LÓGICA EI
Mestrado Integrado em Engenharia Informática
Universidade do Minho

Departamento de Matemática

2020/2021

2.2 Semântica do Cálculo de Predicados

Observação: As fórmulas do Cálculo de Predicados são construídas a partir das fórmulas atómicas (símbolos de relação “aplicados” a termos) e, por esta razão, as fórmulas atómicas desempenham papel semelhante ao das variáveis proposicionais no Cálculo Proposicional.

Contudo, ao passo que no Cálculo Proposicional podemos atribuir “diretamente” um valor lógico a uma variável proposicional, a *atribuição de valores lógicos às fórmulas atómicas* é um processo mais complexo.

Para atribuirmos valores lógicos a fórmulas atómicas será necessário fixar previamente a *interpretação dos termos*.

Tal requer indicação do *universo de objetos* (*domínio de discurso*) pretendido para a denotação dos termos (por exemplo, números naturais, conjuntos, etc.), bem como a interpretação pretendida quer para os símbolos de função do tipo de linguagem em questão (por exemplo, para indicar que tomando $\mathbb{N}_0$ por universo, o símbolo de função binário $+$ denotará a *operação* de adição) quer para as variáveis de primeira ordem.

Para a *interpretação das fórmulas atómicas*, será ainda necessário fixar a interpretação dos símbolos de relação como *relações* entre objetos do domínio de discurso.

A indicação do domínio de discurso pretendido e das interpretações a dar aos diversos símbolos será efetuada através de uma *estrutura para o tipo de linguagem*.

A interpretação de variáveis de primeira ordem será feita no contexto do domínio de discurso da estrutura, através de uma *atribuição na estrutura*.

Um par (*estrutura, atribuição*) permitirá fixar o valor lógico de qualquer fórmula e, portanto, pode ser pensado como uma *valoração*, uma vez que estes pares desempenharão papel idêntico ao das valorações do Cálculo Proposicional.

Definição: Seja L um tipo de linguagem. Uma *estrutura de tipo L*, que abreviadamente designaremos por *L-estrutura*, é um par $(D, \overline{})$ tal que:

a) D é um conjunto não vazio, chamado o *domínio da estrutura*;

b) $\overline{}$ é uma função, chamada a *função interpretação da estrutura*, e é tal que:

- a cada constante c de L faz corresponder um elemento de D, notado por $\overline{c}$;
- a cada símbolo de função f de L, de aridade $n \geq 1$, faz corresponder uma função de tipo $D^n \longrightarrow D$, notada por $\overline{f}$;
- a cada símbolo de relação R de L, de aridade n, faz corresponder uma relação n-ária em D (i.e. um subconjunto de D^n), notada por $\overline{R}$.

Para cada símbolo de função ou relação s de L, $\overline{s}$ é chamada a *interpretação* de s na estrutura.

Notação :

Habitualmente, usaremos a letra E (possivelmente indexada) para denotar estruturas.

Dada uma estrutura E, a notação $dom(E)$ denotará o domínio de E.

Exemplo:

a) Seja $E_{Arit} = (\mathbb{N}_0, \overline{})$, onde:

- $\overline{0}$ é o número *zero*;
- $\overline{s}$ é a função *sucessor* em $\mathbb{N}_0$, *i.e.*, $\begin{array}{rcl} \overline{s} : \mathbb{N}_0 & \longrightarrow & \mathbb{N}_0 \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}$;
- $\overline{+}$ é a função *adição* em $\mathbb{N}_0$, *i.e.*, $\begin{array}{rcl} \overline{+} : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 & \longrightarrow & \mathbb{N}_0 \\ (m,n) & \mapsto & m+n \end{array}$;
- $\overline{\times}$ é a função *multiplicação* em $\mathbb{N}_0$, *i.e.*,
  $\begin{array}{rcl} \overline{\times} : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 & \longrightarrow & \mathbb{N}_0 \\ (m,n) & \mapsto & m \times n \end{array}$;
- $\overline{=}$ é a relação de *igualdade* em $\mathbb{N}_0$, *i.e.*,
  $\overline{=} = \{(m,n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 : m = n\}$;
- $\overline{<}$ é a relação *menor do que* em $\mathbb{N}_0$, *i.e.*,
  $\overline{<} = \{(m,n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 : m < n\}$.

Então, E_{Arit} é uma estrutura de tipo L_{Arit}.

Designaremos esta estrutura por *estrutura standard* para o tipo de linguagem L_{Arit}.

Exemplo (cont.):

b) O par $E_0 = (\{a, b\}, \overline{})$, onde:

- $\overline{0} = a$;
- $\overline{s}$ é a função $\begin{array}{ccc} \{a, b\} & \longrightarrow & \{a, b\} \\ x & \mapsto & x \end{array}$;
- $\overline{+}$ é a função $\begin{array}{ccc} \{a, b\} \times \{a, b\} & \longrightarrow & \{a, b\} \\ (x, y) & \mapsto & b \end{array}$;
- $\overline{\times}$ é a função $\begin{array}{ccc} \{a, b\} \times \{a, b\} & \longrightarrow & \{a, b\} \\ (x, y) & \mapsto & \begin{cases} a & \text{se } x = y \\ b & \text{se } x \neq y \end{cases} \end{array}$;
- $\overline{\equiv} = \{(a, a), (b, b)\}$;
- $\overline{<} = \{(a, b)\}$,

é também uma L_{Arit}-estrutura.

