Transportes (grafos bipartidos)

Investigação Operacional

J.M. Valério de Carvalho
vc@dps.uminho.pt

Departamento de Produção e Sistemas
Escola de Engenharia, Universidade do Minho

19 de novembro de 2020

Transportes em grafos bipartidos

antes

- Vimos as operações básicas do método simplex para grafos (redes).

Guião

- Vamos usar o algoritmo para resolver um exemplo definido sobre um grafo bipartido, usando a representação em quadro e em grafo.
- Um grafo $G = (V, A)$ é bipartido se o conjunto de vértices V puder ser dividido em dois conjuntos disjuntos, V_1 e V_2 (*i.e.*, $V_1 \cup V_2 = V$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$), de tal modo que todos os arcos $(i,j) \in A$ tenham origem num vértice $i \in V_1$ e destino num vértice $j \in V_2$.
- O problema de afectação é um caso especial do problema de transportes em grafos bipartidos.

depois

- Aplicaremos o algoritmo simplex de redes em grafos (redes) gerais.

Transportes em grafos bipartidos: modelo

- Objectivo: minimizar o custo de transporte das unidades entre os pontos de produção (origens) e os pontos de consumo (destinos)

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & \sum_{i \in V_1} \sum_{j \in V_2} c_{ij} x_{ij} \\
\text{suj. a} \quad & \sum_{j \in V_2} x_{ij} = a_i \ , \ \forall i \in V_1 \\
& \sum_{i \in V_1} x_{ij} = b_j \ , \ \forall j \in V_2 \\
& x_{ij} \geq 0
\end{aligned}
$$

Variáveis de decisão:

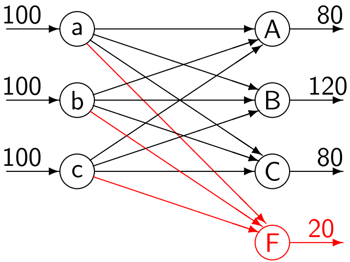
- x_{ij} - quantidade a transportar da origem i para o destino j.

Dados:

- c_{ij}: custo unitário de transporte no arco orientado (i,j);
- a_i : número de unidades oferecidas na origem i;
- b_j : número de unidades consumidas no destino j.

Aplicação 1: problema de produção - distribuição

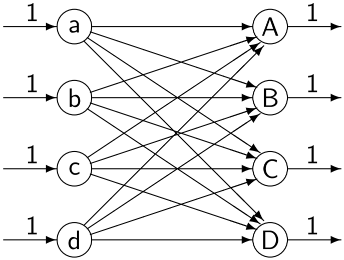
- Cada origem é um local de produção com a capacidade indicada.
- Existe um excedente de capacidade, e é necessário decidir qual a capacidade usada em cada local de produção.



- O modelo pode incluir, para além dos custos unitários de transporte, os custos unitários de produção, usando, para o arco (i,j),
- o custo $c_{ij} = t_{ij} + p_i$, em que t_{ij} é o custo unitário de transporte e p_i o custo unitário de produção na origem i.

Aplicação 2: problema de afectação (*assignment*)

- O objectivo é afectar (atribuir) $|V_1| = |V_2| = n$ pessoas a um igual número de tarefas, de modo a minimizar os custos globais.
- É dado o custo c_{ij} associado à afectação da pessoa i à tarefa $j, \forall i, j$.



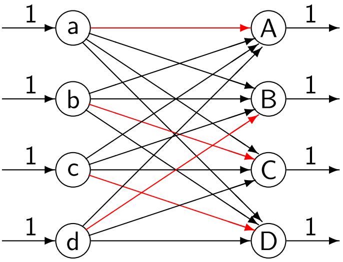
- Número de variáveis básicas positivas é $n \ll (2n-1)$: as soluções básicas são muito degeneradas.
- Há algoritmos combinatórios eficientes$^{(*)}$.

(*) O algoritmo húngaro é um algoritmo primal-dual, que não explora uma sequência de vértices, mas uma sequência de soluções duais admissíveis obedecendo à folga complementar, até encontrar uma solução primal admissível.

Aplicação 2: problema de afectação (exemplo)

- Os custos c_{ij} podem ser representados numa matriz quadrada.

	A	B	C	D	
a	**2**	2	5	3	1
b	2	5	**4**	1	1
c	5	5	7	**2**	1
d	4	**3**	6	1	1
	1	1	1	1	



- A solução óptima deste exemplo tem um custo total de 11, correspondendo à seguinte afectação: $(a, A), (b, C), (c, D)$ e (d, B).

