Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática

Cálculo

Mestrado Integrado em Engenharia Informática

2020/2021

Exercício 6.1 Calcule:

1) $\displaystyle\int (3x^2 - 2x^5)\,dx;$

2) $\displaystyle\int (\sqrt{x}+2)^2\,dx;$

3) $\displaystyle\int (2x+10)^{20}\,dx;$

4) $\displaystyle\int x^2 e^{x^3}\,dx;$

5) $\displaystyle\int x^4(x^5+10)^9\,dx;$

6) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x+3}\,dx;$

7) $\displaystyle\int \sqrt{2x+1}\,dx;$

8) $\displaystyle\int \frac{x}{3-x^2}\,dx;$

9) $\displaystyle\int \frac{1}{4-3\,x}\,dx;$

10) $\displaystyle\int \frac{1}{e^{3x}}\,dx;$

11) $\displaystyle\int \frac{-7}{\sqrt{1-5x}}\,dx;$

12) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+3\,\ln x}}{x}\,dx;$

13) $\displaystyle\int x\ \operatorname{sen} x^2\,dx;$

14) $\displaystyle\int \frac{1}{x(\ln^2 x+1)}\,dx;$

15) $\displaystyle\int \left(\frac{2}{x}-3\right)^2 \frac{1}{x^2}\,dx;$

16) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(\pi - 2\,x)\,dx;$

17) $\displaystyle\int \operatorname{th} x\,dx;$

18) $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\ \cos x\,dx;$

19) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(2x)\ \cos x\,dx;$

20) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x\,dx;$

21) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 \tfrac{x}{2}\ \cos^2 \tfrac{x}{2}\,dx;$

22) $\displaystyle\int \cos^3 x\,dx;$

23) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-1}\,dx;$

24) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx;$

25) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\ \operatorname{sen}(\ln x)\,dx;$

26) $\displaystyle\int \frac{-3}{x\,(\ln x)^3}\,dx;$

27) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx;$

28) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1-2e^x}\,dx;$

29) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2(7x)}\,dx;$

30) $\displaystyle\int \left(\sqrt{2x-1}-\sqrt{1+3x}\right)\,dx;$

31) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\ \left(1+\ln^2 x\right)\,dx;$

32) $\displaystyle\int \frac{2\ +\ \sqrt{\operatorname{arctg}(2x)}}{1+4x^2}\,dx;$

33) $\displaystyle\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,dx;$

34) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1+\cos x}}\,dx.$

Exercício 6.2 Calcule:

a) $\displaystyle\int \ln x\,dx;$

b) $\displaystyle\int x\ \operatorname{sen}(2x)\,dx;$

c) $\displaystyle\int \operatorname{arctg} x\,dx;$

d) $\displaystyle\int x\cos x\,dx;$

e) $\displaystyle\int \ln(1-x)\,dx;$

f) $\displaystyle\int x\ \ln x\,dx;$

g) $\displaystyle\int x^2 \operatorname{sen} x\,dx;$

h) $\displaystyle\int x\ \operatorname{sen} x\ \ \cos x\,dx;$

i) $\displaystyle\int \ln^2 x\,dx;$

j) $\displaystyle\int e^x \cos x\,dx;$

k) $\displaystyle\int \operatorname{arcsen} x\,dx;$

l) $\displaystyle\int e^{\operatorname{sen} x}\ \operatorname{sen} x\ \cos x\,dx;$

m) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arcsen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx;$

n) $\displaystyle\int x\ \operatorname{arctg} x\,dx;$

o) $\displaystyle\int x^2\ \ln x\,dx;$

p) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(\ln x)\,dx;$

q) $\displaystyle\int \operatorname{ch} x\ \operatorname{sen}(3x)\,dx;$

r) $\displaystyle\int x^3\,e^{x^2}\,dx.$

Exercício 6.3 Usando o método de substituição, calcule:

a) $\displaystyle\int x\ (x+3)^{1/3}\ dx;$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sen} x}\, dx;$

c) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{2-3x}}\, dx;$

d) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx;$

e) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{3+e^{x}}\, dx;$

f) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx;$

g) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt[3]{x}}\, dx;$

h) $\displaystyle\int \sqrt{1+x^2}\, dx.$

Exercício 6.4 Calcule:

a) $\displaystyle\int \frac{2x^2+x+1}{(x-1)(x+1)^2}\, dx;$

b) $\displaystyle\int \frac{3x^2-4x-1}{(x^2-1)(x-2)}\, dx;$

c) $\displaystyle\int \frac{2x^2-x-2}{x^2(x-2)}\, dx;$

d) $\displaystyle\int \frac{2x^3+5x^2+6x+2}{x(x+1)^3}\, dx;$

e) $\displaystyle\int \frac{x^2-x+2}{x(x^2-1)}\, dx;$

f) $\displaystyle\int \frac{4x^2+x+1}{x^3-x}\, dx;$

g) $\displaystyle\int \frac{27}{x^4-3\,x^3}\, dx;$

h) $\displaystyle\int \frac{x^4-8}{x^3-2\,x^2}\, dx;$

i) $\displaystyle\int \frac{x+3}{(x-2)\,(x^2-2\,x+5)}\, dx;$

j) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x(x^2+1)^2}\, dx;$

k) $\displaystyle\int \frac{x+2}{2x(x-1)^2(x^2+1)}\, dx;$

l) $\displaystyle\int \frac{3x^3+x^2-x-1}{x^2(x^2-1)}\, dx.$

Exercício 6.5 Calcule:

a) $\displaystyle\int \frac{1}{(2+\sqrt{x})^7\,\sqrt{x}}\, dx;$

b) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x\, dx;$

c) $\displaystyle\int \frac{x+(\operatorname{arcsen}(3x))^2}{\sqrt{1-9\,x^2}}\, dx;$

d) $\displaystyle\int \frac{x\, e^{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx;$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x\ \operatorname{sen}^2 x}\, dx;$

f) $\displaystyle\int \cos^2 x\ \operatorname{sen}^2 x\, dx;$

g) $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^{x}}\, dx;$

h) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}\, dx.$

Exercício 6.6 Sendo $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^2\operatorname{sen} x$, calcule a primitiva de f cujo gráfico passa pelo ponto $(\frac{\pi}{2},\pi)$.

Exercício 6.7 Em cada alínea, determine a única função $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, duas vezes derivável, tal que:

a) $f''(x)=4x-1,\quad x\in\mathbb{R},\quad f(1)=3$ e $f'(2)=-2;$

b) $f''(x)=\operatorname{sen} x\cos x,\quad x\in\mathbb{R},\quad f(0)=0$ e $f'(0)=1.$

Exercício 6.8 Calcule os seguintes integrais:

a) $\displaystyle\int_0^1 e^{\pi x}\,dx$;

b) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\operatorname{sen} x|\,dx$;

c) $\displaystyle\int_{-3}^{5} |x-1|\,dx$;

d) $\displaystyle\int_0^2 |(x-1)(3x-2)|\,dx$;

e) $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$;

f) $\displaystyle\int_{-5}^{0} 2x\sqrt{4-x}\,dx$;

g) $\displaystyle\int_{3/4}^{4/3} \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}\,dx$;

h) $\displaystyle\int_0^1 \log(x^2+1)\,dx$;

i) $\displaystyle\int_0^2 x^3\,e^{x^2}\,dx$;

j) $\displaystyle\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} x\,dx$;

k) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}/2} \operatorname{arcsen} x\,dx$;

l) $\displaystyle\int_{-3}^{2} \sqrt{|x|}\,dx$;

m) $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$, com
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } 0 \le x \le 1, \\ 2-x & \text{se } 1 < x \le 2; \end{cases}$$

n) $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx$, com
$$g(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \le x \le 1/2, \\ -x & \text{se } 1/2 < x \le 1. \end{cases}$$

Exercício 6.9 Dado $a \in \mathbb{R}^+$, seja $f : [-a,a] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável. Mostre que:

a) se f é par então $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$;

b) se f é ímpar então $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

Exercício 6.10 Dados $a < b \in \mathbb{R}$, mostre que se $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 0$, então existe $c \in\,]a,b[$ tal que $f(c)=0$.

