Universidade do Minho LEI | MIEI
Departamento de Matemática 2021/2022

Elementos de Probabilidades
e
Teoria de Números

Teoria de Números - folha 1

1. Determine o quociente e o resto na divisão de :
   (a) 310156 por 197;
   (b) 32 por 45;
   (c) 0 por 28;
   (d) -19 por 6;
   (e) -234 por -9.

2. Na divisão de 392 por 45, determine:
   (a) o maior inteiro que se pode somar ao dividendo sem alterar o quociente;
   (b) o maior inteiro que se pode subtrair ao dividendo sem alterar o quociente.

3. Diga, justificando, se as afirmações seguintes são verdadeiras para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{Z}$:
   (a) Se $a \mid bc$, então $a \mid b$ ou $a \mid c$.
   (b) Se $a \mid b + c$, então $a \mid b$ ou $a \mid c$.
   (c) Se $a^2 \mid b^3$, então $a \mid b$.

4. Mostre que, se $a \mid (2x - 3y)$ e $a \mid (4x - 5y)$, então $a \mid y$, para quaisquer inteiros a, x e y.

5. Seja $n \in \mathbb{N}$. Mostre que se $(n + 1) \mid (n^2 + 1)$ então $n = 1$.
   [Sugestão: tenha em conta que $n^2 + 1 = n(n + 1) - (n - 1)$.]

6. Sejam $x, y \in \mathbb{Z}$ dois números ímpares. Mostre que $2 \mid (x^2 + y^2)$ mas $4 \nmid (x^2 + y^2)$.

7. Utilizando o Algoritmo da Divisão, mostre que
   (a) o quadrado de um inteiro é da forma $3k$ ou $3k + 1$, para certo inteiro não negativo k;
   (b) $3a^2 - 1$ não é um quadrado perfeito, para todo o inteiro a.

8. Mostre que, para todo o inteiro a, um dos inteiros a e $a + 2$ ou $a + 4$ é divisível por 3.

9. Seja $n \in \mathbb{N}$. Mostre que $3 \mid n(2n^2 + 7)$.

10. Prove que, para todo o inteiro $n \geq 1$, $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ é um inteiro.

11. Prove que o produto de quatro inteiros consecutivos é divisível por 24.