Proposta de resolução do exame de Análise (MIEI)
09-06-2021

(A)

$\boxed{1}$

$$f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

a) Para $(x,y)\neq(0,0)$, a função f é o quociente de funções contínuas (polinómios), logo f é contínua em (x,y).

Para $(x,y)=(0,0)$ é necessário verificar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x \cdot \frac{x^2}{x^2+y^2} + y \frac{y^2}{x^2+y^2} \right)$$

$= 0+0=0$, porque $0 \leq \dfrac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1$, $0 \leq \dfrac{y^2}{x^2+y^2} \leq 1$

e $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} x = \lim_{(x,y)\to(0,0)} y = 0$,

logo f é contínua em $(0,0)$.

Assim f é uma função contínua.

b) $\nabla f(0,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \right)$

B

- $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^3+0^3}{h^2+0^2} - 0}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{h^3}{h^3} = 1$

- $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0^3+h^3}{0^2+h^2} - 0}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{h^3}{h^3} = 1$

Assim $\nabla f(0,0) = (1,1)$.

c) $Df((0,0);(1,1)) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^3+h^3}{h^2+h^2} - 0}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{2h^3}{2h^3} = 1$

Assim

$Df((0,0),(1,1)) = 1 \neq 2 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot 1,$

logo f não é derivável em $(0,0)$.

d) $\nabla f(1,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,0), \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) \right)$

Para $(x,y) \neq (0,0)$,

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{3x^2(x^2+y^2) - 2x(x^3+y^3)}{(x^2+y^2)^2}$, logo

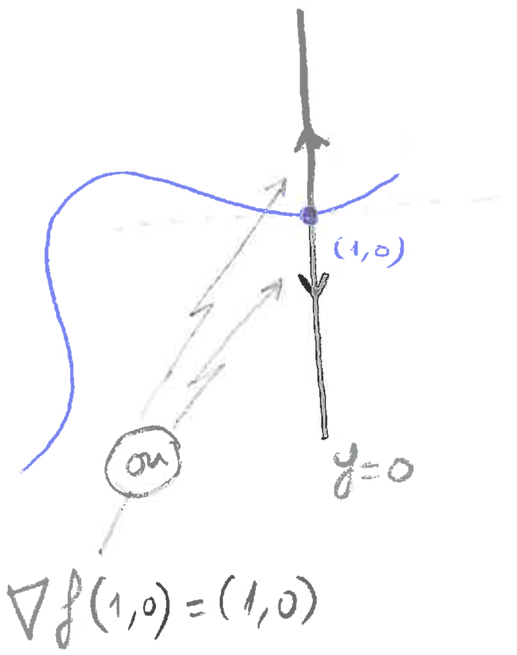
$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = \frac{3-2}{1} = 1$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{3y^2(x^2+y^2) - 2y(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}, \text{ logo}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = \frac{0-0}{1} = 0$$

Assim $\nabla f(1,0) = (1,0)$



e) $f(1,0) = \dfrac{1^3+0^3}{1^2+0^2} = 1$,

logo trata-se da curva de nível 1 de f.

$\boxed{2}$ $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x,y,z) \longmapsto (y \operatorname{sen} x, z \cos x)$

a) $Jf(x,y,z) = \begin{bmatrix} y\cos x & \operatorname{sen} x & 0 \\ -z \operatorname{sen} x & 0 & \cos x \end{bmatrix}$

b) $\nabla g(\sqrt{3}, 1/2) = \left(\dfrac{\partial g}{\partial x}(\sqrt{3}, 1/2), \dfrac{\partial g}{\partial y}(\sqrt{3}, 1/2)\right)$

$J(g\circ f)(\pi/3, 2, 1) = Jg(f(\pi/3, 2, 1)) . Jf(\pi/3, 2, 1)$

$= Jg(2 \operatorname{sen} \pi/3, \cos \pi/3) . \begin{bmatrix} 2\cos \pi/3 & \operatorname{sen} \pi/3 & 0 \\ -\operatorname{sen} \pi/3 & 0 & \cos \pi/3 \end{bmatrix}$

$$= Jg\left(\sqrt{3}, \tfrac{1}{2}\right) \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

