0. Preliminares

0.1 Prove, de duas formas diferentes, que, para todo o número natural $n \geq 2$, $2n \leq n^2$.

0.2 Prove por indução que, para todo o número natural $n > 4$, $n^2 < 2^n$. Note como é útil provar simultaneamente $2n + 1 < n^2$.

0.3 Para $n \in \mathbb{N}$, seja $P(n)$ a propriedade: $2^n < n!$.

- **a)** Mostre que: para $k \in \mathbb{N}$ e $k > 3$, se $P(k)$ é verdadeira, $P(k+1)$ também é verdadeira.
- **b)** Indique, justificando, quais os naturais n para os quais $P(n)$ é verdadeira.

0.4 Prove que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $1 + 2 + \cdots + n = n(n + 1)/2$.

0.5 Prove que, para cada $n \in \mathbb{N}_0$:

a) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} 2i = n^2 + n$; **b)** $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}(2i + 1) = (n + 1)^2$.

0.6 Seja $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ a função definida recursivamente por $f(0) = 1$ e $f(n + 1) = 2f(n)$, para cada $n \in \mathbb{N}_0$.

- **a)** Calcule $f(1)$ e $f(2)$.
- **b)** Mostre que, para cada $n \in \mathbb{N}_0$, $f(n) = 2^n$.

0.7 Seja $s : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ a função definida por $s(1) = 2$ e $s(n + 1) = \frac{2}{s(n)}$.

- **a)** Determine $s(1), s(2)$ e $s(3)$.
- **b)** Determine o contradomínio de s. Prove a sua afirmação por indução.

0.8 Seja A o alfabeto $\{0, 1\}$. Os elementos de A dizem-se as *letras* de A. Uma *palavra* em A é uma sequência finita de letras de A. O conjunto de todas as palavras em A representa-se por A^*. Uma *linguagem* em A é um subconjunto de A^*.

- **a)** Quantas palavras em A existem com comprimento ≤ 3?
- **b)** Quantas linguagens em A existem com um número de elementos ≤ 3?
- **c)** Dadas duas palavras $u = a_1 \cdots a_n$ e $v = b_1 \cdots b_m$ em A, a *concatenação* de u e v, denotada uv, é a palavra em A $a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m$. Seja w a palavra 0110. Quantos pares de palavras u, v existem tais que $uv = w$?

0.9 O conjunto $\mathbb{N}_0$ pode ser definido indutivamente pelas regras: (1) $0 \in \mathbb{N}_0$. (2) Se $n \in \mathbb{N}_0$ então $n+1 \in \mathbb{N}_0$. Apresente definições indutivas de cada um dos conjuntos que se seguem:

- **a)** Conjunto dos naturais múltiplos de 5.
- **b)** Conjunto dos números inteiros.
- **c)** Conjunto das palavras no alfabeto $A = \{0, 1\}$ cujo comprimento é ímpar.
- **d)** Conjunto das palavras no alfabeto $A = \{a, b\}$ que têm um número par de ocorrências do símbolo a.

1. Sintaxe do Cálculo Proposicional

1.1 De entre as seguintes palavras sobre o alfabeto do Cálculo Proposicional, indique, justificando, aquelas que pertencem ao conjunto $\mathcal{F}^{CP}$:

a) $(\neg (p_1 \vee p_2))$. **b)** $((p_0 \wedge \neg p_0) \to \perp)$.

c) $((\neg p_5) \to (\neg p_6))$. **d)** $(\perp)$.

e) $((p_3 \wedge p_1) \vee ($. **f)** $(((p_9 \to ((p_3 \vee (\neg p_8)) \wedge p_{12})) \leftrightarrow (\neg p_4)) \to (p_7 \vee \perp)))$.

1.2 Para cada uma das seguintes fórmulas φ do Cálculo Proposicional:

i) p_{2020}. **ii)** $\neg \perp \vee \perp$. **iii)** $p_0 \to (\neg p_0 \to \neg p_1)$:

a) Calcule $\varphi[p_2/p_0]$, $\varphi[p_0 \wedge p_1/p_1]$ e $\varphi[p_{2021}/p_{2020}]$.

b) Indique o conjunto das suas subfórmulas.