Existem $2 \times 4 \times 16 \times 16 \times 16 \times 16$ L_{Arit}-estruturas cujo domínio é $\{a, b\}$. (Porquê?)

Definição: Seja E uma L-estrutura. Uma função $a : \mathcal{V} \longrightarrow dom(E)$ (do conjunto $\mathcal{V}$ das variáveis de primeira ordem para o domínio de E) diz-se uma *atribuição* em E.

Exemplo: As funções $\begin{array}{rccc} a_0 : \mathcal{V} & \longrightarrow & \mathbb{N}_0 \\ x & \mapsto & 0 \end{array}$ e $\begin{array}{rccc} a^{ind} : \mathcal{V} & \longrightarrow & \mathbb{N}_0 \\ x_i & \mapsto & i \end{array}$ são atribuições em E_{Arit}.

Definição: Sejam $E = (D, \overline{})$ uma L-estrutura, a uma atribuição em E e t um L-termo.

O *valor de t em E para a* é o elemento de D, notado por $t[a]_E$ ou por $t[a]$ (quando é claro qual a estrutura que deve ser considerada), definido, por recursão estrutural em L-termos, do seguinte modo:

a) $x[a] = a(x)$, para todo $x \in \mathcal{V}$;

b) $c[a] = \overline{c}$, para todo $c \in \mathcal{C}$;

c) $f(t_1, ..., t_n)[a] = \overline{f}(t_1[a], ..., t_n[a])$, para todo $f \in \mathcal{F}$ de aridade $n \geq 1$ e para todo $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$.

Exemplo: Seja t o L_{Arit}-termo $s(0) \times (x_0 + x_2)$.

1. O valor de t para a atribuição a^{ind}, na L_{Arit}-estrutura E_{Arit}, é

$$\begin{array}{rl} & (s(0) \times (x_0 + x_2))[a^{ind}] \\ = & s(0)[a^{ind}] \times (x_0 + x_2)[a^{ind}] \\ = & (0[a^{ind}] + 1) \times (x_0[a^{ind}] + x_2[a^{ind}]) \\ = & (0 + 1) \times (0 + 2) \\ = & 2. \end{array}$$

2. Já para a atribuição a_0 (do exemplo anterior), o valor de t é 0 (porquê?).

Exemplo (cont.):

3. Consideremos agora a L_{Arit}-estrutura E_0 do Slide 9 e a seguinte atribuição nesta estrutura:

$$\begin{array}{rcl} a' : \mathcal{V} & \longrightarrow & \{a, b\} \\ x & \mapsto & b \end{array}$$

O valor de t em E_0 para a' é:

$$\begin{array}{rl} & (s(0) \times (x_0 + x_2))[a'] \\ = & \overline{\times}(s(0)[a'], (x_0 + x_2)[a']) \\ = & \overline{\times}(\overline{s}(0[a']), \overline{+}(x_0[a'], x_2[a'])) \\ = & \overline{\times}(\overline{s}(a), \overline{+}(b, b)) \\ = & \overline{\times}(a, b) \\ = & b. \end{array}$$

Proposição: Sejam a_1 e a_2 duas atribuições numa L-estrutura $E = (D, \overline{})$ e seja t um L-termo.
Se $a_1(x) = a_2(x)$, para todo $x \in VAR(t)$, então $t[a_1] = t[a_2]$.

Dem.: Por indução estrutural em t. A prova está organizada por casos, consoante *a forma* de t.

a) Caso t seja uma variável. Então, $t \in VAR(t)$. Logo, por hipótese, $a_1(t) = a_2(t)$ **(∗)**. Assim,

$$t[a_1] \overset{\textbf{(1)}}{=} a_1(t) \overset{\textbf{(*)}}{=} a_2(t) \overset{\textbf{(1)}}{=} t[a_2].$$

Justificações	
(1)	Definição de valor de um termo para uma atribuição.

b) Caso t seja uma constante. Então,

$$t[a_1] \overset{\textbf{(1)}}{=} \overline{t} \overset{\textbf{(1)}}{=} t[a_2].$$

Justificações	
(1)	Definição de valor de um termo para uma atribuição.

c) Caso $t = f(t_1, ..., t_n)$, com $f \in \mathcal{F}$ de aridade $n \geq 1$ e $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$. Então,

$$\begin{array}{cl} & t[a_1] \\ = & f(t_1, ..., t_n)[a_1] \\ \overset{\textbf{(1)}}{=} & \overline{f}(t_1[a_1], ..., t_n[a_1]) \\ \overset{\textbf{(2)}}{=} & \overline{f}(t_1[a_2], ..., t_n[a_2]) \\ \overset{\textbf{(1)}}{=} & f(t_1, ..., t_n)[a_2] \\ = & t[a_2]. \end{array}$$

Justificações

(1) Definição de valor de um termo para uma atribuição.

