

Métodos Numéricos

Interpolação polinomial

Teresa Monteiro

Departamento de Produção e Sistemas

Escola de Engenharia

Universidade do Minho

tm@dps.uminho.pt

Encontrar uma aproximação (por exemplo, um polinómio) à função dada $f(x)$ com o menor erro possível.

Porquê?

- Não é conhecida a expressão analítica da função $f(x)$ - apenas se conhecem pontos discretos (x_i, f_i) (uma tabela de pontos) e há necessidade de prever valores em pontos intermédios (interpolar).

Dado um conjunto discreto de valores (x_i, f_i) , $i = 0, 1, \dots, n$ ($n + 1$ pontos), pretende-se encontrar uma relação funcional (expressão) entre as variáveis x (variável independente) e f (variável dependente) para prever o comportamento entre as variáveis e poder estimar valores.

- Quando se conhece a expressão da função $f(x)$ mas ela é muito complicada e operações como diferenciação ou integração são difíceis ou mesmo impossíveis, pelo que um modelo matemático mais simples é muito útil.

Pretende-se conhecer uma expressão mais simples que descreva o melhor possível o comportamento de f como função de x .

- Introdução
- Diferenças divididas
- Polinómio interpolador de Newton
- Exercícios de aplicação
- Interpolação segmentada
- Splines lineares
- Splines cúbicas
- Exercícios de aplicação

O problema geral da interpolação polinomial consiste em, dados $n + 1$ pontos distintos x_0, x_1, \dots, x_n e respectivos valores y_0, y_1, \dots, y_n em que $y_i = f(x_i)$, determinar um polinómio $p_n(x)$ de grau n tal que

$$p_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n.$$

O valor do resíduo é nulo para estes pontos, *i.e.*,
 $r(x_i) = f(x_i) - p_n(x_i) = 0, i = 0, \dots, n.$

Este tipo de polinómio é conhecido na literatura como
"colocativo".

Teorema

(Teorema de Weirstrass): Dadas uma função $f(x)$ contínua num intervalo $[a, b]$ e uma quantidade $\varepsilon > 0$, existe sempre um polinómio $p_n(x)$, de grau $\leq n$, tal que o **erro** da aproximação $\|f(x) - p_n(x)\| < \varepsilon$.

O teorema seguinte informa que o polinómio existe e é único.

Teorema

Dados $n + 1$ pontos distintos x_0, x_1, \dots, x_n e $n + 1$ valores y_0, y_1, \dots, y_n , existe um e um só polinómio $p_n(x)$, de grau menor ou igual a n tal que:

$$p_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n.$$

Por 2 pontos quantas retas diferentes ($p_1(x)$) passam?

Tabela das diferenças divididas

Considere-se a tabela com os valores de x e $f(x)$ para $n + 1$ pontos:

x_i	x_0	x_1	\dots	x_{n-1}	x_n
f_i	f_0	f_1	\dots	f_{n-1}	f_n

A diferença dividida de primeira ordem relativa a x_j e x_{j+1} é dada por:

$$[x_j, x_{j+1}] = \frac{f_j - f_{j+1}}{x_j - x_{j+1}}, \quad j = 0, \dots, n - 1$$

(há n diferenças divididas de ordem 1 (dd_1))

Tabela das diferenças divididas

A diferença dividida de segunda ordem envolvendo os pontos x_j , x_{j+1} e x_{j+2} relaciona as diferenças divididas de 1^a ordem $[x_j, x_{j+1}]$ e $[x_{j+1}, x_{j+2}]$:

$$[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}] = \frac{[x_j, x_{j+1}] - [x_{j+1}, x_{j+2}]}{x_j - x_{j+2}}, \quad j = 0, \dots, n-2$$

(há $n - 1$ diferenças divididas de ordem 2 (dd_2))

Tabela das diferenças divididas

A diferença dividida de ordem n relaciona as diferenças divididas de ordem $n - 1$, $[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]$ e $[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n]$:

$$[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n] = \frac{[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}] - [x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n]}{x_0 - x_n}$$

(há 1 diferença dividida de ordem $n - dd_n$)

Tabela da Diferenças Divididas

x_0	f_0					
x_1	f_1	$[x_0, x_1]$	$[x_0, x_1, x_2]$		$[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]$	
		$[x_1, x_2]$		\vdots		
\dots	\dots	\dots	\dots	\vdots		$[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n]$
x_{n-1}	f_{n-1}	$[x_{n-2}, x_{n-1}]$	$[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$		$[x_1, \dots, x_{n-1}, x_n]$	
x_n	f_n	$[x_{n-1}, x_n]$				
		dd_1	dd_2	\vdots	dd_{n-1}	dd_n

