Universidade do Minho | MIEInf
Departamento de Matemática | 2020/2021

Tópicos de Matemática Discreta

folha 7

3. Introdução à Teoria de Conjuntos

3.1. Considere o conjunto $A = \left\{1, -1, \frac{1}{4}, 2, 0, -\frac{1}{2}\right\}$. Indique todos os elementos de cada um dos conjuntos seguintes.

(a) $\left\{a \in A \,|\, a^2 \in \mathbb{Z}\right\}$

(b) $\left\{a^2 \in \mathbb{R} \,|\, a \in A \wedge a^2 \in A\right\}$

(c) $\left\{b \in \mathbb{Z} \,|\, \exists_{a \in A} \;\; b = a^2\right\}$

(d) $\{a \in A \,|\, a \geq 0 \wedge \sqrt{a} \in A\}$

(e) $\left\{x \in \mathbb{R} \,|\, \exists_{a \in A} \;\; (a^2 \in A \wedge a \geq 0 \wedge x = \sqrt{a})\right\}$

(f) $\left\{b \in \mathbb{R} \,|\, \exists_{a \in A} \;\; b^2 = a\right\}$

3.2. Descreva, por compreensão, cada um dos conjuntos que se seguem:

(a) $A = \{-1, 1\}$

(b) $C = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots\}$

(c) $B = \{3, 6, 9, 12, 15, \ldots\}$

(d) $D = \{4, 9, 16, 25\}$

3.3. De entre os conjuntos que se seguem, indique aqueles que são iguais.

(a) $\left\{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 - 3x + 2 = 0\right\}$, $\{1, 2\}$ e $\left\{n \in \mathbb{N} \,|\, 0 < n^2 \leq 4\right\}$

(b) $\{r, t, s\}$, $\{s, t, r, s\}$, $\{t, s, t, s\}$ e $\{s, t, r, t\}$

(c) $\emptyset$, $\{0\}$, $\{\emptyset\}$ e $\{\}$

(d) $\{1, \{-1\}\}$, $\{1, -1\}$ e $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 = 1\}$

3.4. Seja $A = \{5, 11, \{5, 11\}, \{0\}, \emptyset\}$. Diga, justificando, se cada uma das afirmações que se seguem é ou não verdadeira.

(a) $5 \in A$ (b) $\{5\} \in A$ (c) $\{5, 11\} \in A$ (d) $A \subseteq \mathbb{R}$

(e) $\{5, 11\} \subseteq A$ (f) $0 \in A$ (g) $\emptyset \in A$ (h) $\{0, 5, 11\} \subseteq A$

3.5. Diga se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações seguintes:

(a) $1 \in \{1\}$ (c) $\{1\} \in \{1\}$ (e) $\{1\} \in \{1, \{1\}\}$ (g) $\{1\} \subseteq \{\{1\}\}$

(b) $1 \in \{\{1\}\}$ (d) $\{1\} \in \{\{1\}\}$ (f) $\{1\} \subseteq \{1\}$ (h) $\{1, \{1\}\} \subseteq \{\{1\}\}$

3.6. Investigue a veracidade de cada uma das seguintes proposições.

(a) $\emptyset \in \{\emptyset\}$ (b) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ (c) $\emptyset \notin \emptyset$ (d) $\emptyset \in \{\{\emptyset\}\}$

3.7. Considere que $A \subseteq B \subseteq C$. Considere ainda que $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$ e que $d \notin A$, $e \notin B$ e $f \notin C$. Quais das afirmações seguintes são necessariamente verdadeiras?