Aplicação 2: problema de afectação - modelo

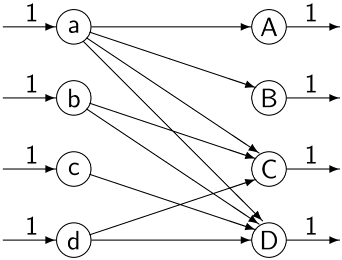
- O problema de afectação pode ser formulado do seguinte modo:

$$
\begin{array}{rl}
\min & \displaystyle\sum_{i \in V_1} \sum_{j \in V_2} c_{ij} x_{ij} \\
\text{suj. a} & \displaystyle\sum_{j \in V_2} x_{ij} = 1 \ , \ \forall i \in V_1 \\
& \displaystyle\sum_{i \in V_1} x_{ij} = 1 \ , \ \forall j \in V_2 \\
& x_{ij} \text{ binário}, \forall i \in V_1, \forall j \in V_2
\end{array}
$$

Aplicação 3: conjunto de representantes

- Um caso particular do problema de afectação é: existe alguma solução que permita realizar todas as tarefas?

	A	B	C	D	
a	1	1	1	1	1
b	$+\infty$	$+\infty$	1	1	1
c	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	1	1
d	$+\infty$	$+\infty$	1	1	1
	1	1	1	1	

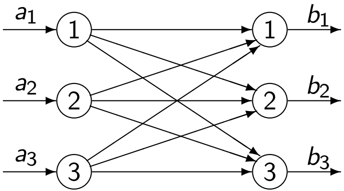


- Trata-se de um problema de decisão, também conhecido por problema (da existência) de um emparelhamento perfeito.

(*) Quando não há arco $(i,j), c_{ij} = \infty$. Na prática, usa-se um valor M suficientemente grande, que neste exemplo poderia ser 1000.

Transportes em grafos bipartidos: representações

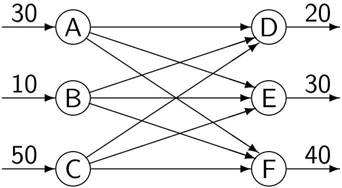
	1	2	3	
1	x_{11} c_{11}	x_{12} c_{12}	x_{13} c_{13}	a_1
2	x_{21} c_{21}	x_{22} c_{22}	x_{23} c_{23}	a_2
3	x_{31} c_{31}	x_{32} c_{32}	x_{33} c_{33}	a_3
	b_1	b_2	b_3	



	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{31}	x_{32}	x_{33}		
origem 1	1	1	1							=	a_1
origem 2				1	1	1				=	a_2
origem 3							1	1	1	=	a_3
destino 1	-1			-1			-1			=	$-b_1$
destino 2		-1			-1			-1		=	$-b_2$
destino 3			-1			-1			-1	=	$-b_3$
min	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{31}	c_{32}	c_{33}		

Exemplo

	D	E	F	
A	3	6	5	30
B	2	5	5	10
C	1	2	3	50
	20	30	40	



	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	
A	1	1	1							= 30
B				1	1	1				= 10
C							1	1	1	= 50
D	-1			-1			-1			= -20
E		-1			-1			-1		= -30
F			-1			-1			-1	= -40
min	3	6	5	2	5	5	1	2	3	

Conteúdo (transportes em grafos bipartidos)

- Solução inicial
  - Método do canto NW
  - Método dos custos mínimos
- Pivôs (revisão)
- Teste de optimalidade
  - Método dos multiplicadores
- Resolução de um exemplo
- Apêndices
  - Degenerescência

Algoritmo (simplex) de transportes

Algoritmo

Obter uma quadro básico inicial (*i.e.*, solução básica inicial)
Enquanto (quadro básico não óptimo)
  mudar para um quadro básico adjacente melhor

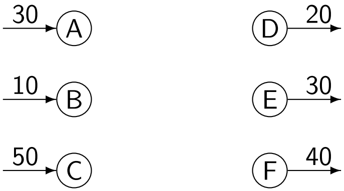
Dois métodos para obter um quadro básico inicial:

- Método do canto NW
- Método dos custos mínimos

Solução inicial: método do canto NW

1. Colocar a maior quantidade possível na casa mais a NW $\Rightarrow$
   - ou a procura de um destino (coluna) é totalmente satisfeita,
   - ou a oferta de uma origem (linha) é totalmente usada,
   - ou ambas.
2. Cortar a linha ou a coluna (ou ambas)
3. Repetir se ainda houver uma casa.

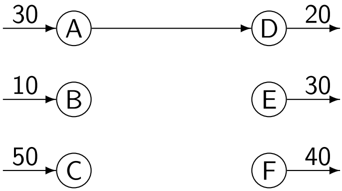
	D	E	F	
A	3	6	5	30
B	2	5	5	10
C	1	2	3	50
	20	30	40	



Solução inicial: método do canto NW

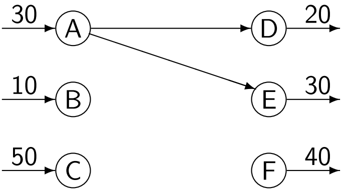
1. Colocar a maior quantidade possível na casa mais a NW $\Rightarrow$
   - ou a procura de um destino (coluna) é totalmente satisfeita,
   - ou a oferta de uma origem (linha) é totalmente usada,
   - ou ambas.
2. Cortar a linha ou a coluna (ou ambas)
3. Repetir se ainda houver uma casa.