Propriedades das diferenças divididas

- Podem ser calculadas para **qualquer** espaçamento (não constante) entre os pontos $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$
- as diferenças divididas são funções simétricas dos seus argumentos, *i.e.*, $[x_i, x_j] = [x_j, x_i]$
- as diferenças divididas de ordem n de um polinómio de grau n são iguais e diferentes de zero (as diferenças divididas de ordem $n + 1$ são zero)

Propriedades das diferenças divididas

A seguinte fórmula relaciona a diferença dividida de ordem n com a derivada da mesma ordem de $f(x)$ num ponto de $[x_0, x_n]$

Diferença dividida de ordem n e derivada de ordem n

$$[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \quad \xi \in [x_0, x_n]$$

Sempre que a expressão da função $f(x)$ for desconhecida e houver necessidade de estimar qualquer derivada, a tabela das diferenças divididas e a fórmula anterior permitem essa estimação.

NOTA: o recurso à tabela das diferenças divididas para estimação de derivadas, **apenas** deverá ser feito quando não é conhecida a expressão analítica de $f(x)$.

Polinómio interpolador de Newton

O polinómio interpolador de Newton de grau $\leq n$ passa pelos $n + 1$ pontos x_0, x_1, \dots, x_n utilizando as diferenças divididas.

Polinómio interpolador de Newton de grau n

$$p_n(x) = f_0 + (x - x_0)[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)[x_0, x_1, x_2] + \dots + (x - x_0)\dots(x - x_{n-1})[x_0, x_1, \dots, x_n].$$

O polinómio passa pelos $n + 1$ pontos ou seja é colocativo:

$$p_n(x_i) = f(x_i) \quad i = 0, \dots, n.$$

O erro ou resíduo, nesses $n + 1$ pontos é zero:

$$p_n(x_i) - f(x_i) = 0 \quad i = 0, \dots, n.$$

Polinómio interpolador de Newton

No entanto para pontos $x \in [x_0, x_n] : x \neq x_i, i = 0, \dots, n$ existe erro ($r(x) = f(x) - p_n(x) \neq 0$). Esse erro é calculado a partir de um polinómio $R_n(x)$ de grau $n + 1$.

Erro do polinómio interpolador de Newton

$$R_n(x) = (x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_{n-1})(x-x_n) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \quad \xi \in [x_0, x_n]$$

Polinómio interpolador de Newton

Quando não é conhecida a expressão de $f(x)$, para estimação da diferença dividida de ordem $n + 1$, $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$, é necessário um ponto extra, x_{extra} , que não foi usado para construção de $p_n(x)$ e do qual se conhece $f(x_{extra})$:

$$[x_0, x_1, \dots, x_n, x_{extra}] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \quad \xi \in [x_0, x_n]$$

Polinómio interpolador de Newton

Interpolação direta - tem-se x pretende-se $f(x)$

Seja \bar{x} um ponto que não está na tabela.

Objetivo: Estimar $f(\bar{x})$ usando $p_n(\bar{x})$

- escolher $n + 1$ pontos da tabela \Rightarrow polinómio de grau n
- escolher pelo menos um ponto à direita e à esquerda de \bar{x}
- escolher os $n + 1$ pontos da tabela mais próximos de \bar{x}

Polinómio de grau 3

x_i	-1	0	1	2	8	10	12	15	20
f_i	-5	-2	-1	3	0	-2	-1	4	6

- Se $\bar{x} = 3$:

$$\begin{array}{cccc} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline f_0 & f_1 & f_2 & f_3 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 8 \\ \hline -2 & -1 & 3 & 0 \end{array}$$

- Se $\bar{x} = 13$:

$$\begin{array}{cccc} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline f_0 & f_1 & f_2 & f_3 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{cccc} 8 & 10 & 12 & 15 \\ \hline 0 & -2 & -1 & 4 \end{array}$$

Exercício de aplicação 1

A velocidade do som na água varia com a temperatura de acordo com a tabela abaixo:

Temperatura ($^{\circ}\text{C}$)	86.0	93.3	98.9	104.4	110.0
Velocidade (m/s)	1552	1548	1544	1538	1532

Pretende-se estimar a velocidade do som na água a uma temperatura de 100°C , utilizando um polinómio interpolador de Newton de grau dois. Estime também o erro cometido.

