Universidade do Minho
Escola de Ciências
Departamento de Matemática

Cálculo

Mestrado Integrado em Engenharia Informática

Teste 1 A :: 26 de novembro de 2020

Nome: Proposta de correção   Número:

I

As respostas às questões deste grupo devem ser convenientemente justificadas.

Questão 1. [2 valores] Represente o conjunto $A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \left| \frac{1-x}{2x+4} \right| \geq 1 \right\}$ na forma de intervalo ou união de intervalos.

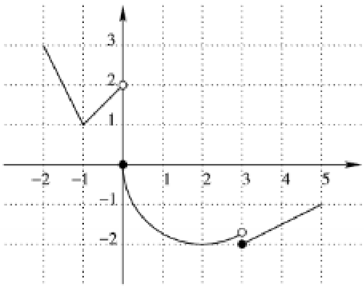
$\left|\frac{1-x}{2x+4}\right| \geqslant 1 \Leftrightarrow \frac{1-x}{2x+4} \leqslant -1 \vee \frac{1-x}{2x+4} \geqslant 1 \Leftrightarrow \frac{1-x+2x+4}{2x+4} \leqslant 0 \vee \frac{1-x-(2x+4)}{2x+4} \geqslant 0$

$\Leftrightarrow \frac{x+5}{2x+4} \leqslant 0 \vee \frac{3x+3}{2x+4} \leqslant 0$. Pelas tabelas abaixo, $A = [-5,-2[\cup]-2,-1]$

		-5		-2	
$x+5$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$2x+4$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{x+5}{2x+4}$	$+$	0	$-$	$\times$	$+$

		-2		-1	
$3x+3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$2x+4$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{3x+3}{2x+4}$	$+$	$\times$	$-$	0	$+$

Questão 2. [3 valores] Considere a função $f : [-2, 5] \longrightarrow \mathbb{R}$ cujo gráfico se apresenta na figura anexa. No intervalo $[0, 3[$ o gráfico da função é um arco da circunferência centrada em $(2, 0)$ de raio 2, cuja equação é $(x-2)^2 + y^2 = 4$.



a) Indique o contradomínio de f.

$D'f = [-2,0] \cup [1,3]$

contradomínio de f

b) Classifique a função f quanto à injetividade.

f não é injetiva; por exemplo, $f(2) = f(3) = -2$

c) Determine $f^{-1}([1, 2])$.

$f^{-1}([1,2]) = [-\frac{3}{2}, 0[$

d) Indique os pontos de mínimo local de f, e o respetivo valor de f.

f tem 3 pontos de mínimo local:

$x_1 = -1$, $f(x_1) = 1$; $x_2 = 2$, $f(x_2) = -2$; $x_3 = 3$, $f(x_3) = -2$

e) Indique os pontos onde f é descontínua.

f é descontínua em 0 e em 3, uma vez que $\lim_{x \to 0} f(x)$ e $\lim_{x \to 3} f(x)$ não existem

f) Indique o maior valor positivo para δ de modo a que seja verdadeira a implicação seguinte:

$\delta = \sqrt{3}$

$$|x - 2| < \delta \Rightarrow |f(x) + 2| < 1.$$

$|f(x)+2| < 1 \Leftrightarrow -3 < f(x)+2 < 1 \Leftrightarrow -3 < f(x) < -1$.

$(x < 2 \wedge f(x) = -1) \Rightarrow (x-2)^2 = 3$, e então $x = 2-\sqrt{3}$. Então $2-\sqrt{3} < x < 2+\sqrt{3} \Rightarrow -3 < f(x) < -1$

Questão 3. [3,5 valores] Calcule cada um dos seguintes limites:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{ch} x - 1}{e^x - 1}$; *b)* $\lim_{x\to +\infty} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x \operatorname{sen} x}$.

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{ch} x - 1}{e^x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{e^x+e^{-x}}{2} - 1}{e^x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}-2}{2(e^x-1)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}(e^{2x}+1-2e^x)}{2(e^x-1)}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1)^{\cancel{2}}}{2e^x\cancel{(e^x-1)}} = \frac{0}{2} = 0$

b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x \operatorname{sen} x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\cancel{\operatorname{sen} x}\cos x}{x\cancel{\operatorname{sen} x}} = \lim_{x\to+\infty} 2\cos x \cdot \frac{1}{x} = 0,$

uma vez que $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ e a função $2\cos x$ é limitada $(\forall x\in\mathbb{R} \ \ -2 \leq 2\cos x \leq 2)$.

