LÓGICA EI
Mestrado Integrado em Engenharia Informática
Universidade do Minho

Departamento de Matemática

2020/2021

1.2 Semântica do Cálculo Proposicional

Definição:

Os *valores lógicos* do CP são o *verdadeiro* e o *falso*.

Estes valores serão denotados, respetivamente, por 1 e 0 ou por **V** e **F**.

Definição: Uma função $v : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \{0, 1\}$ é uma *valoração* quando satisfaz as seguintes condições:

a) $v(\bot) = 0$,

b) $v(\neg\varphi) = f_\neg(v(\varphi))$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$,

c) $v(\varphi \Box \psi) = f_\Box(v(\varphi), v(\psi))$, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$ e para todo $\Box \in \{\land, \lor, \rightarrow, \leftrightarrow\}$,

onde $f_\neg, f_\land, f_\lor, f_\rightarrow, f_\leftrightarrow$ são as *funções boleanas* determinadas pelas *tabelas de verdade* dos respetivos conetivos; designadamente:

Definição (cont.):

$$
\begin{array}{rccc}
f_{\neg}: & \{0,1\} & \longrightarrow & \{0,1\} \\
 & 0 & \mapsto & 1 \\
 & 1 & \mapsto & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rccc}
f_{\wedge}: & \{0,1\}^2 & \longrightarrow & \{0,1\} \\
 & (1,1) & \mapsto & 1 \\
 & (1,0) & \mapsto & 0 \\
 & (0,1) & \mapsto & 0 \\
 & (0,0) & \mapsto & 0
\end{array}
$$

Definição (cont.):

$$\begin{array}{rccc} f_\vee : & \{0,1\}^2 & \longrightarrow & \{0,1\} \\ & (1,1) & \mapsto & 1 \\ & (1,0) & \mapsto & 1 \\ & (0,1) & \mapsto & 1 \\ & (0,0) & \mapsto & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} f_\rightarrow : & \{0,1\}^2 & \longrightarrow & \{0,1\} \\ & (1,1) & \mapsto & 1 \\ & (1,0) & \mapsto & 0 \\ & (0,1) & \mapsto & 1 \\ & (0,0) & \mapsto & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} f_\leftrightarrow : & \{0,1\}^2 & \longrightarrow & \{0,1\} \\ & (1,1) & \mapsto & 1 \\ & (1,0) & \mapsto & 0 \\ & (0,1) & \mapsto & 0 \\ & (0,0) & \mapsto & 1 \end{array}$$

Proposição: Seja v uma valoração e sejam φ, ψ fórmulas do CP.

a) (i) $v(\neg\varphi) = 1$ sse $v(\varphi) = 0$;
(ii) $v(\neg\varphi) = 1 - v(\varphi)$.

b) (i) $v(\varphi \wedge \psi) = 1$ sse $v(\varphi) = 1$ e $v(\psi) = 1$;
(ii) $v(\varphi \wedge \psi) = \mathit{mínimo}(v(\varphi), v(\psi))$.

c) (i) $v(\varphi \vee \psi) = 1$ sse $v(\varphi) = 1$ ou $v(\psi) = 1$;
(ii) $v(\varphi \vee \psi) = \mathit{máximo}(v(\varphi), v(\psi))$.

d) $v(\varphi \to \psi) = 1$ sse $v(\varphi) = 0$ ou $v(\psi) = 1$.

e) $v(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1$ sse $v(\varphi) = v(\psi)$.

Dem.: Exercício. $\square$

Proposição: Seja $f : \mathcal{V}^{CP} \longrightarrow \{0, 1\}$ uma função. Então, existe uma e uma só valoração v t.q. $v(p) = f(p)$, para todo $p \in \mathcal{V}^{CP}$.

Dem.: Consequência imediata do Princípio de recursão estrutural para fórmulas do CP. $\square$

Exemplo:

1. Existe uma e uma só valoração v t.q. $v(p) = 0$, para todo $p \in \mathcal{V}^{CP}$.

   (No exemplo seguinte denotaremos tal valoração por v_1.)

2. Existe uma e uma só valoração v t.q.

$$v(p) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad p \in \{p_0, p_2\} \\ 0 & \text{se} \quad p \in \mathcal{V}^{CP} - \{p_0, p_2\} \end{cases} .$$

   (No exemplo seguinte denotaremos tal valoração por v_2.)

Definição:

O *valor lógico de uma fórmula* φ *para uma valoração* v é $v(\varphi)$.

Exemplo: Sejam v_1 e v_2 as valorações do exemplo anterior, designadamente:

(i) $v_1(p) = 0$, para todo $p \in \mathcal{V}^{CP}$;

(ii) $v_2(p) = \begin{cases} 1 & \text{se } \; p \in \{p_0, p_2\} \\ 0 & \text{se } \; p \in \mathcal{V}^{CP} - \{p_0, p_2\} \end{cases}$.

a) Seja $\varphi = (p_1 \vee p_2) \to (p_1 \wedge p_2)$.
Como $v_1(p_1) = v_1(p_2) = 0$, $v_1(p_1 \vee p_2) = 0$, donde, de imediato, segue $v_1(\varphi) = 1$.
(Exercício: verifique que $v_2(\varphi) = 0$.)

b) Seja $\psi = \neg p_1 \leftrightarrow (p_1 \to \perp)$.
Como $v_1(p_1) = 0$, por um lado, temos $v_1(\neg p_1) = 1$ e, por outro, temos $v_1(p_1 \to \perp) = 1$. Assim, $v_1(\psi) = 1$.
(Exercício: verifique que $v_2(\psi) = 1$.
Em particular, observe que v_2 e v_1 atribuem o mesmo valor lógico à única variável proposicional que ocorre em ψ.)

Proposição: Sejam v_1 e v_2 valorações e seja φ uma fórmula do CP. Se, para todo $p \in var(\varphi)$, $v_1(p) = v_2(p)$, então $v_1(\varphi) = v_2(\varphi)$.

