Universidade do Minho
Escola de Ciências
Departamento de Matemática

Cálculo

Mestrado Integrado em Engenharia Informática

Teste 1 B :: 26 de novembro de 2020

Nome: Proposta de correção   Número:

I

As respostas às questões deste grupo devem ser convenientemente justificadas.

Questão 1. [2 valores] Represente o conjunto $A = \left\{x \in \mathbb{R} : \left|\frac{1-x}{x+1}\right| \geq 2\right\}$ na forma de intervalo ou união de intervalos.

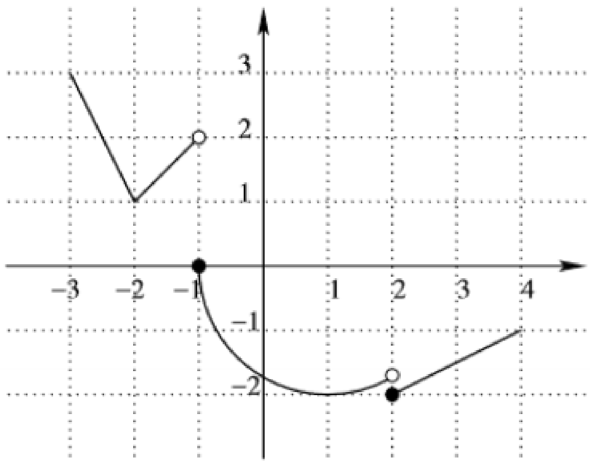
$\left|\frac{1-x}{x+1}\right| \geq 2 \Leftrightarrow \frac{1-x}{x+1} \leq -2 \vee \frac{1-x}{x+1} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{1-x+2x+2}{x+1} \leq 0 \vee \frac{1-x-2(x+1)}{x+1} \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{x+3}{x+1} \leq 0 \vee \frac{3x+1}{x+1} \leq 0$ | Pelas tabelas abaixo conclui-se que $A = [-3,-1[\cup]-1,-1/3]$

		-3		-1	
$x+3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{x+3}{x+1}$	$+$	0	$-$	X	$+$

		-1		$-1/3$	
$3x+1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{3x+1}{x+1}$	$+$	X	$-$	0	$+$

Questão 2. [3 valores] Considere a função $f : [-3,4] \longrightarrow \mathbb{R}$ cujo gráfico se apresenta na figura anexa. No intervalo $[-1,2[$ o gráfico da função é um arco da circunferência centrada em $(1,0)$ de raio 2, cuja equação é $(x-1)^2 + y^2 = 4$.



a) Indique o contradomínio de f.

$D'f = [-2,0] \cup [1,3]$

Contradomínio de f

b) Classifique a função f quanto à injetividade.

f não é injetiva porque, por exemplo, $f(1) = f(2) = -2$

c) Determine $f^{-1}([1,2])$.

$f^{-1}([1,2]) = [-5/2, -1[$

d) Indique os pontos de mínimo local de f, e o respetivo valor de f.

f tem 3 pontos de mínimo local:

$x_1 = -2$, $f(x_1) = 1$; $x_2 = 1$, $f(x_2) = -2$; $x_3 = 2$, $f(x_3) = -2$

e) Indique os pontos onde f é descontínua.

f é descontínua em $x = -1$ e $x = 2$ porque $\lim_{x \to -1} f(x)$ e $\lim_{x \to 2} f(x)$ não existem

f) Indique o maior valor positivo para δ de modo a que seja verdadeira a implicação seguinte:

$\delta = \sqrt{3}$

$$|x-1| < \delta \Rightarrow |f(x)+2| < 1.$$

$|f(x)+2| < 1 \Leftrightarrow -1 < f(x)+2 < 1 \Leftrightarrow -3 < f(x) < -1$

$x < 1 \wedge f(x) = -1 \Rightarrow (x-1)^2 = 3$ e então $x = 1 - \sqrt{3}$. Assim $1-\sqrt{3} < x < 1+\sqrt{3} \Rightarrow -3 < f(x) < -1$

Questão 3. [3,5 valores] Calcule cada um dos seguintes limites:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x}{e^x - 1}$; *b)* $\lim_{x\to -\infty} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x^2 \operatorname{sen} x}$.

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x}{e^x-1} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{e^x-e^{-x}}{2}}{e^x-1} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}}{2(e^x-1)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}(e^{2x}-1)}{2(e^x-1)}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{(e^x-1)}(e^x+1)}{2e^x\cancel{(e^x-1)}} = 1$

b) $\lim_{x\to -\infty} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x^2 \operatorname{sen} x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{2\cancel{\operatorname{sen} x}\cos x}{x^2 \cancel{\operatorname{sen} x}} = \lim_{x\to -\infty} 2\cos x \cdot \frac{1}{x^2} = 0$

uma vez que $\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ e a função $2\cos x$ é limitada ($\forall x \in \mathbb{R}\ \ -2 \le 2\cos x \le 2$).

