Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática e Aplicações

Análise

Mestrado Integrado em Engenharia Informática

Teste 1 :: 21 de março de 2019

Nome [   ] Número [   ]

I

As respostas às questões deste grupo devem ser convenientemente justificadas e devem ser dadas na folha de teste.

Questão 1. [3 valores] Considere a função $\boldsymbol{f}(x,y) = \left(\ln(1-x^2-(y+1)^2), \dfrac{1}{x^2-y-1}\right)$.

a) Determine o domínio $\mathcal{D}$ da função $\boldsymbol{f}$ e represente-o graficamente.

b) Indique a aderência e a fronteira de $\mathcal{D}$ (pode fazer um esboço de cada um dos conjuntos).

c) Indique, justificando, se $\mathcal{D}$ é um conjunto aberto.

Questão 2. [5 valores] Seja $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{|x|+|y|} + x + 1, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 1, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

a) Mostre que a função f é contínua em $(0,0)$.

b) Determine $\nabla f(0,0)$ e $\nabla f(-1,1)$.

c) Calcule $Df\big((0,0);(1,1)\big)$.

d) Indique se f é derivável em $(0,0)$.

Questão 3. [2 valores] Determine uma equação do plano tangente à superfície definida pela equação $xy+xz+yz=11$ no ponto de coordenadas $(1,2,3)$.

II

Em cada uma das questões seguintes, assinale neste enunciado a única afirmação verdadeira; não deve apresentar qualquer justificação.
Cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta 0,25 valores.

Questão 1. Considere a superfície $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2 \leq 25\}$ e o ponto $P=(2,-1,3)$. Então:

○ $P \in \partial S$;

○ P dista 4 unidades da origem do referencial;

○ $P \in \overset{\circ}{S}$;

○ nenhuma das anteriores.

Questão 2. Se $\lim_{x \to 0} f(x, 0) = 0$ então:

- ◯ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$;
- ◯ $\lim_{y\to 0} f(0, y) = 0$;
- ◯ nada se pode concluir sobre o $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$;
- ◯ nenhuma das anteriores.

Questão 3. O gráfico da função real de duas variáveis reais $f(x, y) = -x^2 - y^2$ é:

- ◯ um paraboloide circular;
- ◯ um cilindro elíptico;
- ◯ um paraboloide hiperbólico;
- ◯ nenhuma das anteriores.

Questão 4. Se $f, g, h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções tais que $f(1, 1) = g(1, 1) = 2$, $\nabla f(1, 1) = \nabla g(1, 1) = (2, 2)$ e $h(x, y) = f(x, y)g(x, y)$ então:

- ◯ $\nabla h(1, 1) = (2, 2)$;
- ◯ $\nabla h(1, 1) = (4, 4)$;
- ◯ $\nabla h(1, 1) = (8, 8)$;
- ◯ nenhuma das anteriores.

Questão 5. Sejam $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ e $\boldsymbol{g} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ funções tais que $\boldsymbol{f}(x, y) = (x + 2y, e^x, y)$, $\boldsymbol{g}(1, 1) = (0, 2)$ e $J\boldsymbol{g}(1, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Designando por $\boldsymbol{h}$ a função composta $\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g}$, a matriz jacobiana de $\boldsymbol{h}$ no ponto $(1, 1)$ é:

- ◯ $\begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$;
- ◯ $\begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 7 & 3e & 2 \end{pmatrix}$;
- ◯ $\begin{pmatrix} 7 & 7 \\ e & 3e \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$;
- ◯ nenhuma das anteriores.

III

Em cada uma das questões seguintes, assinale neste enunciado, se a afirmação é falsa ou verdadeira; não deve apresentar qualquer justificação.
Cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta 0,5 valores.

F V

Questão 1. Dada uma função f, real de duas variáveis reais, se $f(x_0, y_0) = f(x_1, y_1)$, então $x_0 = x_1$ e $y_0 = y_1$. ◯ ◯

Questão 2. Se qualquer interseção do gráfico de uma função f real de duas variáveis reais, x e y, com os planos definidos por $x = k$ $(k \in \mathbb{R})$ for uma reta, então o gráfico de f é um plano. ◯ ◯

Questão 3. O gráfico da função, real de duas variáveis reais, definida por $f(x, y) = x^2 + y^2$, é o mesmo que a superfície de nível 0 da função, real de três variáveis reais, definida por $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$. ◯ ◯

Questão 4. Se $f(1, 2) = 3$, então $\lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x, y) = 3$. ◯ ◯

Questão 5. Se $f, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções de classe $\mathscr{C}^1$ tais que $f(1, 1) = g(2, 1) = 2$ e $\nabla f(1, 1) = \nabla g(2, 1) = (1, 2)$, então o plano tangente ao gráfico de f em $(1, 1, 2)$ também é tangente ao gráfico de g em $(2, 1, 2)$. ◯ ◯