	D	E	F	
A	20 3	6	5	30
B	2	5	5	10
C	1	2	3	50
	20	30	40	



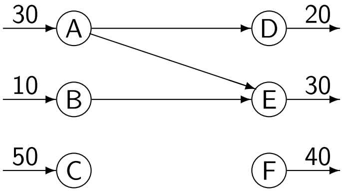
1. Colocar a maior quantidade possível na casa mais a NW ⇒
   - ou a procura de um destino (coluna) é totalmente satisfeita,
   - ou a oferta de uma origem (linha) é totalmente usada,
   - ou ambas.
2. Cortar a linha ou a coluna (ou ambas)
3. Repetir se ainda houver uma casa.

	D	E	F	
A	20 3	10 6	5	30
B	2	5	5	10
C	1	2	3	50
	20	30	40	



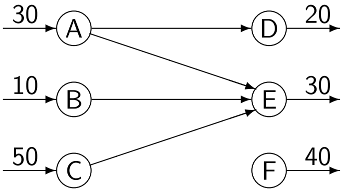
1. Colocar a maior quantidade possível na casa mais a NW ⇒
   - ou a procura de um destino (coluna) é totalmente satisfeita,
   - ou a oferta de uma origem (linha) é totalmente usada,
   - ou ambas.
2. Cortar a linha ou a coluna (ou ambas)
3. Repetir se ainda houver uma casa.

	D	E	F	
A	20 (3)	10 (6)	(5)	30
B	(2)	10 (5)	(5)	10
C	(1)	(2)	(3)	50
	20	30	40	



1. Colocar a maior quantidade possível na casa mais a NW ⇒
   - ou a procura de um destino (coluna) é totalmente satisfeita,
   - ou a oferta de uma origem (linha) é totalmente usada,
   - ou ambas.
2. Cortar a linha ou a coluna (ou ambas)
3. Repetir se ainda houver uma casa.

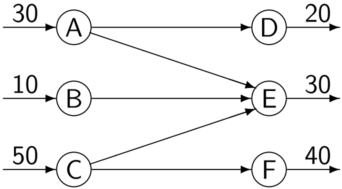
	D	E	F	
A	20 3	10 6	5	30
B	2	10 5	5	10
C	1	10 2	3	50
	20	30	40	



Solução inicial: método do canto NW

1. Colocar a maior quantidade possível na casa mais a NW ⇒
   - ou a procura de um destino (coluna) é totalmente satisfeita,
   - ou a oferta de uma origem (linha) é totalmente usada,
   - ou ambas.
2. Cortar a linha ou a coluna (ou ambas)
3. Repetir se ainda houver uma casa.

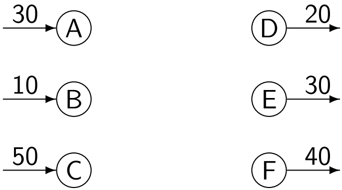
	D	E	F	
A	20 (3)	10 (6)	(5)	30
B	(2)	10 (5)	(5)	10
C	(1)	10 (2)	40 (3)	50
	20	30	40	



- Desvantagem: não toma em consideração os custos das casas, que podem ser muito elevados nas casas a NW.

1. Colocar a maior quantidade possível na casa com custo mínimo ⇒
   - ou a procura de um destino (coluna) é totalmente satisfeita,
   - ou a oferta de uma origem (linha) é totalmente usada,
   - ou ambas.
2. Cortar a linha ou a coluna (ou ambas)
3. Repetir se ainda houver uma casa.

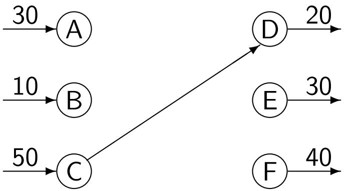
	D	E	F	
A	3	6	5	30
B	2	5	5	10
C	1	2	3	50
	20	30	40	



Solução inicial: método dos custos mínimos

1. Colocar a maior quantidade possível na casa com custo mínimo ⇒
   - ou a procura de um destino (coluna) é totalmente satisfeita,
   - ou a oferta de uma origem (linha) é totalmente usada,
   - ou ambas.
2. Cortar a linha ou a coluna (ou ambas)
3. Repetir se ainda houver uma casa.

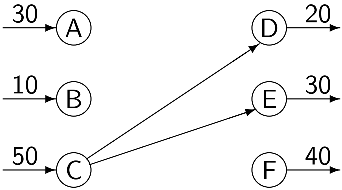
	D	E	F	
A	3	6	5	30
B	2	5	5	10
C	20 1	2	3	50
	20	30	40	



Solução inicial: método dos custos mínimos

1. Colocar a maior quantidade possível na casa com custo mínimo $\Rightarrow$
   - ou a procura de um destino (coluna) é totalmente satisfeita,
   - ou a oferta de uma origem (linha) é totalmente usada,
   - ou ambas.
2. Cortar a linha ou a coluna (ou ambas)
3. Repetir se ainda houver uma casa.