O polinómio interpolador é de grau 2 logo são precisos 3 pontos. Como o valor a estimar é em 100, os pontos a escolher são um imediatamente antes (98.9) e outro imediatamente depois (104.4), o terceiro ponto deve ser o mais próximo possível de 100 (93.3).

Variável independente: temperatura (x)

Variável dependente: velocidade ($f(x)$)

Resolução

$$x_0 = 93.3, \quad x_1 = 98.9, \quad x_2 = 104.4$$

Tabela das diferenças divididas:

x_i	f_i		
93.3	1548		
		-0.71429	
98.9	1544		-0.03393
		-1.09091	
104.4	1538		

O polinómio é:

$$p_2(x) = 1548 + (x - 93.3) \times (-0.71429) + (x - 93.3) \times (x - 98.9) \times (-0.03393)$$

$$f(100) \approx p_2(100) = 1542.964$$

Para o cálculo do erro é necessária a diferença dividida de ordem 3. Para isso adiciona-se um ponto, em que é conhecido o valor de $f(x)$ (o mais próximo possível do valor a interpolar (100))- pode ser colocado no fim ou no início da tabela, pois o valor da diferença dividida de ordem $n + 1$ é igual.

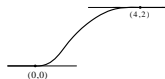
x_i	f_i			
93.3	1548			
		-0.71429		
98.9	1544		-0.03393	
		-1.09091		2.136829^{-3}
104.4	1538		1.755045^{-3}	
		-1.071429		
110	1532			

$$|R(100)| \leq |(100-93.3)(100-98.9)(100-104.4) \times 2.136829^{-3}| = 0.06929$$

Exercício de aplicação 2

Pretende-se construir um desvio entre duas linhas de caminho de ferro paralelas. O desvio deve corresponder a um polinómio de grau três que une os pontos $(x_0, f_0) = (0, 0)$

e (x_4, f_4) , como mostra a figura



Com base nos dados da tabela

x_i	0	1	1.5	2	x_4
$f_i = p_3(x_i)$	0	0.3125	0.6328125	1	f_4

verifique se o ponto $(x_4, f_4) = (4, 2)$ pertence ao polinómio. Use 7 casas decimais nos cálculos.

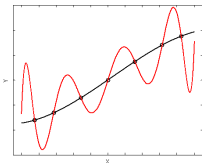
Tabelas das diferenças divididas:

x_i	f_i	$dd1$	$dd2$	$dd3$	$dd4$
0	0				
1	0.3125	0.3125			
1.5	0.6328125	0.640625	0.21875	-0.0625	
2	1	0.734375	0.09375	-0.0625	0
4	2	0.5	-0.09375		

Uma vez que as $dd3$ são iguais e a $dd4$ é zero, conclui-se que f é um polinómio de grau 3 e o ponto $(4, 2)$ pertence a esse polinómio. Poderiam também calcular o $p_3(x)$ e verificar que $p_3(4) = 2$.

- A técnica de interpolação por splines está na base da Gráfica Computacional (sw gráfico, CAD, etc).
- As splines são réguas de madeira utilizadas pelos desenhadores para traçar curvas suaves que passem por pontos dados.
- Esta técnica é muito utilizada na indústria naval para apurar a forma dos cascos a partir de esboços relativamente grosseiros.
- Surgiu pelos anos quarenta do século XX na engenharia náutica na elaboração de trajectórias de grandes navios - as rotas deveriam ser curvas suaves a passarem pelos vários pontos de paragem.
- São também muito usadas nas trajectórias de movimento de robots.

Quando se utilizam polinómios de grau muito elevado, estes assumem um comportamento muito oscilatório, não refletindo o comportamento da função que pretendem estimar.



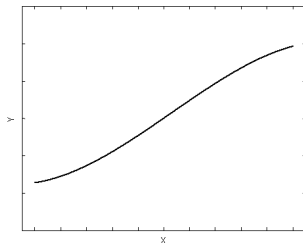
(se for usado um polinómio interpolador de grau 10)

Por outro lado, os polinómios são funções simples e computacionalmente atraentes.

