Universidade do Minho — MiEI
Dep. Matemática — 2019/2020

Tópicos de Matemática Discreta

——— segundo teste **A** — 8 de janeiro de 2020 ——— duração: 2 horas ———

nome: ______________________________ número ________

GRUPO I.

Em cada exercício deste grupo, apresente a sua resposta sem justificar.

1. [**2 valores**] Considere as funções $f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{Z}$, $g:\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Z}$ e $h:\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Z}$ definidas por:

$$f(n)=(-1)^n\,2n+\frac{1}{2}[(-1)^n-1]; \qquad g(n)=-3n^2; \qquad h(n)=\begin{cases}2n, & \text{se } n\geq 0\\ 1, & \text{se } n<0.\end{cases}$$

(a) $f(\{1,6,13\})=$ ______________________________

(b) $f^{\leftarrow}(\{-15,0,24\})=$ ______________________________

(c) $g^{\leftarrow}(\{-3,5\})=$ ______________________________

(d) $(h\circ g)(n)=$ ______________________________

2. [**2 valores**] Sejam $a,b\in\mathbb{R}$ e $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ a função definida por $g(x)=ax+b$. Indique valores para a e b de modo que

(a) $g(\mathbb{N})\subseteq\mathbb{Z}^-$: $a=$ __________ $b=$ __________

(b) g não seja injetiva: $a=$ __________ $b=$ __________

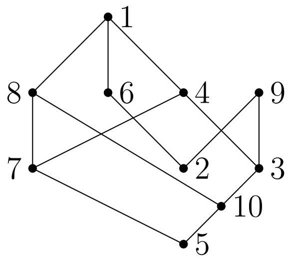
3. [**2 valores**] Dados $A=\{a,b,c\}$ e $B=\{1,2,3\}$, considere as relações binárias $R=\{(a,2),(a,3),(b,1),(c,2)\}$ e $S=\{(2,a),(2,c),(3,a)\}$ de A para B e de B para A, respetivamente.

(a) $R^{-1}\cap S=$ ______________________________

(b) $S\circ R=$ ______________________________

(c) $\mathrm{Dom}(S^{-1})\setminus\mathrm{Im}(S\circ R)=$ ______________________________

4. [3,5 valores] Considere o c.p.o. $(A, \leq)$ definido pelo seguinte diagrama de Hasse.



Indique:

(a) os elementos maximais de A: ______________________________

(b) o conjunto dos majorantes de $X = \{7, 10\}$: ______________________________

(c) elementos $a, b \in A$ incomparáveis tais que existe $\sup(\{a, b\})$: $a =$ ______ $b =$ ______

(d) elementos $c, d \in A$ tais que não existe $\inf(\{c, d\})$: $c =$ ______ $d =$ ______

(e) um subconjunto Y de A com 4 ou mais elementos que seja uma cadeia: ______________

5. [2 valores] Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Considere a relação de equivalência R em A tal que $[1]_R = \{1, 3, 5\}$ e $(2, 4) \notin R$.

(a) $[2]_R =$ ______________________________

(b) $A/R =$ ______________________________

6. [1 valor] Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

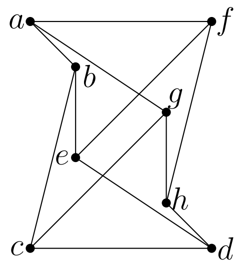
(a) Se $G = (V, E)$ é um grafo simples que tem A como matriz de adjacência, então

  (i) o número de vértices de G é ______________

  (ii) G tem ______________ vértices de grau par.

(b) Existe algum grafo simples que tem A como matriz de incidência? __________

7. [**2 valores**] Considere o grafo $G = (V, E)$ representado por



(a) Indique o tipo de qualquer matriz de incidência de G: ______________

(b) Indique um caminho de h para b, sem vértices repetidos, de comprimento 5.

____

(c) Indique um ciclo com vértice inicial f.

____

GRUPO II.

Responda às questões deste grupo justificando convenientemente as suas respostas.

1. [**2 valores**] Considere a função f definida no exercício **1.** do grupo anterior. Mostre que é injetiva.

2. [**2,5 valores**] Seja S a relação de equivalência em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definida por $x \; S \; y$ se e só se $xy^{-1} \in \{-1, 1\}$. Mostre que S é, de facto, simétrica e indique, justificando, a partição de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ induzida por S.

3. [**1 valor**] Considere o grafo do exercício **7.** do grupo anterior. Verifique se G é bipartido. Justifique a sua resposta.