Mestrado Integrado em Engenharia Informática

Tópicos de Matemática Discreta

2. Indução nos Naturais

José Carlos Costa

Dep. Matemática
Universidade do Minho

1º semestre 2020/2021

Quadrilha [Carlos Drummond de Andrade]

"João amava Teresa
que amava Raimundo
que amava Maria
que amava Joaquim
que amava Lili
que não amava ninguém.
(...)"

Números de Fermat

- Os naturais do tipo

$$F_n = 2^{2^n} + 1, \text{ com } n \in \mathbb{N}_0,$$

são chamados números de Fermat.

- Baseando-se no facto de

$$F_0 = 3,\ F_1 = 5,\ F_2 = 17,\ F_3 = 257,\ F_4 = 65537$$

serem números primos, o matemático Pierre de Fermat (1601-1665) fez uma conjetura, dizendo, numa carta enviada em 1640 ao seu amigo Mersenne, que todos os números da forma F_n eram primos.

- Em 1732, Leonhard Euler provou que a conjetura é falsa, mostrando que

$$F_5 = 4294967297 = 641 \times 6700417$$

é um número composto.

- Até hoje apenas são conhecidos 5 números de Fermat primos: precisamente os números F_0 a F_4 listados acima.

Exemplo

- Consideremos a proposição

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ p(n)$$

  onde $p(n)$ representa o predicado "$n^2 - n + 41$ é um número primo".

- Qual é o valor lógico da proposição acima?

- A tabela seguinte apresenta os valores do polinómio $n^2 - n + 41$ para alguns valores da variável n,

n	1	2	3	4	5	6	...	40	41	...
$n^2 - n + 41$	41	43	47	53	61	71	...	1601	41^2	...

- Como $41, 43, 47, 53, 61, 71, \ldots, 1601$ são números primos, deduz-se que $p(1), p(2), p(3), p(4), p(5), p(6), \ldots, p(40)$ são proposições verdadeiras.

- No entanto 41^2 não é um número primo, pelo que a proposição $p(41)$ é falsa.

- Conclui-se assim que $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ p(n)$ é uma proposição falsa.

- O objetivo deste capítulo é estudar proposições da forma

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ p(n).$$

- Ou seja, estaremos interessados em averiguar se uma determinada propriedade é ou não válida para todos os números naturais.
- Para certificar que uma tal proposição é falsa "basta" indicar um natural que não verifique a propriedade.
- Mostrar que uma proposição desse tipo é verdadeira é, em geral, mais difícil e requer o uso de um método de prova adequado:
    - não basta verificar que a propriedade é satisfeita por uma parte (por maior que ela seja) dos números naturais;
    - é preciso provar que todos os naturais sem exceção a verificam.
- O *Princípio de indução para* $\mathbb{N}$ (ou *Princípio de indução matemática*), que apresentaremos mais adiante, é a ferramenta essencial para demonstrar propriedades que envolvem os números naturais.

Definição

Uma definição indutiva de um conjunto X é uma coleção de regras que descrevem X e que são de dois tipos:

regra básica é toda aquela que indica, incondicionalmente, que um determinado elemento pertence ao conjunto X;

regra indutiva é toda aquela que indica que um certo elemento pertence a X, desde que outros determinados elementos pertençam a X.

O conjunto X é formado por todos os elementos que se podem obter por aplicação das regras básicas e das regras indutivas um número finito de vezes.

Exemplo

A definição do conjunto $\mathcal{F}^{CP}$ das fórmulas do Cálculo Proposicional, apresentada no capítulo 1, é uma definição indutiva de $\mathcal{F}^{CP}$.

O conjunto dos números naturais admite uma definição indutiva com apenas uma regra básica e uma regra indutiva.

Definição indutiva do conjunto dos números naturais

O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é o conjunto definido indutivamente pelas regras:

1. $1 \in \mathbb{N}$;
2. Se $n \in \mathbb{N}$, então $n + 1 \in \mathbb{N}$.

O Princípio de indução matemática baseia-se na definição acima do conjunto $\mathbb{N}$. A noção de predicado hereditário, que introduzimos de seguida, também é fundamental para esse método de prova.

Definição

Seja $p(n)$ um predicado em que o universo de variação da variável n é $\mathbb{N}$. Diz-se que $p(n)$ é um predicado hereditário se a proposição

$$\forall_{k\in\mathbb{N}}\ \big(p(k) \to p(k+1)\big)$$

é verdadeira. Ou seja, $p(n)$ é hereditário quando, para todo o $k \in \mathbb{N}$, se a proposição $p(k)$ é verdadeira, então a proposição $p(k+1)$ também é verdadeira.

