

Tópicos de Matemática Discreta

folha 6

## 2. Indução nos naturais

**2.1.** Prove, por indução nos naturais, as seguintes propriedades:

- (a)  $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n + 1)$ , para todo  $n \geq 1$ .
- (b)  $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ , para todo  $n \geq 1$ .
- (c)  $2^0 + 2^1 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ , para todo  $n \geq 1$ .
- (d)  $1 + 4 + 9 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ , para todo  $n \geq 1$ .
- (e)  $n^2 > 2n + 1$ , para todo  $n \geq 3$ .
- (f)  $n! \geq n^2$ , para todo  $n \geq 4$ .
- (g)  $n^3 - n$  é múltiplo de 3, para todo  $n \geq 1$ .
- (h)  $5^n - 1$  é múltiplo de 4, para todo  $n \geq 1$ .
- (i)  $7n < 2^n$  para todo  $n \geq 6$ .
- (j)  $2^n > n^3$ , para todo  $n \geq 10$ .
- (k)  $a^n \leq b^n$ , para todo  $n \geq 1$  e para todo  $a, b \in \mathbb{R}$  tais que  $0 \leq a \leq b$ .

**2.2.** Seja  $p(n)$  a seguinte afirmação:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{(n-1)(n+2)}{2}.$$

- (a) Mostre que se  $p(k)$  é verdadeira (com  $k \in \mathbb{N}$ ), então  $p(k+1)$  também é verdadeira.
- (b) Podemos concluir que  $p(n)$  é válida para todo  $n \in \mathbb{N}$ ?

**2.3.** Seja  $X$  um conjunto tal que  $X \subseteq \mathbb{N}$ ,  $3 \in X$  e, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$n \in X \Rightarrow n + 3 \in X.$$

Prove que  $\{3n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$ .

**2.4.** Recorrendo ao Princípio de Indução Completa, mostre que a sequência de Fibonacci (definida por  $F_1 = 1$ ,  $F_2 = 1$ ,  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ , para todo  $n \geq 3$ ) satisfaz, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $F_n \geq (3/2)^{n-2}$ .