Questão 4. [3,5 valores] Considere as funções f e g definidas por

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \leq 0 \\ 1-x, & x > 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \in \mathbb{Z} \\ 1-x, & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Identifique os pontos onde cada uma das funções f e g é contínua.

b) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

a) • $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1 = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$ pelo que f é contínua em $x=0$; nos restantes pontos f é contínua por ser uma função polinomial, quer no intervalo $]-\infty,0[$ quer no intervalo $]0,+\infty[$. Assim, f é contínua em todo o domínio.

• Seja $z\in\mathbb{Z}$. Então, como $\lim_{x\to z} g(x) = 1-z$ e $g(z) = z^2+1$, g é contínua em z se e só se $1-z = z^2+1$, isto é, quando $z(z+1)=0$, ou seja, $z=-1$ ou $z=0$.

Em $]z,z+1[$, a função g é contínua, por ser polinomial. Então g é contínua em $(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}) \cup \{-1,0\}$

b) ver última página

Questão 5. [3 valores] Em cada alínea, apresente um exemplo ou justifique porque não existe:

a) Dois números irracionais a e b tais que $10^{-3} < |a-b| < 10^{-1}$;

$a = \pi$, $b = \pi + \frac{2}{1000}$

b) Um conjunto não limitado que possua supremo mas não tenha máximo;

$X =]-\infty, 0[$, $\sup X = 0$ e 0 não é máximo de X porque $0 \notin X$

c) Um conjunto não limitado cujo derivado seja um conjunto não vazio limitado;

$X = \mathbb{Z} \cup]0,1[$ é não limitado e $X' = [0,1]$

d) Uma função $f : [0,1] \to [0,1[$ contínua e sobrejetiva;

Não existe. A imagem por uma função contínua de um intervalo fechado limitado é um intervalo fechado. Como $[0,1[$ não é um intervalo fechado, f não é sobrejetiva

e) Uma função contínua definida num intervalo limitado que não tenha mínimo mas tenha máximo;

$$f :]0,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto -\frac{1}{x}$$

f é estritamente decrescente e $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, logo f não tem mínimo.

$f(1) = -1 = \max f$

f) Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, par e monótona.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 0$$

II

Em cada uma das questões seguintes, assinale neste enunciado, a afirmação verdadeira; não deve apresentar qualquer justificação.
Cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta 0,25 valores.

Questão 1. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{\cos x}$. Então

- ● f é par e limitada.
- ○ f é monótona e tem máximo.
- ○ f é injetiva e crescente.
- ○ f é não limitada e não monótona.

Questão 2. Seja $f : \mathbb{R}_0^- \to [-5, +\infty[$ tal que $f(x) = x^2 - 5$

- ○ $f^{-1}(x) = \sqrt{x+5}$.
- ● $f^{-1}(x) = -\sqrt{x+5}$.
- ○ $f^{-1}(x) = \frac{1}{x^2-5}$.
- ○ f não é invertível.

Questão 3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x$. Então

- ○ f anula-se em pelo menos um ponto.
- ○ f é sobrejetiva.
- ● f é crescente.
- ○ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Questão 4. O valor de $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{5\pi}{7}\right)$ é

- ○ $\frac{5\pi}{7}$.
- ● $-\frac{2\pi}{7}$.
- ○ $\frac{\pi}{7}$.
- ○ $\frac{2\pi}{7}$.

Questão 5. Para todo o $x \in [-1,1]$ verifica-se que

- ○ $\operatorname{sen}(\arccos x) = x - \frac{\pi}{2}$.
- ○ $\operatorname{arcsen}^2 x + \arccos^2 x = 1$.
- ○ $\operatorname{sen}(2 \operatorname{arcsen} x) = 2x$.
- ● $\operatorname{sen}(2\arccos x) = 2\,x\,\operatorname{sen}(\arccos x)$.

Questão 4

b) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (1 - x) = -\infty$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}}} (1 - x) = -\infty \\ \lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ x \in \mathbb{Z}}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ x \in \mathbb{Z}}} (x^2 + 1) = +\infty \end{array}\right\}$$

Como $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}}} g(x) \neq \lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ x \in \mathbb{Z}}} g(x)$

então $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ não existe