1.3 Defina por recursão estrutural as seguintes funções (na alínea **c)** $BIN = \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$):

a) $p : \mathcal{F}^{CP} \to \mathbb{N}_0$ tal que $p(\varphi) =$ número de ocorrências de parêntesis em φ.

b) $v : \mathcal{F}^{CP} \to \mathbb{N}_0$ tal que $v(\varphi) =$ número de ocorrências de vars. proposicionais em φ.

c) $b : \mathcal{F}^{CP} \to \mathcal{P}(BIN)$ tal que $b(\varphi) = \{\Box \in BIN : \Box \text{ ocorre em } \varphi\}$.

d) $\_[\perp /p_7] : \mathcal{F}^{CP} \to \mathcal{F}^{CP}$ (recorde que $\varphi[\perp /p_7]$ representa o resultado de substituir em φ todas as ocorrências de p_7 por $\perp$).

1.4 Considere de novo as funções definidas no exercício anterior. Prove, por indução estrutural, que, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$:

a) $v(\varphi) \geq \#var(\varphi)$. **b)** $p(\varphi) \geq \#b(\varphi)$.

c) $v(\varphi) \geq v(\varphi[\perp /p_7])$. **d)** $b(\varphi) = b(\varphi[\perp /p_7])$.

e) se $b(\varphi) \neq \emptyset$ então $p(\varphi) > 0$. **f)** se $p_7 \notin var(\varphi)$ então $\varphi[\perp /p_7] = \varphi$.

1.5 Seja $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$. O *tamanho* de φ, denotado por $|\varphi|$, define-se por recursão do seguinte modo:

(i) $|p| = 1$, para cada variável proposicional p; (ii) $|\perp| = 1$; (iii) $|\neg\varphi| = 1 + |\varphi|$;
(iv) $|\varphi\Box\psi| = 1 + |\varphi| + |\psi|$, para cada conetivo binário $\Box$.

a) Qual das fórmulas $\neg\neg\neg p_0$ ou $(p_1 \wedge p_2) \vee (p_3 \wedge p_4)$ tem maior tamanho?

b) Dê exemplo de fórmulas φ e ψ, com 3 subfórmulas, tais que $|\varphi| = 3$ e $|\psi| > 3$.

c) Mostre que, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $|\varphi| \geq \#subf(\varphi)$.

1.6 Seja $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$. A *complexidade lógica* de φ, denotada por $cl(\varphi)$, define-se por recursão do seguinte modo:

(i) $cl(p) = 0$, para cada variável proposicional p; (ii) $cl(\perp) = 0$; (iii) $cl(\neg\varphi) = 1 + cl(\varphi)$;
(iv) $cl(\varphi\Box\psi) = 1 + max(cl(\varphi), cl(\psi))$, para cada conetivo binário $\Box$.

a) Qual das fórmulas $\neg\neg\neg p_0$ ou $(p_1 \wedge p_2) \vee (p_3 \wedge p_4)$ tem maior complexidade lógica?

b) Mostre que, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $cl(\varphi) < |\varphi|$.

2. Semântica do Cálculo Proposicional

2.1 Sejam v_1 e v_2 as únicas valorações tais que

$$v_1(p) = \begin{cases} 0 \text{ se } p \in \{p_0, p_1\} \\ 1 \text{ se } p \in \mathcal{V}^{CP} - \{p_0, p_1\} \end{cases} \quad \text{e} \quad v_2(p) = \begin{cases} 1 \text{ se } p \in \{p_1, p_3\} \\ 0 \text{ se } p \in \mathcal{V}^{CP} - \{p_1, p_3\} \end{cases}.$$

Calcule os valores lógicos das fórmulas seguintes para as valorações v_1 e v_2:

$$\varphi_1 = (p_2 \vee (\neg p_1 \wedge p_3)), \quad \varphi_2 = (p_2 \vee p_0) \wedge \neg(p_2 \wedge p_0), \quad \varphi_3 = (p_1 \to ((p_5 \leftrightarrow p_3) \vee \perp)).$$

2.2 Considere as fórmulas,

$$\varphi_1 = \neg p_3 \wedge (\neg p_1 \vee p_2), \quad \varphi_2 = (\neg p_3 \vee \neg p_1) \leftrightarrow (p_1 \to p_2), \quad \varphi_3 = \neg p_3 \to (p_1 \wedge \neg p_2).$$

a) Para cada um dos conjuntos $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ e $\{\varphi_2, \varphi_3\}$, dê exemplo de uma valoração que atribua o valor lógico 1 a todos os seus elementos.

b) Mostre que não existem valorações que, em simultâneo, atribuam o valor lógico 1 a φ_1 e φ_3.