(2) Para $1 \leq i \leq n$, como $VAR(t_i) \subseteq VAR(t)$, da hipótese segue-se que: $a_1(x) = a_2(x)$, para todo $x \in VAR(t_i)$. Logo, por H.I., para todo $1 \leq i \leq n$, $t_i[a_1] = t_i[a_2]$.

Notação : Sejam a uma atribuição numa L-estrutura E, $d \in dom(E)$ e x uma variável.

Escrevemos $a\left(\begin{array}{c} x \\ d \end{array}\right)$ para a atribuição $a' : \mathcal{V} \longrightarrow dom(E)$ em E definida por:

$$\text{para todo } \; y \in \mathcal{V}, \quad a'(y) = \begin{cases} d \;\; \text{se} \;\; y = x \\ \\ a(y) \;\; \text{se} \;\; y \neq x \end{cases} .$$

Exemplo: $a^{ind}\left(\begin{array}{c} x_0 \\ 1 \end{array}\right)$ denota a atribuição em L_{Arit} definida por:

$$a^{ind}\left(\begin{array}{c} x_0 \\ 1 \end{array}\right)(x_i) = \begin{cases} 1 \text{ se } i = 0 \\ \\ i \text{ se } i \neq 0 \end{cases}, \text{ para todo } i \in \mathbb{N}_0.$$

Exemplo: Verifique que

$$(x_0 + 0)[a^{ind}\begin{pmatrix} x_0 \\ 1 \end{pmatrix}] = 1 = (x_0 + 0)[s(0)/x_0][a^{ind}].$$

De facto, esta igualdade é um caso particular da proposição seguinte, que fornece uma alternativa para o cálculo do valor de um termo que resulta de uma substituição.

Proposição: Seja a uma atribuição numa L-estrutura. Seja x uma variável e sejam t_0 e t_1 L-termos . Então,

$$t_0[t_1/x][a] = t_0[a\left(\begin{array}{c} x \\ t_1[a] \end{array}\right)].$$

Dem.: Por indução estrutural em t_0. $\square$

Definição: Sejam $E = (D, \overline{\ })$ uma L-estrutura, a uma atribuição em E e φ uma L-fórmula.

O *valor lógico* de φ em E para a é o elemento do conjunto dos valores lógicos $\{0, 1\}$, notado por $\varphi[a]_E$ ou por $\varphi[a]$ (quando é claro qual a estrutura que deve ser considerada), definido, por recursão em L-fórmulas, do seguinte modo:

a) $\perp [a] = 0$;

b) $R(t_1, ..., t_n)[a] = 1$ sse $(t_1[a], ..., t_n[a]) \in \overline{R}$, para todo o símbolo de relação R de aridade n e para todo $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$;

c) $(\neg\varphi_1)[a] = f_\neg(\varphi_1[a])$, para todo $\varphi_1 \in \mathcal{F}_L$;

d) $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)[a] = f_\wedge(\varphi_1[a], \varphi_2[a])$, para todo $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}_L$;

e) $(\varphi_1 \vee \varphi_2)[a] = f_\vee(\varphi_1[a], \varphi_2[a])$, para todo $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}_L$;

f) $(\varphi_1 \to \varphi_2)[a] = f_\to(\varphi_1[a], \varphi_2[a])$, para todo $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}_L$;

g) $(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)[a] = f_\leftrightarrow(\varphi_1[a], \varphi_2[a])$, para todo $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}_L$;

Definição (cont.):

h) $(\exists x \varphi_1)[a] = 1$ sse para algum $d \in D$, $\varphi_1[a\begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix}] = 1$, para todo $x \in \mathcal{V}, \varphi_1 \in \mathcal{F}_L$;

i) $(\forall x \varphi_1)[a] = 1$ sse para todo $d \in D$, $\varphi_1[a\begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix}] = 1$, para todo $x \in \mathcal{V}, \varphi_1 \in \mathcal{F}_L$.

Proposição: Para quaisquer L-estrutura E, atribuição a em E, L-fórmula φ e variável x,

a) $(\exists x\varphi)[a] = 0$ sse para todo $d \in dom(E)$, $\varphi[a\begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix}] = 0$;

b) $(\forall x\varphi)[a] = 0$ sse para algum $d \in dom(E)$, $\varphi[a\begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix}] = 0$;

c) $(\exists x\varphi)[a] = máximo\{\varphi[a\begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix}] : d \in D\}$;

d) $(\forall x\varphi)[a] = mínimo\{\varphi[a\begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix}] : d \in D\}$.

Dem.: Imediata, tendo em atenção a definição de valor lógico e as propriedades de *máximo* e de *mínimo*. $\square$

Exemplo: Consideremos a estrutura L_{Arit} e as atribuições a^{ind} e a_0 em E_{Arit}, definidas no Slide 11.