Dem.: Por indução estrutural em fórmulas do CP.

Seja $P(\varphi)$ a condição:
para todo $p \in var(\varphi), v_1(p) = v_2(p) \;\Rightarrow\; v_1(\varphi) = v_2(\varphi)$.

a) $P(\perp)$ é verdadeira, pois $v_1(\perp) = 0 = v_2(\perp)$, por definição de valoração.

b) Suponhamos que p' é uma variável proposicional e que, para todo $p \in var(p')$, $v_1(p) = v_2(p)$.

Assim, temos $v_1(p') = v_2(p')$, pois $p' \in var(p')$, uma vez que $var(p') = \{p'\}$.

Deste modo, para qualquer $p' \in \mathcal{V}^{CP}$, $P(p')$ é verdadeira.

Dem. (cont.):

c) Sejam $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$ e $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.
Suponhamos $P(\varphi_1)$ e $P(\varphi_2)$ (hipóteses de indução).
Mostremos $P(\varphi_1 \Box \varphi_2)$.

Suponhamos que, para todo $p \in var(\varphi_1 \Box \varphi_2)$, $v_1(p) = v_2(p)$.

Então, como $var(\varphi_1 \Box \varphi_2) = var(\varphi_1) \cup var(\varphi_2)$, para $i \in \{1, 2\}$, tem-se $v_1(p) = v_2(p)$, para todo $p \in var(\varphi_i)$.

Daqui, aplicando as hipóteses de indução $P(\varphi_1)$ e $P(\varphi_2)$, segue que $v_1(\varphi_1) = v_2(\varphi_1)$ e $v_1(\varphi_2) = v_2(\varphi_2)$.

Assim,
$v_1(\varphi_1 \Box \varphi_2) = f_\Box(v_1(\varphi_1), v_1(\varphi_2)) = f_\Box(v_2(\varphi_1), v_2(\varphi_2)) = v_2(\varphi_1 \Box \varphi_2)$.

Consequentemente, $P(\varphi_1 \Box \varphi_2)$ é verdadeira.

d) Exercício: mostrar que $P(\varphi_1)$ implica $P(\neg\varphi_1)$, para todo $\varphi_1 \in \mathcal{F}^{CP}$. $\Box$

Definição:

1. Uma fórmula φ é uma *tautologia* quando, para qualquer valoração v, $v(\varphi) = 1$.
2. Uma fórmula φ é uma *contradição* quando, para qualquer valoração v, $v(\varphi) = 0$.

Notação :

A notação $\models \varphi$ significará que φ é uma tautologia.

A notação $\not\models \varphi$ significará que φ não é uma tautologia.

Exemplo:

1. A fórmula $\psi = \neg p_1 \leftrightarrow (p_1 \to \perp)$ do exemplo anterior é uma tautologia.

   De facto, dada uma valoração arbitrária v, sabemos que $v(p_1) = 0$ ou $v(p_1) = 1$.

   (a) Caso $v(p_1) = 0$, então $v(\neg p_1) = 1$ e $v(p_1 \to \perp) = 1$, donde $v(\psi) = 1$.

   (b) Caso $v(p_1) = 1$, então $v(\neg p_1) = 0$ e $v(p_1 \to \perp) = 0$, donde $v(\psi) = 1$.

Exemplo (cont.):

2. Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\varphi \wedge \neg\varphi$ é uma contradição.

   Seja φ uma fórmula proposicional (arbitrária).
   Dada uma valoração v (arbitrária), sabemos que
   $v(\varphi) = 0$ ou $v(\varphi) = 1$.

   (a) Caso $v(\varphi) = 0$, então, de imediato, sabemos $v(\varphi \wedge \neg\varphi) = 0$.

   (b) Caso $v(\varphi) = 1$, então $v(\neg\varphi) = 0$, donde $v(\varphi \wedge \neg\varphi) = 0$.

3. As fórmulas $p_0, \neg p_0, p_0 \vee p_1, p_0 \wedge p_1, p_0 \rightarrow p_1, p_0 \leftrightarrow p_1$ não são tautologias nem contradições. (Porquê?)

Proposição: Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$,

1. φ é tautologia se e só se $\neg\varphi$ é contradição;
2. φ é contradição se e só se $\neg\varphi$ é tautologia.

Dem.: Exercício. $\square$

Observação:

Sabendo que φ não é uma tautologia, não podemos concluir que φ é uma contradição.

Analogamente, sabendo que φ não é uma contradição, não podemos concluir que φ é uma tautologia.

Tenha-se em atenção que existem fórmulas que não são tautologias, nem são contradições (como vimos no exemplo anterior).

Método de decisão para tautologias e contradições:

Considere-se uma fórmula φ do Cálculo Proposicional (arbitrária).

A proposição no slide 12, estabelece que para quaisquer valorações v_1 e v_2:

$$\text{para todo } p \in var(\varphi), v_1(p) = v_2(p) \;\Rightarrow\; v_1(\varphi) = v_2(\varphi).$$

Assim, para decidir se φ é uma tautologia (respetivamente, uma contradição), basta calcular o valor lógico de φ para $2^{\# var(\varphi)}$ valorações (o número de atribuições, possíveis, às variáveis proposicionais de φ) e verificar se o valor lógico obtido é sempre 1 (respetivamente, sempre 0).

Tal pode ser descrito através de uma *tabela de verdade*, como se segue.

Método de decisão para tautologias e contradições (cont.):

Introduzimos: uma coluna para cada variável proposicional de φ; uma coluna para φ; e colunas (auxiliares) para cada uma das restantes subfórmulas de φ.

Introduzimos linhas para cada uma das atribuições, possíveis, de valores de verdade às variáveis proposicionais de φ (*i.e.*, sequências de 0's e 1's de comprimento igual ao número de variáveis proposicionais em φ).

Preenchemos as colunas respeitantes às variáveis proposicionais com essas atribuições.

Nas restantes posições (i, j) da tabela, escrevemos o valor lógico da fórmula respeitante à coluna j, para uma valoração que satisfaz as atribuições às variáveis proposicionais na linha i.

