Universidade do Minho | MIEI
Departamento de Matemática | 2020/2021

# Tópicos de Matemática Discreta

——— Resolução do 2.$^o$ teste — 13 de janeiro de 2021 ——— duração: 105 minutos ———

## Grupo I

Este grupo é constituído por 6 questões. Em cada questão, deve dizer se a afirmação indicada é verdadeira (V) ou falsa (F), assinalando o respetivo quadrado. Em cada questão, a cotação atribuída será *1 valor*, *-0,25 valores* ou *0 valores*, consoante a resposta esteja certa, errada, ou não seja assinalada resposta, respetivamente. A cotação total neste grupo é no mínimo *0 valores*.

| | | V | F |
|---|---|---|---|
| 1. | Sendo $A$ e $B$ conjuntos, $(A, \emptyset)$ é um elemento de $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ e de $\mathcal{P}(A \times B)$. | ☐ | ☒ |
| 2. | Existem exatamente 3 relações binárias de $\{4, 5, 6\}$ para $\{1, 2, 3, 4\}$ cuja imagem é $\{1\}$. | ☐ | ☒ |
| 3. | Se uma relação binária $R$ num conjunto não vazio $A$ é simétrica e antissimétrica, então $R \setminus \mathrm{id}_A = \emptyset$. | ☒ | ☐ |
| 4. | $\{[x-1, x+2[ : x \in \mathbb{Z}\}$ é o conjunto quociente de $\mathbb{R}$ por alguma relação de equivalência em $\mathbb{R}$. | ☐ | ☒ |
| 5. | Se $(A, \leq)$ é um cpo e $X \subseteq A$ tem um elemento máximo, então $X$ tem elemento maximal. | ☒ | ☐ |
| 6. | $\{(a, 1), (b, 3), (c, 2)\}$ é uma aplicação sobrejetiva de $\{a, b, c, d\}$ em $\{1, 2, 3\}$. | ☐ | ☒ |

## Grupo II

Este grupo é constituído por 5 questões. Responda, sem justificar, no espaço disponibilizado a seguir à questão.

1. Dê um exemplo de conjuntos $A$, $B$ e $C$ que não verificam a igualdade $(A \times B) \cap C = (A \cap C) \times (B \cap C)$.

   Resposta: $A = B = C = \{1\}$

   *(OBS.: Note-se que $A \times B = \{(1, 1)\}$, que $(A \times B) \cap C = \{(1, 1)\} \cap \{1\} = \emptyset$ e que $(A \cap C) \times (B \cap C) = \{1\} \times \{1\} = \{(1, 1)\}$)*

2. Considere os conjuntos $A = \{2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{4, 8, 9, 15, 25, 49\}$ e a relação binária $R$ em $A$ definida, para quaisquer $x, y \in A$, por $(x, y) \in R$ quando $x^y \in B$. Dê exemplo de uma relação binária $S$ de $B$ para $A$ tal que $R \circ S \neq \emptyset$ e $S^{-1} \circ R = \emptyset$.

   Resposta: $S = \{(4, 5)\}$

   *(OBS.: Note-se que $R = \{(2, 2), (2, 3), (3, 2), (5, 2)\}$)*

3. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \max\{m \in \mathbb{Z} : m \leq x\}$. Indique $[\pi]_\rho$, onde $\rho = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x) = f(y)\}$ é o núcleo da função $f$.

   Resposta: $[\pi]_\rho = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = f(\pi)\} = [3, 4[$

   *(OBS.: Note-se que $f(\pi)$ é o maior inteiro $m$ tal que $m \leq \pi$, ou seja, $f(\pi) = 3$. Assim, a classe de equivalência de $\pi$ é formada pelos reais cuja imagem por $f$ é $3$, isto é, por todos os reais $x$ para os quais o maior inteiro menor ou igual a $x$ é $3$)*

4. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $T = \{(1, 2), (1, 3), (3, 5)\}$. Indique uma relação binária $R$ em $A$ tal que $R \cup T$ é uma ordem parcial em $A$.