D

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}\left(\sqrt{3}, \tfrac{1}{2}\right) & \frac{\partial g}{\partial y}\left(\sqrt{3}, \tfrac{1}{2}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}\left(\sqrt{3}, \tfrac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial g}{\partial y}\left(\sqrt{3}, \tfrac{1}{2}\right) & \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial g}{\partial x}\left(\sqrt{3}, \tfrac{1}{2}\right) & \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial y}\left(\sqrt{3}, \tfrac{1}{2}\right) \end{bmatrix}$$

Como $\nabla(g \circ f)\left(\frac{\pi}{3}, 2, 1\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, tem-se

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x}\left(\sqrt{3}, \tfrac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial g}{\partial y}\left(\sqrt{3}, \tfrac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial g}{\partial x}\left(\sqrt{3}, \tfrac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial y}\left(\sqrt{3}, \tfrac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x}\left(\sqrt{3}, \tfrac{1}{2}\right) = 1 \\ \frac{\partial g}{\partial y}\left(\sqrt{3}, \tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{3} \end{cases}$$

Assim $\nabla g\left(\sqrt{3}, \tfrac{1}{2}\right) = \left(1, \sqrt{3}\right)$

$\boxed{3}$ $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ e $f(x,y,z) = -x^5 + 5xz + 2y - y^2 - \frac{5}{2}z^2$

a) Pontos críticos

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -5x^4 + 5z = 0 \\ 2 - 2y = 0 \\ 5x - 5z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x^4 + x = 0 \\ y = 1 \\ x = z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x(-x^3+1) = 0 \\ = \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

$(0,1,0)$ e $(1,1,1)$ são os pontos críticos de f.

$f_{xx}(x,y,z) = -20x^3$; $f_{xy}(x,y,z) = 0$; $f_{xz}(x,y,z) = 5$

E

$f_{yy}(x,y,z) = -2$; $f_{yz}(x,y,z) = 0$

$f_{zz}(x,y,z) = -5$

Assim

$\rightarrow$ $\text{Hess} f(0,1,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} \det \text{Hess} f(0,1,0) = 50 > 0 \\ -2 \text{ é valor próprio} \end{array}\right\} \Rightarrow (0,1,0) \text{ é ponto de sela.}$$

$\rightarrow$ $\text{Hess} f(1,1,1) = \begin{bmatrix} -20 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} \det \text{Hess} f(1,1,1) = -200+50 = -150 < 0 \\ f_{xx}(1,1,1) = -20 < 0 \\ \det \begin{bmatrix} -20 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = 40 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (1,1,1) \text{ é ponto de máximo local de } f.$$

b) $\nabla f(x,y,z) = (-5x^4 + 5z, 2-2y, 5x-5z)$

$\nabla f(1,1,0) = (-5, 0, 5)$

Plano tangente à superfície de nível zero de f no ponto $(1,1,0)$ é:

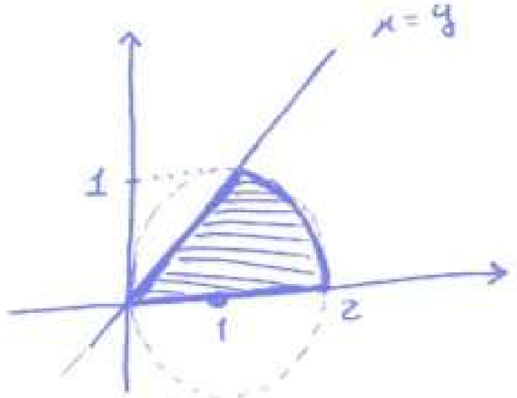
$\nabla f(1,1,0) \cdot (x-1, y-1, z-0) = 0 \Leftrightarrow (-5,0,5) \cdot (x-1, y-1, z) = 0$