Exemplo: Seja φ a fórmula $(\neg p_1 \to \neg p_2) \leftrightarrow (p_2 \to p_1)$.

Da tabela de verdade de φ, apresentada de seguida, podemos concluir que φ é uma tautologia, uma vez que φ assume o valor lógico 1, para todas as possíveis atribuições de valores de verdade às variáveis proposicionais de φ.

p_1	p_2	$\neg p_1$	$\neg p_2$	$\neg p_1 \to \neg p_2$	$p_2 \to p_1$	$(\neg p_1 \to \neg p_2) \leftrightarrow (p_2 \to p_1)$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1

Tabela de verdade de $(\neg p_1 \to \neg p_2) \leftrightarrow (p_2 \to p_1)$

Teorema (Generalização): Sejam p uma variável proposicional e sejam φ e ψ fórmulas do CP.
Se φ é tautologia, então $\varphi[\psi/p]$ é tautologia.

Dem.: Qualquer que seja a valoração v, demonstra-se, por indução estrutural na fórmula φ, que a valoração v' definida, a partir de v e de ψ, do seguinte modo

$$v'(p') = \begin{cases} v(\psi) \;\text{ se }\; p' = p \\ \\ v(p') \;\text{ se }\; p' \in \mathcal{V}^{CP} - \{p\} \end{cases}$$

é tal que $v'(\varphi) = v(\varphi[\psi/p])$.

Portanto, se φ é uma tautologia, $v'(\varphi) = 1$ e, pela igualdade anterior, $v(\varphi[\psi/p]) = 1$.

Assim, qualquer que seja a valoração v, $v(\varphi[\psi/p]) = 1$, *i.e.*, $\varphi[\psi/p]$ é uma tautologia. $\square$

Exemplo:

A fórmula $p_0 \vee \neg p_0$ é uma tautologia.

Logo, para qualquer fórmula ψ, a fórmula $(p_0 \vee \neg p_0)[\psi/p_0] = \psi \vee \neg\psi$ é ainda uma tautologia.

Definição: Sejam φ e ψ fórmulas do CP.

Dizemos que φ é *logicamente equivalente* a ψ (notação: $\varphi \Leftrightarrow \psi$) quando a fórmula $\varphi \leftrightarrow \psi$ é uma tautologia, ou seja, quando para qualquer valoração v, $v(\varphi) = v(\psi)$.

Exemplo: Para toda a fórmula proposicional φ, $\neg\varphi \Leftrightarrow (\varphi \to \perp)$.

A demonstração deste facto pode ser sintetizada numa *tabela de verdade*, como se segue:

φ	$\neg\varphi$	$\varphi \to \perp$	$\neg\varphi \leftrightarrow (\varphi \to \perp)$
1	0	0	1
0	1	1	1

Tabela de verdade de $\neg\varphi \leftrightarrow (\varphi \to \perp)$.

A primeira linha da tabela mostra que o valor lógico de $\neg\varphi \leftrightarrow (\varphi \to \perp)$ é 1 para qualquer valoração para a qual φ assuma o valor lógico 1.

A segunda linha da tabela mostra que o valor lógico de $\neg\varphi \leftrightarrow (\varphi \to \perp)$ é 1 para qualquer valoração para a qual φ assuma o valor lógico 0.

Proposição: A relação de equivalência lógica satisfaz as seguintes propriedades:

1. para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\varphi \Leftrightarrow \varphi$ (*reflexividade*);
2. para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$, se $\varphi \Leftrightarrow \psi$, então $\psi \Leftrightarrow \varphi$ (*simetria*);
3. para todo $\varphi, \psi, \sigma \in \mathcal{F}^{CP}$, se $\varphi \Leftrightarrow \psi$ e $\psi \Leftrightarrow \sigma$, então $\varphi \Leftrightarrow \sigma$ (*transitividade*).

Dem.: Para mostrar 1, temos que mostar que, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, a fórmula $\varphi \leftrightarrow \varphi$ é uma tautologia.

De facto, dado $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, para qualquer valoração v, $v(\varphi) = v(\varphi)$, donde $v(\varphi \leftrightarrow \varphi) = 1$, e, consequentemente, $\varphi \leftrightarrow \varphi$ é uma tautologia.

(Exercício: mostrar 2 e 3.) $\square$

Corolário: A relação de equivalência lógica é uma relação de equivalência em $\mathcal{F}^{CP}$.

Dem.: Imediata, a partir da proposição anterior. $\square$

Proposição: As seguintes equivalências lógicas são válidas.

$$(\varphi \vee \psi) \vee \sigma \Leftrightarrow \varphi \vee (\psi \vee \sigma) \qquad (\varphi \wedge \psi) \wedge \sigma \Leftrightarrow \varphi \wedge (\psi \wedge \sigma)$$

(*associatividade*)

$$\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \psi \vee \varphi \qquad \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \psi \wedge \varphi$$

(*comutatitvidade*)

$$\varphi \vee \varphi \Leftrightarrow \varphi \qquad \varphi \wedge \varphi \Leftrightarrow \varphi$$

(*idempotência*)

$$\varphi \vee \perp \Leftrightarrow \varphi \qquad \varphi \wedge \neg \perp \Leftrightarrow \varphi$$

(*elemento neutro*)

$$\varphi \vee \neg \perp \Leftrightarrow \neg \perp \qquad \varphi \wedge \perp \Leftrightarrow \perp$$

(*elemento absorvente*)

Proposição (cont.):

$$\varphi \vee (\psi \wedge \sigma) \Leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \sigma) \qquad \varphi \wedge (\psi \vee \sigma) \Leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \sigma)$$

(*distributividade*)

$$\neg(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi \qquad \neg(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi$$

(*leis de De Morgan*)

$$\neg\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi$$

(*lei da dupla negação*)

$$\varphi \to \psi \Leftrightarrow \neg\psi \to \neg\varphi$$

(*contrarrecíproco*)

$$\varphi \leftrightarrow \psi \Leftrightarrow (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi) \qquad \varphi \to \psi \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \psi$$

$$\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \neg\varphi \to \psi \qquad \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$$

$$\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi \to \perp \qquad \perp \Leftrightarrow \varphi \wedge \neg\varphi$$

(*expressão de um conetivo em termos de outros conetivos*)

Teorema (Substituição): Sejam $p \in \mathcal{V}^{CP}$ e $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$. Então: $\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2$ sse para todo $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\psi[\varphi_1/p] \Leftrightarrow \psi[\varphi_2/p]$.

