1.5 Derivadas[1]

[1] Nesta secção $D \subset \mathbb{R}$

Definição

- [Função derivável num ponto] Diz-se que a função f é derivável em $a \in D \cap D'$ quando existe $d \in \mathbb{R}$ tal que

  $$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = d.$$

  Ao valor real d chama-se derivada de f no ponto a e escreve-se $f'(a) = d$.

Observação

- Uma forma equivalente de definir a derivada de f em a é

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

e que resulta de tomar $x = a + h$, na definição anterior.

- Usando a notação $y = f(x)$ notações alternativas para a derivada são

$$f'(x);\ y';\ \frac{dy}{dx};\ \frac{df}{dx}.$$

- [Derivada lateral] Diz-se que $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ é
  - derivável à esquerda em a (quando a é ponto de acumulação à esquerda) se existe $d \in \mathbb{R}$ tal que

$$f'_-(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = d;$$

  - derivável à direita em a (quando a é ponto de acumulação à direita) se existe $d \in \mathbb{R}$ tal que

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = d.$$

[Nota] Para $f \colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in D \cap D'_- \cap D'_+$ tem-se que f é derivável em a se e só se existirem e forem iguais as derivadas laterais $f'_-(a)$ e $f'_+(a)$.

Exemplo

1. Não é derivável em nenhum ponto a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ -1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \,. \end{cases}$$

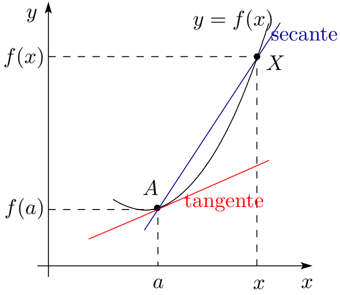
2. A função $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

é derivável apenas no ponto $a = 0$.

3. A função $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definida por $h(x) = [x]$ é derivável em $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Interpretação geométrica da derivada



O declive m da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto de coordenadas $(a, f(a))$ é o limite dos sucessivos declives das retas secantes definidas por A e X, à medida que X se aproxima de A, isto é,

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \ .$$

[Nota] O ponto X pode estar à direita (como representado na figura) ou à esquerda de A.

Seja $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável em $a \in D$.

- Uma equação da reta tangente ao gráfico de f em $(a, f(a))$ é
$$y = f(a) + f'(a)\,(x - a).$$

- Uma equação da reta normal ao gráfico de f em $(a, f(a))$, $f'(a) \neq 0$, é
$$y = f(a) - \frac{1}{f'(a)}\,(x - a).$$

[Nota] A reta normal ao gráfico de f em $(a, f(a))$ é a reta perpendicular à reta tangente ao gráfico nesse ponto.

Observação

- Quando f é contínua em a e

$$\lim_{x \to a} \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right| = +\infty$$

a reta tangente à curva definida por $y = f(x)$ no ponto $(a, f(a))$ é a reta vertical definida pela equação $x = a$.

  - Neste caso diz-se que o gráfico da função tem uma tangente vertical em $x = a$.

Função derivável e função derivada

Seja f: $D \longrightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in D$ e $A \subset D$.

- Diz-se que
  - f é derivável se f é derivável em todos os pontos do domínio D;
  - f é derivável em $A \subset D$ se $f\big|_A$ é derivável.

- Se f é derivável, a função

$$\begin{array}{cccc} f' : & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f'(x) \end{array}$$

diz-se a função derivada de f.

Propriedades das funções deriváveis

Teorema (Continuidade de funções deriváveis)

Se $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ é derivável em $a \in D \cap D'$ então f é contínua em a.

Teorema (Regras básicas de derivação)

Sejam $f, g\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ funções de domínio D, deriváveis no ponto $a \in D \cap D'$. Então:

(a) $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$;

(b) $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$;

(c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g^2(a)}$, desde que $g(a) \neq 0$.

Exemplo

1. [Derivadas das funções hiperbólicas]

   - $\operatorname{sh}' x = \operatorname{ch} x, \quad x \in \mathbb{R}$
   - $\operatorname{ch}' x = \operatorname{sh} x, \quad x \in \mathbb{R}$
   - $\operatorname{th}' x = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \quad x \in \mathbb{R}$
   - $\coth' x = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}, \quad x \neq 0.$

Teorema (Derivada da função composta/ Regra da cadeia)

Sejam $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $f : B \longrightarrow \mathbb{R}$, com $u(D) \subset B$, $a \in D \cap D'$ e $u(a) \in B \cap B'$.

