Mestrado Integrado em Engenharia Informática

Tópicos de Matemática Discreta

3. Introdução à Teoria de Conjuntos

José Carlos Costa

Dep. Matemática
Universidade do Minho

1º semestre 2020/2021

Introdução à Teoria de Conjuntos

- Noções básicas
- Operações com conjuntos
  - União, interseção e complementação
  - Conjunto potência
  - Produto cartesiano
- Famílias de conjuntos

- O conceito de conjunto é essencial na matemática pois serve de fundamento a praticamente todas as outras noções (número, relação, função, etc) da matemática.
- A teoria de conjuntos (a área da matemática que estuda os conjuntos) pode, por isso, ser considerada como que um dos alicerces da matemática.
- O estudo moderno dos conjuntos foi iniciado por Georg Cantor nos finais do século XIX. A abordagem de Cantor é intuitiva (ou ingénua) e, quando aprofundada, conduz a paradoxos.
- No século XX foi introduzido o tratamento axiomático da teoria de conjuntos, que resolveu de algum modo esses paradoxos. Essas questões mais avançadas não serão no entanto aqui abordadas.
- Nesta unidade curricular, iremos considerar a noção de conjunto como um conceito primitivo, ou seja, como uma noção intuitiva, a partir da qual serão definidas outras noções.

Definição

- Intuitivamente, um *conjunto* é uma coleção bem definida de objetos, que se designam *elementos* ou *membros* do conjunto.
- Se A é um conjunto e x é um objeto, diz-se que:
  - x *pertence a* (ou *está em*) A, e denota-se $x \in A$, se x é um dos elementos de A;
  - x *não pertence a* (ou *não está em*) A, e escreve-se $x \notin A$, se x não é membro de A.

Exemplo

Sejam

- P o conjunto de todos os números inteiros pares;
- S o conjunto de todas as soluções da equação $x^2 - 9 = 0$.

Tem-se, por exemplo,

$$6 \in P, \quad -3 \in S,$$
$$-3 \notin P, \quad 6 \notin S.$$

O seguinte postulado estabelece que um conjunto é determinado pelos seus elementos.

Princípio da extensionalidade

Sejam A e B conjuntos.

- A e B são iguais se e só se têm os mesmos elementos.
- Ou seja, A e B são iguais se e só se um objeto qualquer estar em A equivale a estar em B. Simbolicamente,

$$A = B \quad \text{se e só se} \quad \forall x \, (x \in A \leftrightarrow x \in B).$$

Decorre do princípio da extensionalidade que, os conjuntos A e B são diferentes (denotando-se $A \neq B$) se e só se um dos conjuntos tem algum elemento que não pertence ao outro.

Definição

- Cada conjunto A tem atribuído um (e um só) cardinal ou número cardinal, representado por $|A|$ ou $\#(A)$, que, intuitivamente, indica o número ou quantidade de elementos do conjunto A.
- Conjuntos A e B têm o mesmo cardinal (ou seja, $|A| = |B|$) se e só se existe uma aplicação bijetiva de A para B.

Exemplo

1. Seja $n \in \mathbb{N}_0$. O cardinal de um conjunto A com n elementos é n. Em particular, quando $n = 1$, A é dito um conjunto singular.
2. O cardinal do conjunto $\mathbb{N}$ dos naturais é denotado por $\aleph_0$ (lê-se alef-zero). Um conjunto de cardinal $\aleph_0$ diz-se numerável. Prova-se (exercício) que os conjuntos $\mathbb{Z}$, dos números inteiros, e $\mathbb{Q}$, dos números racionais, são numeráveis. Tem-se portanto que $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$.
3. O conjunto $\mathbb{R}$, dos números reais, não é numerável. O cardinal de $\mathbb{R}$ é denotado por $\mathfrak{c}$ e é chamado o cardinal do contínuo.

Definição (de um conjunto por extensão)

Seja A um conjunto.

1. Se $|A| = 0$ (isto é, se A não tem elementos), então representa-se A por $\{\}$. Pelo princípio da extensionalidade, existe um único conjunto A nestas condições, que é chamado o conjunto vazio e que é também denotado por $\emptyset$.
2. Se $|A| = n \in \mathbb{N}$ e $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são os elementos de A, então A pode ser representado por $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.
3. Se $|A| = \aleph_0$ e os membros de A podem ser enumerados de forma inequívoca $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$, então A pode ser representado por $\{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\}$.

Nos casos acima, diz-se que A está definido (ou descrito, ou dado) em extensão.

É de notar que:

- se um conjunto é definido por extensão, a ordem dos membros é irrelevante;
- existem conjuntos que não podem ser dados em extensão (os seus elementos não podem ser listados). Este é o caso, por exemplo, do conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais.