Exemplo

1. O predicado $p(n)$: "$2n$ é par" é hereditário. De facto, se $k \in \mathbb{N}$ é tal que $p(k)$ é verdadeira (i.e., $2k$ é par), então $p(k+1)$ também é verdadeira (pois $2(k+1) = 2k+2$ é par por ser a soma de 2 números pares).

2. O predicado "$n^2 + 7n + 1$ é par" é hereditário. De facto, se $k \in \mathbb{N}$ é tal que $k^2 + 7k + 1$ é par, então $(k+1)^2 + 7(k+1) + 1$ também é par pois é a soma dos números pares $k^2 + 7k + 1$ e $2(k+4)$.

3. O predicado $q(n)$: "$n < 100$" não é hereditário pois 99 é um natural k tal que $q(k)$ é verdadeira mas $q(k+1)$ é falsa.

Exercício

Mostre que o predicado

1. $p(n)$: "$2n + 1$ é par" é hereditário.
2. $q(n)$: "n é múltiplo de 3" não é hereditário.

Resposta

1. Suponhamos que $k \in \mathbb{N}$ é tal que $p(k)$ é verdadeira, ou seja, suponhamos que $2k + 1$ é par. A proposição $p(k + 1)$ é a afirmação "$2(k + 1) + 1$ é par". Ora, $2(k + 1) + 1 = 2k + 2 + 1$ é a soma de 2 com $2k + 1$. Dado que $2k + 1$ é par por hipótese, conclui-se que $2(k + 1) + 1$ é par. Ou seja, a proposição $p(k + 1)$ é verdadeira. Provou-se assim que o predicado $p(n)$ é hereditário.
2. Basta notar que, por exemplo, o natural $k = 6$ é múltiplo de 3 mas $k + 1 = 7$ não o é.

- Conforme provado acima, os três predicados

  $p_1(n)$: "$2n$ é par",
  $p_2(n)$: "$2n+1$ é par",
  $p_3(n)$: "n^2+7n+1 é par"

  são hereditários.

- No entanto, enquanto que a proposição

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ p_1(n)$$

  é verdadeira, as proposições

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ p_2(n) \quad \text{e} \quad \forall_{n\in\mathbb{N}}\ p_3(n)$$

  são falsas.

- Conclui-se assim que, para que uma proposição da forma

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ p(n)$$

  seja verdadeira, não é suficiente que o predicado $p(n)$ seja hereditário.

- É ainda necessário que $p(n)$ seja verdadeira para o valor inicial 1.

O seguinte postulado é também chamado princípio de indução matemática.

Princípio de indução (simples) para $\mathbb{N}$

Seja $p(n)$ um predicado sobre $\mathbb{N}$ e suponhamos que:

1. $p(1)$ é verdadeira;
2. para cada $k \in \mathbb{N}$, se $p(k)$ é verdadeira, então $p(k+1)$ é verdadeira (ou seja, $p(n)$ é um predicado hereditário).

Então $p(n)$ é verdadeira para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Intuitivamente,

$$\begin{array}{lcl} p(1) & & \\ p(1) \Rightarrow p(2) & \therefore & p(2) \\ p(2) \Rightarrow p(3) & \therefore & p(3) \\ p(3) \Rightarrow p(4) & \therefore & p(4) \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

- Uma demonstração que utilize o princípio de indução matemática para provar que a proposição

$$\forall n \; p(n)$$

é verdadeira diz-se uma demonstração por indução nos naturais.

- No princípio de indução,
  - a condição 1 designa-se por base de indução (ou passo base);
  - a condição 2 é designada passo de indução (ou passo indutivo);
  - no passo de indução,
    - a hipótese "$p(k)$ é verdadeira" é chamada a hipótese de indução;
    - a conclusão "$p(k+1)$ é verdadeira" é dita a tese de indução.

Exemplo

Mostremos por indução nos naturais que

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ 3^{2n}-1 \text{ é múltiplo de } 8.$$

Representemos por $p(n)$ o predicado "$3^{2n}-1$ é múltiplo de 8".

