LÓGICA EI
Mestrado Integrado em Engenharia Informática
Universidade do Minho

Departamento de Matemática

2020/2021

1.3 Sistema Formal de Dedução Natural para o Cálculo Proposicional

Observação: O *sistema formal de demonstrações* para o Cálculo Proposicional que estudaremos será notado por DNP e designado por *Dedução Natural Proposicional*.

Observação:

O sistema DNP constitui uma certa formalização de *deduções* (a partir de *hipóteses*) e de *demonstrações* no contexto do Cálculo Proposicional, num estilo conhecido como *dedução natural*.

As deduções permitirão uma abordagem alternativa à relação de consequência semântica (definida à custa do conceito de valoração) e, em particular, permitirão identificar as tautologias com as fórmulas para as quais podem ser construídas demonstrações (deduções que não dependem de hipóteses).

Exemplo:

Deduções em DNP serão construídas usando um certo conjunto de *regras de inferência*, que codificam raciocínios elementares utilizados habitualmente na elaboração de demonstrações matemáticas.

Um raciocínio elementar que usamos frequentemente na construção de deduções é o seguinte: de φ e $\varphi \to \psi$ podemos concluir ψ.

Representaremos este raciocínio do seguinte modo:

$$\frac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}$$

Esta regra é habitualmente designada *modus ponens* (embora no formalismo DNP adotemos um nome diferente para esta regra, como veremos adiante).

Outro raciocínio elementar é o seguinte: se assumindo φ por hipótese podemos concluir ψ, então podemos concluir $\varphi \to \psi$.

Utilizemos a notação $\begin{array}{c} \varphi \\ \vdots \\ \psi \end{array}$ para simbolizar a possibilidade de concluir ψ a partir de φ.

Então, este raciocínio poderá ser representado do seguinte modo:

$$\dfrac{\begin{array}{c} \not\varphi \\ \vdots \\ \psi \end{array}}{\varphi \to \psi}$$

Neste raciocínio, φ é uma *hipótese temporária* usada para concluir ψ.

A notação $\not\varphi$ reflete o facto de que a conclusão $\varphi \to \psi$ já *não depende* da hipótese temporária φ.

Notação : O conceito de dedução em DNP será formalizado adiante, através de uma definição indutiva, cujas regras serão determinadas por *regras de inferência*.

As deduções, a que habitualmente chamaremos *derivações*, corresponderão a certas *árvores finitas de fórmulas*, onde uma fórmula φ que ocorra como *folha* poderá estar *cancelada*, o que será notado por $\cancel{\varphi}$ ou por $[\varphi]$.

Na apresentação das regras de inferência de *DNP*, usaremos a notação

$$\begin{array}{c} \cancel{\varphi} \\ \vdots \\ \psi \end{array}$$

para representar uma árvore de fórmulas cuja *raiz* é ψ e cujas eventuais ocorrências da fórmula φ como folha estão necessariamente canceladas.

Definição:

As *regras de inferência* do sistema formal DNP são apresentadas de seguida.

Cada regra de inferência originará uma regra na definição indutiva do *conjunto das derivações* (Slide 15).

As regras de inferência recebem derivações (uma ou mais) e produzem uma nova derivação.

Definição (cont.):

*Regras de **I**ntrodução* *Regras de **E**liminação*

$$\dfrac{\begin{array}{c}\cancel{\varphi}\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi} \to I \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \varphi\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\\ \varphi \to \psi\end{array}}{\psi} \to E$$

Numa regra de inferência, as fórmulas imediatamente acima do *traço de inferência* serão chamadas *premissas* e a fórmula abaixo do traço de inferência é chamada a *conclusão* da regra.

Uma *aplicação* ou *instância* de uma regra de inferência é uma *substituição das fórmulas da regra (meta-variáveis) por fórmulas do CP*.

Chamaremos *inferência* a uma aplicação de uma regra de inferência.