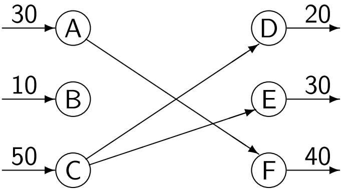
	D	E	F	
A	3	6	5	30
B	2	5	5	10
~~C~~	~~20~~ 1	~~30~~ 2	3	~~50~~
	20	30	40	



Solução inicial: método dos custos mínimos

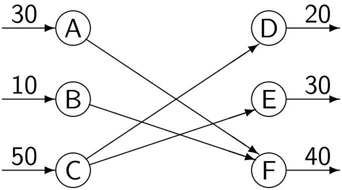
1. Colocar a maior quantidade possível na casa com custo mínimo ⇒
   - ou a procura de um destino (coluna) é totalmente satisfeita,
   - ou a oferta de uma origem (linha) é totalmente usada,
   - ou ambas.
2. Cortar a linha ou a coluna (ou ambas)
3. Repetir se ainda houver uma casa.

	~~D~~	~~E~~	F	
~~A~~	3	6	30 5	30
B	2	5	5	10
~~C~~	20 1	30 2	3	50
	20	30	40	



1. Colocar a maior quantidade possível na casa com custo mínimo ⇒
   - ou a procura de um destino (coluna) é totalmente satisfeita,
   - ou a oferta de uma origem (linha) é totalmente usada,
   - ou ambas.
2. Cortar a linha ou a coluna (ou ambas)
3. Repetir se ainda houver uma casa.

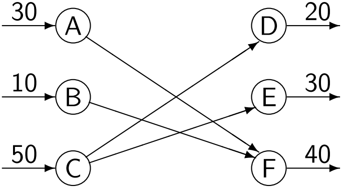
	D	E	F	
A	3	6	30 / 5	30
B	2	5	10 / 5	10
C	20 / 1	30 / 2	3	50
	20	30	40	



Solução inicial: método dos custos mínimos

1. Colocar a maior quantidade possível na casa com custo mínimo ⇒
   - ou a procura de um destino (coluna) é totalmente satisfeita,
   - ou a oferta de uma origem (linha) é totalmente usada,
   - ou ambas.
2. Cortar a linha ou a coluna (ou ambas)
3. Repetir se ainda houver uma casa.

	D	E	F	
A	3	6	30 (5)	30
B	2	5	10 (5)	10
C	20 (1)	30 (2)	3	50
	20	30	40	

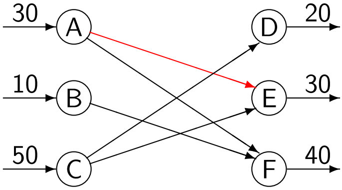


- Solução básica deve ter 5 variáveis básicas. Esta solução é admissível, mas ...

Solução inicial ... deve ter 5 variáveis básicas

- Considerar uma variável com valor nulo como variável básica.
- (neste caso, seleccionamos x_{AE}).
- A solução básica admissível é uma solução degenerada.

	D	E	F	
A	3	0 6	30 5	30
B	2	5	10 5	10
C	20 1	30 2	3	50
	20	30	40	

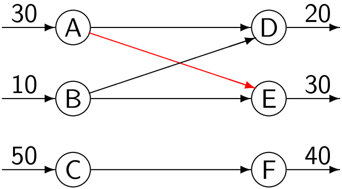


- Grafo associado à solução básica é uma árvore (depois de adicionar o arco).
- Desta forma, quando há vários componentes (floresta), em soluções degeneradas, também se pode associar à solução básica uma árvore.

Nota: selecção da variável básica com valor 0

- Nem todas as variáveis podem ser escolhidas!
- No seguinte exemplo, escolher a variável x_{AE} dá origem a um grafo que não é uma árvore.

	D	E	F
A	*	0	
B	*	*	
C			*



- Os arcos associados às variáveis formam um ciclo (*i.e.*, as colunas do modelo de PL são linearmente dependentes, e portanto não formam uma base)

Pivô: variação das variáveis não-básicas

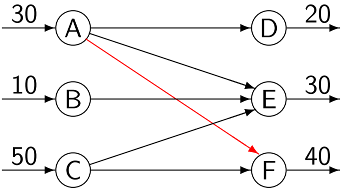
- Pivô: quadro inicial → quadro adjacente

- No movimento ao longo de uma aresta do poliedro do modelo de programação linear (de transportes):
- todas as variáveis não-básicas permanecem nulas, excepto uma **única** que aumenta de valor.

Pivô: como variam os valores das variáveis básicas?

- Exemplo: quando a variável x_{AF} (não-básica) aumenta de uma quantidade θ, como variam os valores das variáveis básicas?

	D	E	F	
A	20 $_3$	10 $_6$	$+\theta$ $_5$	30
B	$_2$	10 $_5$	$_5$	10
C	$_1$	10 $_2$	40 $_3$	50
	20	30	40	



Propriedades das árvores:

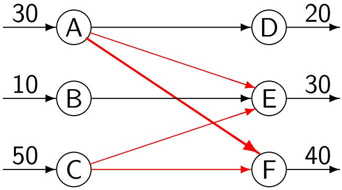
- Há 1 caminho (e 1 só) entre cada par de vértices. Porquê?
- A adição de 1 arco a uma árvore dá origem a 1 (e 1 só) ciclo. Porquê?