Dem.:

$\Leftarrow$) Suponhamos que para todo $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\psi[\varphi_1/p] \Leftrightarrow \psi[\varphi_2/p]$.
Então, em particular, teremos que $p[\varphi_1/p] \Leftrightarrow p[\varphi_2/p]$.
Logo, por definição de substituição, $\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2$.

$\Rightarrow$) Suponhamos agora que $\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2$.
Demonstra-se, por indução estrutural em fórmulas do CP, que, para todo $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$, $P(\psi)$, onde $P(\psi)$ é a condição:
$\psi[\varphi_1/p] \Leftrightarrow \psi[\varphi_2/p]$. $\square$

Exemplo: Sejam φ e ψ fórmulas. Então,

$$\neg(\neg\varphi \wedge \psi) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \neg\neg\varphi \vee \neg\psi \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \varphi \vee \neg\psi.$$

Justificações

(1) Lei de De Morgan.

(2) Dada uma variável proposicional $p \notin var(\psi)$ (que existe sempre, pois o número de variáveis proposicionais que ocorrem em φ é finito), pelo Teorema da Substituição, como $\neg\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi$, $(p \vee \psi)[\neg\neg\varphi/p] \Leftrightarrow (p \vee \psi)[\varphi/p]$ e assim, uma vez que $(p \vee \psi)[\neg\neg\varphi/p] = \neg\neg\varphi \vee \psi$ e $(p \vee \psi)[\varphi/p] = \varphi \vee \psi$, segue-se que $\neg\neg\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \varphi \vee \psi$.

Donde, como $\Leftrightarrow$ é transitiva, podemos concluir a equivalência lógica entre a primeira fórmula e a última fórmula, ou seja, $\neg(\neg\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \varphi \vee \neg\psi$.

Definição:

Seja $X \subseteq \{\perp, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ um conjunto de conetivos.

X diz-se *completo* quando, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, existe $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$ tal que $\varphi \Leftrightarrow \psi$ e todos os conetivos de ψ pertencem a *X*.

Proposição: Os conjuntos de conetivos $\{\rightarrow, \neg\}$, $\{\rightarrow, \bot\}$, $\{\wedge, \neg\}$ e $\{\vee, \neg\}$ são completos.

Dem.: Mostremos o resultado para o caso $\{\rightarrow, \neg\}$. (Os outros casos podem mostrar-se seguindo ideias semelhantes.)

Comecemos por definir, por recursão estrutural em fórmulas, a função $f : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{F}^{CP}$ t.q.:

a) $f(\bot) = \neg(p_0 \rightarrow p_0)$;

b) $f(p) = p$, para todo $p \in \mathcal{V}^{CP}$;

c) $f(\neg\varphi) = \neg f(\varphi)$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$;

d) $f(\varphi \rightarrow \psi) = f(\varphi) \rightarrow f(\psi)$, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$;

e) $f(\varphi \vee \psi) = \neg f(\varphi) \rightarrow f(\psi)$, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$;

f) $f(\varphi \wedge \psi) = \neg(f(\varphi) \rightarrow \neg f(\psi))$, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$;

g) $f(\varphi \leftrightarrow \psi) = \neg((f(\varphi) \rightarrow f(\psi)) \rightarrow \neg(f(\psi) \rightarrow f(\varphi)))$, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$.

Dem. (cont.):

Lema: Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\varphi \Leftrightarrow f(\varphi)$ e os conetivos de $f(\varphi)$ pertencem ao conjunto $\{\rightarrow, \neg\}$.
Dem.: Por indução estrutural em φ. (Exercício).

Do lema anterior concluimos de imediato que $\{\rightarrow, \neg\}$ é completo, pois: para toda a fórmula φ, existe uma fórmula ψ —a fórmula $f(\varphi)$— tal que $\varphi \Leftrightarrow \psi$ e os conetivos de ψ pertencem ao conjunto $\{\rightarrow, \neg\}$.

$\square$

Exemplo: Da demonstração da proposição anterior, podemos concluir que a fórmula

$$f((\neg p_1 \wedge p_2) \to \perp) = \neg(\neg p_1 \to \neg p_2) \to \neg(p_0 \to p_0)$$

é logicamente equivalente a $(\neg p_1 \wedge p_2) \to \perp$ e os seus conetivos pertencem ao conjunto $\{\to, \neg\}$.

Notação :

Uma vez que a conjunção é uma operação associativa, utilizaremos a notação $\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n$ (com $n \in \mathbb{N}$) para representar qualquer associação, através da conjunção, das fórmulas $\varphi_1, ..., \varphi_n$ duas a duas.

Analogamente, como a disjunção é tambem associativa, utilizaremos a notação $\varphi_1 \vee ... \vee \varphi_n$ para representar qualquer associação, através da disjunção, das fórmulas $\varphi_1, ..., \varphi_n$ duas a duas.

Em ambos os casos, quando $n = 1$, as notações anteriores representam simplesmente a fórmula φ_1.

Definição: Uma fórmula proposicional diz-se um *literal* se for uma variável proposicional ou se for a negação de uma de variável proposicional.