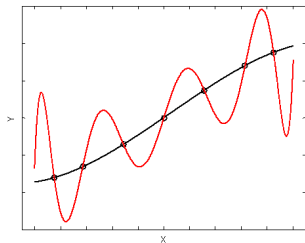
Interpolação por splines

Utilizar vários polinómios de grau baixo em diferentes intervalos de pontos

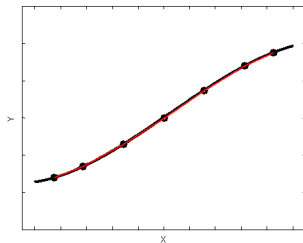
Considere-se a representação gráfica dum função $f(x)$:



Se for usado um polinómio interpolador de grau 10:



Se for usada uma *spline* linear:



- Junção de polinómios de grau 1.
- Para cada segmento i a forma do polinómio de grau 1 obtém-se:

$$s_1^i(x) = f_{i-1} + \frac{f_i - f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1})$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

- O segmento i é definido por $[x_{i-1}, x_i]$

Limite superior do erro de truncatura com a aproximação *spline* linear s_1 :

- (i) Seja $f(x)$ contínua, com derivadas contínuas até à segunda ordem,
- (ii) sejam os pontos do intervalo $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

- (iii) seja $s_1(x)$ a 'spline' linear composta pelos polinómios de grau 1 $s_1^i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$ para aproximar $f(x)$ em $[a, b]$,

(iv) seja

$$\max_{\xi \in [a,b]} |f''(\xi)| \leq M_2,$$

M_2 majorante da segunda derivada de $f(x)$ em $[a, b]$

(v) seja

$$h = \max_{0 \leq i \leq n-1} (x_{i+1} - x_i)$$

então

$$|f(x) - s_1(x)| \leq \frac{1}{8} h^2 M_2$$

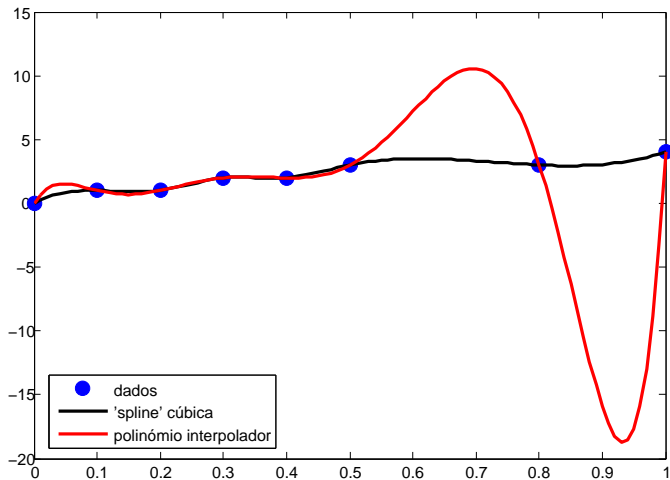
Nota: se $f(x)$ não for dada por uma expressão, substitui-se M_2 pela diferença dividida de 2ª ordem de maior módulo em valor absoluto multiplicada por 2!.

Splines cúbicas

- derivadas contínuas até à segunda ordem
- fáceis de construir
- comportamento estável

Uma spline cúbica é uma função polinomial segmentada de grau 3, i.e., definida por diferentes polinómios cúbicos em segmentos da reta real, sendo os polinómios escolhidos por forma a permitir uma "junção" suave.

Spline vs polinómio interpolador



Spline cúbica $s_3(x)$

Considere-se um conjunto de $n + 1$ nós

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

- nós fronteira: x_0 e x_n
- $n - 1$ nós interiores: x_1, x_2, \dots, x_{n-1}

Estes $n + 1$ pontos definem n segmentos -
 $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$.

A expressão para a função spline $s_3(x)$ é

$$s_3(x) = \begin{cases} s_3^1(x) & x \in [x_0, x_1] \text{ (para o segmento 1)} \\ s_3^2(x) & x \in [x_1, x_2] \text{ (para o segmento 2)} \\ \vdots & \vdots \\ s_3^n(x) & x \in [x_{n-1}, x_n] \text{ (para o segmento } n) \end{cases}$$

Spline cúbica $s_3(x)$

$s_3^i(x)$ é o polinómio cúbico do segmento i com a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}s_3^i(x) = & \frac{M_{i-1}}{6(x_i - x_{i-1})}(x_i - x)^3 + \frac{M_i}{6(x_i - x_{i-1})}(x - x_{i-1})^3 + \\ & + \left[\frac{f_{i-1}}{(x_i - x_{i-1})} - \frac{M_{i-1}(x_i - x_{i-1})}{6} \right](x_i - x) + \\ & + \left[\frac{f_i}{(x_i - x_{i-1})} - \frac{M_i(x_i - x_{i-1})}{6} \right](x - x_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots, n.\end{aligned}$$