Pivô: variação dos valores das variáveis básicas

- O arco (A, F) (variável não-básica) forma um ciclo com os arcos (C, F), (C, E) e (A, E) (das variáveis básicas).

- Os arcos do ciclo formam um conjunto linearmente dependente.

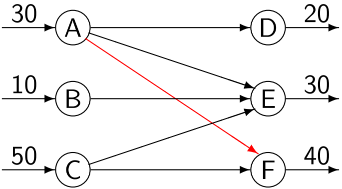
	D	E	F	
A	20 $_3$	10$-\theta$ $_6$	$+\theta$ $_5$	30
B	$_2$	10 $_5$	$_5$	10
C	$_1$	10$+\theta$ $_2$	40$-\theta$ $_3$	50
	20	30	40	



- As variáveis básicas do ciclo são designadas por *Stepping-stones*.
- Os valores das variáveis básicas que ficam fora do ciclo não mudam.

Pivô: qual o aumento máximo de x_{AF}?

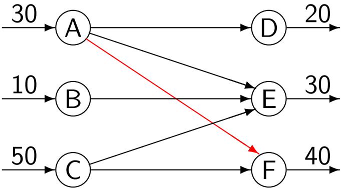
	D	E	F	
A	$20 \quad _3$	$10-\theta \quad _6$	$+\theta \quad _5$	30
B	$_2$	$10 \quad _5$	$_5$	10
C	$_1$	$10+\theta \quad _2$	$40-\theta \quad _3$	50
	20	30	40	



- Quanto pode aumentar a variável não-básica x_{AF} sem nenhuma das variáveis básicas se tornar negativa?
- $\theta_{max} = \min\{10, 40\} = 10$

Pivô: exemplo

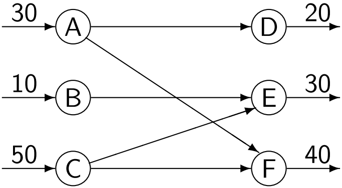
	D	E	F	
A	$20\ {}_{3}$	$10-\theta\ {}_{6}$	$+\theta\ {}_{5}$	30
B	${}_{2}$	$10\ {}_{5}$	${}_{5}$	10
C	${}_{1}$	$10+\theta\ {}_{2}$	$40-\theta\ {}_{3}$	50
	20	30	40	



$\theta_{max} = \min\{10, 40\} = 10$

- A variável x_{AF} entra na base e x_{AE} sai da base.

	D	E	F	
A	$20\ {}_{3}$	${}_{6}$	$10\ {}_{5}$	30
B	${}_{2}$	$10\ {}_{5}$	${}_{5}$	10
C	${}_{1}$	$20\ {}_{2}$	$30\ {}_{3}$	50
	20	30	40	



Teste de optimalidade: método dos multiplicadores

Multiplicadores associados às restrições:

- há um multiplicador u_i associado a cada linha i, $i = 1, \ldots, m$;
- há um multiplicador v_j associado a cada coluna j, $j = 1, \ldots, n$.

Método dos multiplicadores:

0. Fixar o valor de um qualquer multiplicador (*e.g.*, no valor 0).
1. Para as casas básicas ($ij \in \mathscr{B}$), fazer:

$$c_{ij} = u_i - v_j$$

2. Para as casas não-básicas ($ij \in \mathscr{N}$), fazer:

$$\delta_{ij} = c_{ij} - (u_i - v_j)$$

Output do método dos multiplicadores:

- os δ_{ij} de todas as casas não-básicas.

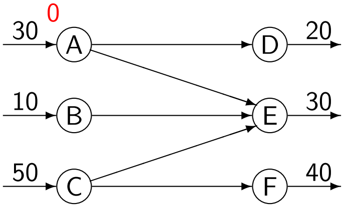
Nota: há livros que usam $c_{ij} = u_i + v_j$ em grafos bipartidos, o que equivale a usar os valores simétricos de v_j. É fácil de verificar que o cálculo dos δ_{ij} dá o mesmo resultado.

Exemplo: passo 0 do método dos multiplicadores

Método dos multiplicadores:

0. Fixar o valor de um qualquer multiplicador (*e.g.*, no valor 0).

u_i \ v_j				
0	20 (3)	10 (6)	(5)	30
	(2)	10 (5)	(5)	10
	(1)	10 (2)	40 (3)	50



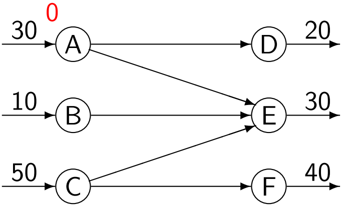
- fixar um multiplicador: $u_A = 0$.

