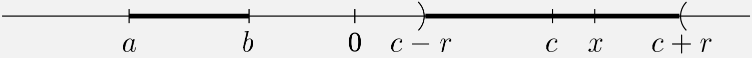
Reta real

A identificação entre os números reais e os pontos de uma reta, designada por *reta real*, permite obter uma representação geométrica dos números reais, muito útil na compreensão e visualização de diversos conceitos envolvendo números reais.

A associação que a cada número real faz corresponder um e um só ponto da reta, permite também usar uma linguagem geométrica, em que *"ponto"* passará a significar *"número real"*,

dizer que "$x < y$" será dizer que "x está à esquerda de y"

Nesta representação, dados $x, y \in \mathbb{R}$, com $x < y$, o intervalo $[x, y]$ será representado pelo segmento de reta cujos extremos são os pontos x e y.



- Na Figura os pontos a e b representam números reais (identificados também por a e b) tais que $a < b < 0$, uma vez que a está à esquerda de b, estando este, por sua vez, à esquerda de zero.
- O segmento de reta de extremos a e b, marcado com traço mais carregado , representa o intervalo $[a, b]$.

Recordemos agora a noção de *valor absoluto* ou *módulo* de um número real.

Definição

Dado $x \in \mathbb{R}$, $|x|$ *representa o* **valor absoluto** *ou* **módulo** *de* x, *definido da seguinte forma:* $|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0, \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$

Nota

Dado $x \in \mathbb{R}$*:*

- $|x| \geq 0$;
- $|x| = \max\{x, -x\}$;
- $-|x| \leq x \leq |x|$.

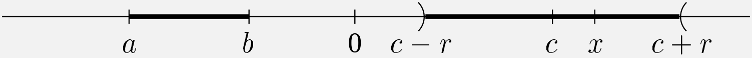
Proposição

Dados $x, y, r \in \mathbb{R}$ *com* $r \geq 0$*:*

- $|x| \leq r$ *sse* $-r \leq x \leq r$*;*
- $|x| \geq r$ *sse* $x \leq -r \vee x \geq r$*;*
- $|x+y| \leq |x| + |y|$*;*
- $|xy| = |x||y|$*;*
- $|x-y| \geq \big||x| - |y|\big|$*;*
- $|x-z| \leq |x-y| + |y-z|$*.*

Definição

Dados $x, y \in \mathbb{R}$*, define-se* **distância entre x e y** *como sendo* $|x-y|$*.*



Na figura está representado o intervalo $]c-r, c+r[$, i.e., o intervalo aberto centrado em c e de raio (semi-amplitude) $r>0$.

Este intervalo é o lugar geométrico dos pontos da reta cuja distância a c é menor do que r ou, dito de forma equivalente, o conjunto $\{x \in \mathbb{R} : |x-c| < r\}$.

Definição

Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$ *e* $a \in \mathbb{R}$. *Diz-se que* a *é*

- **majorante de** X *se* $\forall x \in X \quad x \leq a$;
- **minorante de** X *se* $\forall x \in X \quad a \leq x$;
- **máximo de** X *se* a *é majorante de* X *e* $a \in X$. *Representa-se* $a = \max X$;
- **mínimo de** X *se* a *é minorante de* X *e* $a \in X$. *Representa-se* $a = \min X$.

Nota

Observe-se que, se a *é majorante de* X, *qualquer elemento maior do que* a *é também majorante de* X. *Analogamente, se* a *é minorante de* X, *qualquer elemento menor do que* a *é minorante de* X.

Definição

Um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ diz-se **majorado** *ou* **limitado superiormente**, *respetivamente* **minorado** *ou* **limitado inferiormente**, *se possui algum majorante, respetivamente minorante. Se X é simultaneamente majorado e minorado diz-se* **limitado**.

Definição

Seja X um subconjunto de $\mathbb{R}$. Um elemento $a \in \mathbb{R}$ diz-se **supremo de $\boldsymbol{X}$** *e representa-se $a = \sup X$, se verifica as duas condições seguintes:*

1. $\forall\, x \in X \quad x \leq a \qquad$ *(a é majorante de X);*
2. *se $b \in \mathbb{R}$ é tal que $\forall\, x \in X,\ x \leq b$, então $a \leq b \qquad$ (a é o menor dos majorantes).*

Definição

Seja X um subconjunto de $\mathbb{R}$. Um elemento $a \in \mathbb{R}$ diz-se **ínfimo de $\boldsymbol{X}$** *e representa-se $a = \inf X$, se verifica as duas condições seguintes:*

1. $\forall x \in X \quad a \leq x \qquad$ *(a é minorante de X);*
2. *se $b \in \mathbb{R}$ é tal que $\forall x \in X,\ b \leq x$, então $b \leq a \qquad$ (a é o maior dos minorantes).*

Exemplo

Consideremos o conjunto $X = \{x \in \mathbb{R} \,:\, 0 \leq x < 3\}$.
X é limitado: 0 é minorante e 3 é majorante de X.
O mínimo de X é 0, logo $\inf X = 0$.
$\sup X = 3$ *(porquê?) e X não tem máximo.*

Definição

Dado um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$, um ponto $y \in \mathbb{R}$ diz-se:

- **ponto de acumulação de X** *se*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \qquad \big(\,]y-\varepsilon,\, y+\varepsilon[\,\setminus\{y\}\big) \cap\; X \neq \emptyset$$

- **ponto de acumulação à direita, de X** *se*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \qquad]y,\, y+\varepsilon[\, \cap X \neq \emptyset$$

- **ponto de acumulação à esquerda, de X** *se*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \qquad]y-\varepsilon,\, y[\, \cap X \neq \emptyset$$

- **ponto isolado de X** *se pertencer a X mas não for ponto de acumulação de X, isto é,*

$$\exists\, \varepsilon > 0 \qquad]y-\varepsilon,\, y+\varepsilon[\, \cap X = \{y\}$$

Definição

Seja $X \subseteq \mathbb{R}$. Designa-se por **derivado de $\boldsymbol{X}$** *e representa-se por X', o conjunto dos pontos de acumulação de X.*
X'_+ representa o conjunto dos pontos de acumulação à direita e X'_- representa o conjunto dos pontos de acumulação à esquerda, de X;

Exemplo

Considerando o conjunto $A = [-1,\, 1[\,\cup\, \{2\} \cup \big([3,\, 4] \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\big)$, tem-se:

$$A'_- = \,]-1,\, 1] \cup \,]3,\, 4];$$

$$A'_+ = \,[-1,\, 1[\,\cup\, [3,\, 4[;$$

$$A' = A'_- \cup A'_+ = \,[-1,\, 1] \cup [3,\, 4].$$