Universidade do Minho
Escola de Ciências
Departamento de Matemática

Análise

Mestrado Integrado em Engenharia Informática

Teste 1 A :: 10 de abril de 2021

Nome [ ] Número [ ]

I

As respostas às questões deste grupo devem ser convenientemente justificadas e devem ser dadas na folha de teste.

Questão 1. [3 valores] Considere o seguinte subconjunto de $\mathbb{R}^2$

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 < 16 \text{ e } |y| \geq 1\}.$$

a) Apresente um esboço do conjunto A;

b) Defina analitica e graficamente o interior, o derivado e a fronteira de A;

c) Justifique que A não é aberto.

Questão 2. [3 valores] Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \sqrt{1 + 4x^2 + y^2}.$$

a) Identifique e esboce as curvas de nível 1, $\sqrt{2}$ e $\sqrt{5}$, de f;

b) Identifique a superfície definida pelo gráfico de f;

c) Apresente uma equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 2, 3)$.

Questão 3. [2 valores] Calcule, ou justifique que não existe, cada um dos seguintes limites:

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2 - xy}{x^2 - y^2}$;

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^4 + y^4}$.

Questão 4. [4 valores] Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^3+y^3}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

a) Justifique que f é contínua em $\mathbb{R}^2$;

b) Indique, caso exista, o valor de $f_x(0, 0)$ e de $f_y(0, 0)$;

c) Calcule, ou justifique que não existe, $Df((0, 0); (1, 1))$;

d) Verifique se f é derivável em $(0, 0)$.

II

Em cada uma das questões seguintes, assinale neste enunciado a única afirmação verdadeira; não deve apresentar qualquer justificação.
Cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta 0,25 valores.

Questão 1. Considere $A \subseteq \mathbb{R}^2$, um conjunto fechado. Então:

○ $\overline{A} \neq A'$; ○ $\mathring{A} \neq \overline{A}$; ○ $\partial A \subseteq \overline{A}$; ○ $\partial A \subseteq A'$.

Questão 2. Considere uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e os subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ que se seguem:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 = 1\} \text{ e } B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x+1)^2 + y^2 = 1\}.$$

Sabendo que cada um dos conjuntos A e B está contido numa curva de nível da função f, qual das seguintes situações acontece:

○ $f(1, 0) \neq f(-1, 0)$;
○ $f(1, 1) = f(-1, 1)$;
○ $f(0, 0) = 0$;
○ A função f é descontínua em $(0, 0)$.

Questão 3. Considere uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

○ Se f admite derivadas parciais em $(0, 0)$, então f é derivável em $(0, 0)$;
○ Se f admite derivadas parciais em $(0, 0)$, então $f_x(0, 0) = f_y(0, 0)$;
○ Se f admite derivadas parciais contínuas em $(0, 0)$, então f é contínua em $(0, 0)$;
○ Se f admite derivadas parciais em $(0, 0)$, então f é contínua em $(0, 0)$.

Questão 4. Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $\boldsymbol{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ funções tais que $\nabla f(x, y) = (x^2, x + 3y)$ e $\boldsymbol{g}(x, y) = (f(x, y), f(x, y))$. Então $J\boldsymbol{g}(x, y)$ é a matriz:

○ $\begin{pmatrix} x^2 & x+3y \\ x^2 & x+3y \end{pmatrix}$;
○ $\begin{pmatrix} x^2 & x+3y \\ x+3y & x^2 \end{pmatrix}$;
○ $\begin{pmatrix} x^2 & x^2 \\ x+3y & x+3y \end{pmatrix}$;
○ $\begin{pmatrix} x+3y & x^2 \\ x+3y & x^2 \end{pmatrix}$.

III

Em cada uma das questões seguintes, assinale neste enunciado, se a afirmação é falsa ou verdadeira; não deve apresentar qualquer justificação.
Cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta 0,5 valores.

	V	F
Questão 1. Se $A = \mathbb{Z} \times [0, 1]$ então o conjunto dos pontos isolados de A é não vazio.	○	○
Questão 2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função. Se $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} f(x, y) = 2$ então $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} f(x^2, y^2) = 4$.	○	○
Questão 3. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função. Se $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \|(x, y) - (1, 2)\| < \varepsilon \Rightarrow \lvert f(x, y) - 3\rvert < \varepsilon$, então f é contínua em $(1, 2)$.	○	○
Questão 4. Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função derivável tal que $f(x, y) = f(y, x)$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, então $f_x(a, b) = f_y(b, a)$, $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$.	○	○