1. Para a L_{Arit}-fórmula $\varphi_0 = s(0) < x_2$, tem-se:

   i) $\varphi_0[a^{ind}] = 1$, dado que $s(0)[a^{ind}] = 1, x_2[a^{ind}] = 2$ e $(1, 2) \in \overline{<}$ (pois 1 é menor que 2);

   ii) $\varphi_0[a_0] = 0$, dado que $s(0)[a_0] = 1, x_2[a_0] = 0$ e $(1, 0) \notin \overline{<}$ (pois 1 não é menor que 0);

Exemplo (cont.):

2. Para a L_{Arit}-fórmula $\varphi_1 = \exists x_2(s(0) < x_2)$ tem-se:

   i) $\varphi_1[a^{ind}] = 1$, pois existe $n \in \mathbb{N}_0$ t.q. $s(0) < x_2[a^{ind}\begin{pmatrix} x_2 \\ n \end{pmatrix}] = 1$ (como $s(0)[a^{ind}\begin{pmatrix} x_2 \\ n \end{pmatrix}] = 1$, basta tomar $n > 1$);

   ii) $\varphi_1[a_0] = 1$, pois existe $n \in \mathbb{N}_0$ t.q. $s(0) < x_2[a_0\begin{pmatrix} x_2 \\ n \end{pmatrix}] = 1$ (também neste caso se tem $s(0)[a_0\begin{pmatrix} x_2 \\ n \end{pmatrix}] = 1$, pelo que, basta tomar $n > 1$);

Exemplo (cont.):

3. Para a L_{Arit}-fórmula $\varphi_2 = \exists x_2 \neg(s(0) < x_2)$ tem-se também o valor lógico 1, quer para a^{ind} quer para a_0 (porquê?);

4. Já para a L_{Arit}-fórmula $\varphi_3 = \forall x_2 (s(0) < x_2)$ tem-se valor lógico 0 para ambas as atribuições (de facto, a afirmação "para todo $n \in \mathbb{N}_0, 1 < n$" é falsa).

Exemplo: Consideremos agora a L_{Arit}-estrutura E_0 do Slide 9 e as atribuições a' e a'' em E_0 t.q., para todo $i \in \mathbb{N}_0$, $a'(x_i) = b$ e $a''(x_i) = a$ sse i é par.

1. Para a L_{Arit}-fórmula $\varphi_0 = s(0) < x_2$ (considerada no exemplo anterior), tem-se:
   - **i)** $\varphi_0[a'] = 1$, dado que $s(0)[a'] = a, x_2[a'] = b$ e $(a, b) \in \overline{<}$;
   - **ii)** $\varphi_0[a''] = 0$, dado que $s(0)[a''] = a, x_2[a'] = a$ e $(a, a) \notin \overline{<}$.
2. Para a L_{Arit}-fórmula $\varphi_1 = \exists x_2(s(0) < x_2)$ o valor lógico é 1 para ambas as atribuições (porquê?).
3. Verifique que as fórmulas $\varphi_2 = \exists x_2 \neg(s(0) < x_2)$ e $\varphi_3 = \forall x_2(s(0) < x_2)$ (do exemplo anterior) recebem valores lógicos 1 e 0, respetivamente, para ambas as atribuições.

Definição: Sejam E uma L-estrutura, a uma atribuição em E e φ uma L-fórmula.

Dizemos que *E satisfaz φ para a*, escrevendo $E \models \varphi[a]$, quando $\varphi[a]_E = 1$.

Escrevemos $E \not\models \varphi[a]$ quando E não satisfaz φ para a, ou seja, quando $\varphi[a]_E = 0$.

Proposição: Sejam E uma L-estrutura e a uma atribuição em E. Então:

a) $E \models \exists x \varphi[a]$ sse existe $d \in dom(E)$ t.q. $E \models \varphi[a\begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix}]$;

b) $E \models \forall x \varphi[a]$ sse $E \models \varphi[a\begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix}]$, para todo $d \in dom(E)$;

c) $E \not\models \exists x \varphi[a]$ sse $E \not\models \varphi[a\begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix}]$, para todo $d \in dom(E)$;

d) $E \not\models \forall x \varphi[a]$ sse existe $d \in dom(E)$ t.q. $E \not\models \varphi[a\begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix}]$.

Dem.: Consequência imediata da definição de satisfação e da proposição anterior (Slide 24). Por exemplo:

$$\begin{array}{lll} & E \not\models \exists x \varphi[a] & \\ \text{sse} & \exists x \varphi[a]_E = 0 & \text{(def. de } \not\models) \\ \text{sse} & \varphi[a\begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix}]_E = 0, \text{ para todo } d \in dom(E) & \text{(prop. anterior)} \\ \text{sse} & E \not\models \varphi[a\begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix}], \text{ para todo } d \in dom(E) & \text{(def. de } \not\models). \end{array}$$

$\square$

Proposição: Sejam a_1 e a_2 atribuições numa L-estrutura E e seja φ uma L-fórmula.