Exemplo

- As expressões abaixo representam conjuntos em extensão

  $\{2,-1,0,1,3,4\}$, $\{\text{joão,josé,joaquim}\}$, $\{0,1,\{1,3,\{3\},2\},\emptyset\}$,
  $\{a,x,2,bola,y,ab,\pi,z^2+5\}$, $\{\text{amarelo,vermelho,branco,azul}\}$,
  $\{1,2,4,7,11,16,22,29,37,46,56,\ldots\}$.

- Os conjuntos
  - A, das soluções da equação $x^2-9=0$;
  - B, dos divisores naturais de 60;
  - C, dos naturais menores do que 1000;
  - $\mathbb{Z}$, dos números inteiros;
  - $\mathbb{N}$, dos números naturais;
  - P, dos números inteiros pares;

  podem ser descritos em extensão das seguintes formas,

  $A=\{-3,3\}$, $B=\{1,2,3,4,5,6,10,12,15,20,30,60\}$,
  $C=\{1,2,3,\ldots,998,999\}$, $\mathbb{Z}=\{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$,
  $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$, $P=\{\ldots,-4,-2,0,2,4,\ldots\}$.

Exercício

Indique o valor lógico das seguintes proposições:

(*a*) $\{1, 2, 3, 4, 5\} = \{4, 2, 1, 3, 5\}$;

(*b*) $\{1, \sqrt{2}, 1, \pi\} = \{1, \sqrt{2}, \pi\}$;

(*c*) $2 \in \{1, \{2\}, 3, 4\}$;

(*d*) $\{2\} \in \{1, 2, 3, 4\}$;

(*e*) $\{2\} \in \{1, \{2\}, 3, 4\}$;

(*f*) $a \in \{b\}$ se e só se $a = b$;

(*g*) $\mathbb{N} = \{\mathbb{N}\}$;

(*h*) $|\{\emptyset\}| = 0$;

(*i*) $A \neq \{0, 2, 4, \ldots\}$, onde A é o conjunto dos naturais pares;

(*j*) $|\{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}| = \aleph_0$.

Resposta

(*a*) V; (*b*) V; (*c*) F; (*d*) F; (*e*) V; (*f*) V; (*g*) F; (*h*) F; (*i*) V; (*j*) V.

Definição

Sejam A e B conjuntos.

- Diz-se que A está contido em B ou que A é um subconjunto de B, e escreve-se $A \subseteq B$, se todo o elemento de A é membro de B, ou seja, se
$$\forall_x \, (x \in A \rightarrow x \in B).$$
- Se é falso que $A \subseteq B$, escreve-se $A \not\subseteq B$ e diz-se que A não está contido em B ou que A não é um subconjunto de B. Note que $A \not\subseteq B$ se existe algum elemento de A que não está em B, ou seja, se
$$\exists_x \, (x \in A \wedge x \notin B).$$
- Se $A \subseteq B$ e $A \neq B$, denota-se $A \subsetneq B$ ou $A \subset B$ e diz-se que A está estritamente contido em B ou que A é um subconjunto próprio de B. Ou seja, $A \subsetneq B$ se
$$\forall_x \, (x \in A \rightarrow x \in B) \;\wedge\; \exists_x \, (x \in B \wedge x \notin A).$$

Exemplo

Consideremos o conjunto $A = \{a, b, \{1, c\}, 1, 2\}$ e notemos que

- $x \in A$ se e só se $x = a \vee x = b \vee x = \{1, c\} \vee x = 1 \vee x = 2$
- $X \subseteq A$ se e só se $\forall_x \big(x \in X \to (x = a \vee x = b \vee x = \{1, c\} \vee x = 1 \vee x = 2)\big)$

As afirmações:

- $1 \in A$,
- $c \notin A$,
- $\{a, b, 2\} \subsetneq A$,
- $\{a, b, c, 1, 2\} \not\subseteq A$,
- $\{2, \{1, c\}\} \subseteq A$,
- $A = \{a, 1, b, 2, \{c, 1\}\}$,

são verdadeiras.

As afirmações:

- $\{a, 1\} \not\subseteq A$,
- $\{1\} \in A$,
- $2 \subseteq A$,
- $\{a, 1, 2, 5\} \subseteq A$,
- $A \subseteq \{a, b, 1, 2\}$,
- $A = \{a, b, 1, \{c\}, 1, 2\}$,

são falsas.

Teorema

Sejam A, B e C conjuntos. Então,

1. $\emptyset \subseteq A$;
2. $A \subseteq A$;
3. $A = B$ se e só se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$;
4. Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$.

Demonstração

Provaremos apenas a primeira e a terceira propriedades.

1. Suponhamos, por contradição, que $\emptyset \not\subseteq A$. Então, existe um elemento de $\emptyset$ que não pertence a A. Ora, isto é absurdo pois $\emptyset$ não tem elementos. A contradição resultou de termos suposto que $\emptyset \not\subseteq A$. Logo, $\emptyset \subseteq A$.

