., t_n \in (\mathcal{A}_L)^*.$$

Aos elementos de $\mathcal{T}_L$ chamaremos *termos de tipo L* ou *L-termos*, ou simplesmente termos (quando for claro qual o tipo de linguagem subententendido).

Teorema (Indução Estrutural em *L*-Termos):
Seja $P(t)$ uma condição sobre um L-termo t.
Se:
a) para todo $x \in \mathcal{V}$, $P(x)$;
b) para todo $c \in \mathcal{C}$, $P(c)$;
c) para todo $f \in \mathcal{F}$, de aridade $n \geq 1$, e para todo $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$,
$$P(t_1) \text{ e ... e } P(t_n) \implies P(f(t_1, ..., t_n));$$
então, para todo $t \in \mathcal{T}_L$, $P(t)$.

Conjunto de variáveis
a) $VAR(x) = \{x\}$, para todo $x \in \mathcal{V}$;
b) $VAR(c) = \emptyset$, para todo $c \in \mathcal{C}$;
c) $VAR(f(t_1, ..., t_n)) = \bigcup_{i=1}^{n} VAR(t_i)$,
para todo $f \in \mathcal{F}$, de aridade $n \geq 1$, e para todo $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$.

Conjunto de subtermos:
a) $subt(x) = \{x\}$, para todo $x \in \mathcal{V}$;
b) $subt(c) = \{c\}$, para todo $c \in \mathcal{C}$;
c) $subt(f(t_1, ..., t_n)) = \{f(t_1, ..., t_n)\} \cup \bigcup_{i=1}^{n} subt(t_i)$,
para todo $f \in \mathcal{F}$, de aridade $n \geq 1$, e para todo $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$.

Substituição
a) $y[t/x] = \begin{cases} t, & se \ \ y = x \\ y, & se \ \ y \neq x \end{cases}$, para todo $y \in \mathcal{V}$;
b) $c[t/x] = c$, para todo $c \in \mathcal{C}$;
c) $f(t_1, ..., t_n)[t/x] = f(t_1[t/x], ..., t_n[t/x])$,
para todo $f \in \mathcal{F}$, de aridade $n \geq 1$, e para todo $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$.

$R(t_1, ..., t_n)$, *L-fórmula atómica*.

Definição: O conjunto $\mathcal{F}_L$ é o menor conjunto de palavras sobre $\mathcal{A}_L$ que satisfaz as seguintes condições:
a) $\varphi \in \mathcal{F}_L$, para toda a L-fórmula atómica φ;
b) $\bot \in \mathcal{F}_L$;
c) $\varphi \in \mathcal{F}_L \implies (\neg\varphi) \in \mathcal{F}_L$, para todo $\varphi \in (\mathcal{A}_L)^*$;
d) $\varphi \in \mathcal{F}_L$ e $\psi \in \mathcal{F}_L \implies (\varphi \square \psi) \in \mathcal{F}_L$,
para todo $\square \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$ e para todo $\varphi, \psi \in (\mathcal{A}_L)^*$;
e) $\varphi \in \mathcal{F}_L \implies (Qx\,\varphi) \in \mathcal{F}_L$,
para todo $Q \in \{\exists, \forall\}$, para todo $x \in \mathcal{V}$ e para todo $\varphi \in (\mathcal{A}_L)^*$.

Aos elementos de $\mathcal{F}_L$ chamaremos *fórmulas de tipo L* ou *L-fórmulas*, ou simplesmente fórmulas (quando for claro o tipo de linguagem subentendido).

Teorema (Indução Estrutural em *L*-Fórmulas):
Seja $P(\varphi)$ uma condição sobre uma L-fórmula φ.
Se:
a) $P(\psi)$, para toda a L-fórmula atómica ψ;
b) $P(\bot)$;
c) $P(\psi) \implies P(\neg\psi)$, para todo $\psi \in \mathcal{F}_L$;
d) $P(\psi_1)$ e $P(\psi_2) \implies P(\psi_1 \square \psi_2)$,
para todo $\square \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}, \psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}_L$;
e) $P(\psi) \implies P(Qx\,\psi)$, para todo $Q \in \{\exists, \forall\}, x \in \mathcal{V}, \psi \in \mathcal{F}_L$;
então $P(\varphi)$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}_L$.

