**Universidade do Minho** **LEI | MIEI**
**Departamento de Matemática** **2021/2022**

**Elementos de Probabilidades e Teoria de Números**

**Elementos de Probabilidades - Formulário**

## Cap. I: Probabilidades

**[Probabilidade - definição e propriedades]** Uma probabilidade sobre o espaço amostral $\Omega$ é uma função que a cada acontecimento $A \subseteq \Omega$ associa um número real, $P(A)$, que satisfaz 3 axiomas:
i) $P(A) \geq 0$; ii) $P(\Omega) = 1$;
iii) $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots$, para quaisquer $A_1, A_2, A_3, \ldots$ disjuntos 2 a 2.

Propriedades:

i) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
ii) Se $A \subseteq B$ então $P(A) \leq P(B)$
iii) $P(\emptyset) = 0$ e $0 \leq P(A) \leq 1$
iv) $P(B \cap \overline{A}) = P(B) - P(B \cap A)$
v) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
vi) [Fórmula de Poincaré]

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} \sum_{k=j+1}^{n} P(A_i \cap A_j \cap A_k)$$
$$- \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} \sum_{k=j+1}^{n} \sum_{l=k+1}^{n} P(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l) + \ldots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$$

**[Probabilidade condicionada - definição e propriedades]** $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, com $P(B) > 0$.

Teorema da Probabilidade Total e Fórmula de Bayes: Se $A_1, A_2, \ldots$ formam uma partição de $\Omega$ e $P(A_i) > 0$, $i = 1, 2, \ldots$, então

$$P(B) = P(B \mid A_1)P(A_1) + P(B \mid A_2)P(A_2) + \ldots + P(B \mid A_n)P(A_n) + \ldots \quad \text{[TPT]}$$

Adicionalmente, se $P(B) > 0$,

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(B \mid A_i)\, P(A_i)}{P(B \mid A_1)P(A_1) + P(B \mid A_2)P(A_2) + \ldots + P(B \mid A_n)P(A_n) + \ldots} \quad \text{[Bayes]}$$

Regra da Multiplicação: Se $P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) > 0$ então

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \ldots P\left(A_n \mid \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)$$

**[Acontecimentos independentes - definição]** Diz-se que $n$ acontecimentos são independentes se, para quaisquer $r$ desses acontecimentos, com $2 \leq r \leq n$, a probabilidade da intersecção dos $r$ acontecimentos é igual ao produto das respectivas probabilidades.

## Cap. II: Variáveis Aleatórias (v.a.)

**[Discretas]** $X$ diz-se v.a. discreta se o seu contradomínio é um conjunto finito ou infinito numerável. É caracterizada pelo contradomínio, $C_X$, e pela função massa de probabilidade (f.m.p.)

$$X : \begin{cases} x_1 & x_2 & x_3 & \ldots \\ P(X = x_1) & P(X = x_2) & P(X = x_3) & \ldots \end{cases} .$$

Para um qualquer $B \subseteq \mathbb{R}$, tem-se: $P(X \in B) = \sum_{x_i \in C_X \,:\, x_i \in B} P(X = x_i)$.

**[Contínuas]** $X$ diz-se v.a. contínua se o seu contradomínio é infinito não numerável e é caracterizada por uma função densidade de probabilidade, $f$. Para $B \subseteq \mathbb{R}$, tem-se: $P(X \in B) = \int_B f(x)dx$.

Nota: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função densidade de probabilidade se $f(x) \geq 0$ e $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

**[Função de distribuição - definição e propriedades]** A função de distribuição da v.a. $X$ é

$$\begin{array}{rccl} F: & \mathbb{R} & \longrightarrow & [0,1] \\ & c & \mapsto & F(c)=P(X\leq c) \end{array}.$$

Propriedades: i) $F$ é não decrescente e contínua à direita
ii) $\lim\limits_{c\to-\infty} F(c)=0$ e $\lim\limits_{c\to+\infty} F(c)=1$ iii) $P(a<X\leq b)=F(b)-F(a)$

**[Valor médio e variância]**: O valor médio da v.a. $X$, denotado por $\mu_X$ ou $E[X]$, é dado por

$$\mu_X=\sum_{x_i\in C_X} x_iP(X=x_i) \quad , \quad \mu_X=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx.$$

(caso discreto) (caso contínuo)