   Resposta: $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 5)\}$

   *(OBS.: Para que $R \cup T$ seja reflexiva, é necessário que $\mathrm{id}_A \subseteq (R \cup T)$. Assim, $R$ tem de conter $(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)$. Além disso, como $(1, 3), (3, 5) \in T$, também $(1, 3), (3, 5) \in R \cup T$. Para que $R \cup T$ seja transitiva, é necessário que $(1, 5)$ pertença a $R \cup T$. Para a escolha de $R$ apresentada, prova-se que $(R \cup T) \cap (R \cup T)^{-1} \subseteq \mathrm{id}_A$, pelo que $R \cup T$ é antissimética, e que $(R \cup T) \circ (R \cup T) \subseteq (R \cup T)$, donde $R \cup T$ é transitiva.)*

5. Indique $f^{\leftarrow}(\{-1,0,1,2\})$ para a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{se } x<1 \\ 0 & \text{se } x=1 \\ x^2 & \text{se } x>1 \end{cases}$

Resposta: $f^{\leftarrow}(\{-1,0,1,2\})=\{-2,-1,0,1,\sqrt{2}\}$

*(OBS.: Para determinar o conjunto pretendido, temos de resolver as equações $f(x)=-1$, $f(x)=0$, $f(x)=1$ e $f(x)=2$. Para tal, é preciso considerar os vários ramos de $f$. Para resolver $f(x)=0$, devemos resolver $x+1=0$ com $x<1$, $0=0$ com $x=1$, e $x^2=0$ com $x>1$. Assim, $f(x)=0$ se e só se $x=-1$ ou $x=1$, uma vez que $x+1=0\Leftrightarrow x=-1$ e $-1<1$, e $x^2=0\Leftrightarrow x=0$, mas $0\not>1$. Para resolver $f(x)=2$, devemos resolver $x+1=2$ com $x<1$, $0=2$ com $x=1$, e $x^2=2$ com $x>1$. Temos que $f(x)=2$ se e somente se $x=\sqrt{2}$, uma vez que $x+1=2\Leftrightarrow x=1$, mas $1\not<1$, $0=2$ é impossível, e $x^2=2\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$, $\sqrt{2}>1$ mas $-\sqrt{2}\not>1$. )*

## Grupo III

Este grupo é constituído por 3 questões. Responda na folha de exame, justificando todas as suas respostas.

1. Seja $\rho$ a relação de equivalência em $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ definida por: $X\rho Y$ sse $X\cap\{3\}=Y\cap\{3\}$.

   Determine:

   (a) a classe de equivalência $[\{2020,2021\}]_\rho$;

$$\begin{array}{lcll} [\{2020,2021\}]_\rho & = & \{Y\in\mathcal{P}(\mathbb{N}):\{2020,2021\}\cap\{3\}=Y\cap\{3\}\} & \textit{(por def. de classe de eq.)} \\ & = & \{Y\in\mathcal{P}(\mathbb{N}):\emptyset=Y\cap\{3\}\} & \textit{(pq. } \{2020,2021\}\cap\{3\}=\emptyset\textit{)} \\ & = & \{Y\in\mathcal{P}(\mathbb{N}):3\notin Y\} & \textit{(pq. } Y\cap\{3\}=\emptyset \textit{ sse } 3\notin Y\textit{)} \end{array}$$

   (b) o conjunto quociente $\mathcal{P}(\mathbb{N})/\rho$.