3. $(\Rightarrow)$ Suponhamos que $A = B$. Então, $\forall_x \; (x \in A \leftrightarrow x \in B)$, o que equivale a
$$\forall_x \; ((x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \in A)).$$
Logo, $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.

   $(\Leftarrow)$ Suponhamos que $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$. Então, todo o elemento de A está em B e todo o elemento de B está em A. Por outras palavras, A e B têm exatamente os mesmos elementos, ou seja, $A = B$.

Um conjunto pode ser descrito enunciando uma propriedade característica dos seus elementos e só deles.

Definição (de um conjunto por compreensão)

Seja $p(x)$ um predicado de universo U. O subconjunto A de U formado pelos elementos a de U tais que $p(a)$ é uma proposição verdadeira é denotado por

$$\{a \in U : p(a)\} \quad \text{ou por} \quad \{a \in U \mid p(a)\}.$$

Neste caso, diz-se que A está definido (ou descrito, ou dado) em compreensão.

Exemplo

São descritos abaixo alguns conjuntos em compreensão e em extensão.

- $\{x \in \mathbb{N} : x \text{ é primo e } x \leq 11\} = \{2, 3, 5, 7, 11\}$
- $\{d \in \mathbb{N} : d \text{ é divisor de } 28\} = \{d \in \mathbb{N} : \exists_{q \in \mathbb{N}}\ dq = 28\} = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$
- $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2 = 0\} = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$
- $\{n \in \mathbb{Z} : n \text{ é par}\} = \{n \in \mathbb{Z} : \exists_{k \in \mathbb{Z}}\ n = 2k\} = \{2k : k \in \mathbb{Z}\}$
  $= \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$

Exercício

Considere os conjuntos

- $P = \{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\}$,
- $Q = \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$,
- $X = \{-2, -\sqrt{2}, -1, 0, 1, \sqrt{2}, 2, 4\}$.

1. Defina os conjuntos P e Q por compreensão.
2. Identifique os conjuntos:
   - $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0\}$,
   - $B = \{m \in \mathbb{N} : \exists_{n \in \mathbb{N}}\ mn = 12\}$,
   - $C = \{a \in \mathbb{Z} : a^2 < 10\}$,
   - $D = \{x \in X : x \in \mathbb{N}\}$,
   - $E = \{x \in X : \sqrt{x} \in X\}$,
   - $F = \{x \in X : |x| < 2\}$,
   - $G = \{x \in X : x^2 \in X\}$,
   - $H = \{x^2 : x \in X\}$.

Resposta

1. $P = \{n \in \mathbb{Z} : \exists_{k \in \mathbb{Z}}\ n = 3k\} = \{3k : k \in \mathbb{Z}\}$,
   $Q = \{n \in \mathbb{N} : (\exists_{k \in \mathbb{N}}\ n = 5k) \wedge n \leq 30\} = \{5k : k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$.
2. $A = \emptyset$, $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $C = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $D = \{1, 2, 4\}$, $E = \{0, 1, 2, 4\}$,
   $F = \{-\sqrt{2}, -1, 0, 1, \sqrt{2}\}$, $G = \{-2, -\sqrt{2}, -1, 0, 1, \sqrt{2}, 2\}$, $H = \{0, 1, 2, 4, 16\}$.

Um conjunto pode também ser descrito a partir de outros conjuntos usando operações sobre conjuntos.

Definição

Sejam A e B subconjuntos de um conjunto X (dito o universo).

1. $A \cup B = \{x \in X : x \in A \vee x \in B\}$ é o conjunto constituído pelos elementos que estão em A ou B ou em ambos, dito a *união* de A com B.
2. $A \cap B = \{x \in X : x \in A \wedge x \in B\}$ é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a ambos os conjuntos A e B, designado a *interseção* de A com B.

   No caso de $A \cap B$ ser o conjunto vazio, A e B dizem-se conjuntos disjuntos.
3. $A \setminus B = \{x \in X : x \in A \wedge x \notin B\}$, também representado por $A - B$, é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e não pertencem a B, chamado o *complementar de B em A* ou a *diferença* entre A e B.

   Quando A é o universo X, o conjunto $A \setminus B$ é $X \setminus B$, diz-se o complementar de B e representa-se por $\overline{B}$ ou B'.

Exemplo

1. Sendo $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{\emptyset, 2, 3, 4, 5\}$ tem-se

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{\emptyset, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}, \\ A \cap B &= \{2, 3\}, \\ A \setminus B &= \{0, 1\}, \\ B \setminus A &= \{\emptyset, 4, 5\}. \end{aligned}$$

2. Sejam $C = \{2n : n \in \mathbb{Z}\}$ e $D = \{2n + 1 : n \in \mathbb{Z}\}$ e suponhamos que o universo é $\mathbb{Z}$. Então,

$$\begin{aligned} C \cup D &= \mathbb{Z}, \\ C \cap D &= \emptyset, \\ C \setminus D &= C, \\ D \setminus C &= D, \\ \overline{C} &= \mathbb{Z} \setminus C = D, \\ \overline{D} &= \mathbb{Z} \setminus D = C. \end{aligned}$$

Teorema

Sejam A e B conjuntos. Então,

1. $A \subseteq A \cup B$ e $B \subseteq A \cup B$;
2. $A \cap B \subseteq A$ e $A \cap B \subseteq B$;
3. $A \subseteq B$ se e só se $A \cup B = B$;
4. $A \subseteq B$ se e só se $A \cap B = A$;
5. $A \setminus B \subseteq A$;
6. $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$.

