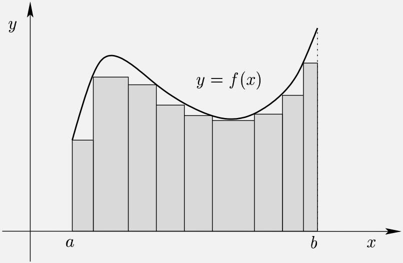
# Integral de Riemann

Vamos considerar funções $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ limitadas, isto é,

$$\exists\, \alpha \in \mathbb{R}\ \exists\, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall\, x \in [a,b] \qquad \alpha \le f(x) \le \beta.$$




$s(f,P)$ – área a cheio

$S(f,P)$ – área a tracejado

**Definição**

*Dado um intervalo* $[a,b]$*, seja* $\Upsilon = \{$*partições de* $[a,b]\}$.
*Define-se* <u>*integral superior de* $f$</u> *do seguinte modo:*

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf_{P\in\Upsilon}\{S(f,P)\}.$$

*Define-se* <u>*integral inferior de* $f$</u> *do seguinte modo:*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup_{P\in\Upsilon}\{s(f,P)\}.$$

**Definição**

*Dados um intervalo* $[a,b]$ *e uma função* $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$, $f$ *diz-se integrável em* $[a,b]$ *se*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

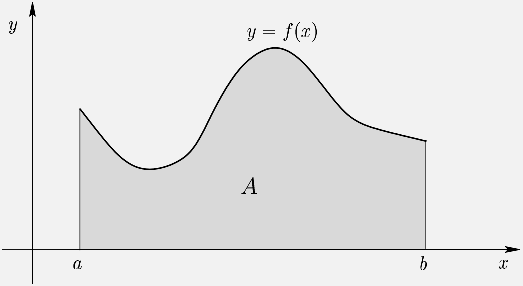
*A este valor comum chama-se integral de* $f$ *(ou integral definido de* $f$*) e denota-se por*

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{ou simplesmente} \quad \int_a^b f.$$

# Interpretação geométrica do integral de Riemann:

Dada uma função $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ não negativa, integrável, seja

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; a \leq x \leq b, \; 0 \leq y \leq f(x)\}.$$



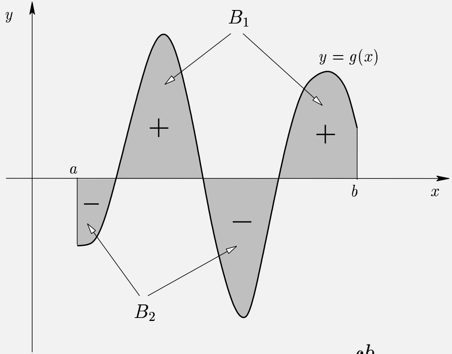

Chamamos área de $A$ ao valor do integral de $f$ em $[a,b]$, isto é,

$$\text{área de } A = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Seja agora $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável. Sejam

$$B_1 = \{(x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R} : \; g(x) > 0, \; 0 < y \leq g(x)\},$$

$$B_2 = \{(x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R} : \; g(x) < 0, \; g(x) \leq y < 0\}.$$




$$\text{área de } B_1 - \text{ área de } B_2 = \int_a^b f(x)\, dx$$

# Propriedades do integral definido

## Proposição

*Sejam* $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *funções integráveis. Então:*

1. *Se* $c \in \, ]a, b[$, *então* $f_{\big|_{[a,c]}}$ *e* $f_{\big|_{[c,b]}}$ *são integráveis e*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

2. *Para todo o* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \cdot f$ *é integrável e*

$$\int_a^b \lambda \cdot f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx;$$

3. $f + g$ *é integrável e*

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

# Propriedades do integral definido

4. *Se* $f(x) \leq g(x)$ *para todo o* $x \in [a,b]$ *então*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

5. *Em particular, se* $f(x) \geq 0$ *para todo o* $x \in [a,b]$*, então*

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0;$$

6. $|f|$ *é integrável e*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx;$$

7. $f \cdot g$ *é integrável.*

**Teorema**

*Seja* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função contínua. Então* $f$ *é integrável.*

**Nota**

*Seja* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função descontínua apenas num número finito de pontos. Então* $f$ *é integrável.*

**Teorema**

*Seja* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função limitada e monótona. Então* $f$ *é integrável.*

### Nota

**Convenção:** *Por uma questão de comodidade, não queremos estar preocupados com o facto do extremo superior de integração ser ou não maior ou igual ao extremo inferior. Assim, convenciona-se que, se* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma função integrável,*

$$\forall\, c,\ d \in [a, b] : c \leq d \qquad \int_d^c f(x)\, dx = -\int_c^d f(x)\, dx.$$

*As propriedades do integral definido apresentadas anteriormente mantêm-se válidas após esta generalização.*

# Os Teoremas Fundamentais do Cálculo

Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável. Então

$$\forall\, x \in [a, b] \qquad f_{\big|_{[a,x]}} \text{ é integrável.}$$

Seja

$$\begin{array}{rccc} F : & [a, b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt. \end{array}$$

**Teorema (Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo)**

*Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável. Suponhamos que $f$ é contínua em $c \in [a, b]$. Então a função $F$ é derivável em $c$ e $F'(c) = f(c)$.*

**Corolário**

*Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então $f$ admite primitiva.*

**Teorema (Segundo Teorema Fundamental do Cálculo)**

*Sejam $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável e $F$ uma primitiva de $f$. Então*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

**Nota**

*O Segundo Teorema Fundamental do Cálculo justifica a utilização do símbolo $\displaystyle\int f(x)\,dx$ para denotar o conjunto das primitivas de uma função $f$.*

**Notação:** Nas condições do Segundo Teorema Fundamental do Cálculo, se $F$ é uma primitiva de $f$ em $[a, b]$, denota-se

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(x)\Big]_a^b \underset{\textbf{Notação}}{=} F(b) - F(a).$$

**Teorema**

*Sejam* $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *funções deriváveis tais que* $f'$ *e* $g'$ *são integráveis. Então é válida a*

**fórmula de integração por partes no integral definido**

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

**Teorema** (Integração por mudança de variável)

*Sejam* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função integrável,* $\varphi : [c,d] \longrightarrow [a,b]$ *uma função bijectiva com derivada nunca nula no intervalo* $]c,d[$*. Então é válida a seguinte*

**fórmula de integração por substituição no integral definido**

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\ dt.$$

**Teorema** (do Valor Médio para Integrais)

*Seja* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função contínua. Então*

$$\exists\, c \in\ ]a,b[ \qquad \int_a^b f(t)\,dt = f(c)(b-a).$$