2.3 Seja v uma valoração. Quais das seguintes proposições são verdadeiras?

a) $v((p_3 \to p_2) \to p_1) = 0$ e $v(p_2) = 0$ é uma condição suficiente para $v(p_3) = 0$.

b) Uma condição necessária para $v(p_1 \to (p_2 \to p_3)) = 0$ é $v(p_1) = 1$ e $v(p_3) = 0$.

c) Uma condição necessária e suficiente para $v(p_1 \wedge \neg p_3) = 1$ é $v((p_3 \to (p_1 \to p_3)) = 1$.

2.4 De entre as seguintes fórmulas, indique as tautologias e as contradições.

a) $(p_1 \to \perp) \vee p_1$.

b) $(p_1 \to p_2) \leftrightarrow (\neg p_2 \to \neg p_1)$.

c) $\neg(p_1 \wedge p_2) \to (p_1 \vee p_2)$.

d) $(p_1 \vee \neg p_1) \to (p_1 \wedge \neg p_1)$.

2.5 Das seguintes proposições, indique as verdadeiras. Justifique.

a) $\models \varphi \wedge \psi$ se e só se $\models \varphi$ e $\models \psi$.

b) Se $\models \varphi \vee \psi$, então $\models \varphi$ ou $\models \psi$.

c) Se $\models \varphi$ ou $\models \psi$, então $\models \varphi \vee \psi$.

d) Se $\models \varphi \leftrightarrow \psi$ e $\not\models \psi$, então $\not\models \varphi$.

2.6 Seja $\varphi = (\neg p_2 \to \perp) \wedge p_1$.

a) Dê exemplo de uma valoração v tal que:

i) $v(\varphi) = v(\varphi[p_0 \wedge p_3/p_2])$;

ii) $v(\varphi) \neq v(\varphi[p_0 \wedge p_3/p_2])$.

b) Seja ψ uma fórmula. Indique uma condição suficiente para que uma valoração v satisfaça $v(\varphi) = v(\varphi[\psi/p_2])$. A condição que indicou é necessária?

2.7 Considere o conjunto $\mathcal{F}^{CP}_{\{\vee,\wedge\}}$ das fórmulas cujos conetivos estão no conjunto $\{\vee, \wedge\}$.

a) Enuncie o teorema de indução estrutural para $\mathcal{F}^{CP}_{\{\vee,\wedge\}}$.

b) Seja v a valoração que a cada variável proposicional atribui o valor lógico 0. Mostre que $v(\varphi) = 0$ para qualquer $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}_{\{\vee,\wedge\}}$.

c) Existem tautologias no conjunto $\mathcal{F}^{CP}_{\{\vee,\wedge\}}$? Justifique.

2.8 Para cada uma das seguintes fórmulas, encontre uma fórmula que lhe seja logicamente equivalente e que envolva apenas conetivos no conjunto $\{\neg, \vee\}$.

a) $(p_0 \wedge p_2) \to p_3$. **b)** $p_1 \vee (p_2 \to \perp)$.

c) $\neg p_4 \leftrightarrow p_2$. **d)** $(p_1 \vee p_2) \to \neg(p_1 \wedge \perp)$.

2.9 Defina, por recursão estrutural em fórmulas, uma função $f : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{F}^{CP}_{\{\neg,\vee\}}$ que a cada fórmula φ faça corresponder uma fórmula $f(\varphi)$ logicamente equivalente a φ.