Se $a_1(x) = a_2(x)$, para todo $x \in LIV(\varphi)$, então
$E \models \varphi[a_1]$ sse $E \models \varphi[a_2]$.

Dem.: Por indução estrutural em φ. $\square$

Corolário: Sejam φ uma L-sentença e E uma L-estrutura.
Se para alguma atribuição a em E, $E \models \varphi[a]$, então
para toda a atribuição a em E, $E \models \varphi[a]$.

Dem.: Exercício. $\square$

Proposição: Sejam $E = (D, \overline{})$ uma L-estrutura e a uma atribuição em E. Sejam x uma variável, t um $L-$ *termo* e φ uma L-fórmula tais que x está livre para t em φ. Então,

$$E \models \varphi[t/x][a] \text{ sse } E \models \varphi[a\begin{pmatrix} x \\ t[a] \end{pmatrix}].$$

Dem.: Por indução estrutural em φ. $\square$

Definição: Dizemos que uma L-fórmula φ é *válida* numa L-estrutura E ou que E valida φ (notação: $E \models \varphi$) quando, para toda a atribuição a em E, $E \models \varphi[a]$.

Utilizamos a notação $E \not\models \varphi$ quando φ não é válida em E, *i.e.*, quando existe uma atribuição a em E tal que $E \not\models \varphi[a]$.

Exemplo: Consideremos a estrutura E_{Arit}.

1. A fórmula $x_0 = x_0$ é válida em E_{Arit}; de facto, para qualquer atribuição a em E_{Arit}, tem-se $E_{Arit} \models x_0 = x_0[a]$, uma vez que $x_0[a] = a(x_0)$ e $(a(x_0), a(x_0)) \in \equiv$ ($a(x_0)$ e $a(x_0)$ são naturais iguais).

2. A fórmula $x_0 = x_1$ não é válida em E_{Arit}; por exemplo, para a atribuição a^{ind} tem-se $x_0[a^{ind}] = 0$, $x_1[a^{ind}] = 1$ e $(0, 1) \notin \equiv$, pelo que $E_{Arit} \not\models x_0 = x_1[a^{ind}]$.

3. A fórmula $\neg(x_0 = x_1)$ não é válida em E_{Arit}; por exemplo, para a atribuição a_0 que atribui 0 a todas as variáveis tem-se $x_0[a_0] = 0$, $x_1[a_0] = 0$ e $(0, 0) \in \equiv$, pelo que $E_{Arit} \models x_0 = x_1[a_0]$ e, consequentemente, $E_{Arit} \not\models \neg(x_0 = x_1)[a_0]$.

Exemplo (cont.):

4. A fórmula $x_0 = x_1 \vee \neg(x_0 = x_1)$ é válida em E_{Arit} (para qualquer atribuição a em E_{Arit}, a afirmação "$(a(x_0), a(x_1)) \in \equiv$ ou $(a(x_0), a(x_1)) \notin \equiv$" é verdadeira).

5. A fórmula $\exists x_0 \neg(x_0 = x_1)$ é válida em E_{Arit} (para toda a atribuição a em E_{Arit} a afirmação "existe $n \in \mathbb{N}_0$, $n \neq a(x_1)$" é verdadeira (tome-se, por exemplo, $n = a(x_1) + 1$)) e a fórmula $\forall x_1 \exists x_0 \neg(x_0 = x_1)$ é também válida em E_{Arit} (porquê?).

Proposição: Sejam E uma L-estrutura e φ uma L-sentença. Então, $E \models \varphi$ sse para alguma atribuição a em E, $E \models \varphi[a]$.

Dem.: Se $E \models \varphi$, é imediato que $E \models \varphi[a]$ para alguma atribuição a, pois $E \models \varphi$ significa que $E \models \varphi[a]$ para toda a atribuição a.

Admitamos agora que $E \models \varphi[a]$ para alguma atribuição a.
Tomemos uma atribuição a' arbitrária em E.
(Queremos provar que $E \models \varphi[a']$.)
Como φ é uma L-sentença e portanto $LIV(\varphi) = \emptyset$, tem-se trivialmente que $a(x) = a'(x)$ para todo $x \in LIV(\varphi)$.
Assim, atendendo à proposição do Slide 31 e a que $E \models \varphi[a]$, conclui-se $E \models \varphi[a']$. $\square$

Definição: Uma *L*-fórmula φ *é (universalmente) válida* (notação: $\models \varphi$) quando é válida em toda a *L*-estrutura.

Utilizamos a notação $\not\models \varphi$ quando φ *não é (universalmente) válida*, *i.e.*, quando existe uma *L*-estrutura *E* tal que $E \not\models \varphi$.

Observação: Uma L-fórmula φ não é universalmente válida quando existe alguma L-estrutura que não valida φ, ou seja, quando existe alguma L-estrutra E e alguma atribuição a em E t.q. $E \not\models \varphi[a]$.