(a) $a \in C$ (b) $b \in A$ (c) $d \in B$ (d) $c \notin A$ (e) $e \notin A$ (f) $f \notin A$

3.8. Dê exemplos de conjuntos A e B tais que se tenha simultaneamente:

(a) $A \subseteq B$ e $A \notin B$ (b) $A \nsubseteq B$ e $A \in B$ (c) $A \nsubseteq B$ e $A \notin B$ (d) $A \subseteq B$ e $A \in B$

3.9. Diga se são verdadeiras as seguintes afirmações:

(a) $|\{1, \{2, 3\}, 4\}| = 4$ (b) $|\{\emptyset, 1\}| = 2$ (c) $|\{\mathbb{N}\}| = \aleph_0$ (d) $\{|\mathbb{N}|\} = \aleph_0$

Tópicos de Matemática Discreta

folha 8

3.10. Sejam $A = \{2,4,6,8\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists_{y\in\mathbb{N}}\ x = 2y\}$ e $C = \{x^2 \mid x \in A\}$. Determine $A \cup C$, $A \cup B$, $C \cup B$, $A \cup A$, $A \cap B$, $B \cap B$, $B \cup C \cup A$, $C\backslash A$, $A\backslash B$ e $B\backslash A$.

3.11. Sejam A, B e C subconjuntos de um conjunto X. Prove que

(a) $A \cup A = A$

(b) $A\backslash B \subseteq A$

(c) $A = (A \cap B) \cup (A\backslash B)$

(d) $A \cap (B\backslash C) = (A \cap B) \backslash C$

(e) se $A \cup B = \emptyset$ então $A = \emptyset$ e $B = \emptyset$

(f) $(A \cup B) \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

3.12. Sejam A, B e C conjuntos. Mostre que se $A \cup B = A \cup C$ e $A \cap B = A \cap C$ então $B = C$.

3.13. Dê exemplos de conjuntos A, B e C para os quais se tenha, respetivamente:

(a) $A \cup (B\backslash C) \neq (A \cup B) \setminus (A \cup C)$

(b) $A\backslash (B \cap C) \neq (A\backslash B) \cap (A\backslash C)$

3.14. Sejam A, B e C conjuntos. Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações seguintes.

(a) Se $C \subseteq A \cup B$ então $C \subseteq A$ e $C \subseteq B$.

(b) Se $C \subseteq A$ ou $C \subseteq B$ então $C \subseteq A \cup B$.

(c) Se $C \subseteq A$ ou $C \subseteq B$ então $C \subseteq A \cap B$.

(d) Se $C \subseteq (A \cap B)$ então $C \subseteq A$ e $C \subseteq B$.

3.15. Sejam $A = \{1,5,7\}$ e $B = \{\emptyset, 7, \{1,5,7\}\}$. Indique $\mathcal{P}(A)$ e $\mathcal{P}(B)$ e diga, justificando, se $A \in \mathcal{P}(B)$, $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ e $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

3.16. Determine $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$.

3.17. Sejam A e B conjuntos. Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações seguintes.

(a) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

(b) $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

3.18. Considere os conjuntos $A = \{1,2,3\}$, $B = \{a,b\}$ e $C = \{5\}$. Determine $A \times C$, $C \times A$, $(A \times C) \setminus (C \times A)$, $A \times B \times C$, $A \times \emptyset \times C$, C^3 e $C^3 \times B$.

3.19. Sejam A, B e C conjuntos. Prove que $C \times (A \cup B) = (C \times A) \cup (C \times B)$.

3.20. Sejam A, B e C conjuntos tais que $A \neq B$ e $A \times C = B \times C$. Mostre que $C = \emptyset$.

3.21. Dê exemplo, ou justifique que não existe um exemplo, de conjuntos A, B e C tais que:

(a) $\{1\} \in A$ e $\{1\} \subseteq A$

(b) $A \cap \emptyset = A$

(c) $A \cap B = A \cap C$ e $B \neq C$

(d) $B = C$ e $A \cap B \neq A \cap C$

(e) $A \times B \subseteq B \times C$ e $A \nsubseteq B$

(f) $A \cup B = A \cup C$ e $B \neq C$

(g) $A \times (B\backslash C) = A \times C$ com $B, C \neq \emptyset$

(h) $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ com $A, B \neq \emptyset$

(i) $\mathcal{P}(A) \cap A \neq \emptyset$

3.22. Seja A um conjunto finito. Qual dos conjuntos $\mathcal{P}(A \times A)$ e $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)$ tem mais elementos?

3.23. Indique todas as partições de $\{1,2,3\}$. Repita o exercício com o conjunto $\{1, \{2\}, \mathbb{N}\}$.