Universidade do Minho
Escola de Engenharia

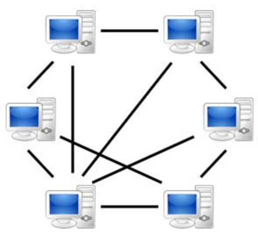
Introdução a Optimização

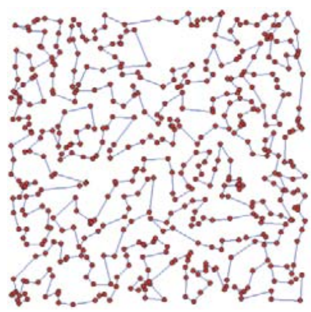
Filipe Alvelos
falvelos@dps.uminho.pt

Outubro 2014 – Fevereiro 2015

Porquê optimização?

- Exemplo “Travelling salesman problem”
- Determinar a ordem pela qual devem ser visitadas um conjunto de cidades de forma a que todas elas sejam visitadas uma e uma só vez e se termine na cidade em que se começou
- O objectivo é a distância total percorrida ser a menor possível





Porquê optimização?

- Algoritmo de enumeração completa (pesquisa exaustiva)
  - Obter o custo de cada um dos ciclos
  - Escolher o ciclo com menor custo
- O número de ciclos num problema com n cidades é $n!$
  - Para $n=10$, número de ciclos: $10! = 3628800$
  - Para $n=30$, número de ciclos: $30! = 2.65\times10^{32}$
    - Testando um bilião de alternativas por segundo (um computador muito bom!), o tempo total seria mais de oito milénios!
    - Estima-se que a idade do universo seja 4.4×10^{17} segundos
  - Para $n=100$, número de possibilidades: $100! = 9.3\times10^{157}$
    - Estima-se que o número de átomos no universo esteja entre 10^{78} e 10^{82}

Optimização

- São precisas outras abordagens porque há muitos problemas relevantes que são demasiado complexos / grandes para o bom senso (+ informática) ser responsável pelas decisões
  - programação linear e inteira
  - algoritmos específicos
  - heurístias (e meta-heurísticas)

- Problema de optimização

$$\begin{aligned}&Min\ f(s)\\&sujeito\ a:\\&s \in S\end{aligned}$$

  - s representa uma solução
  - S representa o conjunto das soluções admissíveis
  - $f(s)$ é a função objectivo (faz corresponder a cada s o seu valor)

Programação linear e inteira

- Se *f(x)* for uma função linear em que *x* é um vector de variáveis de decisão *contínuas* e *S* puder ser representado através de equações e/ou inequações lineares, tem-se um modelo de programação linear
- Se *f(x)* for uma função linear em que *x* é um vector de variáveis de decisão em que pelo menos algumas são binárias e/ou inteiras e *S* puder ser representado através de equações e/ou inequações lineares, tem-se um modelo de programação (linear) inteira mista
- Métodos para programação linear e inteira garantem a obtenção de uma solução óptima (solução que tem um valor maior (em maximização) / menor (em minimização) ou igual a qualquer solução admissível)
- Software para programação linear e inteira
  - Solver Excel
  - OpenSolver Excel
  - IBM ILOG CPLEX
  - ...

Programação linear

- Determinar dieta diária com menor custo possível que cumpra determinados requisitos nutritivos.
- Requisitos nutritivos diários:
  - exactamente 3000 calorias;
  - pelo menos 100 gramas de proteínas.
  - Alimentos disponíveis A, B e C, com preços e composição nutritiva dados na tabela.

	Calorias / unidade de alimento	Proteínas (gramas / unidade de alimento)	Custo (€ / unidade de alimento)
A	1000	20	10
B	1000	50	10
C	3000	50	20

Programação linear

x_j – quantidade a ingerir diariamente do alimento j, $j = 1,2,3$

$Min\ z = 10x_1 + 10x_2 + 20x_3$

$s.a.:$

$1000x_1 + 1000x_2 + 3000x_3 = 3000$

$20x_1 + 50x_2 + 50x_3 \geq 100$

$x_j \geq 0, j = 1,2,3$

Programação linear

- Uma determinada empresa produz três tipos de produtos (A, B e C) que são processados em duas máquinas (M1 e M2). O tempo de processamento (em minutos por unidade processada), a capacidade das máquinas (em minutos) e o lucro obtido (em unidades monetárias por unidade produzida) são dados na tabela. Pretende-se determinar as quantidades a produzir de cada produto de forma a maximizar o lucro total.