Definição (cont.):

*Regras de **I**ntrodução* *Regras de **E**liminação*

$$\frac{\begin{matrix}\vdots & & \vdots\\ \varphi & & \psi\end{matrix}}{\varphi \land \psi}\ \land I \qquad\qquad \frac{\begin{matrix}\vdots\\ \varphi \land \psi\end{matrix}}{\varphi}\ \land_1 E \qquad \frac{\begin{matrix}\vdots\\ \varphi \land \psi\end{matrix}}{\psi}\ \land_2 E$$

$$\frac{\begin{matrix}\cancel{\varphi}\\ \vdots\\ \bot\end{matrix}}{\neg\varphi}\ \neg I \qquad\qquad \frac{\begin{matrix}\vdots & & \vdots\\ \varphi & & \neg\varphi\end{matrix}}{\bot}\ \neg E$$

Definição (cont.):

*Regras de **I**ntrodução*

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \varphi\end{matrix}}{\varphi\vee\psi}\ \vee_1 I \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \psi\end{matrix}}{\varphi\vee\psi}\ \vee_2 I$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\cancel{\varphi}\\ \vdots\\ \psi\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\cancel{\psi}\\ \vdots\\ \varphi\end{matrix}}{\varphi\leftrightarrow\psi}\ \leftrightarrow I$$

*Regras de **E**liminação*

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \varphi\vee\psi\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\cancel{\varphi}\\ \vdots\\ \sigma\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\cancel{\psi}\\ \vdots\\ \sigma\end{matrix}}{\sigma}\ \vee E$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \varphi\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\vdots\\ \varphi\leftrightarrow\psi\end{matrix}}{\psi}\ \leftrightarrow_1 E \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \psi\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\vdots\\ \varphi\leftrightarrow\psi\end{matrix}}{\varphi}\ \leftrightarrow_2 E$$

Definição (cont.):

$$\dfrac{\begin{array}{c}\cancel{\neg\varphi}\\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\varphi}\ (RAA) \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots \\ \bot\end{array}}{\varphi}\ (\bot)$$

Exemplo: Vejamos dois exemplos de inferências $\wedge_1 E$:

$$\frac{p_1 \wedge p_2}{p_1}\ \wedge_1 E \qquad \frac{(p_1 \wedge p_2) \wedge (p_1 \to \neg p_3)}{p_1 \wedge p_2}\ \wedge_1 E \tag{1}$$

Estas duas inferências podem ser *combinadas* do seguinte modo:

$$\cfrac{\cfrac{(p_1 \wedge p_2) \wedge (p_1 \to \neg p_3)}{p_1 \wedge p_2}\ \wedge_1 E}{p_1}\ \wedge_1 E \tag{2}$$

Exemplo (cont.):
Combinando esta construção com uma inferência $\rightarrow I$ podemos obter:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\,(p_1 \wedge p_2) \wedge (p_1 \rightarrow \neg p_3)\,]}{p_1 \wedge p_2}\,\wedge_1 E}{p_1}\,\wedge_1 E}{((p_1 \wedge p_2) \wedge (p_1 \rightarrow \neg p_3)) \rightarrow p_1}\,\rightarrow I \tag{3}$$

As duas inferências em (1), assim como as combinações de inferências em (2) e (3), são exemplos de *derivações* no sistema formal DNP.

Definição: O *conjunto* $\mathcal{D}^{DNP}$ *das derivações de* DNP é o menor conjunto X, de árvores finitas de fórmulas, com folhas possivelmente canceladas, tal que:

a) para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, a árvore cujo único nodo é φ pertence a X;

b) X é *fechado* para cada uma das regras de inferência de DNP; por exemplo, X é fechado para as regras $\to E$ e $\to I$ quando as seguintes condições são satisfeitas (respetivamente):

i) $\begin{array}{c} D_1 \\ \varphi \end{array} \in X$ e $\begin{array}{c} D_2 \\ \varphi \to \psi \end{array} \in X \implies \dfrac{\begin{array}{c} D_1 \\ \varphi \end{array} \quad \begin{array}{c} D_2 \\ \varphi \to \psi \end{array}}{\psi} \to E \in X$;