A variância da v.a $X$, denotada por $\sigma_X^2$ ou $Var[X]$, é dada por $Var[X]=E[(X-\mu_X)^2]$.
Em particular, quando $E[X^2]$ existe, a variância reduz-se a $Var[X]=E[X^2]-(E[X])^2$, ou seja, a

$$Var[X]=\left[\sum_{x_i\in C_X} x_i^2P(X=x_i)\right]-(E[X])^2 \quad , \quad Var[X]=\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x)dx\right]-(E[X])^2.$$

(caso discreto) (caso contínuo)

**[Quantil de ordem $p$]**: Se $X$ tem função de distribuição $F$, o quantil de ordem $p$, com $p\in]0,1[$, denota-se por $\chi_p$, é dado por $\chi_p=\inf\{c\in\mathbb{R}: F(c)\geq p\}$.

**[Variáveis independentes]** Dadas $n\geq 2$ variáveis aleatórias, $X_1,X_2,\ldots,X_n$, estas dizem-se independentes se, para todos os $B_1,B_2,\ldots,B_n$ subconjuntos de $\mathbb{R}$,

$$P((X_1,X_2,\ldots,X_n)\in(B_1\times B_2\times\ldots\times B_n))=\prod_{i=1}^{n} P(X_i\in B_i)$$

**[Propriedades do valor médio e variância]** Para quaisquer $X$, $X_1,X_2,\ldots X_n$ v.a., tem-se

i) $E[aX+b]=aE[X]+b$ e $Var[aX+b]=a^2Var[X]$, quaisquer que sejam as constantes $a,b\in\mathbb{R}$
ii) $E[X_1+X_2+\ldots+X_n]=E[X_1]+E[X_2]+\ldots+E[X_n]$;
iii) Se as v.a. são independentes então $Var[X_1+X_2+\ldots+X_n]=Var[X_1]+Var[X_2]+\ldots+Var[X_n]$.

**[Distribuição Binomial]** Diz-se que $X$ segue a distribuição Binomial com parâmetros $n$ e $p$, com $n\in\mathbb{N}$ e $p\in]0,1[$, abrevia-se por $X\sim Bin(n,p)$, se $X$ é discreta com $C_X=\{0,1,\ldots,n\}$ e f.m.p. dada por

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},\ k\in C_X. \quad \underline{\text{Nota}}: E[X]=np \text{ e } Var[X]=np(1-p).$$

**[Distribuição de Poisson]** Diz-se que $X$ segue a distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda$, com $\lambda\in\mathbb{R}^+$, abrevia-se por $X\sim Poisson(\lambda)$, se $X$ é discreta com $C_X=\mathbb{N}_0$ e f.m.p. dada por

$$P(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\ k=0,1,2,3,\ldots. \quad \underline{\text{Nota}}: E[X]=Var[X]=\lambda.$$

**[Distribuição Uniforme em $[a,b]$]** Diz-se que $X$ segue a distribuição Uniforme no intervalo $[a,b]$, abrevia-se por $X\sim U([a,b])$, se $X$ é contínua e tem função densidade de probabilidade dada por

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{se} \quad a\leq x\leq b \\ 0 & \text{se} \quad \text{caso contrário} \end{cases}.$$

A função de distribuição é $F_X(c)=\begin{cases} 0 & se \quad c<a \\ \frac{c-a}{b-a} & se \quad a\leq c\leq b \\ 1 & se \quad c>b \end{cases}$. Nota: $E[X]=\frac{a+b}{2}$ e $Var[X]=\frac{(b-a)^2}{12}$.

**[Distribuição Exponencial]** Diz-se que $T$ segue a distribuição Exponencial com parâmetro $\lambda$, com $\lambda\in\mathbb{R}^+$, abrevia-se por $T\sim Exp(\lambda)$, se $T$ é contínua e tem função densidade de probabilidade dada por

$$f(x)=\begin{cases} 0 & se \quad x<0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & se \quad x\geq 0 \end{cases}.$$

A função de distribuição é $F_T(c)=\begin{cases} 0 & se \quad c<0 \\ 1-e^{-\lambda c} & se \quad c\geq 0 \end{cases}$. Nota: $E[T]=\frac{1}{\lambda}$ e $Var[T]=\frac{1}{\lambda^2}$.