Exemplo:

1. A L_{Arit}-fórmula $x_0 = x_1$ não é universalmente válida.
   Como vimos no exemplo anterior, esta fórmula não é válida na estrutura E_{Arit}.
2. No exemplo anterior, vimos que a fórmula $x_0 = x_0$ é válida na estrutura E_{Arit}.

   No entanto, esta fórmula não é válida em todas as L_{Arit}-estruturas.

   Por exemplo, se considerarmos uma L_{Arit}-estrutura $E_1 = (\{a, b\}, ^{-})$ em que $\equiv$ seja a relação $\{(a, a)\}$, E_1 não valida $x_0 = x_0$, pois considerando uma atribuição a' em E_1 t.q. $a'(x_0) = b$ teremos $E_1 \not\models x_0 = x_0[a']$, uma vez que o par $(x_0[a'], x_0[a'])$, que é igual ao par (b, b), não pertence à relação $\equiv$.

3 A L_{Arit}-fórmula $\forall x_0(x_0 = x_1 \vee \neg(x_0 = x_1))$ é universalmente válida.

De facto, dadas uma qualquer L_{Arit}-estrutura $E = (D, \overline{\ })$ e uma qualquer atribuição a em E, tem-se:

$$
\begin{array}{ll}
 & E \models \forall x_0(x_0 = x_1 \vee \neg(x_0 = x_1))[a] \\
\text{sse} & E \models (x_0 = x_1 \vee \neg(x_0 = x_1))[a\begin{pmatrix} x_0 \\ d \end{pmatrix}], \text{ para todo } d \in D \\
\text{sse} & E \models x_0 = x_1[a\begin{pmatrix} x_0 \\ d \end{pmatrix}] \,\mathrm{ou}\, E \models \neg(x_0 = x_1)[a\begin{pmatrix} x_0 \\ d \end{pmatrix}], \text{ para todo } d \in D \\
\text{sse} & (d, a(x_1)) \in \overline{=} \text{ ou } E \not\models x_0 = x_1[a\begin{pmatrix} x_0 \\ d \end{pmatrix}], \text{ para todo } d \in D \\
\text{sse} & (d, a(x_1)) \in \overline{=} \text{ ou } (d, a(x_1)) \notin \overline{=}, \text{ para todo } d \in D
\end{array}
$$

e a última afirmação é verdadeira.

Definição: Uma L-fórmula φ é *logicamente equivalente* a uma L-fórmula ψ (notação: $\varphi \Leftrightarrow \psi$) quando $\models \varphi \leftrightarrow \psi$, *i.e.*, quando para para toda a L-estrutura E e para toda a atribuição a em E, $E \models \varphi[a]$ sse $E \models \psi[a]$.

Observação:

As propriedades enunciadas para e equivalência lógica no contexto do Cálculo Proposicional mantêm-se válidas no Cálculo de Predicados.

Por exemplo, $\Leftrightarrow$ é uma relação de equivalência em $\mathcal{F}_L$.

Proposição: Sejam $x, y \in \mathcal{V}$ e $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_L$.

a) $\neg\forall x\varphi \Leftrightarrow \exists x\neg\varphi$

b) $\neg\exists x\varphi \Leftrightarrow \forall x\neg\varphi$

c) $\forall x\varphi \Leftrightarrow \neg\exists x\neg\varphi$

d) $\exists x\varphi \Leftrightarrow \neg\forall x\neg\varphi$

e) $\forall x(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \forall x\varphi \wedge \forall x\psi$

f) $\exists x(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow \exists x\varphi \vee \exists x\psi$

g) $\models (\forall x\varphi \vee \forall x\psi) \to \forall x(\varphi \vee \psi)$,
mas não necessariamente $\models \forall x(\varphi \vee \psi) \to (\forall x\varphi \vee \forall x\psi)$

h) $\models \exists x(\varphi \wedge \psi) \to (\exists x\varphi \wedge \exists x\psi)$,
mas não necessariamente $\models (\exists x\varphi \wedge \exists x\psi) \to \exists x(\varphi \wedge \psi)$

i) $\forall x\forall y\varphi \Leftrightarrow \forall y\forall x\varphi$

j) $\exists x\exists y\varphi \Leftrightarrow \exists y\exists x\varphi$

k) $\models \exists x\forall y\varphi \to \forall y\exists x\varphi$,
mas não necessariamente $\models \forall x\exists y\varphi \to \exists y\forall x\varphi$

l) $Qx\varphi \Leftrightarrow \varphi$
se $x \notin LIV(\varphi)$,
para todo $Q \in \{\exists, \forall\}$

m) $Qx\varphi \Leftrightarrow Qy\varphi[y/x]$
se $y \notin LIV(\varphi)$ e x é livre para y em φ
para todo $Q \in \{\exists, \forall\}$.

n) $Qx(\varphi\Box\psi) \Leftrightarrow (Qx\varphi)\Box\psi$ e $Qx(\psi\Box\varphi) \Leftrightarrow \psi\Box(Qx\varphi)$,
se $x \notin LIV(\psi)$,
para todo $\Box \in \{\wedge, \vee\}$ e para todo $Q \in \{\exists, \forall\}$

