

12.8

Uma empresa está a estudar a introdução de quatro novos produtos. O Departamento de Produção deve seleccionar os produtos a produzir, e em que quantidades. Existe um custo inicial associado à introdução de qualquer um dos produtos e lucros líquidos esperado por cada unidade de um novo produto, que são dados pela seguinte tabela:

| Produto | 1 | 2 | 3 | 4 |
|------------------------------|------|------|------|------|
| Custo inicial (U.M.) | 4000 | 5000 | 7000 | 6000 |
| Lucro líquido (U.M./unidade) | 50 | 60 | 30 | 40 |

Formule um modelo para determinar a melhor decisão, sabendo que:

- no máximo, só podem ser introduzidos três novos produtos,
- a selecção do produto 1 força a selecção do produto 3,
- das seguintes três restrições relativas ao processo tecnológico, uma poderá não ser efectiva:

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 20000$$

$$5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 20000$$

$$1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 \leq 5000$$

12.8 (cont.)

Identifique claramente o significado das variáveis de decisão, das restrições e da função objectivo. Teça todas as considerações que entender convenientes.

Dados

- Custo inicial (U.M.); Lucro líquido (U.M./unidade); dados das restrições tecnológicas

Variáveis de decisão

- x_i : número de unidades a produzir do produto i , $i=1, \dots, 4$.
- y_i : variável binária que indica a produção do produto i , $i=1, \dots, 4$.
- $rest_i$: variável binária que indica se a restrição i , $i=1, \dots, 3$, é obedecida.

Restrições

- no máximo, só podem ser introduzidos três novos produtos,
- a selecção do produto 1 força a selecção do produto 3,
- das três restrições indicadas relativas ao processo tecnológico, uma poderá não ser efectiva.

12.8 (cont.)

Função objetivo

- Maximizar lucro, sabendo que é necessário deduzir os custos iniciais, associados à introdução do produto

```
/* Objective function */  
max: 50x1 + 60x2 + 30x3 + 40x4  
      - 4000y1 - 5000y2 - 7000y3 - 6000y4 ;
```

12.8 Relação entre as variáveis x_i e y_i

- Sempre que uma variável x_i tomar um valor positivo, significando que há produção do produto i , a variável binária y_i associada, que sinaliza a produção do produto i deve tomar o valor 1.

```
x1 <= 100000 y1;
```

```
x2 <= 100000 y2;
```

```
x3 <= 100000 y3;
```

```
x4 <= 100000 y4;
```

12.8 Outras restrições

- no máximo, só podem ser introduzidos três novos produtos,

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \leq 3;$$

- a selecção do produto 1 força a selecção do produto 3,

$$y_1 \leq y_3;$$

- restrições de integralidade

$$\text{bin } y_1, y_2, y_3, y_4, \text{rest1}, \text{rest2}, \text{rest3};$$

12.8 Outras restrições

- das três restrições indicadas relativas ao processo tecnológico, uma poderá não ser efectiva

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 20000$$

$$5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 20000$$

$$1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 \leq 5000$$

// formato geral $Ax \leq b1 + M (1-rest)$

// formato geral $Ax \leq b1 + M - M rest$

$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 120000 - 100000 \text{ rest1};$

$5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 120000 - 100000 \text{ rest2};$

$1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 \leq 105000 - 100000 \text{ rest3};$

// uma restrição poderá não ser activa:

$\text{rest1} + \text{rest2} + \text{rest3} \geq 2; \text{ // restrição é activa quando } \text{resti} = 1$

12.8

Modelo

```
/* Objective function */
max: 50x1 + 60x2 + 30x3 + 40x4
     - 4000y1 - 5000y2 - 7000y3 - 6000y4 ;

/* restrições */

x1 <= 100000 y1;
x2 <= 100000 y2;
x3 <= 100000 y3;
x4 <= 100000 y4;

// máximo de três novos produtos
y1 + y2 + y3 + y4 <= 3;

// seleccao de 1 força seleccao de 3
y1 <= y3;

// formato geral Ax <= b1 + M (1-rest)
// formato geral Ax <= b1 + M - M rest
2x1 + 3x2 + 4x3 + 5x4 <= 120000 - 100000 rest1;
5x1 + 4x2 + 3x3 + 2x4 <= 120000 - 100000 rest2;
1x1 + 1x2 + 1x3 + 1x4 <= 105000 - 100000 rest3;

// uma restrição poderá não ser activa:
rest1 + rest2 + rest3 >= 2; // restrição é activa quando resti = 1

bin y1,y2,y3,y4,rest1,rest2,rest3;
int x1 x2 x3 x4;
```

12.8

Resultado

| <div>SourceMatrixOptionsResult</div> | | | | |
|--|---------------|-------------|-------------|--------|
| <div>ObjectiveConstraintsSensitivity</div> | | | | |
| Variables | MILP Feasible | MILP Better | MILP Better | result |
| | 284000 | 288980 | 303280 | 303280 |
| x1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| x2 | 5000 | 4999 | 4286 | 4286 |
| x3 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| x4 | 0 | 1 | 1428 | 1428 |
| y1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| y2 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| y3 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| y4 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| rest1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| rest2 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| rest3 | 1 | 1 | 0 | 0 |

12.8 Solução óptima

| Produto | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---------|---|------|---|------|
| yi | 0 | 1 | 0 | 1 |
| xi | 0 | 4286 | 0 | 1428 |

| Restrição | 1 | 2 | 3 |
|-----------|-----------|-----------|---------------|
| Rest i | 1 | 1 | 0 |
| ou seja: | obedecida | obedecida | não obedecida |

| Variables | result |
|-----------|--------|
| | 303280 |
| x1 | 0 |
| x2 | 4286 |
| x3 | 0 |
| x4 | 1428 |
| y1 | 0 |
| y2 | 1 |
| y3 | 0 |
| y4 | 1 |
| rest1 | 1 |
| rest2 | 1 |
| rest3 | 0 |

12.8

Verificação restrições

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 20000$$

$$5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 20000$$

$$1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 \leq 5000$$

```
2x1 + 3x2 + 4x3 + 5x4 <= 120000 - 100000 rest1;
5x1 + 4x2 + 3x3 + 2x4 <= 120000 - 100000 rest2;
1x1 + 1x2 + 1x3 + 1x4 <= 105000 - 100000 rest3;
```

| Produto | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---------|---|------|---|------|
| yi | 0 | 1 | 0 | 1 |
| xi | 0 | 4286 | 0 | 1428 |

| Restrição | 1 | 2 | 3 |
|-----------|-----------|-----------|---------------|
| Rest i | 1 | 1 | 0 |
| ou seja: | obedecida | obedecida | não obedecida |

| 2 (0) | +3 (4286) | +4 (0) | +5 (1428) | = 19998 | <= 20000 | Restrição obedecida |
|-------|-----------|--------|-----------|---------|----------|---------------------|
| 5 (0) | +4 (4286) | +3 (0) | +2 (1428) | = 20000 | <= 20000 | Restrição obedecida |
| 1 (0) | +1 (4286) | +1 (0) | +1 (1428) | = 5714 | <= 5000 | Rest. NÃO obedecida |