Método dos multiplicadores:

1. Para as casas básicas, fazer:

$$c_{ij} = u_i - v_j$$

u_i \ v_j				
$\color{red}{0}$	20 (3)	10 (6)	(5)	30
	(2)	10 (5)	(5)	10
	(1)	10 (2)	40 (3)	50



- $u_A - v_D = 3 \qquad \Rightarrow v_D =$
-
-
-
-
-

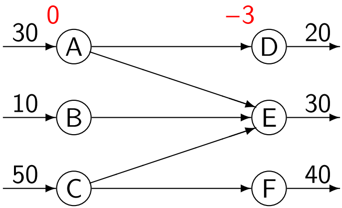
Exemplo: passo 1 do método dos multiplicadores

Método dos multiplicadores:

1. Para as casas básicas, fazer:

$$c_{ij} = u_i - v_j$$

u_i \ v_j	-3			
0	20 | 3	10 | 6	5	30
	2	10 | 5	5	10
	1	10 | 2	40 | 3	50



- $u_A - v_D = 3 \qquad \Rightarrow v_D = -3$
- $u_A - v_E = 6 \qquad \Rightarrow v_E =$
-
-
-
-

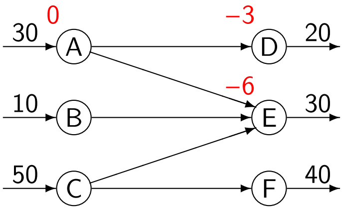
Exemplo: passo 1 do método dos multiplicadores

Método dos multiplicadores:

1. Para as casas básicas, fazer:

$$c_{ij} = u_i - v_j$$

u_i \ v_j	-3	-6		
0	20 $_3$	10 $_6$	$_5$	30
	$_2$	10 $_5$	$_5$	10
	$_1$	10 $_2$	40 $_3$	50



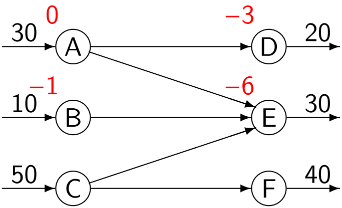
- $u_A - v_D = 3 \quad \Rightarrow v_D = -3$
- $u_A - v_E = 6 \quad \Rightarrow v_E = -6$
- $u_B - v_E = 5 \quad \Rightarrow u_B =$
-
-
-

Método dos multiplicadores:

1. Para as casas básicas, fazer:

$$c_{ij} = u_i - v_j$$

u_i \ v_j	-3	-6		
0	20 (3)	10 (6)	5	30
-1	2	10 (5)	5	10
	1	10 (2)	40 (3)	50



- $u_A - v_D = 3 \quad \Rightarrow v_D = -3$
- $u_A - v_E = 6 \quad \Rightarrow v_E = -6$
- $u_B - v_E = 5 \quad \Rightarrow u_B = -1$
- $u_C - v_E = 2 \quad \Rightarrow u_C =$
-
-

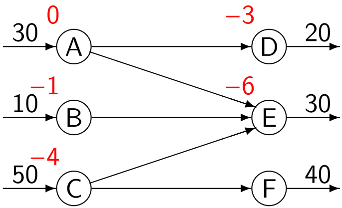
Exemplo: passo 1 do método dos multiplicadores

Método dos multiplicadores:

1. Para as casas básicas, fazer:

$$c_{ij} = u_i - v_j$$

u_i \ v_j	-3	-6		
0	20 (3)	10 (6)	(5)	30
-1	(2)	10 (5)	(5)	10
-4	(1)	10 (2)	40 (3)	50



- $u_A - v_D = 3 \quad \Rightarrow v_D = -3$
- $u_A - v_E = 6 \quad \Rightarrow v_E = -6$
- $u_B - v_E = 5 \quad \Rightarrow u_B = -1$
- $u_C - v_E = 2 \quad \Rightarrow u_C = -4$
- $u_C - v_F = 3 \quad \Rightarrow v_F =$
-

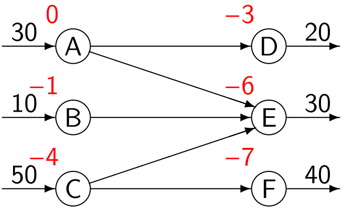
Exemplo: passo 1 do método dos multiplicadores

Método dos multiplicadores:

1. Para as casas básicas, fazer:

$$c_{ij} = u_i - v_j$$

u_i \ v_j	-3	-6	-7	
0	20 (custo 3)	10 (custo 6)	(custo 5)	30
-1	(custo 2)	10 (custo 5)	(custo 5)	10
-4	(custo 1)	10 (custo 2)	40 (custo 3)	50



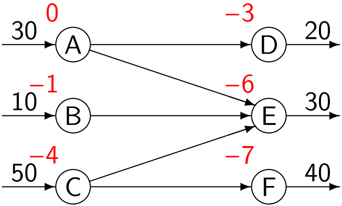
- $u_A - v_D = 3 \quad \Rightarrow v_D = -3$
- $u_A - v_E = 6 \quad \Rightarrow v_E = -6$
- $u_B - v_E = 5 \quad \Rightarrow u_B = -1$
- $u_C - v_E = 2 \quad \Rightarrow u_C = -4$
- $u_C - v_F = 3 \quad \Rightarrow v_F = -7$
- Será sempre possível calcular todos os multiplicadores? Porquê?