Demonstração

Mostraremos 1 e 3. A prova das restantes propriedades fica como exercício.

1. Mostremos que $A \subseteq A \cup B$. Seja $x \in A$. Então, a proposição $x \in A \vee x \in B$ é verdadeira, donde $x \in A \cup B$. Provou-se assim que

$$\forall_x \ (x \in A \to x \in A \cup B).$$

Portanto, $A \subseteq A \cup B$. A inclusão $B \subseteq A \cup B$ prova-se analogamente.

Demonstração (continuação)

3. ($\Rightarrow$) Admitamos que $A \subseteq B$ e mostremos que $A \cup B = B$. A inclusão $B \subseteq A \cup B$ resulta imediatamente da propriedade 1. Assim sendo, falta apenas provar a inclusão $A \cup B \subseteq B$.

   Seja $x \in A \cup B$. Então, $x \in A$ ou $x \in B$. Tratemos cada um destes casos:

   Caso i) $x \in A$. Por hipótese A é um subconjunto de B. Logo, todo o elemento de A está em B. Portanto, de $x \in A$ resulta que $x \in B$.

   Caso ii) $x \in B$. Neste caso, já se tem $x \in B$.

   Em ambos os casos $x \in B$. Provou-se assim que
   $$\forall_x \; (x \in A \cup B \rightarrow x \in B).$$
   Logo, $A \cup B \subseteq B$, pelo que $A \cup B = B$.

   ($\Leftarrow$) Suponhamos agora que $A \cup B = B$ e mostremos que $A \subseteq B$.

   Seja $x \in A$. Por 1, sabemos que $A \subseteq A \cup B$. Logo, $x \in A \cup B$. Da hipótese $A \cup B = B$, resulta então que $x \in B$. Mostramos desta forma que
   $$\forall_x \; (x \in A \rightarrow x \in B).$$
   Logo, $A \subseteq B$. $\square$

Teorema

Sejam A, B e C subconjuntos de um conjunto X. Então,

1. $A \cup \emptyset = A, \quad A \cap X = A$, ... (elemento neutro)
2. $A \cup X = X, \quad A \cap \emptyset = \emptyset$, ... (elemento absorvente)
3. $A \cup A = A, \quad A \cap A = A$, ... (idempotência)
4. $A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$, ... (comutatividade)
5. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, ... (associatividade)
6. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. .... (distributividade)

Demonstração

Mostremos, por exemplo, que $A \cap X = A$.

- Sabemos já, pela propriedade 2 do teorema da página 17, que $A \cap X \subseteq A$.
- Seja $x \in A$. Dado que $A \subseteq X$, deduz-se que $x \in A$ e $x \in X$. Portanto $x \in A \cap X$. Provou-se deste modo que $A \subseteq A \cap X$.
- Logo, por dupla inclusão, conclui-se que $A \cap X = A$.

Observação

Tendo em conta que a união de conjuntos é associativa, pode-se escrever sem qualquer risco de ambiguidade

$$A \cup B \cup C \quad \text{em vez de} \quad (A \cup B) \cup C \quad \text{e de} \quad A \cup (B \cup C).$$

Mais geralmente, sendo $A_1, A_2, \ldots, A_n$ subconjuntos de um conjunto X, e visto que a interseção de conjuntos também é associativa, pode-se escrever

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

e

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$$

sem ambiguidade. A união dos conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ é usualmente notada por $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ e a interseção por $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$. Assim,

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x \in X : x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \ldots \vee x \in A_n\}$$

e

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x \in X : x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \ldots \wedge x \in A_n\}.$$

Exercício

Seja $X = \{1, 2, 3, \ldots, 14, 15\}$ o conjunto dos naturais menores ou iguais a 15. Considere os seguintes subconjuntos de X,

$$A = \{x \in X : x \text{ é primo}\},$$
$$B = \{d \in X : d \text{ é divisor de } 12\}.$$

1. Defina os conjuntos A e B por compreensão.
2. Calcule os conjuntos:

$$A \cup B, \quad A \cap B, \quad \overline{A \cup B}, \quad \overline{A \cap B}, \quad \overline{A}, \quad \overline{B}, \quad \overline{A} \cup \overline{B}, \quad \overline{A} \cap \overline{B}.$$

3. Compare: *i*) $\overline{A \cup B}$ com $\overline{A} \cap \overline{B}$; *ii*) $\overline{A \cap B}$ com $\overline{A} \cup \overline{B}$.