**[Distribuição Normal]** Diz-se que $X$ segue a distribuição Normal com parâmetros $\mu$ e $\sigma^2$, com $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma > 0$, abrevia-se por $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, se $X$ é contínua e tem função densidade de probabilidade

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2 \right\}, \; x \in \mathbb{R}. \quad \underline{\text{Nota}} : E[X] = \mu \text{ e } Var[X] = \sigma^2.$$

Propriedades da distribuição Normal:

i) Se $Z \sim N(0,1)$ então $\chi_p = \chi_{1-p}$ e $F_{N(0,1)}(-c) = 1 - F_{N(0,1)}(c)$, para todo $c \in \mathbb{R}$.

ii) Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ então, para quaisquer contantes reais $a \neq 0$ e $b$, $aX + b \sim N(a\mu + b\,,\, a^2\sigma^2)$.

iii) Sejam $X_1, \ldots, X_n$ são v.a.'s independentes e tais que $X_i \sim N\left(\mu_i, \sigma_i^2\right)$, $i = 1, \ldots, n$. Então

$$Y = \sum_{i=1}^{n} a_i\, X_i \sim N\left( \sum_{i=1}^{n} a_i\, \mu_i\,,\, \sum_{i=1}^{n} a_i^2\, \sigma_i^2 \right).$$

iv) [Teorema Limite Central] Sejam $X_1, X_2, \ldots$ v.a.'s i.i.d.'s, com valor médio $\mu$ e variância finita $\sigma^2$, e considere-se a v.a. $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Então, a função de distribuição da v.a. $\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$ converge, quando $n \to +\infty$, para a função de distribuição da $N(0,1)$, i.e.,

$$P\left( \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \leq c \right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} F_{N(0,1)}(c), \; c \in \mathbb{R}.$$