$M_i \equiv M(x_i)$ é o valor da segunda derivada de s_3 em x_i

$$M_i \approx f''(x_i)$$

Para que a ligação entre os vários segmentos seja suave, tem de haver continuidade nos nós e tem de se manter a curvatura. Em cada nó interior $x_i, i = 1, 2, \dots, n - 1$ tem de se verificar:

- $s_3^i(x_i) = s_3^{i+1}(x_i)$
- $s_3^{i'}(x_i) = s_3^{i+1'}(x_i)$
- $s_3^{i''}(x_i) = s_3^{i+1''}(x_i)$

A continuidade nas primeiras derivadas nos $n - 1$ nós interiores

$$s_3^{i'}(x_i) = s_3^{i+1'}(x_i) \quad i = 1, 2, \dots, n - 1$$

origina a seguinte equação, para o nó interior i :

$$\begin{aligned} & (x_i - x_{i-1})M_{i-1} + 2(x_{i+1} - x_{i-1})M_i + (x_{i+1} - x_i)M_{i+1} = \\ & = \frac{6}{(x_{i+1} - x_i)}(f_{i+1} - f_i) - \frac{6}{(x_i - x_{i-1})}(f_i - f_{i-1}), \quad i = 1, \dots, n - 1 \end{aligned}$$

Substituindo a equação anterior para os $n - 1$ nós interiores obtém-se um sistema de $n - 1$ equações lineares nas $n + 1$ incógnitas M (M_0, M_1, \dots, M_n)

O sistema tem mais duas incógnitas do que equações!!!

Se a spline for **natural** então

$$M_0 = 0 \text{ e } M_n = 0$$

e o sistema passa a ter $n - 1$ equações e $n - 1$ incógnitas

$$M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$$

Se a spline for **completa**, adicionam-se ao sistema as seguintes equações, relativas aos nós fronteira inferior e superior, respectivamente:

$$2(x_1 - x_0)M_0 + (x_1 - x_0)M_1 = \frac{6}{(x_1 - x_0)}(f_1 - f_0) - 6f'_0$$

$$2(x_n - x_{n-1})M_n + (x_n - x_{n-1})M_{n-1} = 6f'_n - \frac{6}{(x_n - x_{n-1})}(f_n - f_{n-1})$$

O sistema passa a ter $n + 1$ equações e $n + 1$ incógnitas!

As equações envolvem o cálculo da derivada nos nós fronteira (f'_0 e f'_n). Se a expressão analítica da função $f(x)$ for conhecida, esse cálculo é imediato, caso contrário tem de ser estimado através de diferenças divididas.

Utilizam-se para tal, dois pontos auxiliares que não sejam nós da spline: x_a deve estar o mais próximo possível de x_0 para estimar f'_0 e x_b deve estar o mais próximo possível de x_n para estimar f'_n

Deve ter-se o cuidado inicial de retirar esses dois pontos e não os utilizar como nós da spline

Erro na spline

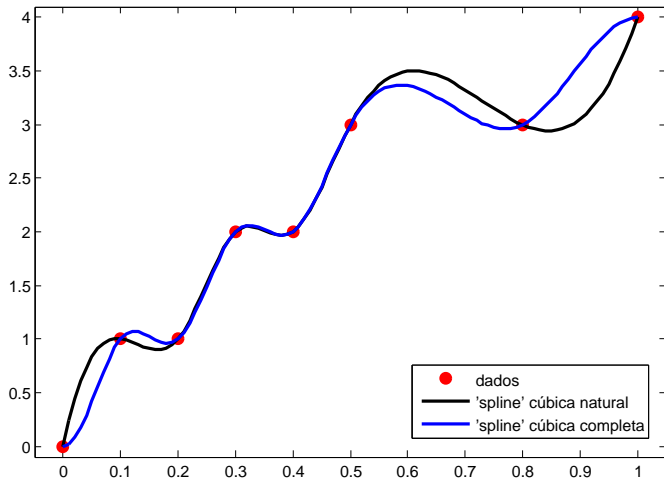
$$|f(x) - s_3(x)| \leq \frac{5}{384}h^4 M_4 \quad |f'(x) - s'_3(x)| \leq \frac{1}{24}h^3 M_4$$

em que

$$h = \max_{0 \leq i \leq n-1} (x_{i+1} - x_i) \quad \text{e} \quad \max_{\xi \in [x_0, x_n]} |f^{iv}(\xi)| \leq M_4$$

(M_4 é um majorante do valor absoluto da quarta derivada de $f(x)$ em $[x_0, x_n]$).