Resposta

1. $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
2. $$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 11, 12, 13\}, \quad A \cap B = \{2, 3\},$$
$$\overline{A \cup B} = \{8, 9, 10, 14, 15\}, \quad \overline{A \cap B} = \{1, 4, 5, 6, \ldots, 14, 15\},$$
$$\overline{A} = \{1, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15\}, \quad \overline{B} = \{5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15\}.$$
3. *i*) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; *ii*) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Teorema

Sejam A, B e C subconjuntos de um conjunto X. Então,

1. $A \cap \overline{A} = \emptyset$ e $A \cup \overline{A} = X$,
2. $A \setminus \emptyset = A$ e $A \setminus X = \emptyset$,
3. $A \subseteq B$ se e só se $A \setminus B = \emptyset$,
4. $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$,
   $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$, ... (leis de De Morgan)
5. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ e $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,
6. $\overline{\overline{A}} = A$. . . . . (dupla complementação)

Demonstração

Note-se que a propriedade 5 é um caso particular da 4: é o caso $C = X$. Provaremos apenas 1 e 4, ficando a prova das restantes propriedades como exercício.

1. Seja $x \in A \cap \overline{A}$. Então, $x \in A$ e $x \in \overline{A}$, ou seja, $x \in A$ e $x \notin A$, o que é absurdo. Logo $A \cap \overline{A} \subseteq \emptyset$. Como $\emptyset \subseteq A \cap \overline{A}$, conclui-se que $A \cap \overline{A} = \emptyset$.

   Seja $x \in X$. Então, $x \in A$ ou $x \notin A$, ou seja, $x \in A$ ou $x \in \overline{A}$. Logo $x \in A \cup \overline{A}$. Portanto $X \subseteq A \cup \overline{A}$. Dado que $A \cup \overline{A} \subseteq X$, pois $A \subseteq X$, conclui-se que $A \cup \overline{A} = X$.

Demonstração (continuação)

4. Mostremos que $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$. Usando, em particular, uma das leis de De Morgan do Cálculo Proposicional, tem-se que

$$
\begin{array}{rll}
x \in C \setminus (A \cup B) & \text{sse} & x \in C \wedge x \notin A \cup B \\
& \text{sse} & x \in C \wedge \neg(x \in A \cup B) \\
& \text{sse} & x \in C \wedge \neg(x \in A \vee x \in B) \\
& \text{sse} & x \in C \wedge \neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B) \\
& \text{sse} & x \in C \wedge x \notin A \wedge x \notin B \\
& \text{sse} & (x \in C \wedge x \notin A) \wedge (x \in C \wedge x \notin B) \\
& \text{sse} & x \in C \setminus A \wedge x \in C \setminus B \\
& \text{sse} & x \in (C \setminus A) \cap (C \setminus B).
\end{array}
$$

Daí resulta que $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$.

A segunda lei de De Morgan, isto é, a igualdade

$$C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B),$$

pode ser provada de modo análogo. □

Apresenta-se agora uma nova operação sobre conjuntos.

Definição

Seja A um conjunto. O conjunto

$$\mathcal{P}(A) = \{X : X \subseteq A\},$$

de todos os subconjuntos de A, é chamado o *conjunto das partes* (ou *conjunto potência*) de A.

Exemplos

1. $\mathcal{P}(\{x,y,z\}) = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x,y\}, \{x,z\}, \{y,z\}, \{x,y,z\}\}$.
2. Se $A = \{1, \{2\}\}$, então $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{\{2\}\}, A\}$.
3. Seja $\mathbb{P} = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ é primo}\}$. Então $\mathbb{P} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ pois $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{N}$.

Exercício

Determine: *i)* $\mathcal{P}(\emptyset)$; *ii)* $\mathcal{P}(A)$ para $A = \{1, 2, \{1\}\}$.

Resposta

i) $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$; *ii)* $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{\{1\}\}, \{1,2\}, \{1,\{1\}\}, \{2,\{1\}\}, A\}$.

Teorema

Sejam A e B conjuntos. Então,

1. $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ e $A \in \mathcal{P}(A)$;
2. $A \subseteq B$ se e só se $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$;
3. Se A é finito e $|A| = n$, então $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.

Demonstração

1. Tem-se $\emptyset \subseteq A$ e $A \subseteq A$ (ver pag. 12). Logo, $\emptyset$ e A são elementos de $\mathcal{P}(A)$.
2. $(\Rightarrow)$ Suponhamos que $A \subseteq B$. Pretende-se mostrar que $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$, ou seja, que
$$\forall X \; (X \in \mathcal{P}(A) \to X \in \mathcal{P}(B)).$$
Seja $X \in \mathcal{P}(A)$. Então, $X \subseteq A$. Desta inclusão e da hipótese $A \subseteq B$, deduz-se que $X \subseteq B$. Logo $X \in \mathcal{P}(B)$. Conclui-se assim que $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.
$(\Leftarrow)$ Suponhamos que $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$. Por 1, sabemos que $A \in \mathcal{P}(A)$. Logo $A \in \mathcal{P}(B)$ e, portanto, $A \subseteq B$.
3. Exercício. [Sugestão: prove esta propriedade por indução nos naturais.]