Se u é derivável em a e f é derivável em $u(a)$ então $f \circ u$ é derivável em a, tendo-se

$$(f \circ u)'(a) = f'(u(a)) \cdot u'(a)\,.$$

Teorema (Derivada da função inversa)

Seja f: $D \longrightarrow B$, com $B \subset \mathbb{R}$, uma função bijetiva. Se f é derivável no ponto $a \in D \cap D'$, $f'(a) \neq 0$ e f^{-1} é contínua em $b = f(a)$, então f^{-1} é derivável em b, tendo-se

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}\,.$$

Exemplo

1. [Derivada da função composta] Dada uma função derivável $u = u(x)$, tem-se

   - $[\operatorname{sen} u(x)]' = u'(x) \cos u(x)$

   - $[\cos u(x)]' = -u'(x) \operatorname{sen} u(x)$

   - $[\operatorname{tg} u(x)]' = u'(x) \dfrac{1}{\cos^2 u(x)}$

   - $[\operatorname{cotg} u(x)]' = -u'(x) \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 u(x)}$

2. [Derivada da função inversa]

A função logaritmo natural é a função inversa da função exponencial de base e e

- $f : \mathbb{R} \longrightarrow]0,+\infty[, \quad f(x) = e^x$ é bijetiva e $f'(x) = e^x \neq 0$;
- $f^{-1}(y) = \ln y, \quad y \in]0,+\infty[$ é contínua

Pelo teorema da derivada da função inversa, sendo $y = f(x)$, vem

$$(\ln y)' = \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(\ln y)} = \frac{1}{e^{\ln y}} = \frac{1}{y}.$$

Assim

$$(\ln y)' = \frac{1}{y}, \quad y \in]0,+\infty[.$$

3. [Derivada da função inversa]

A função arco-seno é a função inversa da função $\operatorname{sen}\Big|_{[-\pi/2,\pi/2]}$ e[2]

- $f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow]-1,1[$, $f(x) = \operatorname{sen} x$ é bijetiva e $f'(x) = \cos x \neq 0$;
- $f^{-1}(y) = \operatorname{arcsen}(y)$, $y \in]-1,1[$.

Pelo teorema da derivada da função inversa vem

$$\operatorname{arcsen}' y = (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{\cos(\operatorname{arcsen} y)}.$$

Uma vez que, para $z = \operatorname{arcsen} y$

$$\cos(\operatorname{arcsen} y) = \sqrt{1-y^2}$$

vem

$$\operatorname{arcsen}' y = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \qquad \text{para } y \in]-1,1[.$$

[2]Para domínio da função seno toma-se o intervalo aberto para que $\operatorname{sen}' x \neq 0$.

4. Derivadas das funções trigonométricas inversas

- $\operatorname{arcsen}' x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ , \quad x \in \,]-1,1[$
- $\arccos' x = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\ , \quad x \in \,]-1,1[$
- $\operatorname{arctg}' x = \dfrac{1}{1+x^2}\ , \quad x \in \mathbb{R}$
- $\operatorname{arccotg}' x = \dfrac{-1}{1+x^2}\ , \quad x \in \mathbb{R}$

Teoremas fundamentais sobre funções deriváveis

Teorema (Fermat)

Seja $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável em $a \in D \cap D'_- \cap D'_+$. Se a é um extremante de f então $f'(a) = 0$.

[Nota] O recíproco do Teorema de Fermat é falso, isto é,

$$f'(a) = 0 \not\Longrightarrow \; f(a) \text{ extremo local de } f\,.$$

Exemplo?

Teorema (Rolle)

Seja $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função contínua que é derivável em $]a,b[$. Se $f(a)=f(b)$ então

$$\exists c\in\,]a,b[\,:\quad f'(c)=0\,.$$

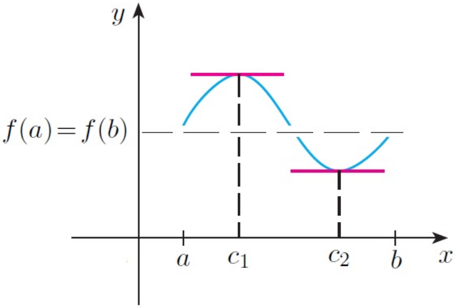


Figura: Interpretação geométrica do Teorema de Rolle

- [Corolários do teorema de Rolle] Seja $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e derivável em $]a,b[$.