Dem.:

c) Sejam L uma linguagem, E uma L-estrutura e a uma atribuição em E. (Queremos demonstrar que: $E \models \forall x \varphi[a]$ sse $E \models \neg\exists x \neg\varphi[a]$.)

$$
\begin{array}{lll}
 & E \models \forall x \varphi[a] & \\
\text{sse} & E \models \varphi[a\begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix}], \text{ para todo } d \in dom(E) & \textbf{(1)} \\
\text{sse} & E \not\models \neg\varphi[a\begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix}], \text{ para todo } d \in dom(E) & \textbf{(2)} \\
\text{sse} & E \not\models \exists x \neg\varphi[a] & \textbf{(3)} \\
\text{sse} & E \models \neg\exists x \neg\varphi[a] & \textbf{(4)}
\end{array}
$$

<u>Justificações</u>

(1) Por (b) da prop. Slide 30
(2) Para todo $\psi \in \mathcal{F}_L$, $E \models \psi[a]$ sse $E \not\models \neg\psi[a]$ (Exercício).
(3) Por (c) da prop. Slide 30
(4) Para todo $\psi \in \mathcal{F}_L$, $E \not\models \psi[a]$ sse $E \models \neg\psi[a]$ (Exercício).

k) Mostremos que $\models \forall x \exists y \varphi \to \exists y \forall x \varphi$ não é necessariamente válida.

Seja L uma linguagem contendo um símbolo R de relação, binário. Seja E uma L-estrutura de domínio $\{a, b\}$, onde a interpretação de R é o conjunto $\{(a, b), (b, a)\}$.
Então, $E \models \forall x_0 \exists x_1 R(x_0, x_1)$, mas $E \not\models \exists x_1 \forall x_0 R(x_0, x_1)$ (Porquê?).
Logo, $E \not\models \forall x_0 \exists x_1 R(x_0, x_1) \to \exists x_1 \forall x_0 R(x_0, x_1)$.

Demonstração das restantes afirmações: exercício. $\square$

Definição: Sejam E uma L-estrutura, a uma atribuição em E e Γ um conjunto de L-fórmulas.

Dizemos que *E satisfaz Γ para a* ou que o par *(E, a) satisfaz Γ*, escrevendo $E \models \Gamma[a]$, quando para todo $\varphi \in \Gamma$, $E \models \varphi[a]$.

Caso contrário, dizemos que *E não satisfaz Γ para a* ou que o par *(E, a) não satisfaz Γ*, escrevendo $E \not\models \Gamma[a]$.

Exemplo: O par (E_{Arit}, a^{ind}) satisfaz o conjunto de L_{Arit}-fórmulas

$$\{\forall x_0(x_0 \times x_1 = x_0), \forall x_1(x_1 \times s(x_0) = x_1)\},$$

mas não satisfaz o conjunto de L_{Arit}-fórmulas

$$\{\forall x_0(x_0 \times x_1 = x_0), \forall x_1(x_1 \times s(x_2) = x_1)\}.$$

Definição: Um conjunto de L-fórmulas Γ diz-se *satisfazível* ou *(semanticamente) consistente* quando para alguma L-estrutura E e para alguma atribuição a em E, (E, a) satisfaz Γ.

Caso contrário, Γ diz-se *insatisfazível* ou *(semanticamente) inconsistente*.

Exemplo:

a) O conjunto de L_{Arit}-fórmulas $\{\forall x_0(x_0 \times x_1 = x_0), \forall x_1(x_1 \times s(x_0) = x_1)\}$ é satisfazível (por exemplo, (E_{Arit}, a^{ind}) satisfá-lo).

O conjunto de L_{Arit}-fórmulas $\{\forall x_0(x_0 \times x_1 = x_0), \forall x_1(x_1 \times s(x_2) = x_1)\}$ também é satisfazível (exercício).

b) O conjunto de L_{Arit}-fórmulas $\{\forall x_0(x_0 = x_0), \neg(0 = 0)\}$ é insatisfazível (exercício).

Definição: Sejam E uma L-estrutura e Γ um conjunto de L-fórmulas.

Dizemos que *E é um modelo de Γ* ou que *E valida Γ*, escrevendo $E \models \Gamma$, quando para toda a atribuição a em E, $E \models \Gamma[a]$.

Caso contrário, dizemos que *E não é modelo de Γ* ou que *E não valida Γ*, escrevendo $E \not\models \Gamma$.

Exemplo: E_{Arit} é um modelo do conjunto formado pelas seguintes L_{Arit}-sentenças:

$$\begin{array}{l}
\forall x_0 \neg(0 = s(x_0));\\
\forall x_0 \forall x_1 ((s(x_0) = s(x_1)) \to (x_0 = x_1));\\
\forall x_0 \neg(s(x_0) < 0);\\
\forall x_0 \forall x_1 ((x_0 = s(x_1)) \to ((x_0 < x_1) \vee (x_0 = x_1))));\\
\forall x_0 (x_0 + 0 = x_0);\\
\forall x_0 \forall x_1 (s(x_0) + x_1 = s(x_0 + x_1));\\
\forall x_0 (x_0 \times 0 = 0);\\
\forall x_0 \forall x_1 (s(x_0) \times x_1 = (x_0 \times x_1) + x_1).
\end{array}$$

A *axiomática de Peano* para a Aritmética é constituída por estas fórmulas, juntamente com um princípio de indução para $\mathbb{N}_0$.