2.10 Investigue se os conjuntos de conetivos $\{\vee, \wedge\}$ e $\{\neg, \vee, \wedge\}$ são ou não completos.

2.11 Calcule formas normais conjuntivas e disjuntivas logicamente equivalentes a cada uma das seguintes fórmulas:

a) $\neg p_0$. **b)** $p_1 \wedge (p_2 \wedge p_3)$.

c) $(p_1 \vee p_0) \vee \neg(p_2 \vee p_0)$. **d)** $(p_1 \to \perp)$.

e) $(p_1 \vee p_0) \wedge (p_2 \vee (p_1 \wedge p_0))$. **f)** $(p_1 \to p_2) \leftrightarrow (\neg p_2 \to \neg p_1)$.

2.12 Considere que φ e ψ são fórmulas cujo conjunto de variáveis é $\{p_1, p_2\}$ e $\{p_1, p_2, p_3\}$, respetivamente, e que têm as seguintes tabelas de verdade:

p_1	p_2	φ
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

e

p_1	p_2	p_3	ψ
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	1

Determine FND's e FNC's logicamente equivalentes a cada uma das fórmulas.

2.13 Será que existem outros conetivos binários para além de $\wedge$, $\vee$, $\to$, e $\leftrightarrow$? Para responder a esta questão, adotemos esta definição: um conetivo binário $\diamond$ é determinado pela sua função de verdade $v_\diamond : \{0,1\}^2 \longrightarrow \{0,1\}$.

a) Quantos conetivos binários existem?

b) Para cada $v_\diamond : \{0,1\}^2 \longrightarrow \{0,1\}$, escreva $v_\diamond$ como uma tabela de verdade e traduza essa tabela de verdade como uma FND.

c) Conclua que $\{\neg, \wedge, \vee\}$ permaneceria um conjunto completo de conetivos, mesmo se tivéssemos adoptado no Cálculo Proposicional outros conetivos binários.

2.14 De entre os seguintes conjuntos de fórmulas, indique os que são consistentes e os que são inconsistentes.

a) $\{p_0 \wedge p_2, p_1 \to \neg p_3, p_1 \vee p_2\}$. **b)** $\{p_0 \vee \neg p_1, p_1, p_0 \leftrightarrow (p_2 \vee p_3)\}$.

c) $\mathcal{F}^{CP}$. **d)** $\mathcal{F}^{CP}_{\{\vee,\wedge\}}$.

2.15 Sejam $\Gamma, \Delta \subseteq \mathcal{F}^{CP}$. Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações.

a) Se $\Gamma \cup \Delta$ é consistente, então Γ e Δ são conjuntos consistentes.

b) Se Γ e Δ são conjuntos consistentes, então $\Gamma \cup \Delta$ é consistente.

c) Se Γ é consistente e $\varphi \in \Gamma$, então $\neg\varphi \notin \Gamma$.

d) Se Γ contém uma contradição, então Γ é inconsistente.

2.16 Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

a) $p_3 \vee p_0, \neg p_0 \models p_3$. **b)** $p_0 \vee \neg p_1, p_1 \vee p_2 \models p_0 \vee p_2$.

c) $\neg p_2 \to (p_1 \vee p_3), \neg p_2 \models \neg p_1$. **d)** para todo $\varphi, \psi, \sigma \in \mathcal{F}^{CP}$, $\neg\psi,\ \psi \to \sigma \models \sigma \vee \varphi$.

2.17 Sejam $\varphi, \psi, \sigma \in \mathcal{F}^{CP}$ e Γ um conjunto de fórmulas. Demonstre que:

a) $\varphi \vee \psi, \neg\varphi \vee \sigma \models \psi \vee \sigma$. **b)** $\models \varphi \to \psi$ se e só se $\varphi \models \psi$.

c) $\Gamma \models \varphi \vee \psi$ se e só se $\Gamma, \neg\varphi \models \psi$. **d)** Γ é inconsistente se e só se $\Gamma \models \perp$.