	A	B	C	Capacidade (minutos)
M1	13	12	15	200
M2	21	18	14	220
Lucro (U.M./unidade)	160	100	150	

Programação linear

$x_j - quantidade$ a produzir do produto $j = 1,2,3.$

$Max\ z = 160x_1 + 100x_2 + 150x_3$

$s.a:$

$13x_1 + 12x_2 + 15x_3 \leq 200$

$21x_1 + 18x_2 + 14x_3 \leq 220$

$x_j \geq 0,\ j = 1,2,3.$

Programação linear

- Uma empresa de distribuição pretende transportar um determinado produto de três locais onde está disponível (A, B e C) para outros três locais (1, 2, e 3). Nos locais A, B e C estão disponíveis 20, 30 e 40 unidades do produto, respectivamente. Nos locais 1, 2 e 3 são necessárias 15, 25 e 50 unidades, respectivamente. Na tabela em baixo, apresentam-se os custos de transportar uma unidade entre cada local origem e cada local destino. Pretende-se determinar as quantidades a enviar entre cada local origem e cada local destino de forma a minimizar o custo total de transporte.

	1	*2*	*3*
A	9	5	4
B	8	2	3
C	4	5	8

Programação linear

x_{ij} – quantidade a transportar de i para $j, i = 1,2,3, j = 1,2,3.$

$Min\ z = 9x_{11} + 5x_{12} + 4x_{13} + 8x_{21} + 2x_{22} + 3x_{23} + 4x_{31} + 5x_{32} + 8x_{33}$

s.a :

$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 20$

$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 30$

$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 40$

$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 15$

$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 25$

$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 50$

$x_{ij} \geq 0, i = 1,2,3, j = 1,2,3.$

Programação inteira

- Seleccionar um conjunto de projectos, cada qual com um determinado orçamento e um determinado proveito, de tal forma que o orçamento disponível (20 unidades monetárias – UM) não seja excedido e o proveito total seja máximo.

Projecto	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Proveito	39	35	68	61	46	46	38	16	42	68	85	72	42	16	75	25	29	31	68	67
Orçamento	4	5	5	10	7	5	5	2	3	10	8	6	3	1	8	1	3	3	8	6

Programação inteira

- Variáveis de decisão
- $x_j = \begin{cases} 1, se\ projecto\ j\ \text{é}\ seleccionado \\ 0, caso\ contr\acute{a}rio \end{cases}, j = 1, \dots, 20$

- $Maz = 39x_1 + 35x_2 + \cdots + 67x_{20}$
- sujeito a:
- $4x_1 + 5x_2 + \cdots + 6x_{20} \leq 20$
- $x_j \in \{0,1\}, j = 1, \dots, 20$

Programação inteira

- Num determinado serviço de um hospital pretende-se fazer a escala de 10 enfermeiros para 10 turnos críticos. Cada enfermeiro deve trabalhar exactamente em um turno e em cada turno deve estar presente exactamente um enfermeiro. Na Tabela são apresentadas as preferências de cada enfermeiro em relação a cada turno numa escala de 1 a 10 em que 1 corresponde à preferência máxima. Pretende-se determinar qual o turno que cada enfermeiro deve efectuar.

Enfermeiro

Turno

1	1	1	3	5	3	5	1	1	2
3	2	2	7	9	9	6	2	3	1
2	10	3	1	3	2	7	4	2	3
8	4	4	4	6	7	1	5	4	5
9	5	5	2	4	6	2	9	5	4
4	3	6	5	7	5	3	10	6	8
5	6	7	8	10	4	8	6	10	7
7	7	8	9	1	10	9	8	9	6
6	8	9	10	2	8	10	7	7	10
10	9	10	6	8	1	4	3	8	9

Programação inteira

- Uma solução obtida com uma heurística

Enfermeiro

Turno	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	3	5	3	5	1	1	2
2	3	2	2	7	9	9	6	2	3	1
3	2	10	3	1	3	2	7	4	2	3
4	8	4	4	4	6	7	1	5	4	5
5	9	5	5	2	4	6	2	9	5	4
6	4	3	6	5	7	5	3	10	6	8
7	5	6	7	8	10	4	8	6	10	7
8	7	7	8	9	1	10	9	8	9	6
9	6	8	9	10	2	8	10	7	7	10
10	10	9	10	6	8	1	4	3	8	9

Programação inteira

- Variáveis de decisão
- $x_{ij} = \begin{cases} 1, se\ turno\ i\ fica\ com\ enfermeiro\ j \\ 0, caso\ contrário \end{cases}, i = 1, \ldots 10;\ j = 1, \ldots, 10$
- $Min\ z = x_{11} + x_{12} + x_{13} + 3x_{14} + \cdots + 9x_{10,10} = \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{10} p_{ij} x_{ij}$
- Restrições
- $x_{11} + x_{12} + x_{13} + \cdots + x_{1,10} = 1$
- $x_{21} + x_{22} + x_{23} + \cdots + x_{2,10} = 1$
- …
- $x_{10,1} + x_{10,2} + x_{10,3} + \cdots + x_{10,10} = 1$
- $x_{11} + x_{21} + x_{31} + \cdots + x_{10,1} = 1$
- …
- $x_{1,10} + x_{2,10} + x_{3,10} + \cdots + x_{10,10} = 1$
- $x_{ij} \in \{0,1\}\ \boldsymbol{OU\ x_{ij} \geq 0}$