## Tabela da Distribuição Normal Reduzida

| Z | 0 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0,0** | 0,0000 | 0,0040 | 0,0080 | 0,0120 | 0,0160 | 0,0199 | 0,0239 | 0,0279 | 0,0319 | 0,0359 |
| **0,1** | 0,0398 | 0,0438 | 0,0478 | 0,0517 | 0,0557 | 0,0596 | 0,0636 | 0,0675 | 0,0714 | 0,0753 |
| **0,2** | 0,0793 | 0,0832 | 0,0871 | 0,0910 | 0,0948 | 0,0987 | 0,1026 | 0,1064 | 0,1103 | 0,1141 |
| **0,3** | 0,1179 | 0,1217 | 0,1255 | 0,1293 | 0,1331 | 0,1368 | 0,1406 | 0,1443 | 0,1480 | 0,1517 |
| **0,4** | 0,1554 | 0,1591 | 0,1628 | 0,1664 | 0,1700 | 0,1736 | 0,1772 | 0,1808 | 0,1844 | 0,1879 |
| **0,5** | 0,1915 | 0,1950 | 0,1985 | 0,2019 | 0,2054 | 0,2088 | 0,2123 | 0,2157 | 0,2190 | 0,2224 |
| **0,6** | 0,2257 | 0,2291 | 0,2324 | 0,2357 | 0,2389 | 0,2422 | 0,2454 | 0,2486 | 0,2517 | 0,2549 |
| **0,7** | 0,2580 | 0,2611 | 0,2642 | 0,2673 | 0,2704 | 0,2734 | 0,2764 | 0,2794 | 0,2823 | 0,2852 |
| **0,8** | 0,2881 | 0,2910 | 0,2939 | 0,2967 | 0,2995 | 0,3023 | 0,3051 | 0,3078 | 0,3106 | 0,3133 |
| **0,9** | 0,3159 | 0,3186 | 0,3212 | 0,3238 | 0,3264 | 0,3289 | 0,3315 | 0,3340 | 0,3365 | 0,3389 |
| **1,0** | 0,3413 | 0,3438 | 0,3461 | 0,3485 | 0,3508 | 0,3531 | 0,3554 | 0,3577 | 0,3599 | 0,3621 |
| **1,1** | 0,3643 | 0,3665 | 0,3686 | 0,3708 | 0,3729 | 0,3749 | 0,3770 | 0,3790 | 0,3810 | 0,3830 |
| **1,2** | 0,3849 | 0,3869 | 0,3888 | 0,3907 | 0,3925 | 0,3944 | 0,3962 | 0,3980 | 0,3997 | 0,4015 |
| **1,3** | 0,4032 | 0,4049 | 0,4066 | 0,4082 | 0,4099 | 0,4115 | 0,4131 | 0,4147 | 0,4162 | 0,4177 |
| **1,4** | 0,4192 | 0,4207 | 0,4222 | 0,4236 | 0,4251 | 0,4265 | 0,4279 | 0,4292 | 0,4306 | 0,4319 |
| **1,5** | 0,4332 | 0,4345 | 0,4357 | 0,4370 | 0,4382 | 0,4394 | 0,4406 | 0,4418 | 0,4429 | 0,4441 |
| **1,6** | 0,4452 | 0,4463 | 0,4474 | 0,4484 | 0,4495 | 0,4505 | 0,4515 | 0,4525 | 0,4535 | 0,4545 |
| **1,7** | 0,4554 | 0,4564 | 0,4573 | 0,4582 | 0,4591 | 0,4599 | 0,4608 | 0,4616 | 0,4625 | 0,4633 |
| **1,8** | 0,4641 | 0,4649 | 0,4656 | 0,4664 | 0,4671 | 0,4678 | 0,4686 | 0,4693 | 0,4699 | 0,4706 |
| **1,9** | 0,4713 | 0,4719 | 0,4726 | 0,4732 | 0,4738 | 0,4744 | 0,4750 | 0,4756 | 0,4761 | 0,4767 |
| **2,0** | 0,4772 | 0,4778 | 0,4783 | 0,4788 | 0,4793 | 0,4798 | 0,4803 | 0,4808 | 0,4812 | 0,4817 |
| **2,1** | 0,4821 | 0,4826 | 0,4830 | 0,4834 | 0,4838 | 0,4842 | 0,4846 | 0,4850 | 0,4854 | 0,4857 |
| **2,2** | 0,4861 | 0,4864 | 0,4868 | 0,4871 | 0,4875 | 0,4878 | 0,4881 | 0,4884 | 0,4887 | 0,4890 |
| **2,3** | 0,4893 | 0,4896 | 0,4898 | 0,4901 | 0,4904 | 0,4906 | 0,4909 | 0,4911 | 0,4913 | 0,4916 |
| **2,4** | 0,4918 | 0,4920 | 0,4922 | 0,4925 | 0,4927 | 0,4929 | 0,4931 | 0,4932 | 0,4934 | 0,4936 |
| **2,5** | 0,4938 | 0,4940 | 0,4941 | 0,4943 | 0,4945 | 0,4946 | 0,4948 | 0,4949 | 0,4951 | 0,4952 |
| **2,6** | 0,4953 | 0,4955 | 0,4956 | 0,4957 | 0,4959 | 0,4960 | 0,4961 | 0,4962 | 0,4963 | 0,4964 |
| **2,7** | 0,4965 | 0,4966 | 0,4967 | 0,4968 | 0,4969 | 0,4970 | 0,4971 | 0,4972 | 0,4973 | 0,4974 |
| **2,8** | 0,4974 | 0,4975 | 0,4976 | 0,4977 | 0,4977 | 0,4978 | 0,4979 | 0,4979 | 0,4980 | 0,4981 |
| **2,9** | 0,4981 | 0,4982 | 0,4982 | 0,4983 | 0,4984 | 0,4984 | 0,4985 | 0,4985 | 0,4986 | 0,4986 |
| **3,0** | 0,4987 | 0,4987 | 0,4987 | 0,4988 | 0,4988 | 0,4989 | 0,4989 | 0,4989 | 0,4990 | 0,4990 |
| **3,1** | 0,4990 | 0,4991 | 0,4991 | 0,4991 | 0,4992 | 0,4992 | 0,4992 | 0,4992 | 0,4993 | 0,4993 |
| **3,2** | 0,4993 | 0,4993 | 0,4994 | 0,4994 | 0,4994 | 0,4994 | 0,4994 | 0,4995 | 0,4995 | 0,4995 |
| **3,3** | 0,4995 | 0,4995 | 0,4995 | 0,4996 | 0,4996 | 0,4996 | 0,4996 | 0,4996 | 0,4996 | 0,4997 |
| **3,4** | 0,4997 | 0,4997 | 0,4997 | 0,4997 | 0,4997 | 0,4997 | 0,4997 | 0,4997 | 0,4997 | 0,4998 |
| **3,5** | 0,4998 | 0,4998 | 0,4998 | 0,4998 | 0,4998 | 0,4998 | 0,4998 | 0,4998 | 0,4998 | 0,4998 |
| **3,6** | 0,4998 | 0,4998 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 |
| **3,7** | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 |
| **3,8** | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 |
| **3,9** | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 |