Definição (cont.):

ii) $\begin{array}{c} D \\ \psi \end{array} \in X \implies \dfrac{\begin{array}{c} \cancel{\varphi} \\ D \\ \psi \end{array}}{\varphi \to \psi} \to I \in X$

(onde: $\begin{array}{c} D \\ \psi \end{array}$ denota uma árvore de fórmulas cuja raiz é ψ; e

$\dfrac{\begin{array}{c} \cancel{\varphi} \\ D \\ \psi \end{array}}{\varphi \to \psi} \to I$ denota a árvore de fórmulas obtida de D adicionando um novo nodo $\varphi \to \psi$, que passa a ser a nova raiz e tem por único *descendente* a raiz de D, e cancelando todas as eventuais ocorrências de φ como folha).

Definição (cont.):

As derivações em DNP são também chamadas *deduções*.

No nosso estudo, privilegiaremos a terminologia derivação.

A terminologia *demonstração* será reservada para uma classe especial de derivações (ver Slide 23).

Observação:

O conjunto $\mathcal{D}^{DNP}$ das derivações em DNP admite princípios de indução estrutural e de recursão estrutural.

Observação: Existe um conceito natural de *subderivação*.

Por exemplo, a derivação (3) do Slide 14 tem as quatro seguintes subderivações:

$$(p_1 \wedge p_2) \wedge (p_1 \rightarrow \neg p_3)\,, \qquad \dfrac{(p_1 \wedge p_2) \wedge (p_1 \rightarrow \neg p_3)}{p_1 \wedge p_2}\ \wedge_1 E\,,$$

$$\dfrac{\dfrac{(p_1 \wedge p_2) \wedge (p_1 \rightarrow \neg p_3)}{p_1 \wedge p_2}\ \wedge_1 E}{p_1}\ \wedge_1 E\,, \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\,(p_1 \wedge p_2) \wedge (p_1 \rightarrow \neg p_3)\,]}{p_1 \wedge p_2}\ \wedge_1 E}{p_1}\ \wedge_1 E}{((p_1 \wedge p_2) \wedge (p_1 \rightarrow \neg p_3)) \rightarrow p_1}\rightarrow I\,.$$

Exemplo: Para quaisquer fórmulas do CP φ, ψ e σ, as construções abaixo são exemplos de derivações em DNP.

1)

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cancel{\varphi \wedge \psi}^{(1)}}{\varphi}\wedge_1 E \qquad \cfrac{\cfrac{\cancel{\varphi \wedge \psi}^{(1)}}{\psi}\wedge_2 E \qquad \psi \to (\varphi \to \sigma)}{\varphi \to \sigma}\to E}{\sigma}\to E}{(\varphi \wedge \psi) \to \sigma}\to I^{(1)}$$

Os números naturais que aparecem a anotar inferências e fórmulas canceladas estabelecem uma correspondência, unívoca, entre as fórmulas canceladas e as regras que permitem efetuar esses cancelamentos.

Exemplo (cont.):

2)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\neg\varphi}^{(2)} \quad \cancel{\neg\neg\varphi}^{(1)}}{\bot}\,\neg E}{\varphi}\,RAA^{(2)}}{\neg\neg\varphi \to \varphi}\,\to I^{(1)}$$

3)

$$\dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi}^{(1)}}{\psi \to \varphi}\,\to I^{(2)}}{\varphi \to (\psi \to \varphi)}\,\to I^{(1)}$$

Note-se que em **3)**, a inferência $\to$ *I* anotada com (1) é utilizada para cancelar a única ocorrência como folha de φ, enquanto que a inferência $\to$ *I* anotada com (2) não é utilizada para efetuar qualquer cancelamento.

Definição: Numa derivação D:

- a raiz é chamada a *conclusão* de D;
- as folhas são chamadas as *hipóteses* de D;
- as folhas canceladas são chamadas as *hipóteses canceladas* de D;
- as folhas não canceladas são chamadas as *hipóteses não canceladas* de D.