Dados objetos a e b, o conjunto $\{a, b\}$ é igual a $\{b, a\}$ porque a ordem pela qual os elementos são listados é irrelevante. O conceito de par ordenado é utilizado quando importa considerar os objetos numa certa ordem.

Definição

Um *par ordenado* é um par (a, b) de objetos a e b apresentados nessa ordem, dizendo-se que

- a é a sua *primeira componente* (ou *coordenada*),
- b é a sua *segunda componente* (ou *coordenada*).

Observação

- Na definição (axiomática) de Kuratowski, o par ordenado (a, b) é definido como sendo o conjunto $\{\{a\}, \{a, b\}\}$.
- Pares ordenados (a, b) e (c, d) são iguais se têm as mesmas primeiras componentes e as mesmas segundas componentes, ou seja,
$$(a, b) = (c, d) \quad \text{se e só se} \quad a = c \text{ e } b = d.$$
- Se $a \neq b$, então $(a, b) \neq (b, a)$. Por exemplo, $(1, 2) \neq (2, 1)$.
- Um par ordenado pode ter componentes iguais, tal como $(1, 1)$.

Os pares ordenados permitem formar novos conjuntos a partir de conjuntos dados.

Definição

Sejam A e B conjuntos. O conjunto

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\},$$

de todos os pares ordenados (a, b) tais que $a \in A$ e $b \in B$, é chamado o *produto cartesiano* (ou *direto*) de A por B.

Exemplos

1. Para $A = \{1, a\}$ e $B = \{1, 2, b\}$, tem-se

$$A \times A = \{(1,1), (1,a), (a,1), (a,a)\}$$
$$A \times B = \{(1,1), (1,2), (1,b), (a,1), (a,2), (a,b)\}$$
$$B \times A = \{(1,1), (1,a), (2,1), (2,a), (b,1), (b,a)\}$$
$$B \times B = \{(1,1), (1,2), (1,b), (2,1), (2,2), (2,b), (b,1), (b,2), (b,b)\}.$$

   Note-se que $A \times B \neq B \times A$.

2. Se $C = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ e $D = \{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$, $C \times D = \{(2n, m^2) : n, m \in \mathbb{N}\}$.

Exercício

Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{V, F\}$.

1. Determine:
   (a) $A \times B$ e $|A \times B|$;
   (b) $B \times B$;
   (c) $\emptyset \times A$.
2. Indique o valor lógico das seguintes proposições:
   (a) $|A \times A| = 16$;
   (b) $A \times A \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$;
   (c) $(V, 6) \in \mathbb{N} \times B$.

Resposta

1. (a) $A \times B = \{(1, V), (2, V), (3, V), (4, V), (1, F), (2, F), (3, F), (4, F)\}$ e $|A \times B| = 8$;
   (b) $B \times B = \{(V, V), (V, F), (F, V), (F, F)\}$;
   (c) $\emptyset \times A = \emptyset$.
2. (a) V; (b) V; (c) F.

Teorema

Sejam A, B, X e Y conjuntos. Então,

1. $A \times B = \emptyset$ se e só se $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$;
2. Se $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$, então $A \times B \subseteq X \times Y$;
3. Se $\emptyset \neq A \times B \subseteq X \times Y$, então $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$;
4. $A \times (X \cup Y) = (A \times X) \cup (A \times Y)$,
   $(X \cup Y) \times A = (X \times A) \cup (Y \times A)$; .... (distributividade de $\times$ em relação a $\cup$)
5. $A \times (X \cap Y) = (A \times X) \cap (A \times Y)$,
   $(X \cap Y) \times A = (X \times A) \cap (Y \times A)$; .... (distributividade de $\times$ em relação a $\cap$)
6. $A \times (X \setminus Y) = (A \times X) \setminus (A \times Y)$,
   $(X \setminus Y) \times A = (X \times A) \setminus (Y \times A)$. .... (distributividade de $\times$ em relação a $\setminus$)

Demonstração

Provaremos 2 e 4. A prova das restantes propriedades fica como exercício.

2. Suponhamos que $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$. Pretendemos mostrar que $A \times B \subseteq X \times Y$.
   Seja $(a, b) \in A \times B$. Então, por definição de produto cartesiano, $a \in A$ e $b \in B$.

(continua)

Demonstração (continuação)

Por hipótese, todo o elemento de A está em X e todo o elemento de B está em Y. Logo, $a \in X$ e $b \in Y$ e, portanto, $(a, b) \in X \times Y$.

Provou-se assim que $A \times B \subseteq X \times Y$.