Definição: Fórmulas do CP das formas

i) $(l_{11} \vee \ldots \vee l_{1m_1}) \wedge \ldots \wedge (l_{n1} \vee \ldots \vee l_{nm_n})$

ii) $(l_{11} \wedge \ldots \wedge l_{1m_1}) \vee \ldots \vee (l_{n1} \wedge \ldots \wedge l_{nm_n})$

em que os l_{ij} são literais e n, bem como os m_i, pertencem a $\mathbb{N}$, serão designadas por *formas normais conjuntivas* (FNC) e *formas normais disjuntivas* (FND), respetivamente.

Exemplo:

a) A fórmula $(p_1 \vee p_0) \wedge (p_0 \vee \neg p_1)$ é uma FNC:
na definição de FNC, tome-se $n = 2$, $m_1 = 2$, $m_2 = 2$ e tomem-se os literais $l_{11} = p_1$, $l_{12} = p_0$, $l_{21} = p_0$ e $l_{22} = \neg p_1$.

Esta fórmula não é uma FND: numa FND as conjunções apenas podem operar com literais e nesta fórmula a conjunção opera em disjunções.

b) A fórmula $(p_1 \vee p_0) \wedge \neg p_1$ é uma FNC:
na definição de FNC, tome-se $n = 2$, $m_1 = 2$, $m_2 = 1$ e tomem-se os literais $l_{11} = p_1$, $l_{12} = p_0$, $l_{21} = \neg p_1$.

Esta fórmula não é uma FND: a conjunção está a operar numa disjunção (no caso do primeiro argumento).

Exemplo (cont.):

c) A fórmula $p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_0$ é uma FNC (na definição de FNC, faça-se $n = 3$, $m_1 = 1$, $m_2 = 1$, $m_3 = 1$, $l_{11} = p_1$, $l_{21} = \neg p_2$ e $l_{31} = \neg p_0$) e é também uma FND (na definição de FND, faça-se $n = 1$, $m_1 = 3$, $l_{11} = p_1$, $l_{12} = \neg p_2$ e $l_{13} = \neg p_0$).

Também a fórmula $p_1 \vee p_2$ é, em simultâneo, uma FND e uma FNC.

Mais geralmente, conjunções de literais e disjunções de literais são, em simultâneo, formas normais conjuntivas e disjuntivas.

d) Todo o literal l é simultaneamente uma FNC e uma FND (nas definições de FNC e de FND, basta tomar $n = 1$, $m_1 = 1$ e $l_{11} = l$).

e) A fórmula $\neg(p_1 \vee p_0)$ não é FNC nem é FND: em formas normais (conjuntivas ou disjuntivas) as negações apenas podem operar em variáveis proposicionais.

Proposição: Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$:
(i) existem FNC's logicamente equivalentes a φ; e
(ii) existem FND's logicamente equivalentes a φ.

Dem.: Dada uma fórmula φ, uma forma normal conjuntiva e uma formal normal disjuntiva logicamente equivalentes a φ podem ser obtidas através das seguintes transformações:

1. Eliminar equivalências, implicações e ocorrências do absurdo, utilizando as equivalências lógicas $\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2 \Leftrightarrow (\varphi_1 \to \varphi_2) \wedge (\varphi_2 \to \varphi_1)$, $\varphi_1 \to \varphi_2 \Leftrightarrow \neg\varphi_1 \vee \varphi_2$ e $\perp \Leftrightarrow \varphi_1 \wedge \neg\varphi_1$.
2. Mover negações que se encontrem fora de conjunções ou disjunções para dentro delas, utilizando as leis de De Morgan.
3. Eliminar duplas negações.
4. Aplicar distributividade entre a conjunção e a disjunção. $\square$

Exemplo: Seja $\varphi = ((\neg p_1 \vee p_2) \to p_3) \wedge p_0$. Então:

i)

$$
\begin{array}{ll}
 & \varphi \\
\Leftrightarrow & ((\neg p_1 \vee p_2) \to p_3) \wedge p_0 \\
\Leftrightarrow & (\neg(\neg p_1 \vee p_2) \vee p_3) \wedge p_0 \\
\Leftrightarrow & ((\neg\neg p_1 \wedge \neg p_2) \vee p_3) \wedge p_0 \\
\Leftrightarrow & ((p_1 \wedge \neg p_2) \vee p_3) \wedge p_0 \\
\Leftrightarrow & (p_1 \vee p_3) \wedge (\neg p_2 \vee p_3) \wedge p_0
\end{array}
$$

e a última fórmula é uma FNC;

ii)

$$
\begin{array}{lll}
 & \varphi & \\
\Leftrightarrow & ((p_1 \wedge \neg p_2) \vee p_3) \wedge p_0 & \text{(por } \textbf{i)}\text{)} \\
\Leftrightarrow & (p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_0) \vee (p_3 \wedge p_0), &
\end{array}
$$

sendo a última fórmula uma FND.

Observação:

Um método alternativo para obter uma FND e uma FNC logicamente equivalentes a uma dada fórmula φ recorre à tabela de verdade de φ.

Em particular, vejamos como obter uma FND φ^d, logicamente equivalente a φ, a partir da tabela de verdade de φ.

- Se φ é uma contradição ou uma tautologia, basta tomar, respetivamente, uma FND que seja uma contradição e uma FND que seja uma tautologia; por exemplo, tome-se, respetivamente, $\varphi^d = p_0 \wedge \neg p_0$ e $\varphi^d = p_0 \vee \neg p_0$.

- Doutro modo, sem perda de generalidade, suponhamos, que $p_1, \ldots, p_n$ são as variáveis proposicionais que ocorrem em φ[1]. A tabela de verdade de φ terá 2^n linhas e pode ser representada da seguinte forma:

p_1	$\cdots$	p_j	$\cdots$	p_n	φ
1	$\cdots$	1	$\cdots$	1	b_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$a_{i,1}$	$\cdots$	$a_{i,j}$	$\cdots$	$a_{i,n}$	b_i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	b_{2^n}

onde, para cada $i \in \{1, \ldots, 2^n\}$, $b_i = v_i(\varphi)$ para toda a valoração v_i tal que $v_i(p_j) = a_{i,j}$ para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$.