Spline completa vs spline natural



A seguinte função segmentada $s_3(x)$ no intervalo $[0, 3]$, representa o lucro obtido na venda de um produto sazonal. No 1º mês de vendas o lucro é representado por $s_3^1(x)$ e nos 2º e 3º meses é descrito por $s_3^2(x)$. Poderá a função segmentada $s_3(x)$ representar uma spline cúbica? Justifique.



$$s_3(x) = \begin{cases} s_3^1(x) = 3x^3 - x^2 + x - 2, & 0 \leq x \leq 1 \\ s_3^2(x) = 2x^3 + 2x - 3, & 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

Resolução:

Para esta função cúbica segmentada representar uma spline, deve ser continuamente diferenciável até à segunda ordem. Nos pontos interiores ($x = 1$) deverá verificar-se:

$$s_3^1(1) = s_3^2(1), \quad s_3^{1'}(1) = s_3^{2'}(1), \quad s_3^{1''}(1) = s_3^{2''}(1).$$

A função tem o mesmo valor para $x = 1$ nos dois segmentos: $s_3^1(1) = 1$ e $s_3^2(1) = 1$.

Analisando a primeira derivada:

$$s_3'(x) = \begin{cases} s_3^{1'}(x) = 9x^2 - 2x + 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ s_3^{2'}(x) = 6x^2 + 2, & 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

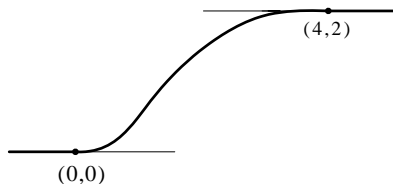
$s_3^{1'}(1) = 8$ e $s_3^{2'}(1) = 8$. A primeira derivada da função tem o mesmo valor nos dois segmentos, para $x = 1$. Verificando a segunda derivada:

$$s_3''(x) = \begin{cases} s_3^{1''}(x) = 18x - 2, & 0 \leq x \leq 1 \\ s_3^{2''}(x) = 12x, & 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

$s_3^{1''}(1) = 16$ e $s_3^{2''}(1) = 12$. A segunda derivada da função tem valores diferentes para $x = 1$ em cada um dos segmentos. Este facto indica que a função $s_3(x)$ não pode representar uma spline.

Exercício 1

Considere um desvio entre duas linhas de caminho de ferro paralelas. O desvio agora deve corresponder a um polinómio de grau três que une os pontos $(0,0)$ e $(4,2)$, como mostra a figura.



Com base nos quatro pontos da tabela

x_i	-1	0	4	5
$f_i = f(x_i)$	0.4375	0	2	1.5625

construa a parte da *spline* cúbica natural que descreve a trajetória desenhada e calcule $f(2)$.

Resolução do Exercício 1

i	0	1	2	3
x_i	-1	0	4	5
f_i	0.4375	0	2	1.5625
	extremo inferior	ponto interior	ponto interior	extremo superior

Como pretendemos determinar uma *spline* cúbica natural, então a curvatura nos extremos é nula, ou seja, $M_0 = 0$ e $M_3 = 0$ e apenas se constroem as equações para os pontos interiores ($i = 1$ e $i = 2$).

- Expressão para o ponto $i = 1$

$$(x_1 - x_0)M_0 + 2(x_2 - x_0)M_1 + (x_2 - x_1)M_2 = \frac{6}{(x_2 - x_1)}(f_2 - f_1) - \frac{6}{(x_1 - x_0)}(f_1 - f_0)$$

- Expressão para o ponto $i = 2$

$$(x_2 - x_1)M_1 + 2(x_3 - x_1)M_2 + (x_3 - x_2)M_3 = \frac{6}{(x_3 - x_2)}(f_3 - f_2) - \frac{6}{(x_2 - x_1)}(f_2 - f_1)$$

Resolução do Exercício 1 (cont.)

Simplificando as expressões, o sistema resultante é

$$\begin{cases} 10M_1 + 4M_2 = 5.625 \\ 4M_1 + 10M_2 = -5.625 \end{cases}$$

que se resolve por EGPP, e determina-se

$$\begin{cases} M_1 = 0.9375 \\ M_2 = -0.9375 \end{cases}$$

Como queremos estimar o valor de $f(2)$ através de uma *spline* cúbica natural, então verificamos que o ponto 2 encontra-se entre o ponto $x = 0$ e $x = 4$.

x	-1	0	4	5
f	0.4375	0	2	1.5625

Resolução do Exercício 1 (cont.)

