Análise

Mestrado Integrado em Engenharia Informática

2020/2021

Exercício 8.1 Calcule os seguintes integrais:

a) $\displaystyle\iiint_{\mathcal{D}} (x+y+z)\; d(x,y,z)$ com $\mathcal{D} = [0,2]^3$;

b) $\displaystyle\iiint_{\mathcal{D}} ze^{x+y}\; dV$, com $\mathcal{D} = [0,1]^3$;

c) $\displaystyle\iiint_{\mathcal{D}} xy\; d(x,y,z)$, com $\mathcal{D} = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x+y+z \leq 1\big\}$;

d) $\displaystyle\iiint_{\mathcal{D}} x\; dV$, com $\mathcal{D} = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq z \leq 3\big\}$.

Exercício 8.2 Use integrais triplos para expressar o volume do sólido definido pela superfície de equação $z = a - x^2 - y^2$, com $a > 0$, e pelo plano XOY.

Exercício 8.3 Apresente um integral triplo que expresse o volume do elipsoide definido pela equação $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 16$.

Exercício 8.4 Faça um esboço da região de integração e reescreva o integral com ordem de integração $dx\,dy\,dz$:

a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^x \int_0^y f(x,y,z)\; dz\,dy\,dx$;

b) $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 \int_0^{1-y} f(x,y,z)\; dz\,dy\,dx$.

Exercício 8.5 Calcule, mudando eventualmente a ordem de integração,

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \int_x^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \int_1^3 \operatorname{sen} y^2\; dz\,dy\,dx.$$

Exercício 8.6 Considerando $\mathcal{D} = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x,y \geq 0,\ \sqrt{x+y}+1 \leq z \leq 2\big\}$, calcule

$$\iiint_{\mathcal{D}} \frac{1}{\sqrt{xy}}\, d(x,y,z),$$

usando a mudança de variável definida por

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}. \\ & (u,v,w) & \longmapsto & (u^2, v^2, w) \end{array}$$

Exercício 8.7 Considere o conjunto

$$\mathcal{D} = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x+2y+z \leq 2,\ 0 \leq x+y-z \leq \tfrac{\pi}{4},\ 0 \leq z \leq 1\big\}.$$

a) Calcule o volume de $\mathcal{D}$.

b) Calcule $\displaystyle\iiint_{\mathcal{D}} \frac{\operatorname{sen}(x+y+z)}{x+2y+z}\, d(x,y,z)$.