  1. Entre dois zeros de f existe, pelo menos, um zero de f'.
  2. Entre dois zeros consecutivos de f' existe, quando muito, um zero de f.
  3. Não há mais do que um zero de f inferior ao menor zero de f', nem mais do que um zero de f superior ao maior zero de f'.

Teorema (valor médio de Lagrange)

Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua que é derivável em $]a, b[$. Então

$$\exists c \in \,]a, b[: \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

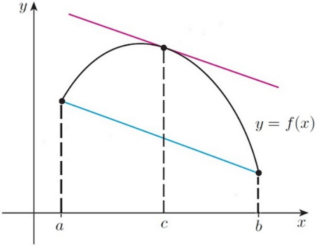


Figura: Interpretação geométrica do Teorema de Lagrange

- [Corolários do teorema de Lagrange]

1. Se $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e $f'(x) = 0$, $\forall x \in]a, b[$, então f é constante.

2. Se $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ são contínuas e tais que $f'(x) = g'(x)$, $\forall x \in]a, b[$, então existe uma constante $C \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = g(x) + C$ para todo $x \in [a, b]$.

   [Nota] Uma aplicação deste corolário será vista no Cap. 2.

3. [Monotonia das funções reais]

   Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ derivável no intervalo I. Tem-se:

   - $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in I$, se e só se f é crescente em I;
   - $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in I$, se e só se f é decrescente em I;
   - se $f'(x) > 0$, $\forall x \in I$, então f é estritamente crescente em I;
   - se $f'(x) < 0$, $\forall x \in I$, então f é estritamente decrescente em I.

Teorema (de Darboux)

Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável. Então $f'([a, b])$ contém o intervalo de extremos $f'(a)$ e $f'(b)$.

[Nota] O Teorema de Darboux não exige a continuidade de f'.

Exemplo

1. $g(x) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad -1 \leq x < 0 \\ 1 & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$

   Esta função não possui a propriedade do valor intermédio. Então g não pode ser a derivada de função alguma $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$.

2. $h(x) = \begin{cases} x^2 \cos(\frac{1}{x}) & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$

   Esta função é contínua e derivável em $\mathbb{R}$ tendo-se

$$h'(x) = \begin{cases} 2x \cos(\frac{1}{x}) + \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0. \end{cases}$$

   A função $h' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ não é contínua, no entanto, verifica o teorema de Darboux.

Derivadas de ordem superior

Sejam $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in D \cap D'$. Seja E o subconjunto de D formado por todos os pontos onde f é derivável.

- Diz-se que f é duas vezes derivável em $a \in E \cap E'$, se f' for derivável em a.
  - Chama-se segunda derivada de f em a à derivada $(f')'(a)$;
  - Usam-se, ainda, as notações

$$f''(a), \qquad f^{(2)}(a) \qquad \text{ou} \qquad D^2 f(a)$$

- De modo análogo define-se a derivada de ordem $n \in \mathbb{N}$ de uma função que se denota por

$$f^{(n)} \qquad \text{ou} \qquad D^{(n)} f\,.$$

[Nota] Por convenção, $f^{(0)} = f$.

Funções de classe $\mathscr{C}^k$

Seja D, não vazio, tal que $D \subset D'$.

- Dado $k \in \mathbb{N}_0$, chama-se conjunto das funções de D em $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^k$ ao conjunto

$$\mathscr{C}^k(D) = \{\, f : D \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ é } k \text{ vezes derivável em } D \text{ e } f^{(k)} \text{ é contínua} \,\}$$

- Chama-se conjunto das funções de D em $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ ao conjunto

$$\mathscr{C}^\infty(D) = \{\, f : D \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ admite derivada de qualquer ordem em } D \,\}$$

Aplicações

Cálculo de limites
Monotonia e extremos de funções
Concavidade e pontos de inflexão

Limites: levantamento de indeterminações

- As derivadas podem ser aplicadas no cálculo de limites para resolver formas indeterminadas.

- Esta aplicação das derivadas é justificada com um resultado conhecido como regra de L'Hôpital.