2.18 Considere as seguintes afirmações:

- Se a porta do cofre foi arrombada, então: o inspetor Heitor desvenda o crime ou o segurança Bragança é culpado.
- O segurança Bragança não é culpado se e só se: a porta do cofre não foi arrombada e o inspetor Heitor desvenda o crime.
- Não é verdade que: o segurança Bragança não é culpado ou a porta do cofre foi arrombada.

a) Exprima as afirmações anteriores através de fórmulas do Cálculo Proposicional, utilizando variáveis proposicionais para representar as frases atómicas.

b) Admitindo que todas as afirmações são verdadeiras, podemos concluir que o inspetor Heitor desvenda o crime? Justifique.

2.19 O Carlos, o João e o Manuel, suspeitos de um crime, fizeram os seguintes depoimentos, respetivamente:

- O João é culpado, mas o Manuel é inocente.
- Se o Carlos é culpado, o Manuel também o é.
- Eu estou inocente, mas um dos outros dois é culpado.

a) Os três depoimentos são consistentes?

b) Algum dos depoimentos é consequência dos outros dois?

c) Supondo os três réus inocentes, quem mentiu?

d) Supondo que todos disseram a verdade, quem é culpado?

e) Supondo que os inocentes disseram a verdade e que os culpados mentiram, quem é culpado?

3. Dedução Natural para o Cálculo Proposicional

3.1 **a)** Indique uma derivação em DNP cuja conclusão seja $p_0 \wedge p_1$ e cuja única hipótese não cancelada seja $p_1 \wedge p_0$.

b) Indique duas derivações distintas em DNP de conclusão $p_0 \to (p_1 \to (p_0 \vee p_1))$ e sem hipóteses por cancelar.

c) Indique as subderivações de cada uma das derivações que apresentou em **a)** e em **b)**.

3.2 Sejam $\varphi, \psi, \sigma \in \mathcal{F}^{CP}$. Encontre demonstrações em DNP das fórmulas abaixo indicadas.

a) $(\varphi \wedge \psi) \to (\varphi \vee \psi)$. **b)** $(\varphi \to (\psi \to \sigma)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \sigma))$.

c) $\varphi \to \varphi$. **d)** $(\neg\varphi \vee \psi) \to (\varphi \to \psi)$.

e) $\varphi \leftrightarrow \neg\neg\varphi$. **f)** $((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)) \leftrightarrow (\varphi \leftrightarrow \psi)$.

g) $(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\psi \vee \varphi)$. **h)** $(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$.

3.3 Mostre que:

a) $p_0 \to p_1, \neg p_1 \vdash \neg p_0$.

b) $p_0 \to p_1, p_1 \to p_2, p_2 \to p_0 \vdash ((p_0 \leftrightarrow p_1) \wedge (p_1 \leftrightarrow p_2)) \wedge (p_0 \leftrightarrow p_2)$.

c) $\{p_0 \vee p_1, \neg p_0 \wedge \neg p_1\}$ é sintaticamente inconsistente.

3.4 Represente o raciocínio que se segue através de uma relação de consequência sintática e construa uma derivação em DNP que prove a validade dessa relação: O Tiago disse: "Vou almoçar ao McDonald's ou à Pizza Hut". E, acrescentou: "Se comer no McDonald's, fico mal disposto e não vou ao cinema". Nesse dia, a Joana encontrou o Tiago no cinema e conclui: "O Tiago foi almoçar à Pizza Hut".

3.5 Demonstre as seguintes proposições, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$ e $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$.

a) $\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi$ se e só se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \vdash \psi$.

b) $\Gamma \vdash \varphi$ se e só se $\Gamma, \neg\varphi \vdash \perp$.

c) $\Gamma \vdash \perp$ se e só se $\Gamma \vdash p_0 \wedge \neg p_0$.

d) Se $\Gamma, \neg\varphi \vdash \varphi$, então $\Gamma \vdash \varphi$.

3.6 Sejam $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$ fórmulas. A fórmula $((\varphi \to \psi) \to \varphi) \to \varphi$ é chamada a *Lei de Peirce*. Mostre que a Lei de Peirce é um teorema de DNP. (Sugestão: tenha em atenção a resolução da alínea **d)** do exercício anterior.)

