Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática

Cálculo

Mestrado Integrado em Engenharia Informática

2020/2021

Exercício 3.1 Determine, caso exista, cada um dos seguintes limites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{3}{x+1}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x^2-6x+9}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(x+\frac{1}{x}\right)$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{x^2}}{x}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to -5^+} \frac{|x+5|}{x+5}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$

h) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

i) $\displaystyle\lim_{x\to \pi/4} \frac{\operatorname{tg} x}{1-\cos x}$

j) $\displaystyle\lim_{x\to 3^+} \frac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3}$

k) $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-16}$

l) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{2-x}{(x-2)^3}$

m) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x-\operatorname{sen} x}{x+\operatorname{sen} x}$

n) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$

o) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} (x^2+x\cos x)$

p) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\cos x}{e^x}$

q) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{1+e^{1/x}}$

r) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{1+e^{1/x}}$

s) $\displaystyle\lim_{x\to 0} e^{-1/x^4}$

t) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}$

u) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}$

v) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(2x)}{\operatorname{sen}(4x)}$

w) $\displaystyle\lim_{x\to 4} f(x)$, quando $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\neq 4 \\ x, & x=4 \end{cases}$

x) $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$, quando $f(x)=\begin{cases} 2x, & x\leq 1 \\ x+1, & x>1 \end{cases}$

y) $\displaystyle\lim_{x\to 1} f(x)$, quando $f(x)=\begin{cases} 2x, & x\in\mathbb{Q} \\ 2, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$

Exercício 3.2 Apresente um exemplo de uma função f tal que:

1. $f(1)=4$ e $\displaystyle\lim_{x\to 1} f(x)=2$;
2. $f(1)=3$, $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x)=2$ e $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x)=4$.

Exercício 3.3 Uma função g satisfaz as condições indicadas; esboce um possível gráfico de g, em cada um dos seguintes casos:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to-1^-} g(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-1^+} g(x) = -\infty$ e $D_g = \mathbb{R}$;

b) $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x) = 3$, $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x) = 4, D_g = [-1, 4]$;

c) $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x) = 3$, $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x) = 4$, $\lim\limits_{x\to-1} g(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 4} g(x) = -\infty$ e $D_g =]-1, 4[$.

Exercício 3.4 Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$. Diga, justificando se são verdadeiras ou falsas cada uma das seguintes afirmações:

a) $\lim\limits_{x\to 2x_0} f(x) = 2 \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;

b) $\lim\limits_{x\to x_0} f(2x) = 2 \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;

c) $\lim\limits_{x\to 2x_0} f(x) = 2 \lim\limits_{x\to x_0} f(2x)$.

Exercício 3.5 Sendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $0 \leq f(x) \leq |x|$ para $0 < |x| < 1$, calcule $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Exercício 3.6 Sendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $1 \leq f(x) \leq (x-3)^2 + 1$, para $x \neq 3$, calcule $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.

Exercício 3.7 Mostre, usando a definição, que:

a) toda a função constante é contínua;

b) a função identidade é contínua.

Exercício 3.8 Determine $a, b \in \mathbb{R}$ para os quais a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 5 & \text{se } x < -1 \\ ax + b & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ \ln x & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

é contínua.

Exercício 3.9 Estude a continuidade, em todos os pontos do domínio, de cada uma das funções definidas por:

a) $f(x) = \begin{cases} 2e^x + 1 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ \operatorname{sen} x & \text{se } x > 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \ln |x|$.

e) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in \mathbb{Z} \\ x^2, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \end{cases}$

g) $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in \mathbb{Q} \\ 2, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

h) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 5, & x > 2 \\ x^3, & x \leq 2 \end{cases}$

i) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Z} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \end{cases}$

j) $f(x) = \begin{cases} |x|, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

Exercício 3.10 Defina, ou justifique que não existem, funções $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que:

a) f contínua, g descontínua, $g \circ f$ contínua;
b) f descontínua, g contínua, $g \circ f$ contínua;
c) f e g descontínuas, $g \circ f$ e $f \circ g$ contínuas.

Exercício 3.11 Apresente um exemplo, ou justifique que não existe, de uma função f tal que:

a) f é contínua em 0, mas $|f|$ é descontínua em 0;
b) $|f|$ é contínua em 0, mas f é descontínua em 0;
c) f tem domínio $\mathbb{R}$, é contínua em 1 e descontínua em todos os pontos de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$;
d) $f : [0, 1] \to [0, 1]$ contínua tal que $f(x) \neq x$ para todo $x \in [0, 1]$.

Exercício 3.12 Considere a função contínua $f : [0, 1[\cup [2, 3] \longrightarrow [1, 3]$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & 0 \leq x < 1 \\ x, & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

a) A função f é bijetiva. Justifique.
b) Determine a função inversa de f. A função f^{-1} é contínua?
c) Porque é que não se pode aplicar o teorema da continuidade da função inversa à função f?

Exercício 3.13 Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$ e f e g funções contínuas em $[a, b]$ tais que $f(a) < g(a)$ e $f(b) > g(b)$. Mostre que existe $x \in]a, b[$ tal que $f(x) = g(x)$.

Exercício 3.14 Mostre que cada uma das funções que se segue possui pelo menos uma raíz:

$$f(x) = x^5 + 3x^2 - 3x + 1; \qquad g(x) = \operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x; \qquad h(x) = \operatorname{tg} x + x - 1.$$

Exercício 3.15 Considere a função $g :]-1, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = |x|$. Verifique que g possui mínimo mas não possuí máximo. Qual o motivo pelo qual não se pode aplicar o teorema de Weierstrass à função g?

Exercício 3.16 Mostre que cada uma das seguintes equações possui pelo menos uma solução no intervalo indicado:

a) $x^3 - x + 3 = 0, \quad]-2, -1[\,;$
b) $x = \cos x, \quad [0, \pi/2];$
c) $x - 1 = -\ln(x + 1), \quad]0, 1[\,;$
d) $2 + x = e^x, \quad]0, 2[\,.$