Definição: Seja D uma derivação em DNP e φ uma fórmula do Cálculo Proposicional.

- Diremos que D é uma *derivação* de φ *a partir de* um conjunto de fórmulas Γ quando φ é a conclusão de D e o conjunto das hipóteses não canceladas de D é um subconjunto de Γ.
- Diremos que D é uma *demonstração* de φ quando D é uma derivação de φ a partir do conjunto vazio.

Exemplo: Sejam φ, ψ e σ fórmulas.

a) Seja D_1 a seguinte derivação em DNP.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi}^{(2)} \qquad \varphi \to \psi}{\psi} \to E \qquad \psi \not\to \sigma^{(1)}}{\sigma} \to E}{\varphi \to \sigma} \to I^{(2)}}{(\psi \to \sigma) \to (\varphi \to \sigma)} \to I^{(1)}$$

Então:

1. o conjunto de hipóteses de D_1 é $\{\varphi, \varphi \to \psi, \psi \to \sigma\}$;
2. o conjunto de hipóteses não canceladas de D_1 é $\{\varphi \to \psi\}$;
3. a conclusão de D_1 é $(\psi \to \sigma) \to (\varphi \to \sigma)$;
4. D_1 é uma derivação de $(\psi \to \sigma) \to (\varphi \to \sigma)$ a partir de $\{\varphi \to \psi\}$.

b) Seja D_2 a seguinte derivação em DNP.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi \wedge \neg\varphi}^{(1)}}{\varphi}\wedge_1 E \qquad \dfrac{\cancel{\varphi \wedge \neg\varphi}^{(1)}}{\neg\varphi}\wedge_2 E}{\perp}\neg E}{\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)}\neg I^{(1)}$$

Então:

1. o conjunto de hipóteses de D_2 é $\{\varphi \wedge \neg\varphi\}$;
2. o conjunto de hipóteses não canceladas de D_2 é vazio;
3. a conclusão de D_2 é $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$;
4. D_2 é uma demonstração de $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$.

Definição:

Uma fórmula φ diz-se *derivável a partir de* um conjunto de fórmulas Γ ou uma *consequência sintática de* Γ (notação: $\Gamma \vdash \varphi$) quando existem derivações em DNP de φ a partir de Γ.

Escreveremos $\Gamma \nvdash \varphi$ para denotar que φ não é derivável a partir de Γ.

Definição:

Uma fórmula φ diz-se um *teorema* de DNP (notação: $\vdash \varphi$) quando existe uma demonstração de φ em DNP.

Escreveremos $\nvdash \varphi$ para denotar que φ não é teorema de DNP.

Exemplo: Atendendo ao exemplo anterior:

1. $\{\varphi \to \psi\} \vdash (\psi \to \sigma) \to (\varphi \to \sigma)$

   (*i.e.*, $(\psi \to \sigma) \to (\varphi \to \sigma)$ é derivável a partir de $\{\varphi \to \psi\}$);

2. $\vdash \neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$

   (*i.e.*, $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$ é um teorema de DNP).

Proposição: Para toda a fórmula proposicional φ,
φ é teorema de DNP se e só se $\emptyset \vdash \varphi$.

Dem.: Imediata a partir das definições. $\square$

Definição: Seja Γ um conjunto de fórmulas proposicionais.

Γ diz-se *sintaticamente inconsistente* quando $\Gamma \vdash \bot$.

Γ dir-se-á *sintaticamente consistente* no caso contrário, i.e. quando $\Gamma \nvdash \bot$, ou seja, quando não existem derivações de $\bot$ a partir de Γ.

Exemplo:

O conjunto $\Gamma = \{p_0, p_0 \to \neg p_0\}$ é sintaticamente inconsistente.

Uma derivação de $\perp$ a partir de Γ é:

$$\dfrac{p_0 \qquad \dfrac{p_0 \qquad p_0 \to \neg p_0}{\neg p_0} \to E}{\perp} \neg E$$

Proposição: Seja Γ um conjunto de fórmulas proposicionais.