3.7 Sejam $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$ e $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$. Mostre que:

a) $(p_0 \vee p_1) \to (p_0 \wedge p_1)$ não é um teorema de DNP.

b) $p_0 \vee p_1 \nvdash p_0 \wedge p_1$.

c) $\{p_0 \vee p_1, \neg p_0 \wedge p_1\}$ é sintaticamente consistente.

d) $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \vdash \neg\varphi$ se e só se Γ é semanticamente inconsistente.

e) Se $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ e φ é uma tautologia, então $\Gamma \vdash \psi$.

(Sugestão: aplique o Teorema da Correção e/ou o Teorema da Completude.)

4. Sintaxe do Cálculo de Predicados

4.1 Seja $L = (\{0, f, g\}, \{R\}, \mathcal{N})$ o tipo de linguagem tal que $\mathcal{N}(0) = 0$, $\mathcal{N}(f) = 1$, $\mathcal{N}(g) = 2$, $\mathcal{N}(R) = 2$.

a) Explicite a definição indutiva do conjunto dos termos de tipo L.

b) Indique quais das seguintes sequências de símbolos constituem termos de tipo L:

i)	0.	**ii)**	$f(0)$.
iii)	$f(1)$.	**iv)**	$g(f(x_1, x_0), x_0)$.
v)	$g(x_0, f(x_1))$.	**vi)**	$R(x_0, x_1)$.

c) Calcule o conjunto das variáveis de cada um dos seguintes termos:

i)	0.	**ii)**	$g(x_1, f(x_1))$.
iii)	$g(x_1, x_2)$.	**iv)**	$g(x_1, g(x_2, x_3))$.

d) Para cada um dos termos t da alínea anterior, calcule $subt(t)$.

e) Para cada um dos termos t da alínea **c)**, calcule $t[g(x_0, 0)/x_1]$.

4.2 Seja $L = (\{0, -\}, \{\mathsf{P}, <\}, \mathcal{N})$ em que $\mathcal{N}(0) = 0$, $\mathcal{N}(\mathsf{P}) = 1$ e $\mathcal{N}(-) = \mathcal{N}(<) = 2$.

a) Dê exemplos de termos de tipo L. Justifique.

b) Dê exemplos de fórmulas atómicas de tipo L. Justifique.

c) Justifique que cada uma das seguintes palavras é uma fórmula de tipo L.

i) $x_2 - 0 < x_1$.

ii) $\exists x_0 \forall x_1 (x_1 - x_0 < 0)$.

iii) $\forall x_1 \exists x_0 (x_1 < x_0) \wedge \mathsf{P}(x_1)$.

iv) $\forall x_0 (x_0 < x_1) \vee \exists x_1 (x_1 < x_0)$.

d) Para cada fórmula da alínea anterior, calcule o conjunto das suas subfórmulas.

e) Calcule os conjuntos de variáveis livres e de variáveis ligadas de cada uma das fórmulas da alínea c).

f) A proposição "Para todo $\varphi \in \mathcal{F}_L$, $\mathrm{LIV}(\varphi) \cap \mathrm{LIG}(\varphi) = \emptyset$" é verdadeira?

4.3 Para cada uma das fórmulas φ do exercício 4.2 c), calcule $\varphi[x_2 - x_0/x_1]$.

4.4 Considere o tipo de linguagem L do exercício 4.2. Indique quais das seguintes afirmações são verdadeiras.

a) A variável x_1 está livre para o termo x_2 na fórmula $x_1 < x_2$.

b) A variável x_1 está livre para o termo x_2 na fórmula $\exists x_2(x_1 < x_2)$.

c) A variável x_1 está livre para o termo 0 na fórmula $\exists x_2(x_1 < x_2)$.

d) A variável x_1 está livre para o termo x_2 na fórmula $\forall x_1 \exists x_2(x_1 < x_2)$.

e) A variável x_2 está livre para qualquer termo de tipo L na fórmula $\exists x_2(x_1 < x_2)$.

f) A variável x_1 está livre para qualquer termo de tipo L na fórmula $\exists x_2(x_1 < x_2)$.

g) A variável x_2 está livre para o termo x_1 em $\exists x_2(x_1 < x_2) \vee \exists x_1(x_1 < x_2)$.

h) Toda a variável está livre para o termo $x_1 - x_3$ em $\exists x_2(x_1 < x_2)$.