$\Leftrightarrow -5(x-1) + 5z = 0 \quad \Leftrightarrow -x + z + 1 = 0$ //

$\boxed{4}$ $\mathcal{R}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq y\geq 0 \text{ e } (x-1)^2+y^2\leq 1\}$

F

a)



b) $$\int_0^1\int_y^{1+\sqrt{1+y^2}} 1\,dx\,dy$$

c) $$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{2\cos\theta} r\,dr\,d\theta$$

$$(x-1)^2+y^2=1 \longrightarrow (r\cos\theta-1)^2+(r\,\mathrm{sen}\,\theta)^2=1$$

$$\Leftrightarrow r^2(\cos^2\theta+\mathrm{sen}^2\theta)-2r\cos\theta+1=1$$

$$\Leftrightarrow r^2-2r\cos\theta=0$$

6

II

Em cada uma das questões seguintes, assinale neste enunciado a única afirmação verdadeira; não deve apresentar qualquer justificação.
Cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta 0,25 valores.

Questão 1. Considere o conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2 \text{ e } x \neq 0\}$. Então:

○ $(0,0) \in A$; ○ $(0,\sqrt{2}) \in A \cap \overline{A}$; ● $(0,0) \in \partial A$; ○ $(1,1) \in \mathring{A}$.

Questão 2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função tal que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x,y)\| < \delta \Rightarrow |f(x,x)| + |f(y,-y)| < \varepsilon.$$

Então:

○ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$; ● $\lim_{x\to 0} f(-x^2,x^2) = 0$;

○ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y) - f(y,x)| = 0$; ○ $\lim_{y\to 0} f(y^2,-y) = 0$.

Questão 3. O valor do integral $\int_0^2 \int_1^{3x} \frac{y}{3}\, dydx$ é:

○ $\frac{37}{3}$; ○ $\frac{22}{3}$; ● $\frac{11}{3}$; ○ $\frac{2}{3}$.

Questão 4. Sejam $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $\mathcal{R} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 2 - \sqrt{x^2+y^2}\right\}$. Então $\iiint_{\mathcal{R}} f(x,y,z)d(x,y,z)$ é igual a

○ $\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}}\int_0^{2-\sqrt{x^2+y^2}} f(x,y,z)dzdxdy$; ○ $\int_0^2\int_0^{2-z}\int_{-\sqrt{(z-2)^2-y^2}}^{\sqrt{(z-2)^2-y^2}} f(x,y,z)dxdydz$;

● $\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_0^{2-\sqrt{x^2+y^2}} f(x,y,z)dzdydx$; ○ $\int_{-2}^{2}\int_0^{2-\sqrt{4+y^2}}\int_{-\sqrt{4-z^2+y^2}}^{\sqrt{4-z^2+y^2}} f(x,y,z)dxdzdy$.

III

Em cada uma das questões seguintes, assinale neste enunciado, se a afirmação é falsa ou verdadeira; não deve apresentar qualquer justificação.
Cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta 0,5 valores.

	V	F
Questão 1. Seja $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}^2$ uma função contínua. Designando por f_1 e f_2 as funções componentes de $\boldsymbol{f}$, se $\lim_{x\to 0} f_1(x) = 1$ e $\lim_{x\to 0} f_2(x) = 2$, então f admite prolongamento contínuo a $\mathbb{R}$;	●	○
Questão 2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ uma função derivável tal que $f(1,1) = 2$ é máximo local e seja $\Sigma_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 2\}$. Então $(1,1)$ é ponto isolado de Σ_2.	○	●
Questão 3. Seja $\mathcal{R} = [-1,1] \times [0,1]$ e seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(x,y) = f(-x,y)$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Então $\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\, d(x,y) = 2\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\, dydx$.	●	○
Questão 4. Existe uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 tal que $\nabla f(x,y) = (x^2y, xy)$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.	○	●