   *Por definição, $\mathcal{P}(\mathbb{N})/\rho=\{[X]_\rho : X\in\mathcal{P}(\mathbb{N})\}$. Na alínea anterior, já calculámos $[X]_\rho$ para $X=\{2020,2021\}$. Calculemos agora para $X=\{3\}$.*

$$\begin{array}{lcll} [\{3\}]_\rho & = & \{Y\in\mathcal{P}(\mathbb{N}):\{3\}\cap\{3\}=Y\cap\{3\}\} & \textit{(por def. de classe de eq.)} \\ & = & \{Y\in\mathcal{P}(\mathbb{N}):\{3\}=Y\cap\{3\}\} & \textit{(pq. } \{3\}\cap\{3\}=\{3\}\textit{)} \\ & = & \{Y\in\mathcal{P}(\mathbb{N}):3\in Y\} & \textit{(pq. } Y\cap\{3\}=\{3\} \textit{ sse } 3\in Y\textit{)} \end{array}$$

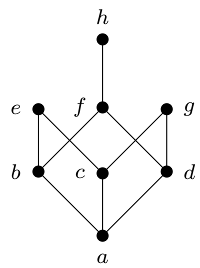
   *As classes $[\{2020,2021\}]_\rho$ e $[\{3\}]_\rho$ são diferentes. Vamos agora argumentar que*

$$\mathcal{P}(\mathbb{N})/\rho=\{[\{2020,2021\}]_\rho,[\{3\}]_\rho\}\ ,$$

   *ou seja, as duas classes já calculadas são as únicas classes de equivalência da relação $\rho$. Queremos provar que: para todo $X\in\mathcal{P}(\mathbb{N})$, $[X]_\rho=[\{2020,2021\}]_\rho$ ou $[X]_\rho=[\{3\}]_\rho$. Ora, dado $X\in\mathcal{P}(\mathbb{N})$, temos dois casos.*

   - *Primeiro caso: $3\in X$. Então $X\rho\{3\}$, donde $[X]_\rho=[\{3\}]_\rho$.*
   - *Segundo caso: $3\notin X$. Então $X\rho\{2020,2021\}$, donde $[X]_\rho=[\{2020,2021\}]_\rho$.*

2. Considere o cpo $(A,R)$ com o seguinte diagrama de Hasse associado:




   (a) Determine $X=\{x\in A\ :\ dRx\}$.

   *Pelo diagrama de Hasse, sabemos que $dRd$, $dRg$, $dRf$ e $dRh$.*

   *Sendo $R$ uma relação reflexiva, sabemos que $(d,d)\in R$, ou seja, $dRd$.*

   *Como $g$ e $f$ estão representados acima de $d$ e existe um segmento a unir os pontos correspondentes a $d$ e $g$ e outro a unir os pontos correspondentes a $d$ e $f$, podemos afirmar que $dRg$ e $dRf$. Além disso, como existe um segmento a unir os pontos correspondentes a $f$ e $h$, estando este último representado acima do de $f$, sabemos que $fRh$. Temos que $dRf$ e $fRh$ e, sendo $R$ transitiva, $dRh$. Não existe mais nenhum ponto acima do correspondente a $d$ ao qual este esteja unido por um segmento para além dos pontos correspondentes a $f$ e $g$. Mais, o ponto correspondente a $h$ é o único acima do ponto correspondente a $f$. Podemos, assim, concluir que os únicos elementos $x$ de $A$, distintos de $d$, tais que $dRx$ são $f$, $g$ e $h$.*

   *Logo, $X=\{d,f,g,h\}$.*

(b) Dê exemplo de, ou justifique que não existe,

i. um elemento $x$ de $A$ tal que $\{b, x\}$ não admite supremo.

*O único elemento $x$ de $A$ tal que $\{b, x\}$ não admite supremo é $x = g$.*

*Sabemos que, se $x$ é tal que $xRb$, então $\sup\{b, x\} = b$ e, se $x$ é tal que $bRx$, então $\sup\{b, x\} = x$. Assim, para não existir $\sup\{b, x\}$, $b$ e $x$ têm de ser incomparáveis. Os elementos $x$ de $A$ tais que $b$ e $x$ são incomparáveis são $c, d$ e $g$. Note-se que $\sup\{b, c\} = e$ e $\sup\{b, d\} = f$. Dado que $\mathrm{Maj}\{b, g\} = \emptyset$, não existe $\sup\{b, g\}$.*

ii. um subconjunto $Y$ de $A$ com exatamente 3 elementos minimais.