Questão 4. [3,5 valores] Considere as funções f e g definidas por

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \le 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \in \mathbb{Z} \\ x+1, & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Identifique os pontos onde cada uma das funções f e g é contínua.

b) Calcule $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to -\infty} g(x)$.

a) • $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1 = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$, pelo que f é contínua em $x=0$.
Por outro lado f é polinomial em $]-\infty, 0[$ e em $]0,+\infty[$, pelo que f é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
Conclui-se, então, que f é contínua em $\mathbb{R}$.

• Seja $z \in \mathbb{Z}$. Então
$\lim_{x\to z} g(x) = \lim_{x\to z}(x+1) = z+1 = g(z) = z^2+1$ se e só se $z+1 = z^2+1$, ou seja se $z(z-1)=0$, ou ainda $z=0$ ou $z=1$.
Como em $]z, z+1[$ g é contínua, por ser uma função polinomial, então g é contínua em $(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}) \cup \{0,1\}$

b) ver última página

Questão 5. [3 valores] Em cada alínea apresente um exemplo ou justifique porque não existe:

a) Dois números irracionais a e b tais que $10^{-4} < |a-b| < 10^{-2}$;

$a = \pi$, $b = \pi + \frac{2}{10000}$

b) Um conjunto não limitado que possua ínfimo mas não tenha mínimo;

$X =]0,+\infty[$, X não é limitado, $\inf X = 0$ e X não tem mínimo porque $0 \notin X$

c) Um conjunto não limitado cujo derivado seja um conjunto não vazio limitado;

$X = \mathbb{Z} \cup]0,1[$, X não é limitado , $X' = [0,1]$

d) Uma função $f : [0,1] \to]0,1]$ contínua e sobrejetiva;

A imagem por uma função contínua de um intervalo fechado limitado é um intervalo fechado. Como $]0,1]$ não é um intervalo fechado, f não é sobrejetiva

e) Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, par e monótona;

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto 0$$

f) Uma função contínua definida num intervalo limitado que tenha mínimo mas não tenha máximo.

$$f :]0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{1}{x}$$

, f é estritamente decrescente, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ pelo que f não tem máximo e $\min f = f(1) = 1$

II

Em cada uma das questões seguintes, assinale neste enunciado, a afirmação verdadeira; não deve apresentar qualquer justificação.
Cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta 0,25 valores.

Questão 1. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{\cos x}$. Então

- ○ f é monótona e tem máximo.
- ● f é par e limitada.
- ○ f é não limitada e não monótona.
- ○ f é injetiva e crescente.

Questão 2. Seja $f : \mathbb{R}_0^- \to [-5, +\infty[$ tal que $f(x) = x^2 - 5$

- ● $f^{-1}(x) = -\sqrt{x+5}$.
- ○ $f^{-1}(x) = \sqrt{x+5}$.
- ○ f não é invertível.
- ○ $f^{-1}(x) = \frac{1}{x^2-5}$.

Questão 3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x$. Então

- ○ f é sobrejetiva.
- ○ f anula-se em pelo menos um ponto.
- ○ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
- ● f é crescente.

Questão 4. O valor de $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg} \frac{5\pi}{7}\right)$ é

- ● $-\frac{2\pi}{7}$.
- ○ $\frac{5\pi}{7}$.
- ○ $\frac{2\pi}{7}$.
- ○ $\frac{\pi}{7}$.

Questão 5. Para todo o $x \in [-1,1]$ verifica-se que

- ○ $\operatorname{arcsen}^2 x + \arccos^2 x = 1$.
- ○ $\operatorname{sen}(\arccos x) = x - \frac{\pi}{2}$.
- ○ $\operatorname{sen}(2 \arccos x) = 2x \operatorname{sen}(\arccos x)$.
- ● $\operatorname{sen}(2 \operatorname{arcsen} x) = 2x$.

Questão 4

b) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x^2+1) = +\infty$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x \to -\infty \\ x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -\infty \\ x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}}} (x+1) = -\infty \\ \\ \lim\limits_{\substack{x \to -\infty \\ x \in \mathbb{Z}}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -\infty \\ x \in \mathbb{Z}}} (x^2+1) = +\infty \end{array}\right\}$$

como $\lim\limits_{\substack{x \to -\infty \\ x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}}} g(x) \neq \lim\limits_{\substack{x \to -\infty \\ x \in \mathbb{Z}}} g(x)$

então $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ não existe