Método dos multiplicadores

2. Para as casas não-básicas, fazer:

$$\delta_{ij} = c_{ij} - (u_i - v_j) = c_{ij} - u_i + v_j$$

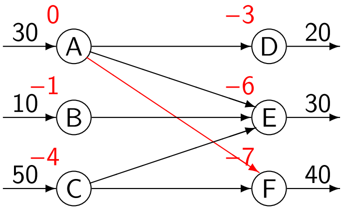
u_i \ v_j	-3	-6	-7	
0	20 (custo 3)	10 (custo 6)	-2 (custo 5)	30
-1	0 (custo 2)	10 (custo 5)	-1 (custo 5)	10
-4	$+2$ (custo 1)	10 (custo 2)	40 (custo 3)	50



- $\delta_{AF} = 5 - 0 - 7 = -2$
- $\delta_{BD} = 2 - (-1) + (-3) = 0$
- $\delta_{BF} = 5 - (-1) + (-7) = -1$
- $\delta_{CD} = 1 - (-4) + (-3) = +2$
- A variável não-básica x_{AF} é a mais atractiva.

nota: o valor de δ_{AF} pode também ser calculado assim:

	D	E	F	
A	20 $_3$	$10-\theta$ $_6$	$+\theta$ $_5$	30
B	$_2$	10 $_5$	$_5$	10
C	$_1$	$10+\theta$ $_2$	$40-\theta$ $_3$	50
	20	30	40	



Por cada unidade de aumento da variável não-básica x_{AF},

- gastam-se mais 5 unidades em (A, F),
- economizam-se 3 unidades em (C, F),
- gastam-se mais 2 unidades em (C, E),
- economizam-se 6 unidades em (A, E),
- pelo que o valor da função objectivo diminui 2 unidades:
  $\delta_{AF} = +5 - 3 + 2 - 6 = -2 \quad = \quad +5 - (0 - (-7))$

- É pouco eficiente repetir isto para todas as vars não-básicas$^{(*)}$.

(*) Esta técnica é conhecida pelo método do *stepping-stone*.

Variável não-básica que entra na base: selecção

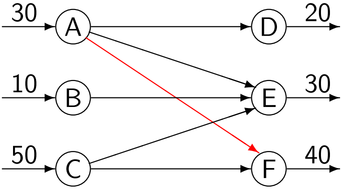
- Seleccionar a variável não-básica com maior variação da função objectivo por unidade de incremento da variável não-básica, ou seja:

A variável não-básica a entrar na base é:

- a variável não-básica com δ_{ij} mais negativo (em problemas de minimização).

- Esta escolha visa atingir a solução óptima mais rapidamente.
- Em caso de empate, a escolha é arbitrária.

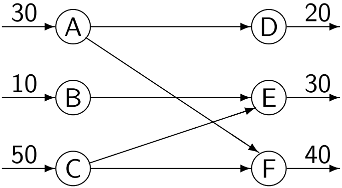
	D	E	F	
A	$20 \;{}_{3}$	$10-\theta \;{}_{6}$	$+\theta \;{}_{5}$	30
B	${}_{2}$	$10 \;{}_{5}$	${}_{5}$	10
C	${}_{1}$	$10+\theta \;{}_{2}$	$40-\theta \;{}_{3}$	50
	20	30	40	



$\theta_{max} = \min\{10, 40\} = 10$

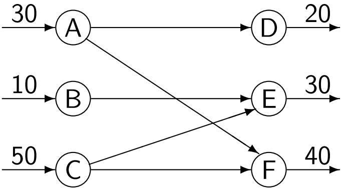
- A variável x_{AF} entra na base e x_{AE} sai da base.

	D	E	F	
A	$20 \;{}_{3}$	${}_{6}$	$10 \;{}_{5}$	30
B	${}_{2}$	$10 \;{}_{5}$	${}_{5}$	10
C	${}_{1}$	$20 \;{}_{2}$	$30 \;{}_{3}$	50
	20	30	40	



Quadro 2: teste de optimalidade

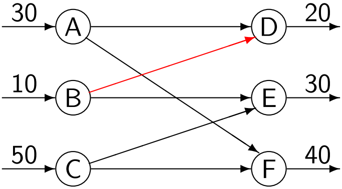
	-3	-4	-5	
0	20 (custo 3)	$+2$ (custo 6)	10 (custo 5)	30
1	-2 (custo 2)	10 (custo 5)	-1 (custo 5)	10
-2	0 (custo 1)	20 (custo 2)	30 (custo 3)	50
	20	30	40	



- A variável não-básica mais atractiva é a variável $x_{BD} : \delta_{BD} = -2$.