Uma vez que temos um segmento de spline entre cada 2 pontos, então o ponto $x = 2$ localiza-se no 2º segmento, ou seja no intervalo $[0,4]$.

Seguidamente, constrói-se expressão do segmento $i = 2$ da *spline* cúbica

$$s_3^{(2)}(x) = \frac{M_1}{6(x_2 - x_1)}(x_2 - x)^3 + \frac{M_2}{6(x_2 - x_1)}(x - x_1)^3 + \left[\frac{f_1}{(x_2 - x_1)} - \frac{M_1(x_2 - x_1)}{6} \right] (x_2 - x) \\ + \left[\frac{f_2}{(x_2 - x_1)} - \frac{M_2(x_2 - x_1)}{6} \right] (x - x_1)$$

Substituindo valores e simplificando

$$s_3^{(2)}(x) = 0.0390625(4 - x)^3 - 0.0390625x^3 - 0.625(4 - x) + 1.125x$$

Por fim, calcula-se $f(2) \approx s_3^{(2)}(2) = 1$.

Exercício de aplicação 1

Ao efectuar observações astronómicas medindo as variações na magnitude aparente, M , de uma estrela variável chamada *variável Cepheid*, ao longo de um período de tempo, t , foram obtidos os seguintes valores:

tempo (t)	0.0	0.3	0.5	0.6	0.8
Magnitude aparente (M)	0.302	0.106	0.240	0.579	0.468

Determine um valor aproximado da magnitude aparente da *variável Cepheid* no instante $t = 0.4$, utilizando uma spline cúbica natural.

Resolução:

$x_0 = 0$	$x_1 = 0.3$	$x_2 = 0.5$	$x_3 = 0.6$	$x_4 = 0.8$
$f_0 = 0.302$	$f_1 = 0.106$	$f_2 = 0.240$	$f_3 = 0.579$	$f_4 = 0.468$

Para os pontos interiores (x_1, x_2, x_3) substitui-se na equação do nó interior o índice i por 1, 2, 3 obtendo-se:

$$\begin{cases} 0.3M_0 + 1M_1 + 0.2M_2 = 7.94 \\ 0.2M_1 + 0.6M_2 + 0.1M_3 = 16.32 \\ 0.1M_2 + 0.6M_3 + 0.2M_4 = -23.67 \end{cases}$$

Este sistema tem 3 equações mas 5 incógnitas. Como a spline é natural tem-se $M_0 = M_4 = 0$ eliminando-se duas incógnitas:

$$\begin{cases} 1M_1 + 0.2M_2 = 7.94 \\ 0.2M_1 + 0.6M_2 + 0.1M_3 = 16.32 \\ 0.1M_2 + 0.6M_3 = -23.67 \end{cases}$$

Este sistema é resolvido por um método direto e estável (EGPP):

$$M_1 = 1.065031, \quad M_2 = 34.374847, \quad M_3 = -45.179141.$$

O valor a estimar $x = 0.4$ pertence ao segmento 2 ($[x_1, x_2]$), então substitui-se na equação do segmento da spline o índice i por 2 para obter $s_3^2(x)$.

Para estimar $f(0.4)$ calcula-se $s_3^2(0.4) = 0.084400 \approx f(0.4)$.

Exercício de aplicação 2

Resolver o exercício anterior mas com uma *spline* cúbica completa.

Como a spline **é completa e não conhecemos a expressão de $f(x)$** guardam-se 2 pontos o mais próximo possível dos pontos extremos que irão servir para estimar o valor de $f'(x)$ nos pontos extremos.

A nova tabela fica:

$x_0 = 0$	$x_a = 0.3$	$x_1 = 0.5$	$x_b = 0.6$	$x_2 = 0.8$
$f_0 = 0.302$	$f_a = 0.106$	$f_1 = 0.240$	$f_b = 0.579$	$f_2 = 0.468$

Os pontos da spline são (x_0, f_0) , (x_1, f_1) , (x_2, f_2) tendo apenas um ponto interior.