Conjunto de subfórmulas de uma L-fórmula
a) $subf(\psi) = \{\psi\}$, para toda a L-fórmula atómica ψ;
b) $subf(\bot) = \{\bot\}$;
c) $subf(\neg\psi) = subf(\psi) \cup \{\neg\psi\}$,
para todo $\psi \in \mathcal{F}_L$;
d) $subf(\psi_1 \square \psi_2) = subf(\psi_1) \cup subf(\psi_2) \cup \{\psi_1 \square \psi_2\}$,
para todo $\square \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$, $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}_L$;
e) $subf(Qx\,\psi) = subf(\psi) \cup \{Qx\,\psi\}$,
para todo $Q \in \{\exists, \forall\}$, $x \in \mathcal{V}$, $\psi \in \mathcal{F}_L$.

Definição:

Seja φ uma L-fórmula e seja $Qx\,\psi$ uma subfórmula de φ, onde $Q \in \{\exists, \forall\}$, $x \in \mathcal{V}$ e $\psi \in \mathcal{F}_L$.

O *alcance* desta ocorrência do quantificador Qx em φ é a L-fórmula ψ.

Numa L-fórmula φ, uma ocorrência (em subfórmulas atómicas de φ) de uma variável x diz-se *livre* quando x não está no alcance de nenhuma ocorrência de um quantificador Qx (com $Q \in \{\exists, \forall\}$); caso contrário, essa ocorrência de x diz-se *ligada*.

Substituição das ocorrências livres de x por um L-termo
a) $R(t_1, ..., t_n)[t/x] = R(t_1[t/x], ..., t_n[t/x])$,
para todo $R \in \mathcal{R}$, de aridade n, e para todo $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$;
b) $\bot\,[t/x] = \bot$;
c) $(\neg\psi)[t/x] = \neg\psi[t/x]$,
para todo $\psi \in \mathcal{F}_L$;
d) $(\psi_1 \square \psi_2)[t/x] = \psi_1[t/x] \square \psi_2[t/x]$,
para todo $\square \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$, $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}_L$;
e) $(Qy\,\psi)[t/x] = \begin{cases} Qy\,\psi & \text{se } \ y = x \\ Qy\,\psi[t/x] & \text{se } \ y \neq x \end{cases}$,
para todo $Q \in \{\exists, \forall\}$, $y \in \mathcal{V}$, $\psi \in \mathcal{F}_L$.

Definição: Sejam x uma variável, t um L-termo e φ uma L-fórmula. Diz-se que *x está livre para t em φ* ou que *x é substituível (sem captura de variáveis) por t em φ* quando para todas as ocorrências livres de x em φ no alcance de algum quantificador Qy, $y \notin VAR(t)$.

1 Se $x \notin LIV(\varphi)$, então x está livre para t em φ.

2 Se $VAR(t) = \emptyset$, então x está livre para t em φ.

Se $x \notin LIV(\varphi)$, então $\varphi[t/x] = \varphi$.

Definição: Uma L-fórmula φ diz-se uma *sentença de tipo L* ou uma *fórmula fechada de tipo L* (abreviadamente, uma *L-sentença* ou uma *L-fórmula fechada*), quando $LIV(\varphi) = \emptyset$.

1 x está livre para t em φ;

2 $\varphi[t/x] = \varphi$.

Definição: Seja E uma L-estrutura. Uma função $a : \mathcal{V} \longrightarrow dom(E)$ (do conjunto $\mathcal{V}$ das variáveis de primeira ordem para o domínio de E) diz-se uma *atribuição* em E.

O *valor* de t em E para a é o elemento de D, notado por $t[a]_E$ ou por $t[a]$ (quando é claro qual a estrutura que deve ser considerada), definido, por recursão estrutural em L-termos, do seguinte modo:
a) $x[a] = a(x)$, para todo $x \in \mathcal{V}$;
b) $c[a] = \overline{c}$, para todo $c \in \mathcal{C}$;
c) $f(t_1, ..., t_n)[a] = \overline{f}(t_1[a], ..., t_n[a])$, para todo $f \in \mathcal{F}$ de aridade $n \geq 1$ e para todo $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$.

Proposição: Sejam a_1 e a_2 duas atribuições numa L-estrutura $E = (D, \overline{\ })$ e seja t um L-termo.
Se $a_1(x) = a_2(x)$, para todo $x \in VAR(t)$, então $t[a_1] = t[a_2]$.