[1] Note-se que uma fórmula que não é tautologia nem é contradição terá que ter pelo menos uma variável proposicional. (Exercício)

Para cada $i \in \{1, \ldots, 2^n\}$ tal que $b_i = 1$ seja

$$\alpha_{i,j} = \begin{cases} p_j & \text{se } a_{i,j} = 1 \\ \neg p_j & \text{se } a_{i,j} = 0 \end{cases} \qquad \text{(para todo } j \in \{1, \ldots, n\}\text{)}$$

e seja

$$\beta_i = \alpha_{i,1} \wedge \alpha_{i,2} \wedge \cdots \wedge \alpha_{i,n}.$$ [2]

Finalmente, suponhamos que $i_1, i_2, \ldots, i_k$ são as linhas para as quais $b_{i_r} = 1$, e tome-se

$$\varphi^d = \beta_{i_1} \vee \beta_{i_2} \vee \cdots \vee \beta_{i_k}.$$

Prova-se que φ^d assim definida, de facto, é uma FND e é logicamente equivalente a φ.

[2] Note-se que o valor lógico na linha i da tabela de verdade de β_i é 1 enquanto que em todas as outras linhas é 0.

Exemplo: Consideremos $\varphi = ((p_3 \to p_1) \vee (\neg p_1 \leftrightarrow \bot)) \wedge p_2$.
Denotemos por ψ a subfórmula $(p_3 \to p_1) \vee (\neg p_1 \leftrightarrow \bot)$ de φ.
A tabela de verdade de φ é:

p_1	p_2	p_3	$\bot$	$\neg p_1$	$p_3 \to p_1$	$\neg p_1 \leftrightarrow \bot$	ψ	φ
1	1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1	1	1	0
1	0	0	0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	1	1	0	1	1
0	0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	0	1	0

As linhas para as quais φ tem valor lógico 1 são a 1^a, a 2^a e a 6^a.
Portanto, uma FND logicamente equivalente a φ é:
$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3) \vee (\neg p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3)$.

Definição: Seja v uma valoração.

1. Dada uma fórmula do CP φ, dizemos que *v satisfaz* φ (ou que *v é modelo de* φ), e escrevemos $v \models \varphi$, quando $v(\varphi) = 1$.

   Quando *v não satisfaz* φ (*i.e.*, quando $v(\varphi) = 0$), escrevemos $v \not\models \varphi$.

2. Dado um conjunto de fórmulas do CP Γ, dizemos que *v satisfaz* Γ (ou que *v é modelo de* Γ), e escrevemos $v \models \Gamma$, quando v satisfaz todas as fórmulas de Γ.

   Quando *v não satisfaz* Γ (*i.e.*, quando existe $\varphi \in \Gamma$ t.q. $v \not\models \varphi$ ou, equivalentemente, quando existe $\varphi \in \Gamma$ t.q. $v(\varphi) = 0$) escrevemos $v \not\models \Gamma$.

Exemplo: Seja v_0 a valoração que atribui o valor lógico 0 a todas as variáveis proposicionais.

1. $v_0 \models p_1 \leftrightarrow p_2$ e $v_0 \models \neg p_1 \wedge \neg p_2$;
2. $v_0 \not\models p_1 \vee p_2$ e $v_0 \not\models p_1 \leftrightarrow \neg p_2$;
3. $v_0 \models \{p_1 \leftrightarrow p_2, \neg p_1 \wedge \neg p_2\}$ (por 1);
4. $v_0 \not\models \{p_1 \leftrightarrow p_2, p_1 \vee p_2\}$ (v_0 não satisfaz a 2^a fórmula);
5. $v_0 \not\models \{\neg p_1 \wedge \neg p_2, p_1 \leftrightarrow \neg p_2\}$ (v_0 não satisfaz a 2^a fórmula).

Observação: Dado que no conjunto vazio não há qualquer fórmula, tem-se, trivialmente, que:

para toda a valoração v, $v \models \emptyset$.

Definição: Seja Γ um conjunto de fórmulas do CP.

1. Γ diz-se um conjunto (*semanticamente*) *consistente* ou *satisfazível* quando alguma valoração satisfaz Γ.
2. Γ diz-se um conjunto (*semanticamente*) *inconsistente* ou *insatisfazível* quando não há valorações que satisfaçam Γ.

Exemplo:

a) Como vimos no exemplo anterior, o conjunto de fórmulas $\Delta_1 = \{p_1 \leftrightarrow p_2, \neg p_1 \wedge \neg p_2\}$ é satisfeito pela valoração v_0, que atribui valor lógico 0 a qualquer variável proposicional.

Portanto, Δ_1 é consistente.

b) O conjunto $\Delta_2 = \{p_1 \leftrightarrow p_2, p_1 \vee p_2\}$, considerado no exemplo anterior, não é satisfeito pela valoração v_0.

Mas, Δ_2 é satisfeito, por exemplo, pela valoração que atribui valor lógico 1 a qualquer variável proposicional.

Logo, Δ_2 é também consistente.

Exemplo (cont.):

c) O conjunto $\Delta_3 = \{\neg p_1 \wedge \neg p_2, p_1 \leftrightarrow \neg p_2\}$, considerado no exemplo anterior, é inconsistente.

Dem.:

Suponhamos que existe uma valoração v que satisfaz Δ_3.

Então, $v(\neg p_1 \wedge \neg p_2) = 1$, e portanto $v(p_1) = 0$ e $v(p_2) = 0$, e $v(p_1 \leftrightarrow \neg p_2) = 1$.

Ora, de $v(p_2) = 0$, segue $v(\neg p_2) = 1$ e daqui e de $v(p_1) = 0$, segue $v(p_1 \leftrightarrow \neg p_2) = 0$, o que contradiz $v(p_1 \leftrightarrow \neg p_2) = 1$.

Logo, não podem existir valorações que satisfaçam Δ_3 e, assim, Δ_3 é inconsistente.

