Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática

Cálculo

Mestrado Integrado em Engenharia Informática

2020/2021

Exercício 2.1 Determine o domínio das seguintes funções:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$;

b) $f(x) = \sqrt{2-3x} + \sqrt{x}$;

c) $f(x) = \sqrt{1-\cos(3x^3+x)}$;

d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{4x-3}}{x^2-4}$.

Exercício 2.2 Determine o domínio das funções f, g, $f+g$, $f-g$, fg, f/g quando:

a) $f(x) = \sqrt{x+5}, \quad g(x) = \sqrt{x+5}$;

b) $f(x) = \dfrac{x}{x-2}, \quad g(x) = \dfrac{3x}{x+4}$.

Exercício 2.3 Determine $f \circ g$ e $g \circ f$ e, em cada caso, o respetivo domínio, quando:

a) $f(x) = x^2 - 3x, \quad g(x) = \sqrt{x+2}$;

b) $f(x) = \sqrt{x+15}, \quad g(x) = x^2 + 2x$;

c) $f(x) = \sqrt{x-2}, \quad g(x) = \sqrt{x+5}$;

d) $f(x) = \sqrt{25-x^2}, \quad g(x) = \sqrt{x-3}$.

Exercício 2.4 Para cada uma das funções h dadas indique duas funções f e g (diferentes da identidade) tais que $h = g \circ f$:

a) $h(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{x^2-3}\right)$;

b) $h(x) = \sqrt{x^2+1} + \frac{2}{x^2+1}$;

c) $h(x) = \sqrt{2x-2} - 4x + 4$.

Exercício 2.5 Verifique se as seguintes funções são limitadas ou monótonas e indique, quando possível, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo dos seus contradomínios:

a) $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\backslash\{0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{|x|}{x} \end{array}$

b) $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x^2} - 1 \end{array}$

c) $f: \begin{array}{ccc}]-1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x-1}{x+1} \end{array}$

Exercício 2.6 Estude a paridade da função $f : D \to \mathbb{R}$ quando:

a) $f(x) = x, \quad D = \mathbb{R}$;

b) $f(x) = x^2, \quad D = [-2, 5]$;

c) $f(x) = x^3, \quad D = \mathbb{R}$;

d) $f(x) = \sqrt{x^2}, \quad D = \mathbb{R}$;

e) $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad D = [-\pi, 2\pi]$;

f) $f(x) = x^2 \cos x, \quad D = \mathbb{R}$.

Exercício 2.7 Se f e g são funções pares, o que se pode dizer de $f \circ g$? E se forem ímpares? E se uma função for par e a outra ímpar?

Exercício 2.8 Considere as seguintes funções:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & -x \end{array} \qquad i(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \in]-1, 2] \\ 2 & \text{se} \quad x \in \mathbb{R} \setminus]-1, 2] \end{cases}$$

a) Classifique cada uma delas quanto à injetividade e sobrejetividade.

b) Determine $f\big([-1,1]\big)$, $i\big([-1,0]\big)$, $i\big(]-1,3]\big)$, $f^{-1}\big(\{1\}\big)$, $h^{-1}\big(\{0\}\big)$ e $g^{-1}\big(]-1,3]\big)$.

Exercício 2.9 Seja $f : \mathbb{R} \to [-1, +\infty[$ dada por $f(x) = x^2 + 4x + 3$.

a) Defina uma restrição de f que admita inversa.

b) Defina a função inversa da função da alínea (a).

c) Esboce graficamente a função da alínea (a) e a sua função inversa.

Exercício 2.10 Para cada uma das funções $f : D \to E$ que se segue, assuma que D é o maior conjunto em que a lei faz sentido e que o conjunto de chegada é igual ao contradomínio. Identifique as funções invertíveis e calcule a sua inversa:

a) $f(x) = x$;

b) $f(x) = x^2$;

c) $f(x) = x - 3$;

d) $f(x) = x^3$;

e) $f(x) = \sqrt{x+2}$;

f) $f(x) = e^{x-1}$;

g) $f(x) = \frac{1}{x^2+5}$;

h) $f(x) = \frac{1}{x^3+2}$.

Exercício 2.11 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$. Esboce o gráfico de g quando:

a) $g(x) = f(x) - 1$;

b) $g(x) = f(x + 2)$;

c) $g(x) = \max\{f(x), 1\}$;

d) $g(x) = \min\{f(x), 2\}$;