Escrevemos $a\binom{x}{d}$ para a atribuição $a' : \mathcal{V} \longrightarrow dom(E)$ em E definida por:

$$\text{para todo } \ y \in \mathcal{V}, \quad a'(y) = \begin{cases} d & \text{se } \ y = x \\ a(y) & \text{se } \ y \neq x \end{cases}.$$

Proposição: Seja a uma atribuição numa L-estrutura. Seja x uma variável e sejam t_0 e t_1 L-termos . Então,

$$t_0[t_1/x][a] = t_0[a\tbinom{x}{t_1[a]}].$$

a) $(\exists x\varphi)[a] = 0$ sse para todo $d \in dom(E)$, $\varphi[a\binom{x}{d}] = 0$;
b) $(\forall x\varphi)[a] = 0$ sse para algum $d \in dom(E)$, $\varphi[a\binom{x}{d}] = 0$;
c) $(\exists x\varphi)[a] = máximo\{\varphi[a\binom{x}{d}] : d \in D\}$;
d) $(\forall x\varphi)[a] = mínimo\{\varphi[a\binom{x}{d}] : d \in D\}$.

Dizemos que E *satisfaz* φ para a, escrevendo $E \models \varphi[a]$, quando $\varphi[a]_E = 1$.

Escrevemos $E \not\models \varphi[a]$ quando E não satisfaz φ para a, ou seja, quando $\varphi[a]_E = 0$.

a) $E \models \exists x\varphi[a]$ sse existe $d \in dom(E)$ t.q. $E \models \varphi[a\binom{x}{d}]$;
b) $E \models \forall x\varphi[a]$ sse $E \models \varphi[a\binom{x}{d}]$, para todo $d \in dom(E)$;
c) $E \not\models \exists x\varphi[a]$ sse $E \not\models \varphi[a\binom{x}{d}]$, para todo $d \in dom(E)$;
d) $E \not\models \forall x\varphi[a]$ sse existe $d \in dom(E)$ t.q. $E \not\models \varphi[a\binom{x}{d}]$.

Se $a_1(x) = a_2(x)$, para todo $x \in LIV(\varphi)$, então $E \models \varphi[a_1]$ sse $E \models \varphi[a_2]$.

Corolário: Sejam φ uma L-sentença e E uma L-estrutura.
Se para alguma atribuição a em E, $E \models \varphi[a]$, então para toda a atribuição a em E, $E \models \varphi[a]$.

Proposição: Sejam $E = (D, \overline{\ })$ uma L-estrutura e a uma atribuição em E. Sejam x uma variável, t um $L - termo$ e φ uma L-fórmula tais que x está livre para t em φ. Então,

$$E \models \varphi[t/x][a] \ \text{ sse } \ E \models \varphi[a\tbinom{x}{t[a]}].$$

Definição: Dizemos que uma L-fórmula φ é *válida* numa L-estrutura E ou que E valida φ (notação: $E \models \varphi$) quando, para toda a atribuição a em E, $E \models \varphi[a]$.

Utilizamos a notação $E \not\models \varphi$ quando φ não é válida em E, *i.e.*, quando existe uma atribuição a em E tal que $E \not\models \varphi[a]$.

Proposição: Sejam E uma L-estrutura e φ uma L-sentença. Então, $E \models \varphi$ sse para alguma atribuição a em E, $E \models \varphi[a]$.

Definição: Uma L-fórmula φ é *(universalmente) válida* (notação: $\models \varphi$) quando é válida em toda a L-estrutura.

Utilizamos a notação $\not\models \varphi$ quando φ *não é (universalmente) válida*, *i.e.*, quando existe uma L-estrutura E tal que $E \not\models \varphi$.

Observação: Uma L-fórmula φ não é universalmente válida quando existe alguma L-estrutura que não valida φ, ou seja, quando existe alguma L-estrutra E e alguma atribuição a em E t.q. $E \not\models \varphi[a]$.

Definição: Uma L-fórmula φ é *logicamente equivalente* a uma L-fórmula ψ (notação: $\varphi \Leftrightarrow \psi$) quando $\models \varphi \leftrightarrow \psi$, *i.e.*, quando para para toda a L-estrutura E e para toda a atribuição a em E, $E \models \varphi[a]$ sse $E \models \psi[a]$.