4. Mostremos que $A \times (X \cup Y) = (A \times X) \cup (A \times Y)$. Para tal usaremos, em particular, a distributividade da conjunção em relação à disjunção.

   Dado um qualquer par ordenado (a, b), tem-se

$$
\begin{array}{rll}
(a,b) \in A \times (X \cup Y) & \text{sse} & a \in A \wedge b \in X \cup Y \\
& \text{sse} & a \in A \wedge (b \in X \vee b \in Y) \\
& \text{sse} & (a \in A \wedge b \in X) \vee (a \in A \wedge b \in Y) \\
& \text{sse} & (a,b) \in A \times X \vee (a,b) \in A \times Y \\
& \text{sse} & (a,b) \in (A \times X) \cup (A \times Y).
\end{array}
$$

   Isto mostra que $A \times (X \cup Y) = (A \times X) \cup (A \times Y)$.

   A prova de $(X \cup Y) \times A = (X \times A) \cup (Y \times A)$ é feita de forma simétrica. □

A noção de produto cartesiano é generalizada da seguinte forma.

Definição

O *produto cartesiano* de $n \geq 2$ conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ é o conjunto

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_1 \in A_1 \wedge a_2 \in A_2 \wedge \ldots \wedge a_n \in A_n\}.$$

de todos os *n–uplos*, ou *n–tuplos*, $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ tais que, para todo o i, a *i-ésima componente* a_i é um elemento de A_i.

Quando $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$, escreve-se A^n em alternativa a $A \times A \times \ldots \times A$.

Observação

- Um 3-uplo (a, b, c) é chamado um *triplo ordenado*.
- Tuplos $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ e $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ são iguais se têm as mesmas i-ésimas componentes para todo o i, ou seja,

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \quad \text{se e só se} \quad \forall_{i \in \{1,2,\ldots,n\}}\ a_i = b_i.$$

Exemplo

Para $A = \{1,2\}$, $B = \{b\}$ e $C = \{1,3,8\}$, tem-se

$$A \times B \times C = \{(1,b,1),(1,b,3),(1,b,8),(2,b,1),(2,b,3),(2,b,8)\}$$
$$A^3 = \{(1,1,1),(1,1,2),(1,2,1),(2,1,1),(1,2,2),(2,1,2),(2,2,1),(2,2,2)\}$$
$$B^7 = \{(b,b,b,b,b,b,b)\}$$
$$B^4 \times C = \{(b,b,b,b,1),(b,b,b,b,3),(b,b,b,b,8)\}.$$

Teorema

Seja $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

1. Se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são conjuntos finitos, então
$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \times |A_2| \times \ldots \times |A_n|.$$
2. Se A é um conjunto finito, então $|A^n| = |A|^n$.

Definição

Um conjunto cujos elementos são conjuntos é chamado uma *família de conjuntos*.

Exemplos

São famílias de conjuntos:

1. $\mathcal{P}(A)$, o conjunto das partes de um conjunto A;
2. $\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N}) = \{X : \ X \text{ é um subconjunto finito de } \mathbb{N}\}$;
3. $\{\{0, 2, 4, 6, 8\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{4, 7\}, \emptyset\}$;
4. $\{\mathbb{Z}^-, \{0\}, \mathbb{Z}^+\}$.

A definição seguinte generaliza as noções de união e interseção de conjuntos, já estudadas.

Definição

Seja $\mathcal{F}$ uma família não vazia de conjuntos.

1. A *união da família* $\mathcal{F}$ é o conjunto
$$\bigcup \mathcal{F} = \{x : \exists_{F \in \mathcal{F}}\ x \in F\}$$
formado pelos objetos que pertencem a pelo menos um dos membros de $\mathcal{F}$.
2. A *interseção da família* $\mathcal{F}$ é o conjunto
$$\bigcap \mathcal{F} = \{x : \forall_{F \in \mathcal{F}}\ x \in F\}$$
formado pelos objetos que pertencem a todos os membros de $\mathcal{F}$.

Exemplos

1. $\bigcup \mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$ e $\bigcap \mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N}) = \emptyset$.
2. Para $\mathcal{F} = \{\{1, x, y, z\}, \{1, 2, 3, z\}, \{a, 1\}\}$, tem-se
$$\bigcup \mathcal{F} = \{1, x, y, z\} \cup \{1, 2, 3, z\} \cup \{a, 1\} = \{x, y, z, 1, 2, 3, a\},$$
$$\bigcap \mathcal{F} = \{1, x, y, z\} \cap \{1, 2, 3, z\} \cap \{a, 1\} = \{1\}.$$

Exercício

Calcule a união e a interseção de cada uma das seguintes famílias de conjuntos:

(a) $\mathcal{A} = \{\mathbb{Z}^-, \{0\}, \mathbb{Z}^+\}$;

(b) $\mathcal{B} = \{\{\emptyset, 0, \{1\}, 2, \{3\}, 4\}, \{\emptyset, 1, 2, 3, \{4\}\}, \{\emptyset, 2, 4\}\}$;

