Espaços vetoriais

Resumo de alguns resultados importantes

No que se segue, V designa um espaço vetorial real e $\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_n$ são n vetores de V.

1. Seja V tal que $\dim V = m$. Tem-se:

   (a) se $n < m$, então $\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_n$ não geram V;

   (b) se $n > m$, então $\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_n$ não são linearmente independentes;

   (c) se $n = m$ e $\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_m$ geram V, então $(\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_m)$ é um base de V;

   (d) se $n = m$ e $\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_m$ são linearmente independentes, então $(\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_m)$ é um base de V;

   (e) se U é um subespaço de V e $\dim U = m$, então $U = V$.

2. $$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle &\iff \mathbf{v} \text{ é combinação linear de } \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \\ &\iff \mathbf{v} \in \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle \end{aligned}$$

3. $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle = \langle \alpha\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle, \ \alpha \neq 0$

4. $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle = \langle \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$

5. $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ são linearmente independentes e $\alpha \neq 0 \iff \alpha\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ são linearmente independentes.

6. $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ são linearmente independentes $\iff$ $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ são linearmente independentes.

7. Se $(\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_n)$ é uma base V, então todo o vetor $\mathbf{v} \in V$ pode escrever-se, de forma única, como combinação linear de $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$. (Os coeficientes da combinação linear são chamados as *coordenadas* de $\mathbf{v}$ relativamente a essa base).

   Nota: Ver a resolução do exercício 4.18.

8. $\mathbf{v}_1$ é linearmente independente $\iff$ $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$

9. $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ $(n \geq 2)$ são linearmente dependentes $\iff$ (pelo menos) um dos vetores é combinação linear dos restantes.

10. $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ são linearmente independentes $\iff$ nenhum dos vetores é um múltiplo escalar do outro.

Resultados válidos no espaço $V = \mathbb{R}^m$

Dados $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^m$ e $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, vamos denotar por A a matriz $m \times n$ que tem $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ como colunas, i.e. $A = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \dots & \mathbf{v}_n \end{pmatrix}$, e por $\boldsymbol{\alpha}$ o vetor $\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$.

1. $\dim \mathbb{R}^m = m$
2. O único subespaço de $\mathbb{R}^m$ com dimensão m é o próprio $\mathbb{R}^m$ (veja 1.(e) acima).
3. $\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = A\,\boldsymbol{\alpha}.$
4.
$$\begin{aligned}
\boxed{\mathbf{v} \in \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle} &\iff \exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} : \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n = \mathbf{v} \\
&\iff \exists\, \boldsymbol{\alpha} : A\,\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{v} \\
&\iff \text{ o sistema de matriz ampliada } (A|\mathbf{v}) \text{ tem solução} \\
&\iff \boxed{\operatorname{car}(A) = \operatorname{car}(A|\mathbf{v})}
\end{aligned}$$

   Nota: Como $\operatorname{car}(X) = \operatorname{car}(X^T)$, também podemos ver se $\operatorname{car}\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n \end{pmatrix} = \operatorname{car}\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n \\ \hline \mathbf{v} \end{pmatrix}$, onde, neste caso, dispomos os vetores como linhas de uma matriz.

5. Para escrever $\mathbf{v}$ como combinação linear de $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ (caso isso seja possível), basta encontrar uma solução $\boldsymbol{\alpha}$ do sistema de matriz ampliada $(A|\mathbf{v})$, uma vez que
$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha \mathbf{v}_n \iff A\,\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{v}.$$
   Em particular, se $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ é uma base de $\mathbb{R}^n$, o vetor $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ das coordenadas de um dado vetor $\mathbf{v}$ nessa base é a solução do sistema (possível e determinado) de matriz ampliada $(A|\mathbf{v})$.

6. Por definição, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ são linearmente independentes se e só se for válida a seguinte implicação
$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0.$$
   Logo, tem-se:
$$\begin{aligned}
\boxed{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \text{ linearmente independentes}} &\iff (A\,\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}) \\
&\iff \text{ o sistema homogéneo de matriz } A \text{ tem apenas a solução nula} \\
&\iff \boxed{\operatorname{car}(A) = n}
\end{aligned}$$
   Nota: Como $\operatorname{car} A = \operatorname{car} A^T$, também podemos ver qual é a característica da matriz que tem por linhas os vetores dados (dispostos em linha).

7. Se os vetores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ forem linearmente dependentes, para escrever um deles como combinação linear dos restantes, podemos:

   (i) determinar uma solução não trivial $\boldsymbol{\alpha}$ do sistema homogéneo cuja matriz simples é A (tal solução tem de existir, uma vez que esse sistema é indeterminado);

   (ii) partindo de $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$, se, por exemplo, for $\alpha_1 \neq 0$, escrever $\mathbf{v}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\mathbf{v}_2 - \cdots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1}\mathbf{v}_n$ (ou de modo análogo para qualquer outro $\alpha_i \neq 0$).

8. Dada uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e sendo A' equivalente por linhas a A, tem-se:

   (a) as linhas não nulas de A' formam uma base de $\mathcal{L}(A)$;

   (b) $\dim \mathcal{L}(A) = \text{car}\, A$;

   (c) as colunas principais de A formam uma base de $\mathcal{C}(A)$;

   (d) $\dim \mathcal{C}(A) = \text{car}\, A$;

   (e) $\dim \mathcal{N}(A) = n - \text{car}\, A$.

9. Sendo $U = \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$, com $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^m$ e sendo $A = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{pmatrix}$, tem-se:

   (a) as colunas principais de A formam uma base de U;

   (b) $\dim U = \text{car}\, A$.

   Nota: Esta base é formada por vetores que pertencem ao conjunto $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$.

   (Aplicação imediata dos resultados 8. (c) e 8. (d).)

10. Sendo $U = \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$, com $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^m$, $B = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n \end{pmatrix}$ (com os vetores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ dispostos em linha) e sendo B' um matriz equivalente por linhas a B, tem-se

   (a) as linhas não nulas de B' formam uma base de U;

   (b) $\dim U = \text{car}\, B$.

   Nota: Os vetores que formam esta base não pertencem (em geral) ao conjunto $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$.

   (Aplicação imediata dos resultados 8. (a) e 8. (b).)