Proposição: Sejam Γ e Δ conjuntos de fórmulas do CP tais que $\Gamma \subseteq \Delta$. Então:

i) se Δ é consistente, então Γ é consistente;

ii) se Γ é inconsistente, então Δ é inconsistente.

Dem.: Exercício. $\square$

O *Problema da satisfazibilidade*, denotado por **SAT**, é o problema: *dada uma fórmula proposicional φ, φ é satisfazível*?

SAT é equivalente ao problema de decidir se uma fórmula é uma contradição (φ é satisfazível sse φ não é contradição), podendo ser decidido com recurso a tabelas de verdade.

A decisão de **SAT** através de tabelas de verdade, no pior caso, poderá requerer a construção de toda a tabela, tornando-se ineficiente (quando a fórmula envolve muitas variáveis proposicionais).

Há métodos mais eficientes que as tabelas de verdade para decidir **SAT**, tipicamente baseados em FNC's e no *princípio da resolução* (se v satisfaz $\varphi \vee \psi$ e v satisfaz $\neg\varphi \vee \sigma$, então v satisfaz $\psi \vee \sigma$), mas, no pior caso, ainda assim, poderão também requerer *tempo exponencial*.

SAT é um problema na *classe* **NP** (i.e., pode ser decidido em *tempo polinomial* em *modelos de computação não-deterministas*), sendo o exemplo paradigmático de um *problema* **NP**-*completo*.

Definição: Seja φ uma fórmula do CP e seja Γ um conjunto de fórmulas do CP.

1. Dizemos que φ é *consequência semântica* de Γ, e escrevemos $\Gamma \models \varphi$, quando, para toda a valoração v, se $v \models \Gamma$, então $v \models \varphi$.
2. Escrevemos $\Gamma \not\models \varphi$ quando φ *não é consequência semântica* de Γ, *i.e.*, quando para alguma valoração v se tem $v \models \Gamma$ e, no entanto, $v \not\models \varphi$.

Observação: Da definição anterior, aplicando as definições de satisfação de uma fórmula e de satisfação de um conjunto de fórmulas, segue de imediato que:

1. $\Gamma \models \varphi$ sse para toda a valoração v, se para todo $\psi \in \Gamma$, $v(\psi) = 1$, então $v(\varphi) = 1$.
2. $\Gamma \not\models \varphi$ sse para alguma valoração v se tem, para todo $\psi \in \Gamma$, $v(\psi) = 1$, bem como $v(\varphi) = 0$.

Exemplo:

1. Seja $\Gamma = \{p_1, \neg p_1 \vee p_2\}$. Então:

   (a) $\Gamma \models p_1$.

   (Se tomarmos uma valoração v tal que $v \models \Gamma$, *i.e.*, uma valoração tal que $v(p_1) = 1$ e $v(\neg p_1 \vee p_2) = 1$, em particular, temos $v(p_1) = 1$.)

   (b) $\Gamma \models p_2$.

   (Tomando uma valoração v tal que $v(p_1) = 1$ e $v(\neg p_1 \vee p_2) = 1$, temos $v(\neg p_1) = 0$. Daqui e de $v(\neg p_1 \vee p_2) = 1$, segue $v(p_2) = 1$.)

   (c) $\Gamma \models p_1 \wedge p_2$.

   (Tomando uma valoração v tal que $v(p_1) = 1$ e $v(\neg p_1 \vee p_2) = 1$, temos necessariamente $v(p_1) = 1$ e $v(p_2) = 1$ (como vimos nos exemplos anteriores) e, por isso, temos $v(p_1 \wedge p_2) = 1$.)

Exemplo (cont.):

1. Recorde que $\Gamma = \{p_1, \neg p_1 \vee p_2\}$.

(d) $\Gamma \not\models p_3$.

(Existem valorações v tais que $v \models \Gamma$ e $v(p_3) = 0$. Por exemplo, a valoração que atribui valor lógico 1 a p_1 e p_2 e valor lógico 0 às restantes variáveis proposicionais é uma tal valoração.)

(e) $\Gamma \not\models \neg p_1 \vee \neg\, p_2$.

(Por exemplo, para a valoração v_1 tal que $v_1(p_i) = 1$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$, temos $v_1 \models \Gamma$ e, no entanto, $v_1(\neg p_1 \vee \neg p_2) = 0$.)

(f) $\Gamma \models p_3 \vee \neg p_3$.

(Se tomarmos uma valoração v tal que $v \models \Gamma$, temos $v(p_3 \vee \neg p_3) = 1$. De facto, $p_3 \vee \neg p_3$ é uma tautologia e, como tal, o seu valor lógico é 1 para qualquer valoração (em particular, para aquelas valorações que satisfazem Γ).)

Exemplo (cont.):

2. Para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\{\varphi, \varphi \to \psi\} \models \psi$.

   De facto, para qualquer valoração v,
   se $v(\varphi) = 1$ e $v(\varphi \to \psi) = 1$, então $v(\psi) = 1$.

3. Já a afirmação "para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}, \{\varphi \to \psi\} \models \psi$" é falsa.

   Por exemplo, $\{p_1 \to p_2\} \not\models p_2$
   (uma valoração v tal que $v(p_1) = v(p_2) = 0$ satisfaz $\{p_1 \to p_2\}$ e não satisfaz p_2).

Proposição: Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\models \varphi$ se e só se $\emptyset \models \varphi$.

Dem.:

Suponhamos que φ é uma tautologia.
Então, para toda a valoração v, $v \models \varphi$.
Assim, a implicação "$v \models \emptyset \Rightarrow v \models \varphi$" é verdadeira (o seu consequente é verdadeiro), pelo que, $\emptyset \models \varphi$.

Reciprocamente, suponhamos agora que $\emptyset \models \varphi$, *i.e.*, suponhamos que para toda a valoração v,

$$v \models \emptyset \Rightarrow v \models \varphi.$$

Seja v uma valoração arbitrária.
Pretendemos mostrar que $v \models \varphi$.
Ora, trivialmente, $v \models \emptyset$ (conforme a observação do slide 50).
Assim, da suposição, segue imediatamente $v \models \varphi$. $\square$

Observação:

Se Γ é um conjunto de fórmulas inconsistente, então $\Gamma \models \varphi$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$. (Porquê?)