1. (Base de indução) $p(1)$ é a proposição "$3^{2\times 1}-1$ é múltiplo de 8", ou seja, $p(1)$: "8 é múltiplo de 8". Logo, $p(1)$ é verdadeira.
2. (Passo de indução) Seja $k\in\mathbb{N}$ e suponhamos que $p(k)$ é verdadeira, isto é, que existe um $q\in\mathbb{N}$ tal que $3^{2k}-1=8q$ (hipótese de indução). Então
   $$3^{2(k+1)}-1=3^{2k+2}-1=3^{2k}\times 9-1=(8q+1)\times 9-1=8(9q+1).$$
   Dado que $9q+1\in\mathbb{N}$, deduz-se que $3^{2(k+1)}-1$ é múltiplo de 8. Ou seja, $p(k+1)$ é verdadeira.

Mostrou-se assim a base e o passo de indução. Logo, pelo Princípio de indução para $\mathbb{N}$, $p(n)$ é verdadeira para todo o $n\in\mathbb{N}$.

Exemplo

Mostremos pelo método de indução nos naturais que, para cada $n \in \mathbb{N}$, a soma dos n primeiros números naturais ímpares é igual a n^2. Ou seja, provemos que

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ 1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2.$$

Representemos por $q(n)$ o predicado "$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$".

1. (Base de indução) $q(1)$ é a proposição "$1=1^2$" e, portanto, $q(1)$ é verdadeira.
2. (Passo de indução) Seja $k \in \mathbb{N}$ e suponhamos que $q(k)$ é verdadeira, isto é, que $1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$ (hipótese de indução). Então

   $$1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2(k+1)-1)=k^2+2k+1=(k+1)^2.$$

   pelo que $q(k+1)$ é verdadeira.

Por 1 e 2, conclui-se pelo princípio de indução matemática que $q(n)$ é verdadeira para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Exercício

- Qual é o erro na seguinte "demonstração" de que todas as pessoas têm a mesma altura?

Vamos "mostrar" por indução nos naturais que,

$\forall n \in \mathbb{N}$ em cada conjunto de n pessoas,
todas as pessoas têm a mesma altura.

- É claro que, num conjunto de 1 pessoa, todas as pessoas têm a mesma altura.

- Seja $k \in \mathbb{N}$ e admitamos que, em qualquer conjunto de k pessoas, todas têm a mesma altura. Seja $\{a_1, \dots, a_k, a_{k+1}\}$ um conjunto de $k+1$ pessoas.

  Cada um dos conjuntos $\{a_1, \dots, a_k\}$ e $\{a_2, \dots, a_{k+1}\}$ tem k pessoas. Então, por um lado, $a_1, \dots, a_k$ têm a mesma altura e, por outro, $a_2, \dots, a_{k+1}$ têm a mesma altura. Logo $a_1, \dots, a_k, a_{k+1}$ têm a mesma altura.

Portanto, pelo princípio de indução matemática, para cada $n \in \mathbb{N}$, em cada conjunto de n pessoas, todas têm a mesma altura.

Conforme já referido, é necessário que se veriquem simultaneamente a base e o passo de indução para que se possa induzir a validade de uma certa propriedade para todo o número natural.

Exemplo

- Consideremos o predicado $p(n)$: "$2^n > 3n$".
- A afirmação $p(1)$ é "$2^1 > 3 \times 1$", ou seja, "$2 > 3$". Logo, $p(1)$ é falsa, donde
$$\forall_{n \in \mathbb{N}}\ p(n)$$
é uma proposição falsa.
- No entanto, o predicado $p(n)$ é hereditário. De facto, dado $k \in \mathbb{N}$ tal que $2^k > 3k$,
$$2^{k+1} = 2^k \times 2 > 3k \times 2 = 3(2k) \geq 3(k+1).$$
- Por outro lado, $p(2)$ e $p(3)$ são falsas mas $p(4)$ é verdadeira.
- O método que estudaremos de seguida permite, por isso, deduzir que $p(n)$ é válida para todos os naturais maiores ou iguais a 4.

Para cada natural $n_0 \in \mathbb{N}$, o conjunto $\{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$ pode ser definido indutivamente de modo análogo a $\mathbb{N}$ tomando como menor elemento n_0. Assim, o princípio de indução matemática admite a seguinte generalização.

Princípio de indução (simples) para $\mathbb{N}$ de base n_0

Seja $n_0 \in \mathbb{N}$ e seja $p(n)$ um predicado sobre o conjunto dos números naturais $n \geq n_0$. Suponhamos que:

1. $p(n_0)$ é verdadeira;
2. para cada $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq n_0$, se $p(k)$ é verdadeira, então $p(k+1)$ é verdadeira.

Então $p(n)$ é verdadeira para qualquer $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$.