(c) $\mathcal{C} = \{I_n : n \in \mathbb{N}_0\}$, onde, para cada $n \in \mathbb{N}_0$,

$$I_n = \{x \in \mathbb{R} : -n \leq x \leq n\} = [-n, n].$$

Resposta

(a) $\bigcup \mathcal{A} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+ = \mathbb{Z}$, $\quad \bigcap \mathcal{A} = \mathbb{Z}^- \cap \{0\} \cap \mathbb{Z}^+ = \emptyset$;

(b) $\bigcup \mathcal{B} = \{\emptyset, 0, \{1\}, 2, \{3\}, 4\} \cup \{\emptyset, 1, 2, 3, \{4\}\} \cup \{\emptyset, 2, 4\}$
$= \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{4\}, 0, 1, 2, 3, 4\}$,

$\bigcap \mathcal{B} = \{\emptyset, 0, \{1\}, 2, \{3\}, 4\} \cap \{\emptyset, 1, 2, 3, \{4\}\} \cap \{\emptyset, 2, 4\} = \{\emptyset, 2\}$;

(c) $\bigcup \mathcal{C} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} I_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} [-n, n] = \mathbb{R}$,

$\bigcap \mathcal{C} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} I_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} [-n, n] = \{0\}$.

Definição

Seja $\mathcal{F}$ uma família de conjuntos. Diz-se que $\mathcal{F}$ é constituída por *conjuntos disjuntos dois a dois* se a interseção de dois quaisquer elementos distintos de $\mathcal{F}$ é o conjunto vazio, ou seja,

$$\forall_{X,Y\in\mathcal{F}}\ (X \neq Y \to X \cap Y = \emptyset).$$

Exemplos

1. A família $\{\{0,2,4,6\},\{8\},\{1,3,5\},\{7,9,11,13\},\{10,12\}\}$ é constituída por conjuntos disjuntos dois a dois.
2. Os conjuntos da família $\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})$ não são disjuntos dois a dois.

Exercício

Diga se as seguintes famílias de conjuntos são constituídas por conjuntos disjuntos dois a dois:

(a) $\mathcal{A} = \{\mathbb{Z}^-, \{0\}, \mathbb{Z}^+\}$;

(b) $\mathcal{B} = \{\{0,1,2,3\},\{5,8\},\{3,6,9\}\}$.

Definição

Seja A um conjunto. Uma *partição de A* é um conjunto Π de subconjuntos não vazios de A, disjuntos dois a dois e cuja união é A. Ou seja, uma família de conjuntos Π é uma partição de A quando:

(*i*) $\forall_{X\in\Pi}\ (X \subseteq A \wedge X \neq \emptyset)$;

(*ii*) $\forall_{X,Y\in\Pi}\ (X \neq Y \rightarrow X \cap Y = \emptyset)$;

(*iii*) $\bigcup \Pi = A$.

Os elementos de Π são chamados *blocos da partição* Π.

Exemplos

1. O conjunto $\{\mathbb{Z}^-, \{0\}, \mathbb{Z}^+\}$ é uma partição de $\mathbb{Z}$.
2. Seja $A = \{1,3,5,7,9\}$. Então
   - $\Pi_1 = \{\{1,5\},\{3,9\},\{7\}\}$
   - $\Pi_2 = \{\{1,3,5\},\{7,9\}\}$
   - $\Pi_3 = \{\{1\},\{3\},\{5\},\{7\},\{9\}\}$

   são partições de A;

   - $\Pi_4 = \{\{1,3,5\},\{9\}\}$
   - $\Pi_5 = \{\{1,5,7,9\},\{3,5\}\}$
   - $\Pi_6 = \{\{1,3\},\{5,7\},\emptyset,\{9\}\}$

   não são partições de A.

Exercício

1. Indique uma partição de cada um dos seguintes conjuntos:
   (a) $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$;
   (b) $B = \{1\}$.
2. Indique todas as partições do conjunto $C = \{1, 2\}$.
3. Diga se as seguintes famílias de conjuntos são partições do conjunto $\mathbb{Z}$:
   (a) $\Pi_1 = \{\{-n, n\} : n \in \mathbb{N}_0\}$;
   (b) $\Pi_2 = \{\{3n : n \in \mathbb{Z}\}, \{2n : n \in \mathbb{Z}\}\}$;
   (c) $\Pi_3 = \{\{3n : n \in \mathbb{Z}\}, \{3n + 1 : n \in \mathbb{Z}\}, \{3n + 2 : n \in \mathbb{Z}\}\}$.

Resposta

1. (a) $\{\{a, b, c\}, \{d, e, f, g, h\}\}$; (b) $\{\{1\}\}$.
2. $\{\{1\}, \{2\}\}$ e $\{\{1, 2\}\}$.
3. (a) Sim; (b) Não; (c) Sim.