Como tal, é possível ter-se $\Gamma \models \varphi$ sem que existam valorações que satisfaçam Γ.

Notação : Muitas vezes, no contexto da relação de consequência semântica, usaremos a vírgula para denotar a união de conjuntos e escrevemos uma fórmula para denotar o conjunto singular composto por essa fórmula.

Assim, por exemplo, dadas fórmulas $\varphi, \psi, \varphi_1, ..., \varphi_n$ e conjuntos de fórmulas Γ, Δ, escrevemos:

a) $\Gamma, \Delta \models \varphi$ como abreviatura para $\Gamma \cup \Delta \models \varphi$;

b) $\Gamma, \varphi \models \psi$ como abreviatura para $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi$;

c) $\varphi_1, ..., \varphi_n \models \varphi$ como abreviatura para $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \models \varphi$.

Proposição: Sejam φ e ψ fórmulas e sejam Γ e Δ conjuntos de fórmulas.

a) Se $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \models \varphi$.

b) Se $\Gamma \models \varphi$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Delta \models \varphi$.

c) Se $\Gamma \models \varphi$ e $\Delta, \varphi \models \psi$, então $\Delta, \Gamma \models \psi$.

d) $\Gamma \models \varphi \to \psi$ se e só se $\Gamma, \varphi \models \psi$.

e) Se $\Gamma \models \varphi \to \psi$ e $\Gamma \models \varphi$, então $\Gamma \models \psi$.

Demonstração:

a) Se $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \models \varphi$

Dem.:

Suponhamos que $\varphi \in \Gamma$.

Seja v uma valoração e suponhamos que v satisfaz Γ.

(Queremos mostrar que v satisfaz φ, *i.e.*, $v(\varphi) = 1$.)

Então, da definição de satisfação de conjuntos de fórmulas, sabemos que v atribui valor lógico 1 a todas as fórmulas de Γ.

Assim, dado que por hipótese $\varphi \in \Gamma$, temos $v(\varphi) = 1$.

Dem. (cont.):

b) Se $\Gamma \models \varphi$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Delta \models \varphi$

Dem.:

Seja v uma valoração.

Suponhamos que v satisfaz Δ.

Assim, em particular, v satisfaz Γ, pois (por hipótese) $\Gamma \subseteq \Delta$.

Donde, pela hipótese de que φ é uma consequência semântica de Γ, segue que $v(\varphi) = 1$.

Dem. (cont.):

c) Exercício.

d) $\Gamma \models \varphi \to \psi$ se e só se $\Gamma, \varphi \models \psi$

Dem.:

$\Rightarrow$) Seja v uma valoração.

Suponhamos que v satisfaz $\Gamma \cup \{\varphi\}$.

Então, por definição de satisfação de conjuntos de fórmulas, v satisfaz Γ e $v(\varphi) = 1$ $(*)$.

Assim, como v satisfaz Γ, da hipótese $\Gamma \models \varphi \to \psi$ segue que $v(\varphi \to \psi) = 1$.

Daqui e de $(*)$ segue $v(\psi) = 1$.

$\Leftarrow$) Exercício.

Dem. (cont.):

e) Se $\Gamma \models \varphi \to \psi$ e $\Gamma \models \varphi$, então $\Gamma \models \psi$

Dem.:

Seja v uma valoração.

Suponhamos que v satisfaz Γ.

Então, da hipótese $\Gamma \models \varphi \to \psi$, podemos concluir que $v(\varphi \to \psi) = 1$ e, da hipótese $\Gamma \models \varphi$, podemos concluir que $v(\varphi) = 1$.

De $v(\varphi \to \psi) = 1$ e de $v(\varphi) = 1$ segue $v(\psi) = 1$. $\square$

Proposição: Sejam $\varphi, \varphi_1, ..., \varphi_n$ fórmulas, onde $n \in \mathbb{N}$.
As seguintes proposições são equivalentes:

i) $\varphi_1, ..., \varphi_n \models \varphi$;

ii) $\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n \models \varphi$;

iii) $\models (\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n) \rightarrow \varphi$.

Dem.: A equivalência entre ii) e iii) é um caso particular de d) da proposição anterior.

A equivalência entre i) e ii) pode ser demonstrada a partir da seguinte equivalência mais geral

"para todo $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$, $\Gamma, \varphi_1, ..., \varphi_n \models \varphi$ sse $\Gamma, \varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n \models \varphi$",

a qual pode ser demonstrada por indução em n.

A equivalência entre i) e iii) segue, então, por transitividade. $\square$

Proposição: Seja φ uma fórmula do CP e seja Γ um conjunto de fórmulas do CP. Então:

$$\Gamma \models \varphi \text{ se e só se } \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ é semanticamente inconsistente.}$$

Dem.:

$\Rightarrow$) Tendo em vista uma contradição, suponhamos que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é semanticamente consistente, *i.e.*, suponhamos que existe uma valoração v que satisfaz $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$.

Então, v satisfaz Γ e $v(\neg\varphi) = 1$, *i.e.*, $v(\varphi) = 0$ $(*)$. Contudo, da hipótese, uma vez que v satisfaz Γ, podemos concluir que $v(\varphi) = 1$, o que é contraditório com $(*)$.

Logo, $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é semanticamente inconsistente.

Dem. (cont.):

$\Leftarrow$) Suponhamos que v satisfaz Γ.

Então, $v(\neg\varphi) = 0$, de outra forma teríamos $v(\neg\varphi) = 1$, donde, como v satisfaz Γ, $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ seria semanticamente consistente, contrariando a hipótese.

Logo, $v(\varphi) = 1$.

Mostrámos, assim, que toda a valoração que satisfaz Γ também satisfaz φ e, portanto, $\Gamma \models \varphi$. $\square$