Exercício 6.11 Em cada uma das alíneas, calcule a função derivada de F, sendo F definida por:

a) $F(x) = \displaystyle\int_0^x (1+t^2)^{-3}\,dt,\ x \in \mathbb{R}$;

b) $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} (1+t^2)^{-3}\,dt,\ x \in \mathbb{R}$;

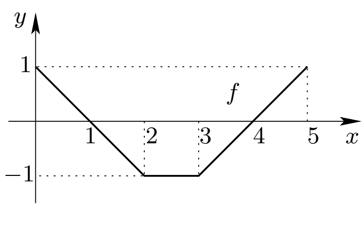
c) $F(x) = \displaystyle\int_{x^3}^{x^2} \frac{t^6}{1+t^4}\,dt,\ x \in \mathbb{R}$.

Exercício 6.12 Sabendo que $f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e satisfaz a igualdade abaixo para $x \ge 0$, calcule f em cada um dos seguintes casos:

a) $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt = x^2(1+x)$;

b) $\displaystyle\int_0^{x^2} f(t)\,dt = x^3e^x - x^4$.

Exercício 6.13 Considere $F : \left[0,\sqrt{5}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} f(t)\,dt$, onde a função $f : [0,5] \longrightarrow \mathbb{R}$ é aquela cujo gráfico está representado na figura. Determine $F\left(\sqrt{3}\right)$ e $F'\left(\sqrt{3}\right)$.



Exercício 6.14 Dê exemplo de, ou mostre porque não existe:

a) uma função $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ não integrável;

b) uma função $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivável mas não integrável;

c) uma função $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivável mas não primitivável;

d) uma função $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ primitivável mas não derivável;

e) uma função $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrável mas não primitivável;

f) uma função $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ não integrável tal que $|f|$ seja integrável.

Exercício 6.15 Em cada alínea calcule a área da região limitada pelas curvas de equações:

a) $x = 1, \quad x = 4, \quad y = \sqrt{x}, \quad y = 0;$

b) $x = 0, \quad x = 1, \quad y = 3x, \quad y = -x^2 + 4;$

c) $x = 0, \quad x = 2, \quad x^2 + (y-2)^2 = 4, \quad x^2 + (y+2)^2 = 4;$

d) $x = 0, \quad x = \pi/2, \quad y = \operatorname{sen} x, \quad y = \cos x;$

e) $x = -1, \quad y = |x|, \quad y = 2x, \quad x = 1;$

f) $y = -x^3, \quad y = -(4x^2 - 4x);$

g) $y = -x^2 + \dfrac{7}{2}, \quad y = x^2 - 1;$

h) $y = 0, \quad x = -\ln 2, \quad x = \ln 2, \quad y = \operatorname{sh} x.$

Exercício 6.16 Escreva uma expressão integral que permita calcular a área de cada uma das seguintes regiões:

a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2 \ \wedge \ -x \le y \le x^2\};$

b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + y^2 \le 4 \ \wedge \ 0 \le y \le x\};$

c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \le 1\};$

d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \le y \le x + 1\};$

e) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 2 \ \wedge \ 0 \le y \le e^x \ \wedge \ 0 \le y \le e^{-x}\};$

f) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2 \ \wedge \ 0 \le y \le x^2 \ \wedge \ 0 \le y \le 2 - x\};$

g) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \ge 0 \ \wedge \ y \ge x^2 - 2x \ \wedge \ y \le 4\};$

h) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \le 3 \ \wedge \ y \ge x^2 - 4x + 3 \ \wedge \ y \le -x^2 + 5x - 4\}.$