Intuitivamente,

$$
\begin{array}{rcll}
p(n_0) & & & \\
p(n_0) & \Rightarrow & p(n_0+1) & \quad \therefore \; p(n_0+1) \\
p(n_0+1) & \Rightarrow & p(n_0+2) & \quad \therefore \; p(n_0+2) \\
p(n_0+2) & \Rightarrow & p(n_0+3) & \quad \therefore \; p(n_0+3) \\
 & \vdots & & \qquad \vdots
\end{array}
$$

Note que o princípio de indução para $\mathbb{N}$ é o princípio de indução para $\mathbb{N}$ de base 1.

Exemplo

Mostremos que $n^2 > n+1$ para todo o $n \geq 2$, pelo método de indução para $\mathbb{N}$ de base 2. Ou seja, provemos que

$$\forall_{n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}}\ n^2 > n+1.$$

Representemos por $p(n)$ o predicado "$n^2 > n+1$".

1. (Base de indução) $p(2)$ é a proposição "$2^2 > 2+1$", ou seja, "$4 > 3$" e, portanto, $p(2)$ é verdadeira.
2. (Passo de indução) Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq 2$ e suponhamos que $p(k)$ é verdadeira, isto é, que $k^2 > k+1$ (hipótese de indução). Então

$$(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1 > k+1 + 2k + 1 > (k+1) + 1,$$

   pelo que $p(k+1)$ é verdadeira.

Por 1 e 2, conclui-se pelo princípio de indução para $\mathbb{N}$ de base 2 que $p(n)$ é verdadeira para todo o $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$.

A indução matemática admite uma outra variante, chamada indução completa (ou indução forte). Este método alternativo facilita a prova do passo de indução na demonstração de certas propriedades dos naturais.

Princípio de indução completa para $\mathbb{N}$

Seja $p(n)$ um predicado sobre $\mathbb{N}$ e suponhamos que:

1. $p(1)$ é verdadeira;
2. para cada $k \in \mathbb{N}$, se $p(j)$ é verdadeira para todo o $j \in \{1, \ldots, k\}$, então $p(k+1)$ é verdadeira.

Então $p(n)$ é verdadeira para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Intuitivamente,

$$\begin{array}{rcll}
p(1) & & & \\
p(1) & \Rightarrow & p(2) & \quad \therefore\ p(2) \\
p(1) \wedge p(2) & \Rightarrow & p(3) & \quad \therefore\ p(3) \\
p(1) \wedge p(2) \wedge p(3) & \Rightarrow & p(4) & \quad \therefore\ p(4) \\
 & \vdots & & \quad\ \ \vdots
\end{array}$$

Os métodos de indução simples e completa são equivalentes: toda a prova que possa ser feita por indução matemática pode ser transformada numa prova pelo método de indução completa e vice-versa.

O método de indução completa também tem uma versão de base n_0.

Princípio de indução completa para $\mathbb{N}$ de base n_0

Seja $n_0 \in \mathbb{N}$ e seja $p(n)$ um predicado sobre o conjunto dos números naturais $n \geq n_0$. Suponhamos que:

1. $p(n_0)$ é verdadeira;
2. para cada $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq n_0$, se $p(j)$ é verdadeira para todo o $j \in \{n_0, \ldots, k\}$, então $p(k+1)$ é verdadeira.

Então $p(n)$ é verdadeira para qualquer $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$.

Note-se que o princípio de indução completa é o princípio de indução completa de base 1.

Exemplo

Mostremos, usando indução completa de base 2, que

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \; n \text{ é primo ou é um produto de números primos.}$$

Representemos por $p(n)$ o predicado "n é primo ou n é um produto de primos".

1. (Base de indução) Como o natural 2 é primo, $p(2)$ é verdadeira.
2. (Passo de indução) Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq 2$ e suponhamos que $p(2) \wedge p(3) \wedge \cdots \wedge p(k)$ é verdadeira (hipótese de indução). Existem duas possibilidades relativamente ao natural $k+1$:

Caso i) $k+1$ é primo. Neste caso, é imediato que $p(k+1)$ é verdadeira.

Caso ii) $k+1$ não é um número primo. Neste caso, $k+1 = m_1 m_2$ para alguns $m_1, m_2 \in \{2, 3, \ldots, k\}$. Ora, pela hipótese de indução, $p(m_1)$ e $p(m_2)$ são verdadeiras. Logo m_1 é primo ou é um produto de primos, e m_2 é primo ou é um produto de primos. Daqui resulta que $k+1$ é um produto de primos, pelo que $p(k+1)$ é verdadeira.

Por 1 e 2, conclui-se pelo princípio de indução completa de base 2 que $p(n)$ é verdadeira para todo o natural $n \neq 1$.