Iteração 2

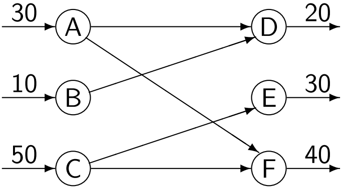
	D	E	F	
A	$20-\theta$ 3	6	$10+\theta$ 5	30
B	$+\theta$ 2	$10-\theta$ 5	5	10
C	1	$20+\theta$ 2	$30-\theta$ 3	50
	20	30	40	



$\theta_{max} = \min\{10, 20, 30\} = 10$

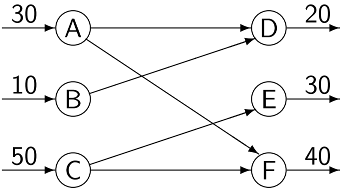
- A variável x_{BD} entra na base e x_{BE} sai da base.

	D	E	F	
A	10 3	6	20 5	30
B	10 2	5	5	10
C	1	30 2	20 3	50
	20	30	40	



Quadro 3: teste de optimalidade

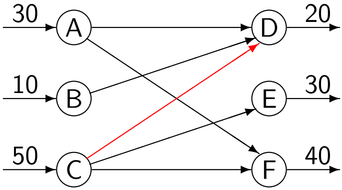
	-3	-4	-5	
0	10 3	$+2$ 6	20 5	30
-1	10 2	$+2$ 5	$+1$ 5	10
-2	0 1	30 2	20 3	50
	20	30	40	



- Solução óptima.
- Custo da solução óptima: $10(3){+}20(5){+}10(2){+}30(2){+}20(3){=}270$
- Há soluções óptimas alternativas, porque $\delta_{CD} = 0$.

Uma solução óptima alternativa

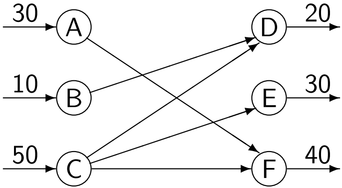
	D	E	F	
A	$10-\theta$ 3	6	$20+\theta$ 5	30
B	10 2	5	5	10
C	$+\theta$ 1	30 2	$20-\theta$ 3	50
	20	30	40	



$\theta_{max} = \min\{10, 20\} = 10$

- O custo da seguinte solução é o mesmo. Porquê?

	D	E	F	
A	3	6	30 5	30
B	10 2	5	5	10
C	10 1	30 2	10 3	50
	20	30	40	



Conclusão

- O algoritmo apresentado é uma especialização do algoritmo simplex para um problema que é representado num grafo bipartido.
- Este problema é, por vezes, designado por problema de Hitchcock(†), que apresentou um modelo matemático e um procedimento para a sua resolução.
- Os grafos bipartidos são uma classe de grafos, e o algoritmo pode ser generalizado para grafos gerais.

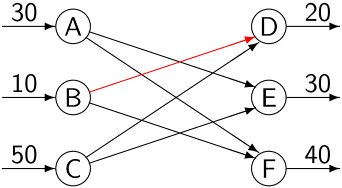
(†) - Frank. L. Hitchcock, The distribution of a product from several sources to numerous localities, J. Math. Physics, 20 (1941), 224-230.

Apêndices

1. Degenerescência

- Com degenerescência, regras são semelhantes, mas θ_{max} pode ser 0.

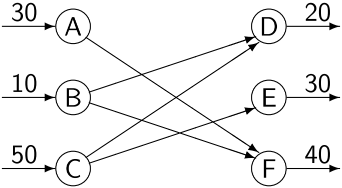
	-5	-6	-5	
0	-2 / 3	$0-\theta$ / 6	$30+\theta$ / 5	30
0	-3 $+\theta$ / 2	-1 / 5	$10-\theta$ / 5	10
-4	$20-\theta$ / 1	$30+\theta$ / 2	$+2$ / 3	50
	20	30	40	



$\theta_{max} = \min\{0, 10, 20\} = 0$

- A variável x_{BD} entra na base (com valor nulo) e x_{AE} sai da base.

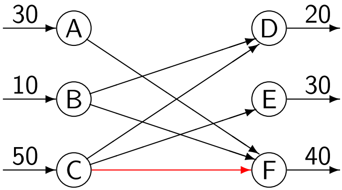
3	6	30 / 5	30
0 / 2	5	10 / 5	10
20 / 1	30 / 2	3	50
20	30	40	



Degenerescência: saída do vértice degenerado

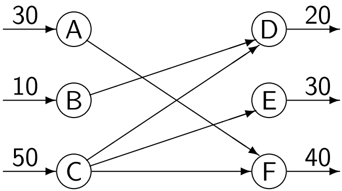
- O pivô anterior designa-se por *pivô degenerado:* a base é diferente, mas a solução básica (vértice) é a mesma.

	-2	-3	-5	
0	$+1$ 3	$+3$ 6	30 5	30
0	$0+\theta$ 2	$+2$ 5	$10-\theta$ 5	10
-1	$20-\theta$ 1	30 2	-1 $+\theta$ 3	50
	20	30	40	



$\theta_{max} = \min\{10, 20\} = 10$

	-2	-3	-5	
0	$+1$ 3	$+3$ 6	30 5	30
0	10 2	$+2$ 5	5	10
-1	10 1	30 2	-1 10 3	50
	20	30	40	



Fim