4.5 Escreva as seguintes afirmações como fórmulas para um tipo de linguagem apropriado.

a) Todo aquele que é persistente aprende Lógica.

b) Quem quer vai, quem não quer manda.

c) Nem todos os pássaros voam.

d) Se toda a gente consegue, também o João consegue.

e) Para todo o número natural que é maior do que 6, o seu dobro é maior do que 12.

f) Quaisquer dois conjuntos que têm os mesmos elementos são iguais.

g) Existe um inteiro positivo menor do que qualquer inteiro positivo.

h) Todo o inteiro positivo é menor do que algum inteiro positivo.

i) Não há barbeiro que barbeie precisamente aqueles homens que não se barbeiam a si próprios.

5. Semântica do Cálculo de Predicados

5.1 Considere o tipo de linguagem $L = L_{Arit}$ e a estrutura $E_{Arit} = (\mathbb{N}_0, \overline{})$ (a estrutura usual de tipo L). Sejam a_1 e a_2 atribuições em E_{Arit} tais que $a_1(x_i) = 0$ e $a_2(x_i) = i$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$.

a) Para cada um dos termos t de tipo L que se seguem, determine $t[a_1]$ e $t[a_2]$.

i) 0. **ii)** x_5. **iii)** $s(x_2)$.

iv) $s(0) + x_3$. **v)** $s(0 \times (x_2 \times x_3))$. **vi)** $(s(0) + x_7) \times s(x_1 + x_2)$.

b) Para cada uma das fórmulas φ de tipo L que se seguem, calcule $\varphi[a_1]$ e $\varphi[a_2]$.

i) $x_1 = x_2$. **ii)** $\neg(x_1 = x_2)$.

iii) $s(x_1) < (x_1 + 0)$. **iv)** $(x_1 < x_2) \to (s(x_1) < s(x_2))$.

c) Para cada uma das fórmulas φ da alínea anterior, determine

$(\forall x_1 \varphi)[a_1]$ e $(\exists x_1 \varphi)[a_1]$.

d) Indique se alguma das fórmulas da alínea b) é válida na estrutura E_{Arit}.

e) Indique se alguma das fórmulas da alínea b) é universalmente válida.

5.2 Repita o exercício anterior, considerando a estrutura $E = (D, \overline{})$, de tipo L, com $D = \{d_1, d_2\}$, e as atribuições a_1 e a_2 em E a seguir definidas:

$\overline{0} = d_1$		$\overline{=} \subseteq D^2$	$\overline{=} = \{(d_1, d_1), (d_2, d_2)\}$
$\overline{s} : D \to D$	$\overline{s}(x) = x$	$\overline{<} \subseteq D^2$	$\overline{<} = \{(d_1, d_2)\}$
$\overline{+} : D^2 \to D$	$\overline{+}(x, y) = d_2$	$a_1 : \mathcal{V} \to D$	$a_1(x) = d_2$
$\overline{\times} : D^2 \to D$	$\overline{\times}(x, y) = d_1$ sse $x = y$	$a_2 : \mathcal{V} \to D$	$a_2(x_i) = d_2$ sse i é par.

5.3 Seja $L = L_{Arit}$.

a) Quantas estruturas de tipo L existem com domínio $\{0\}$? E domínio $\{0, 1, 2\}$?

b) Defina uma estrutura de tipo L com domínio $\{0, 1, 2\}$.

5.4 Seja L um tipo de linguagem e sejam x, y variáveis e φ, ψ fórmulas de tipo L. Mostre que:

a) $\models (\forall x \varphi \vee \forall x \psi) \to \forall x(\varphi \vee \psi)$.

b) $\not\models \forall x(\varphi \vee \psi) \to (\forall x \varphi \vee \forall x \psi)$.

c) $\models \exists x(\varphi \wedge \psi) \to (\exists x \varphi \wedge \exists x \psi)$.

d) $\not\models (\exists x \varphi \wedge \exists x \psi) \to \exists x(\varphi \wedge \psi)$.

e) $\models \exists x \forall y \varphi \to \forall y \exists x \varphi$.

f) $\not\models \forall x \exists y \varphi \to \exists y \forall x \varphi$.