Proposição: Seja Γ um conjunto de L-sentenças.

1. Uma L-estrutura E é um modelo de Γ sse para alguma atribuição a em E, (E, a) satisfaz Γ.
2. Γ é satisfazível sse existem modelos de Γ.

Dem.: Exercício. $\square$

Definição: Uma L-fórmula φ diz-se uma *consequência (semântica)* de um conjunto de L-fórmulas Γ (notação: $\Gamma \models \varphi$) quando para toda a L-estrutura E e para toda a atribuição a em E, se $E \models \Gamma[a]$, então $E \models \varphi[a]$.

Observação: Na denotação de relações de consequência semântica, usaremos simplificações semalhantes às utilizadas no contexto do Cálculo Proposicional.

Por exemplo, dadas *L*-fórmulas φ e ψ e dado um conjunto de *L*-fórmulas Γ, a notação $\Gamma, \varphi \models \psi$ abrevia $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi$.

Exemplo: No contexto do tipo de linguagem L_{Arit},

$$\forall x_0 \neg(x_0 = s(x_0)) \models \neg(0 = s(0)).$$

De facto, dada uma L_{Arit}-estrutura $E = (D, \overline{})$ e dada uma atribuição a em E tais que (E, a) satisfaz $\{\forall x_0 \neg(x_0 = s(x_0))\}$,
temos que, para todo o $d \in D$, $(d, \overline{s}(d)) \notin \overline{=}$.

Assim, como $\overline{0} \in D$, em particular, temos que $(\overline{0}, \overline{s}(\overline{0})) \notin \overline{=}$.

Consequentemente, $E \models \neg(0 = s(0))[a]$.

Proposição: Sejam Γ um conjunto de L-sentenças e φ uma L-sentença. Então, $\Gamma \models \varphi$ sse todos os modelos de Γ validam φ.

Dem.: Exercício. $\square$

Notação : Adiante, usaremos a notação $LIV(\Gamma)$, com Γ um conjunto de L-fórmulas, para representar o conjunto $\bigcup_{\varphi \in \Gamma} LIV(\varphi)$.

Proposição: Sejam φ e ψ L-fórmulas, seja Γ um conjunto de L-fórmulas, seja x uma variável e seja t um L-termo.

a) Se $\Gamma \models \forall x \varphi$ e x está livre para t em φ, então $\Gamma \models \varphi[t/x]$.

b) Se $\Gamma \models \varphi$ e $x \notin LIV(\Gamma)$, então $\Gamma \models \forall x \varphi$.

c) Se $\Gamma \models \varphi[t/x]$ e x está live para t em φ, então $\Gamma \models \exists x \varphi$.

d) Se $\Gamma \models \exists x \varphi$ e $\Gamma, \varphi \models \psi$, e $x \notin LIV(\Gamma \cup \{\psi\})$, então $\Gamma \models \psi$.

Demonstração:

a) Suponhamos que (E, a) satisfaz Γ.
(Queremos demonstrar que: $E \models \varphi[t/x][a]$.)

Então, pela hipótese, $E \models \forall x \varphi[a]$.

Assim, por definição de satisfação,

$$E \models \varphi[a\begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix}], \text{ para todo } d \in dom(E).$$

Daqui, em particular, $E \models \varphi[a\begin{pmatrix} x \\ t[a] \end{pmatrix}]$, pois $t[a] \in dom(E)$.
Logo, como por hipótese x está livre para t em φ, aplicando a proposição do Slide 33, $E \models \varphi[t/x][a]$.

Demonstração: (cont.)

b) Suponhamos que (E, a) satisfaz Γ.
(Queremos demonstrar que: $E \models \forall x\varphi[a]$.)
Por hipótese, $x \notin LIV(\Gamma)$.
Logo, para todo $\psi \in \Gamma$, $x \notin LIV(\psi)$ e, para todo $d \in dom(E)$, as atribuições a e $a\begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix}$ atribuem os mesmos valores a todas as variáveis livres de ψ.
Assim, para todo $\psi \in \Gamma$, segue da proposição do Slide 31 que

$$E \models \psi[a] \text{ sse } E \models \psi[a\begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix}], \text{ para todo } d \in dom(E).$$

Consequentemente, uma vez que (E, a) satisfaz Γ,
para todo $d \in dom(E)$, $(E, a\begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix})$ também satisfaz Γ.
Como por hipótese $\Gamma \models \varphi$, segue que

$$E \models \varphi[a\begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix}], \text{ para todo } d \in dom(E),$$

o que permite concluir $E \models \forall x\varphi[a]$.

c) e **d)**: exercício. $\square$