

1. Para cada uma das experiências aleatórias abaixo indicadas, identifique o espaço amostral, dê exemplos de acontecimentos (pelo menos um elementar e um composto, que não seja o universal) e identifique os correspondentes subconjuntos do espaço amostral. Calcule ainda a probabilidade de cada um dos acontecimentos que indicou.

- (a) Lançamento de uma moeda equilibrada duas vezes consecutivas;
- (b) Lançamento de uma moeda seguido do lançamento de um dado, ambos equilibrados;
- (c) Lançamento de um dado equilibrado três vezes consecutivas.

Para cada uma das experiências dê ainda exemplos de dois acontecimentos disjuntos (ambos diferentes de \emptyset).

2. Considere a experiência aleatória que consiste em lançar um dado viciado em que a probabilidade de sair face i é o dobro da probabilidade de sair a face $i - 1$, $i, i = 2, \dots, 6$. Seja A o acontecimento “saiu uma face par”, B o acontecimento “saiu uma face com um número múltiplo de 3” e C o acontecimento “saiu uma face ímpar”.

- (a) Identifique o espaço amostral desta experiência e determine a probabilidade de cada um dos acontecimentos elementares.
- (b) Pode usar a probabilidade de Laplace para o cálculo de probabilidades de acontecimentos decorrentes desta experiência? Justifique.
- (c) Identifique os subconjuntos do espaço amostral correspondentes aos acontecimentos $A, B, \overline{B}, C, A \cap B, A \cup B, A \setminus B \equiv A \cap \overline{B}, A \cup B \cup C$ e determine as respetivas probabilidades. Obs.: \overline{B} denota o complementar de B , i.e., $\overline{B} = \{\omega \in \Omega : \omega \notin B\}$. É o subconjunto de Ω formado pelos elementos que não pertencem a B .

3. Considere a experiência aleatória que consiste em extrair, ao acaso e sem reposição, 3 bolas de uma caixa que contém 2 bolas brancas e 3 bolas vermelhas.

- (a) Identifique os acontecimentos:
 - i) “todas as bolas extraídas são brancas”; iii) “saiu pelo menos uma bola vermelha”;
 - ii) “não saiu qualquer bola vermelha”; iv) “saíram no máximo duas bolas brancas”.

- (b) Considere os seguintes acontecimentos:

- A: “a primeira bola extraída é branca”;
- B: “a segunda bola extraída é branca”;
- C: “a terceira bola extraída é branca”.

Escreva os acontecimentos abaixo indicados usando operações entre A, B e C:

- i) D: “as duas primeiras bolas são brancas”; iii) F: “saiu pelo menos uma bola branca”;
- ii) E: “as duas últimas bolas são brancas”; iv) G: “saiu uma e uma só bola branca”.

4. Sejam A e B dois quaisquer acontecimentos e considere o acontecimento

$$A\Delta B \equiv (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Identifique, em palavras, o acontecimento $A\Delta B$ e exprima a sua probabilidade em função de $P(A)$, $P(B)$ e $P(A \cap B)$. Interprete o resultado obtido.

5. Escolheu-se, ao acaso, um aluno numa escola que tem 630 alunos. Sobre os alunos desta escola, é sabido que 350 estudam Italiano, 210 estudam Espanhol e 90 estudam as duas línguas (Italiano e Espanhol). Qual a probabilidade de o aluno escolhido:

- (a) estudar apenas Italiano? (i.e., estudar Italiano mas não estudar Espanhol)
- (b) estudar apenas Espanhol? (i.e., estudar Espanhol mas não estudar Italiano)
- (c) estudar Italiano ou Espanhol?
- (d) não estudar nenhuma destas línguas?
- (e) estudar uma e uma só destas línguas?

6. Durante um surto epidémico, 20% da população de uma cidade contraiu a doença em causa. Um ano mais tarde, há um novo surto epidémico, com a mesma incidência de 20%, e verificou-se que 8% da população da cidade contraiu a doença em ambos os surtos. Escolheu-se um indivíduo ao acaso nesta população. Qual a probabilidade de:

- (a) o indivíduo nunca ter contraído a doença?
- (b) o indivíduo ter contraído a doença apenas no segundo surto?
- (c) o indivíduo ter contraído a doença em apenas um dos surtos?