Utiliza-se a equação dos pontos interiores para $i = 1$ (índice do único ponto interior):

$$\begin{aligned}(x_1 - x_0)M_0 + 2(x_2 - x_0)M_1 + (x_2 - x_1)M_2 &= \\&= \frac{6}{(x_2 - x_1)}(f_2 - f_1) - \frac{6}{(x_1 - x_0)}(f_1 - f_0) \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow 0.5M_0 + 1.6M_1 + 0.3M_2 = 5.304\end{aligned}$$

Fica uma equação com 3 incógnitas:

- como a spline é completa adicionam-se as duas equações para os pontos fronteira.

A primeira envolve o cálculo de $f'(x_0)$ e a última o cálculo de $f'(x_2)$. Como não é conhecida a expressão analítica de $f(x)$ vão utilizar-se os pontos auxiliares que foram guardados.

$$f'(x_0) \approx \frac{f_0 - f_a}{x_0 - x_a} = -0.653333$$
$$f'(x_2) \approx \frac{f_2 - f_b}{x_2 - x_b} = -0.555$$

$$2(x_1 - x_0)M_0 + (x_1 - x_0)M_1 = \frac{6}{(x_1 - x_0)}(f_1 - f_0) - 6f'_0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow M_0 + 0.5M_1 = 3.175998$$

$$2(x_2 - x_1)M_2 + (x_2 - x_1)M_1 = 6f'_2 - \frac{6}{(x_2 - x_1)}(f_2 - f_1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0.3M_1 + 0.6M_2 = -7.89$$

O sistema fica então:

$$\begin{cases} M_0 + 0.5M_1 = 3.175998 \\ 0.5M_0 + 1.6M_1 + 0.3M_2 = 5.304 \\ 0.3M_1 + 0.6M_2 = -7.89 \end{cases}$$

Resolvido por EGPP vem:

$$M_0 = -0.016086, M_1 = 6.384168, M_2 = -16.342084.$$

O valor a estimar $x = 0.4$ pertence ao segmento 1 ($[x_0, x_1]$), então substitui-se na equação do segmento o índice i por 1 para obter $s_3^1(x)$.

Para estimar $f(0.4)$ calcula-se $s_3^1(0.4) = 0.175919 \approx f(0.4)$.

Exercício de aplicação 3

Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{27}(9x - 6x^2 + x^3), & \text{para } 0 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{para outros valores de } x. \end{cases}$$

Pretende-se construir uma *spline* cúbica completa para aproximar $f(x)$ baseada apenas nos valores de x : 0, 1.5 e 3. Calcule a aproximação fornecida pela *spline* para $f(1)$.

Resolução:

$$\begin{array}{c|c|c} x_0 = 0 & x_1 = 1.5 & x_2 = 3 \\ \hline f_0 = 0 & f_1 = 0.5 & f_2 = 0 \end{array}$$

Há apenas um ponto interior. Utiliza-se a equação dos pontos interiores para $i = 1$ (índice do único ponto interior):

$$\begin{aligned} (x_1 - x_0)M_0 + 2(x_2 - x_0)M_1 + (x_2 - x_1)M_2 &= \\ = \frac{6}{(x_2 - x_1)}(f_2 - f_1) - \frac{6}{(x_1 - x_0)}(f_1 - f_0) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 1.5M_0 + 6M_1 + 1.5M_2 &= -4 \end{aligned}$$

Fica uma equação com 3 incógnitas - como a spline é completa adicionam-se duas equações para os pontos fronteira.

A primeira envolve o cálculo de $f'(x_0)$ e a última o cálculo de $f'(x_2)$.

Como é conhecida a expressão analítica de $f(x)$ calcula-se $f'(0) = \frac{4}{3}$ e $f'(3) = 0$.

Equações para os pontos fronteira:

$$\begin{cases} 3M_0 + 1.5M_1 = -6 \\ 1.5M_1 + 3M_2 = 2 \end{cases}$$

Sistema final:

$$\begin{cases} 3M_0 + 1.5M_1 = -6 \\ 1.5M_0 + 6M_1 + 1.5M_2 = -4 \\ 1.5M_1 + 3M_2 = 2 \end{cases}$$

Os valores, obtidos por EGPP são:

$$M_0 = -1.(7), \quad M_1 = -0.(4), \quad M_2 = 0.(8).$$

O valor a estimar $x = 1$ pertence ao segmento 1 ($[x_0, x_1]$)-
substitui-se na equação do segmento o índice i por 1 para
obter $s_3^1(x)$.

Para estimar $f(1)$ calcula-se $s_3^1(1) = 0.592593 \approx f(1)$.