As seguintes afirmações são equivalentes:

a) Γ é sintaticamente inconsistente;

b) para algum $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \vdash \neg\varphi$;

c) para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\Gamma \vdash \varphi$.

Dem.: Por exemplo, é suficiente provar as implicações **a)**$\Rightarrow$**b)**, **b)**$\Rightarrow$**c)** e **c)**$\Rightarrow$**a)**.

Dem. (cont.):

a)$\Rightarrow$b): Admitindo que Γ é sintaticamente inconsistente, existe uma derivação D de $\perp$ a partir de Γ.
Assim, fixando uma (qualquer) fórmula φ, tem-se que

$$D_1 = \cfrac{\begin{array}{c}D\\ \perp\end{array}}{\varphi}\ (\perp) \qquad\qquad D_2 = \cfrac{\begin{array}{c}D\\ \perp\end{array}}{\neg\varphi}\ (\perp)$$

(as derivações D_1 e D_2 obtidas de D acrescentando, em ambos os casos, uma inferência final $(\perp)$, com conclusão φ e $\neg\varphi$, respetivamente) são, respetivamente, derivações de
(i) φ a partir de Γ (a conclusão de D_1 é φ e as hipóteses não canceladas de D_1 são as mesmas de D); e de
(ii) $\neg\varphi$ a partir de Γ (a conclusão de D_2 é $\neg\varphi$ e as hipóteses não canceladas de D_2 são as mesmas de D).
Por conseguinte, $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \vdash \neg\varphi$.

Exercício: prove as outras duas implicações. $\square$

Notação :

Na representação de relações de derivabilidade utilizaremos abreviaturas análogas às utilizadas para representação de relações de consequência semântica.

Por exemplo, dadas fórmulas $\varphi, \varphi_1, ..., \varphi_n$ e dados conjuntos de fórmulas Γ e Δ, a notação $\Gamma, \Delta, \varphi_1, ..., \varphi_n \vdash \varphi$ abrevia $\Gamma \cup \Delta \cup \{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \vdash \varphi$.

Proposição: Sejam $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$ e $\Gamma, \Delta \subseteq \mathcal{F}^{CP}$.

a) Se $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \vdash \varphi$.

b) Se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Delta \vdash \varphi$.

c) Se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Delta, \varphi \vdash \psi$, então $\Delta, \Gamma \vdash \psi$.

d) $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ se e só se $\Gamma, \varphi \vdash \psi$.

e) Se $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ e $\Delta \vdash \varphi$, então $\Gamma, \Delta \vdash \psi$.

Demonstração:

a) Se $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \vdash \varphi$.

Dem.:

Suponhamos que $\varphi \in \Gamma$.

Então, a árvore cuja única fórmula é φ é uma derivação cuja conclusão é φ e cujo conjunto de hipóteses não canceladas é $\{\varphi\}$, que é um subconjunto de Γ, pois $\varphi \in \Gamma$.

Assim, encontrámos uma derivação de φ a partir de Γ, pelo que $\Gamma \vdash \varphi$.

b), **c)** e **e)**: Exercício.

Dem. (cont.):

d) $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ se e só se $\Gamma, \varphi \vdash \psi$

$\Rightarrow$): Suponhamos que $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$, *i.e.*, suponhamos que existe uma derivação D de $\varphi \to \psi$ a partir de Γ.
Então,

$$D' = \quad \dfrac{\varphi \qquad \overset{D}{\varphi \to \psi}}{\psi} \to E$$

(D' é a derivação cuja última inferência é $\to E$ e as derivações das premissas são φ e D, respetivamente)
é uma derivação de ψ a partir de $\Gamma \cup \{\varphi\}$, pois:
i) ψ é a conclusão de D'; e
ii) o conjunto Δ de hipóteses não canceladas de D' é constituído por φ e pelas hipóteses não canceladas de D, que formam um subconjunto de Γ, pelo que Δ é um subconjunto de $\Gamma \cup \{\varphi\}$.
Como D' é uma derivação de ψ a partir de $\Gamma \cup \{\varphi\}$, segue $\Gamma, \varphi \vdash \psi$.