7. São conhecidas as seguintes percentagens relativas à utilização (ou não) de três medicamentos distintos, A, B e C, recomendados para o tratamento de uma doença numa certa população:

10%	toma A;	40%	toma B;	20%	toma C;		
5%	toma A e B;	4%	toma A e C;	15%	toma B e C;	2.5%	toma A, B e C.

Determine a probabilidade de um indivíduo, escolhido ao acaso nesta população,

- (a) tomar pelo menos um dos três medicamentos;
 - (b) não tomar qualquer medicamento;
 - (c) tomar os medicamentos A e B, mas não tomar o medicamento C;
 - (d) tomar apenas o medicamento A;
 - (e) tomar um e um só dos 3 medicamentos.
8. Suponha que são conhecidas as seguintes percentagens relativas à utilização (ou não) de três *softwares* de tratamento estatístico (SPlus, SPSS e R) num certo grupo de estudantes:

SPlus: 10%	SPSS: 23%	R: 12%
SPlus e SPSS: 5%	SPlus e R: 4%	SPSS e R: 6%
SPlus, SPSS e R: 2%		

Qual a probabilidade de um estudante escolhido ao acaso neste grupo:

- (a) usar pelo menos um dos *software* de tratamento estatístico?
- (b) não usar qualquer *software* de tratamento estatístico?
- (c) usar o SPlus e o SPSS, mas não o R?
- (d) usar o SPlus, mas não o SPSS nem o R?

9. Consideremos que um homem tem na sua mão 5 cartas vermelhas que foram escolhidas, ao acaso, num baralho de 52 cartas. Qual a probabilidade de as cartas serem todas do mesmo naipe, isto é, todas copas ou todas ouros?
10. Os clientes de uma óptica, divididos conforme o sexo e o uso ou não de lentes contacto, existem nas seguintes proporções:

	homens	mulheres
usam lentes	17%	38%
não usam lentes	30%	15%

- (a) Escolhendo ao acaso um cliente desta óptica, determine a probabilidade de ser:
 - i) um homem;
 - iii) um homem ou uma pessoa que usa lentes;
 - ii) uma pessoa que usa lentes;
 - iv) uma mulher ou uma pessoa que não usa lentes.
 - (b) Represente a informação contida na tabela através de uma árvore de probabilidades adequada (note que há pelo menos duas representações possíveis/adequadas).
11. Numa dada população, certa doença está presente sob a forma grave em 5% dos indivíduos, sob a forma moderada em 10% e ausente nos restantes 85%. Um exame clínico dá resultado positivo (i.e., diz que o indivíduo tem a doença) em 90% dos casos graves, em 70% dos casos moderados e em 10% dos casos saudáveis. Um indivíduo é escolhido ao acaso na população e é submetido a este exame.
- (a) Qual a probabilidade de o seu exame dar positivo?
 - (b) Se o resultado do exame for positivo, qual a probabilidade de ele ter realmente a doença?
 - (c) Se o resultado do exame for negativo, qual a probabilidade de ele ter a doença?
12. Retiro uma carta de um baralho com 52 cartas. Os acontecimentos “a carta é um 7” e “a carta é uma espada” são independentes? Os acontecimentos “a carta é de copas” e “a carta é um ás” são independentes? E se o baralho não contém o 7 de copas (e portanto tem apenas 51 cartas)?
13. Considere a experiência aleatória que consiste em lançar um dado equilibrado duas vezes consecutivas.
- (a) Diga se os seguintes 3 acontecimentos, A , B e C , são independentes:

A : “saiu face par no primeiro lançamento”,
 B : “saiu face ímpar no segundo lançamento”,
 C : “a soma das faces obtidas é um número par”,
 - (b) Diga, justificando, se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa: “Se n acontecimentos são independentes 2 a 2, com $n > 2$, então os n acontecimentos são independentes.”
14. Considere a experiência aleatória ξ : “lançamento de uma moeda equilibrada $n - 1$ vezes consecutivas”, com $n \geq 3$.
- (a) Identifique o espaço amostral associado a esta experiência aleatória.
 - (b) Considere os seguintes n acontecimentos
$$E_j = \begin{cases} \text{“ocorre cara no } j\text{-ésimo lançamento”} & \text{se } j \in \{1, \dots, n-1\} \\ \text{“ocorrem uma cara e uma coroa nos 2 primeiros lançamentos”} & \text{se } j = n \end{cases}$$
 - i. Prove que $P(E_i \cap E_j) = P(E_i)P(E_j)$, para todo o $i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j$.
 - ii. Calcule $P\left(\bigcap_{j=1}^n E_j\right)$ e diga se os n acontecimentos são independentes.

15. Um míssil é lançado e acerta no alvo com probabilidade 0.5. Quantos mísseis devem ser lançados para que a probabilidade de pelo menos um deles acertar no alvo seja superior a 0.99? (Assuma que os diferentes mísseis são lançados sempre nas mesmas condições)
16. Uma família tem n filhos. Cada filho tem, independentemente dos outros, igual probabilidade de ser menino ou menina. Sejam A e B os acontecimentos “a família tem no máximo uma menina” e “a família tem pelo menos uma menina e um menino”, respectivamente. A e B são independentes se $n = 2$? E se $n = 3$?
17. Uma determinada caixa automática da UM está 10% das vezes fora de serviço. Mesmo quando está em serviço, nem todas as opções estão disponíveis. Em particular sabe-se que, quando a caixa está em serviço, em 20% das vezes não é possível consultar o saldo. Suponha que um aluno da UM, escolhido ao acaso, vai utilizar esta caixa automática.
 - (a) Determine a probabilidade de ele conseguir consultar o saldo.
 - (b) Sabendo que ele não conseguiu consultar o saldo, qual a probabilidade de a caixa estar fora de serviço?
 - (c) Os acontecimentos “aluno não conseguiu consultar o saldo” e “o aluno encontrou a máquina fora de serviço” são independentes?
18. No tratamento de uma doença, um médico receita aos doentes pelo menos um de dois medicamentos A e B . Em 70% dos casos o médico receita o medicamento A e receita o medicamento B em 40% dos casos. É introduzido no mercado um novo medicamento, C , para complementar o efeito dos medicamentos já existentes mas que só pode ser usado com um e um só dos outros dois medicamentos, i.e., não é compatível com a utilização em simultâneo de A e B . O médico receita C a 30% dos doentes que só tomam A e a 60% dos que só tomam B .
 - (a) Determine a percentagem de doentes que:
 - i. toma ambos os medicamentos A e B ;
 - ii. toma A mas não toma B ;
 - iii. toma B mas não toma A ;
 - iv. toma o medicamento C ;
 - v. só toma o medicamento A ;
 - (b) Sabendo que o médico não receitou o medicamento C a um certo doente, qual a probabilidade de este utilizar o medicamento A ?
19. Numa certa população, 30% dos indivíduos possuem uma certa doença e os restantes são saudáveis. Dos que têm a doença, 40% têm na forma contagiosa e os restantes são não contagiosos. Escolheu-se ao acaso um indivíduo nesta população.
 - (a) Mostre que a probabilidade de o indivíduo ter a doença na forma não contagiosa é 0.18.
 - (b) Um exame clínico dá resultado positivo (i.e., diz que o indivíduo tem a doença) em todos os casos contagiosos e em apenas 70% dos casos de doentes não contagiosos. O exame clínico dá negativo em 95% dos casos em que o indivíduo é saudável. Escolheu-se, ao acaso, um indivíduo desta população que foi submetido a este exame.
 - i. Calcule a probabilidade de o exame dar negativo.
 - ii. Se o resultado do exame der negativo, qual a probabilidade de o indivíduo ser saudável?
 - iii. Se o resultado do exame der positivo, qual a probabilidade de o indivíduo ser doente?