Universidade do Minho **LEI | MIEI**
Departamento de Matemática **2021/2022**

Elementos de Probabilidades e Teoria de Números

Elementos de Probabilidades - Folha 2

1. Considere a experiência que consiste em lançar um dado equilibrado duas vezes consecutivas.
   (a) Determine a função massa de probabilidade e a de distribuição da v.a. que representa:
      i. o número de faces ímpar obtidas.
      ii. o número de faces par obtidas.
      iii. o máximo das faces obtidas.
      iv. o mínimo das faces obtidas.
      v. o módulo da diferença das faces obtidas.
      vi. a soma das faces obtidas.
   (b) Use as funcões obtidas na alínea anterior para calcular a probabilidade de:
      i. sair pelo menos uma face par.
      ii. não sair qualquer face par.
      iii. todas as faces obtidas serem inferiores ou iguais a 3.
      iv. todas as faces obtidas serem superiores os iguais a 4.
      v. sairem duas faces iguais.
      vi. saírem faces diferentes.
      vii. a soma das faces obtidas ser inferior ou igual 4.

2. Seja X a v.a. que representa o número de embalagens de um certo medicamento vendidas diariamente numa farmácia. A f.m.p. desta v.a. é dada por:

$$X : \begin{cases} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0.05 & a & 0.2 & 0.15 & 0.3 & 2a \end{cases}$$

   onde a é uma constante real.
   (a) Mostre que $a = 0.1$.
   (b) Determine a probabilidade de, num dia, se venderem:
      i. pelo menos 3 embalagens; ii. mais de 3 embalagens; iii. no máximo 3 embalagens.
   (c) Determine a função de distribuição de X.
   (d) Sabendo que, num dia, se venderam no máximo 4 embalagens, qual a probabilidade de:
      i. se terem vendido menos de 2 embalagens?
      ii. se terem vendido mais de 2 embalagens?
      iii. se terem vendido exatamente 4 embalagens?

3. Considere a experiência que consiste em lançar um moeda equilibrada duas vezes consecutivas.
   (a) Identifique o espaço amostral desta experiência.
   (b) Considere agora as v.a.'s X e Y que representam o número de caras e o número de coroas, respectivamente, obtidas nesta experiência.
      i. Identifique (através de um diagrama ou tabela) as funções X e Y.
      ii. Determine a função massa de probabilidade e a função de distribuição de cada uma das v.a.'s. Comente.

4. Seja X uma v.a. contínua com função densidade de probabilidade dada por:

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 4 \\ \frac{1}{4} & \text{se} \quad 4 < x \leq 6 \\ 0 & se \quad \text{c.c.} \end{cases}$$

onde a é uma constante real.

(a) Mostre que $a = \frac{1}{8}$, determine a função de distribuição de X e esboce o seu gráfico.

(b) Calcule:

i. $P\left(X \leq \frac{3}{2}\right)$; ii. $P\left(X > \frac{3}{2}\right)$; iii. $P\left(X \geq \frac{3}{2}\right)$;

iv. $P(3 < X \leq 5)$; $P(3 \leq X \leq 5)$; $P(3 < X < 5)$; $P(3 \leq X < 5)$

(c) Supondo que X representa o tempo de espera, em minutos, de atendimento telefónico aos clientes de uma determinda empresa, determine:

- a probabilidade de um cliente esperar mais de 1.5 minutos?
- a probabilidade de, dado que um cliente já esperou 1.5 minutos, ainda ter que esperar pelo menos mais 1 minuto para ser atendido?

5. O tempo de vida, em horas, de um certo tipo de bactérias é uma v.a. contínua com função densidade de probabilidade dada por:

$$f(x) = \begin{cases} kx & \text{se} \quad 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & se \quad \text{c.c.} \end{cases},$$

em que k é uma constante real.

(a) Determine o valor de k e a função de distribuição desta v.a..

(b) Calcule a probabilidade de uma bactéria deste tipo viver:

i. mais do que 1h30m; ii. pelo menos 1h30m; iii. no mínimo 1h15m e no máximo 2h.

(c) Escolheu-se, ao acaso, uma bactéria deste tipo e observou-se que ao fim de 1h30min ela ainda estava viva. Qual a probabilidade de a bactéria escolhida viver pelo menos mais 30mins?

6. Seja T uma v.a. contínua que tem distribuição exponencial de parâmetro $\lambda > 0$, i.e., a função densidade de probabilidade de T é dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & se \quad x \geq 0 \end{cases}.$$ Obs.: Abrevia-se por $T \sim Exp(\lambda)$.

(a) Determine a função de distribuição de T e mostre que $P(T > t + x | T > t) = P(T > x)$, para quaisquer $t > 0, x > 0$ [propriedade de falta de memória].

(b) Uma colónia contém bactérias de dois tipos A e B, aparentemente iguais, na proporção de 1 para 3. O tempo de vida (em horas)de uma bactéria do tipo A é uma v.a. com distribuição exponencial de parâmetro 0.1, enquanto que o de uma bactéria do tipo B é exponencial com parâmetro 0.2. Escolheu-se uma bactéria ao acaso nesta colónia e observou-se que após 20h ela ainda vivia. Qual a probabilidade de a bactéria ser do tipo B?

7. Seja X uma v.a. contínua com função densidade de probabilidade $f(x) = ke^{-|x|}, x \in \mathbb{R}$, em que k é uma constante real.

(a) Mostre que $k = \frac{1}{2}$ e determine a função de distribuição de X.

(b) Calcule: $P(X < 0)$, $P(X > 0)$, $P(0 < X < 1)$, $P(0 \leq X \leq 1)$ e $P(X^2 < 1)$.

(c) Identifique a distribuição da v.a. $Y = |X|$. [Sug.: Use o ex. anterior.]

8. (*) Seja $X \sim Exp(\lambda)$, a uma constante real positiva e considere a v.a. $Y = \begin{cases} X - a & se \quad X > a \\ 0 & se \quad c.c. \end{cases}$.

Calcule $P(Y = 0)$ e determine a função de distribuição de Y.

(*) Exercício desafio