*Consideremos $Y = \{b, c, d\}$.*

*Não existe algum elemento $x \in Y$ distinto de $b$ tal que $xRb$. Logo, $b$ é elemento minimal de $Y$. Como não existe algum elemento $x \in Y$ diferente de $c$ tal que $xRc$, $c$ é elemento minimal de $Y$. Finalmente, dado que não existe nenhum elemento $x \in Y$ distinto de $d$ tal que $xRd$, $d$ é elemento minimal de $Y$. Portanto, $Y$ tem $3$ elementos minimais.*

(c) Determine o maior subconjunto $Z$ de $A$ tal que $a \notin Z$ e $\mathrm{Maj}(Z) = \{f, h\}$.

*Consideremos $Z = \{b, d, f\}$.*

*Para $f$ e $h$ serem majorantes de $Z$, temos de ter $xRf$ e $xRh$, para todo $x \in Z$. Assim, $h$ não pode pertencer a $Z$, uma vez que $h \not R f$. Dado que $e \not R h$, $c \not R h$ e $g \not R h$, $e, c$ e $g$ não podem pertencer a $Z$. Como $xRf$ e $xRh$, para todo $x \in \{b, d, f\}$, podemos concluir que o maior subconjunto $Z$ de $A$ tal que $a \notin Z$ e $\mathrm{Maj}(Z) = \{f, h\}$ é $Z = \{b, d, f\}$.*

3. Seja $f : A \to A$ uma aplicação, seja Im$(f)$ a imagem de $f$ e seja Fix$(f) = \{a \in A : f(a) = a\}$ o conjunto dos pontos fixos de $f$. Mostre que:

(a) Se $f = f \circ f$, então Im$(f) =$ Fix$(f)$.

*Suponhamos que $f = f \circ f$, ou seja, que*

$$\forall_{a \in A} \quad f(a) = f(f(a)). \tag{1}$$

*Queremos provar que Im$(f) =$ Fix$(f)$. Tal será feito por dupla inclusão.*

*($\subseteq$) Seja $a \in$ Im$(f)$. Então*

$$\exists_{x \in A} \quad f(x) = a. \tag{2}$$

*Logo,*

$$\begin{aligned} f(a) &= f(f(x)) && \text{por (2) e por } f \text{ ser aplicação (e portanto unívoca)} \\ &= f(x) && \text{por (1)} \\ &= a && \text{por (2),} \end{aligned}$$

*donde $a \in$ Fix$(f)$. Dado que $a$ é um elemento qualquer de Im$(f)$, deduz-se que Im$(f) \subseteq$ Fix$(f)$.*

*($\supseteq$) Seja $a \in$ Fix$(f)$). Então $f(a) = a$, donde $a \in$ Im$(f)$ pois existe algum $x \in A$ tal que $f(x) = a$. Provou-se assim que Fix$(f) \subseteq$ Im$(f)$.*

*Finalmente, de Im$(f) \subseteq$ Fix$(f)$ e Fix$(f) \subseteq$ Im$(f)$, conclui-se que Im$(f) =$ Fix$(f)$.*

(b) Se $f = f \circ f$ e $f$ é sobrejetiva, então $f$ é a aplicação identidade.

*Suponhamos que $f = f \circ f$ e que $f$ é sobrejetiva. Pela alínea (a), de $f = f \circ f$ resulta que Im$(f) =$ Fix$(f)$. Por outro lado, Im$(f) = A$ dado que $f$ é sobrejetiva por hipótese. Logo Fix$(f) = A$, o que significa que*

$$\forall_{a \in A} \quad f(a) = a. \tag{3}$$

*Portanto $f$ é a aplicação identidade.*

| Cotações | I | II | III |
|---|---|---|---|
| | 6 | 5 | 2,5+4+2,5 |