Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática

Análise

Mestrado Integrado em Engenharia Informática

Exame :: 9 de junho de 2021

Nome [ ] Número [ ]

I

As respostas às questões deste grupo devem ser convenientemente justificadas e devem ser dadas na folha de teste.

Questão 1. [4 valores] Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

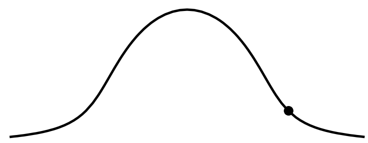
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

a) Verifique que f é contínua.

b) Calcule $\nabla f(0,0)$.

c) Verifique se f é derivável em $(0,0)$.

d) Calcule $\nabla f(1,0)$.



e) Na figura está representada uma curva de nível de f e assinalado o ponto de coordenadas $(1,0)$. Indique o valor associado à curva de nível e represente, na figura, a reta de equação $y=0$.

Questão 2. [3 valores] Considere a função $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $\boldsymbol{f}(x,y,z) = (y \operatorname{sen} x, z \cos x)$.

a) Determine a matriz jacobiana de $\boldsymbol{f}$ em $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

b) Sendo $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função derivável, calcule $\nabla g(\sqrt{3}, \frac{1}{2})$, sabendo que

$$\nabla(g \circ \boldsymbol{f})\left(\tfrac{\pi}{3}, 2, 1\right) = \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

[Recorde que $\operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$]

Questão 3. [3 valores] Considere a função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y,z) = -x^5 + 5xz + 2y - y^2 - \tfrac{5}{2}z^2.$$

a) Determine e classifique os pontos críticos de f.

b) Obtenha o plano tangente à superfície de nível zero da função f no ponto $(1,1,0)$.

Questão 4. [2 valores] Considere a região $\mathcal{R}$ definida por

$$\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y \geq 0 \text{ e } (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}.$$

a) Faça um esboço da região $\mathcal{R}$;

b) Escreva, usando coordenadas cartesianas, um integral duplo que permita calcular a área da região $\mathcal{R}$;

c) Escreva, usando coordenadas polares, um integral duplo que permita calcular a área da região $\mathcal{R}$.

[Não calcule os integrais que apresentou nas alíneas anteriores]

II

Em cada uma das questões seguintes, assinale neste enunciado a única afirmação verdadeira; não deve apresentar qualquer justificação.
Cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta 0,25 valores.

Questão 1. Considere o conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2 \text{ e } x \neq 0\}$. Então:

○ $(0,0) \in A$; ○ $(0, \sqrt{2}) \in A \cap \overline{A}$; ○ $(1,1) \in \mathring{A}$; ○ $(0,0) \in \partial A$.

Questão 2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função tal que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x,y)\| < \delta \Rightarrow |f(x,x)| + |f(y,-y)| < \varepsilon.$$

Então:

○ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$; ○ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y) - f(y,x)| = 0$;

○ $\lim\limits_{x\to 0} f(-x^2, x^2) = 0$; ○ $\lim\limits_{y\to 0} f(y^2, -y) = 0$.

Questão 3. O valor do integral $\displaystyle\int_0^2 \int_1^{3x} \frac{y}{3}\, dydx$ é:

○ $\frac{37}{3}$; ○ $\frac{11}{3}$; ○ $\frac{22}{3}$; ○ $\frac{2}{3}$.

Questão 4. Sejam $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $\mathcal{R} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 2 - \sqrt{x^2+y^2}\right\}$.

Então $\displaystyle\iiint_{\mathcal{R}} f(x,y,z) d(x,y,z)$ é igual a

○ $\displaystyle\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{2-\sqrt{x^2+y^2}} f(x,y,z) dzdydx$; ○ $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{2-z} \int_{-\sqrt{(z-2)^2-y^2}}^{\sqrt{(z-2)^2-y^2}} f(x,y,z) dxdydz$;

○ $\displaystyle\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} \int_0^{2-\sqrt{x^2+y^2}} f(x,y,z) dzdxdy$; ○ $\displaystyle\int_{-2}^{2} \int_0^{2-\sqrt{4+y^2}} \int_{-\sqrt{4-z^2+y^2}}^{\sqrt{4-z^2+y^2}} f(x,y,z) dxdzdy$.

III

Em cada uma das questões seguintes, assinale neste enunciado, se a afirmação é falsa ou verdadeira; não deve apresentar qualquer justificação.
Cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta 0,5 valores.

	V	F
Questão 1. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ uma função derivável tal que $f(1,1) = 2$ é máximo local e seja $\Sigma_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 2\}$. Então $(1,1)$ é ponto isolado de Σ_2.	○	○
Questão 2. Seja $\boldsymbol{f} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$ uma função contínua. Designando por f_1 e f_2 as funções componentes de $\boldsymbol{f}$, se $\lim\limits_{x\to 0} f_1(x) = 1$ e $\lim\limits_{x\to 0} f_2(x) = 2$, então f admite prolongamento contínuo a $\mathbb{R}$;	○	○
Questão 3. Existe uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 tal que $\nabla f(x,y) = (x^2y, xy)$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.	○	○
Questão 4. Seja $\mathcal{R} = [-1,1] \times [0,1]$ e seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(x,y) = f(-x,y)$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Então $\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\, d(x,y) = 2 \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\, dydx$.	○	○