Dem. (cont.):

$\Leftarrow$): Suponhamos agora que $\Gamma, \varphi \vdash \psi$, *i.e.*, suponhamos que existe uma derivação D de ψ a partir de $\Gamma \cup \{\varphi\}$.
Então, a derivação

$$D' = \cfrac{\begin{array}{c} \cancel{\varphi}^{(1)} \\ D \\ \psi \end{array}}{\varphi \to \psi} \to I^{(1)},$$

(D' é a derivação obtida de D acrescentando uma inferência final $\to I$, que cancela todas as ocorrências de φ como hipótese) é uma derivação de $\varphi \to \psi$ a partir de Γ, pois:

i) $\varphi \to \psi$ é a conclusão de D'; e

ii) o conjunto Δ das hipóteses não canceladas de D' é constituído por todas as hipóteses não canceladas de D (um subconjunto de $\Gamma \cup \{\varphi\}$), exceto φ e, portanto, Δ é um subconjunto de Γ.
Como D' é uma derivação de $\varphi \to \psi$ a partir de Γ, segue $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$. $\square$

Teorema (*Correção*): Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ e para todo $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$,

$$\text{se } \Gamma \vdash \varphi, \text{ então } \Gamma \models \varphi.$$

Dem.:

Suponhamos que $\Gamma \vdash \varphi$, *i.e.*, suponhamos que existe uma derivação D de φ a partir de Γ.

Aplicando o lema que se segue, conclui-se de imediato $\Gamma \models \varphi$.

> **Lema:** Para todo $D \in \mathcal{D}^{DNP}$, se D é uma derivação de φ a partir de Γ, então $\Gamma \models \varphi$.

Este lema é demonstrado por indução estrutural em derivações.

$\square$

Observação:

O Teorema da Correção constitui uma ferramenta para provar a não derivabilidade de fórmulas a partir de conjuntos de fórmulas.

De facto, do Teorema da Correção segue que

$$\Gamma \not\models \varphi \Longrightarrow \Gamma \nvdash \varphi,$$

o que significa que, para mostrar que não existem derivações em DNP de uma fórmula φ a partir de um conjunto de fórmulas Γ, basta mostar que φ não é consequência semântica de Γ.

Exemplo: Seja $\Gamma = \{p_1 \vee p_2, p_1 \to p_0\}$.

1. Em DNP não existem derivações de $p_0 \vee p_1$ a partir de Γ.

   Se existisse uma tal derivação, pelo Teorema da Correção, teríamos $\Gamma \models p_0 \vee p_1$, mas esta consequência semântica não é válida (tome-se, por exemplo, a valoração que atribui 1 a p_2 e 0 às restantes variáveis proposicionais).

2. De forma análoga, pode mostrar-se que não existem derivações de $\perp$ a partir de Γ (exercício).

   Logo, Γ é sintaticamente consistente.

Proposição: Seja Γ um conjunto de fórmulas proposicionais.

Γ é sintaticamente consistente sse Γ é semanticamente consistente.

Dem.:

$\Leftarrow$) Consequência do Teorema da Correção. (Porquê?)

$\Rightarrow$) Ver a bibliografia recomendada. $\square$

Teorema (Completude): Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ e para todo $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$,

$$\text{se } \Gamma \models \varphi, \text{ então } \Gamma \vdash \varphi.$$

Dem.: Consequência da proposição anterior. (Exercício.) $\square$

Teorema (Adequação): Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ e para todo $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$,

$\Gamma \vdash \varphi$ se e só se $\Gamma \models \varphi$.

Dem.: Imediata, a partir dos Teoremas da Correção e da Completude. $\square$

Corolário: Para toda a fórmula proposicional φ,
φ é um teorema de DNP se e só se φ é uma tautologia.

Dem.: Exercício. $\square$