5.5 Sejam L um tipo de linguagem, φ, ψ fórmulas de tipo L, $Q \in \{\forall, \exists\}$ e $\square \in \{\vee, \wedge\}$. Mostre que: se $x \notin LIV(\psi)$, então $(Qx\varphi)\square\psi \Leftrightarrow Qx(\varphi\square\psi)$.

5.6 Seja L um tipo de linguagem.

a) Mostre que, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_L$ tais que $x \notin LIV(\psi)$, se tem:

i) $\models (\forall x\varphi \to \psi) \leftrightarrow \exists x(\varphi \to \psi)$. **ii)** $\models (\exists x\varphi \to \psi) \leftrightarrow \forall x(\varphi \to \psi)$.

iii) $\models (\psi \to \exists x\varphi) \leftrightarrow \exists x(\psi \to \varphi)$. **iv)** $\models (\psi \to \forall x\varphi) \leftrightarrow \forall x(\psi \to \varphi)$.

b) Mostre que, na alínea anterior, a condição $x \notin LIV(\psi)$ é necessária.

c) Conclua que, para toda a fórmula φ em L, $\models \exists x(\varphi \to \forall x\varphi)$.
(Como curiosidade, pense no caso particular de φ representar a condição "x é aprovado a Lógica".)

5.7 Considere o tipo de linguagem $L = L_{Arit}$ e considere as seguintes fórmulas de tipo L: $\varphi_1 = (x_1 < x_0)$; $\varphi_2 = \neg(x_1 < x_0)$; $\varphi_3 = \exists x_1 \neg(x_1 < x_0)$; $\varphi_4 = \forall x_1 \neg(x_1 < x_0)$. Indique quais dos seguintes conjuntos são satisfazíveis:

a) $\{\varphi_1, \varphi_2\}$.

b) $\{\varphi_1, \varphi_3\}$.

c) $\{\varphi_1, \varphi_4\}$.

d) $\{\varphi_3, \varphi_4\}$.

5.8 Suponha que L tem um símbolo de relação binário R. Seja $\Gamma = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$, onde

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \forall x_0\, R(x_0, x_0) \\
\varphi_2 &= \forall x_0 \forall x_1\, (R(x_0, x_1) \to R(x_1, x_0)) \\
\varphi_3 &= \forall x_0 \forall x_1 \forall x_2\, ((R(x_0, x_1) \wedge R(x_1, x_2)) \to R(x_0, x_2))
\end{aligned}$$

a) Seja $E = (D, \overline{})$ um modelo de Γ. Caracterize $\overline{R}$.

b) Suponha que L tem também duas constantes c_1 e c_2. Mostre que existem modelos quer de $\Gamma \cup \{\neg R(c_1, c_2)\}$, quer de $\Gamma \cup \{R(c_1, c_2)\}$.

5.9 Seja L um tipo de linguagem. Mostre que as seguintes afirmações são verdadeiras para todos φ, ψ e σ fórmulas de tipo L e todo $x \in \mathcal{V}$.

(Curiosidade: estas afirmações correspondem a alguns silogismos aristotélicos, cujos nomes medievais estão indicados.)

a) Barbara $\forall x(\psi \to \varphi), \forall x(\sigma \to \psi) \models \forall x(\sigma \to \varphi)$.

b) Darii $\forall x(\psi \to \varphi), \exists x(\sigma \wedge \psi) \models \exists x(\sigma \wedge \varphi)$.

c) Cesare $\forall x(\psi \to \neg\varphi), \forall x(\sigma \to \varphi) \models \forall x(\sigma \to \neg\psi)$.

d) Festino $\forall x(\psi \to \neg\varphi), \exists x(\sigma \wedge \varphi) \models \exists x(\sigma \wedge \neg\psi)$.

e) Datisi $\forall x(\sigma \to \varphi), \exists x(\sigma \wedge \psi) \models \exists x(\psi \wedge \varphi)$.

f) Ferison $\forall x(\sigma \to \neg\varphi), \exists x(\sigma \wedge \psi) \models \exists x(\psi \wedge \neg\varphi)$.