Proposição: Sejam $x, y \in \mathcal{V}$ e $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_L$.

a) $\neg\forall x\varphi \Leftrightarrow \exists x\neg\varphi$ **b)** $\neg\exists x\varphi \Leftrightarrow \forall x\neg\varphi$
c) $\forall x\varphi \Leftrightarrow \neg\exists x\neg\varphi$ **d)** $\exists x\varphi \Leftrightarrow \neg\forall x\neg\varphi$
e) $\forall x(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \forall x\varphi \wedge \forall x\psi$ **f)** $\exists x(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow \exists x\varphi \vee \exists x\psi$
g) $\models (\forall x\varphi \vee \forall x\psi) \to \forall x(\varphi \vee \psi)$,
mas não necessariamente $\models \forall x(\varphi \vee \psi) \to (\forall x\varphi \vee \forall x\psi)$
h) $\models \exists x(\varphi \wedge \psi) \to (\exists x\varphi \wedge \exists x\psi)$,
mas não necessariamente $\models (\exists x\varphi \wedge \exists x\psi) \to \exists x(\varphi \wedge \psi)$
i) $\forall x\forall y\varphi \Leftrightarrow \forall y\forall x\varphi$ **j)** $\exists x\exists y\varphi \Leftrightarrow \exists y\exists x\varphi$
k) $\models \exists x\forall y\varphi \to \forall y\exists x\varphi$,
mas não necessariamente $\models \forall x\exists y\varphi \to \exists y\forall x\varphi$

l) $Qx\varphi \Leftrightarrow \varphi$
se $x \notin LIV(\varphi)$,
para todo $Q \in \{\exists, \forall\}$

m) $Qx\varphi \Leftrightarrow Qy\varphi[y/x]$
se $y \notin LIV(\varphi)$ e x é livre para y em φ
para todo $Q \in \{\exists, \forall\}$.

n) $Qx(\varphi \square \psi) \Leftrightarrow (Qx\varphi)\square\psi$ e $Qx(\psi \square \varphi) \Leftrightarrow \psi \square (Qx\varphi)$,
se $x \notin LIV(\psi)$,
para todo $\square \in \{\wedge, \vee\}$ e para todo $Q \in \{\exists, \forall\}$

Dizemos que E *satisfaz* Γ para a ou que o par (E, a) *satisfaz* Γ, escrevendo $E \models \Gamma[a]$, quando para todo $\varphi \in \Gamma$, $E \models \varphi[a]$.

Caso contrário, dizemos que E *não satisfaz* Γ para a ou que o par (E, a) *não satisfaz* Γ, escrevendo $E \not\models \Gamma[a]$.

Definição: Um conjunto de L-fórmulas Γ diz-se *satisfazível* ou *(semanticamente) consistente* quando para alguma L-estrutura E e para alguma atribuição a em E, (E, a) satisfaz Γ.

Caso contrário, Γ diz-se *insatisfazível* ou *(semanticamente) inconsistente*.

Definição: Sejam E uma L-estrutura e Γ um conjunto de L-fórmulas.

Dizemos que E é um *modelo* de Γ ou que E *valida* Γ, escrevendo $E \models \Gamma$, quando para toda a atribuição a em E, $E \models \Gamma[a]$.

Caso contrário, dizemos que E *não é modelo* de Γ ou que E *não valida* Γ, escrevendo $E \not\models \Gamma$.

1 Uma L-estrutura E é um modelo de Γ sse para alguma atribuição a em E, (E, a) satisfaz Γ.

2 Γ é satisfazível sse existem modelos de Γ.

Definição: Uma L-fórmula φ diz-se uma *consequência (semântica)* de um conjunto de L-fórmulas Γ (notação: $\Gamma \models \varphi$) quando para toda a L-estrutura E e para toda a atribuição a em E, se $E \models \Gamma[a]$, então $E \models \varphi[a]$.

Proposição: Sejam Γ um conjunto de L-sentenças e φ uma L-sentença. Então, $\Gamma \models \varphi$ sse todos os modelos de Γ validam φ.

Notação : Adiante, usaremos a notação $LIV(\Gamma)$, com Γ um conjunto de L-fórmulas, para representar o conjunto $\bigcup_{\varphi \in \Gamma} LIV(\varphi)$.

Proposição: Sejam φ e ψ L-fórmulas, seja Γ um conjunto de L-fórmulas, seja x uma variável e seja t um L-termo.

a) Se $\Gamma \models \forall x\varphi$ e x está livre para t em φ, então $\Gamma \models \varphi[t/x]$.

b) Se $\Gamma \models \varphi$ e $x \notin LIV(\Gamma)$, então $\Gamma \models \forall x\varphi$.

c) Se $\Gamma \models \varphi[t/x]$ e x está live para t em φ, então $\Gamma \models \exists x\varphi$.

d) Se $\Gamma \models \exists x\varphi$ e $\Gamma, \varphi \models \psi$, e $x \notin LIV(\Gamma \cup \{\psi\})$, então $\Gamma \models \psi$.