- [Regra de L'Hôpital]

  Sejam $f, g\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ funções deriváveis num intervalo aberto I exceto, eventualmente, no ponto $c \in I$.
  Se

  - $g'(x) \neq 0\,,\ \ \forall x \in I \setminus \{c\}$
  - $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} g(x) = \ell$, com

  $$\ell = 0 \quad \text{ou} \quad \ell = +\infty \quad \text{ou} \quad \ell = -\infty$$

  então
  $$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}\ ,$$
  desde que o segundo limite exista (finito ou infinito).

Observação

- A regra de l'Hôpital
  - estende-se ao caso em que $c = +\infty$ ou $c = -\infty$.
  - pode ser aplicada recursivamente;
  - recorrendo a manipulações algébricas, é aplicável a outras formas de indeterminação. Ex.: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$

Exemplo

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0^+} x \, \ln x$.

3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1+x}{\operatorname{sen} x} \neq \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{-\cos x}$ Porquê?

Monotonia e extremos de funções

Seja I um intervalo e $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável.

- Foi visto que
  - se $f'(x) > 0$ em I, então f é estritamente crescente em I;
  - se $f'(x) < 0$ em I, então f é estritamente decrescente em I.
- [Ponto Crítico] Um ponto $x_0 \in I$ diz-se um ponto crítico de f quando $f'(x_0) = 0$. (c.f. Teorema de Fermat)
- Como encontrar os extremantes de f?

- [Teste da 1.ª derivada]

  Seja x_0 um ponto crítico de f.

  - Se f' muda de sinal negativo para positivo em x_0, então x_0 é um minimizante local de f;
  - Se f' muda de sinal positivo para negativo em x_0, então x_0 é um maximizante local de f.

Concavidade e pontos de inflexão

Seja $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ e $I \subset D$ um intervalo.

- O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em I quando para todos os x_1, $x_2 \in I$ tais que $x_1 < x_2$ o gráfico de f em $[x_1, x_2]$ está abaixo do segmento de reta que une $(x_1, f(x_1))$ a $(x_2, f(x_2))$.
  - No caso de f ser derivável em I, o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima quando f' for crescente neste intervalo.
- O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em I quando para todos os x_1, $x_2 \in I$ tais que $x_1 < x_2$ o gráfico de f em $[x_1, x_2]$ está acima do segmento de reta que une $(x_1, f(x_1))$ a $(x_2, f(x_2))$.
  - No caso de f ser derivável em I, o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo quando f' for decrescente neste intervalo.

Seja $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ e $I \subset D$ um intervalo onde f é duas vezes derivável.

- Se $f''(x) > 0, \forall x \in I$, então o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em I;
- Se $f''(x) < 0, \forall x \in I$, então o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em I;

- [Teste da 2.ª derivada] Seja x_0 um ponto crítico de f.
  - Se $f''(x_0) > 0$, então f tem um mínimo local em x_0.
  - Se $f''(x_0) < 0$, então f tem um máximo local em x_0.
  - Se $f''(x_0) = 0$, então nada se pode concluir.
- [Ponto de inflexão] Um ponto do domínio de uma função contínua onde o gráfico muda de concavidade chama-se ponto de inflexão.
  - Se $f''(x_0) = 0$ e f'' muda de sinal em x_0 então x_0 é um ponto de inflexão.

Exemplo

1. A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2$ é derivável em $\mathbb{R}$ e tem um ponto crítico em $x_0 = 0$ pois $f'(0) = 0$.

   Usando o teste da 2.ª derivada, $f''(0) > 0$, $x_0 = 0$ é um minimizante local de f.

2. A função $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $g(x) = x^3$ é derivável em $\mathbb{R}$. Embora $x_0 = 0$ seja um ponto crítico, a função não tem aqui um extremo.

   $x_0 = 0$ é um ponto de inflexão da função.

3. A função $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $h(x) = |x|$ não é derivável em $\mathbb{R}$, pois não é derivável em $x_0 = 0$.

   A esta função não é aplicável o teste da 1.ª derivada em $x_0 = 0$, por a função não ser derivável neste ponto. No entanto tem um extremo em $x_0 = 0$ pois é contínua neste ponto, é crescente em $]0, \varepsilon[$ e decrescente em $]-\varepsilon, 0[$, $\varepsilon > 0$.