1.2 Generalidades sobre funções reais de variável real

Definição de função real de variável real

Operações algébricas

Composição de funções

Restrição e prolongamento de uma função

Características geométricas

Função inversa

Definição

- [Função real de variável real] Chama-se função real de variável real a um terno D, E e f onde D e E são dois subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$, e f é de uma lei de formação (regra de correspondência) que a cada elemento x de D associa um único elemento $f(x)$ de E.

  - denota-se a função por $f : D \longrightarrow E$;
  - usar-se-á as notações $x \mapsto f(x)$ ou $x \rightsquigarrow f(x)$ para indicar que o elemento x de D é transformado por f no elemento $f(x)$ de E;
  - o conjunto D designa-se domínio da função;
  - o conjunto E designa-se conjunto de chegada da função

- Seja $f : D \longrightarrow E$ e $D, E \subset \mathbb{R}$ não vazios. Nestas condições

  - a imagem ou contradomínio de f é o subconjunto de $\mathbb{R}$ definido por
    $$\{f(x) \mid x \in D\}.$$
    Para o contradomínio, usa-se as notações
    $$\mathrm{CD}_f \qquad \text{ou} \qquad f(D).$$
    Se $A \subset D$ tem-se $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$.

  - o gráfico de f é o conjunto G_f dos pares ordenados $(x, f(x))$ com $x \in D$, isto é,
    $$\mathrm{G}_f = \{(x, f(x)) | \, x \in D\}.$$

Observação

- $D \subset \mathbb{R}$ significa que D é um subconjunto de $\mathbb{R}$.
- $f : D \longrightarrow E$, $D, E \subset \mathbb{R}$ significa que a função f a cada elemento de D faz corresponder um número real em E.
- Quando não houver dúvidas denotar-se-á a função $f : D \longrightarrow E$ simplesmente por f.
- Uma função pode ser representada de diferentes formas
  - tabelas
  - gráficos
  - leis de formação
  - ...

Casos particulares

- $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ com

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0,$$

onde $n \in \mathbb{N}$ e $a_0, \ldots, a_n$ são números reais tais que $a_n \neq 0$, denomina-se função polinomial de grau n.

  - [Polinómio de grau zero] Define-se polinómio de grau zero como sendo uma função constante, ou seja

$$f(x) = a, \qquad a \in \mathbb{R}\,.$$

O contradomínio de f é o conjunto $\mathrm{CD}_f = \{a\}$ e o gráfico de f representa-se como os pontos da reta definida por $y = a$.

- Uma função racional f é uma função real de variável real definida por
$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$
onde p e q são funções polinomiais e cujo domínio é o conjunto $D_f = \{x \in \mathbb{R} \,|\, q(x) \neq 0\}$.

- O valor absoluto é a função $|\cdot| : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ definida por
$$|x| := \max\{-x, x\} = \begin{cases} -x, & \text{se } x < 0 \\ x, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

- A função identidade é a função $id_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $id_{\mathbb{R}}(x) = x$.

Igualdade de funções

- Sejam $A, B, E, F \subset \mathbb{R}$ e

$$f : A \longrightarrow E, \quad g : B \longrightarrow F$$

duas funções.

As funções f e g dizem-se iguais quando

$$A = B = D, \quad E = F \quad \text{e} \quad f(x) = g(x), \;\; \forall\, x \in D\,.$$

Operações algébricas

Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$, $A \cap B \neq \emptyset$ e $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções.

- A soma/ diferença de f e g é a função $f \pm g : A \cap B \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x), \quad \forall x \in A \cap B.$$

- O produto de f e g é a função $f \cdot g : A \cap B \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \quad \forall x \in A \cap B.$$

- O quociente de f e g é a função $\dfrac{f}{g} : D \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \forall x \in D = A \cap \{x \in B \, : \, g(x) \neq 0\}.$$

Composição de funções

- Sejam $D_f, D_g, B, E \subset \mathbb{R}$, não vazios, e

$$f : D_f \longrightarrow B \quad \text{e} \quad g : D_g \longrightarrow E$$

duas funções tais que $CD_f \cap D_g \neq \emptyset$.

A função composta de g e f, denotada $g \circ f$, é a função definida por

$$\begin{aligned} g \circ f : D &\longrightarrow E \\ x &\mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x)) \end{aligned}$$

onde

$$D = \{x \in D_f \; : \; f(x) \in D_g\}.$$

Exemplo

1. Sejam

$$\begin{aligned} f : \,]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, & \qquad\qquad f(x) = \sqrt{x} \\ g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} & \qquad\qquad g(x) = x^2. \end{aligned}$$

   Então

$$\begin{array}{rccc} g \circ f \; : &]0,+\infty[& \longrightarrow &]0,+\infty[\\ & x & \longmapsto & x \end{array}$$

   e

$$\begin{array}{rccc} f \circ g \; : & \mathbb{R} \setminus \{0\} & \longrightarrow &]0,+\infty[\\ & x & \longmapsto & |x| \end{array}$$

Restrição e prolongamento[1]

Sejam $A, E \subset \mathbb{R}$.

- [Restrição de uma função] A restrição de uma função $f : A \longrightarrow E$ a um subconjunto $X \subset A$ é a função $f|_X : X \longrightarrow E$, definida por

$$f\Big|_X(x) = f(x), \qquad \forall x \in X$$

[Nota] Este será um conceito fundamental no Cap. 1.3.

- [Prolongamento de uma função] Um prolongamento de uma função $g : X \longrightarrow E$ a um conjunto $A \supset X$ é uma função $f : A \longrightarrow E$ que coincida com g em X, isto é tal que

$$f\Big|_X(x) = g(x), \qquad \forall x \in X$$

[Nota] A restrição é única mas o prolongamento não!

[1] Prolongamento ou extensão

Exemplo

1. Seja $f : [0, 5] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^2$.

- Restrição de f a $X = [1, 2]$ é a função, seja $h = f\big|_{[1,2]}$,

$$h \, : \, [1, 2] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad h(x) = x^2$$

- Prolongamento de f a $A = [-5, 5]$
  - $g \, : \, [-5, 5] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad g(x) = x^2;$
  - $\ell \, : \, [-5, 5] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \ell(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0, 5]; \\ 0, & x \in [-5, 0[\end{cases}$
  - e muitas outras funções ...

Características geométricas

Seja $D \subset \mathbb{R}$ e $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Diz-se que:

- f é uma função par quando
  $\forall\, x \in D$, $-x \in D$ e $\forall x \in D \;\; f(-x) = f(x)$;

- f é uma função ímpar quando
  $\forall\, x \in D$, $-x \in D$ e $\forall x \in D \;\; f(-x) = -f(x)$;

- $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função periódica quando
  $\exists\, p > 0 \;:\; \forall x \in \mathbb{R},\; f(x+p) = f(x)$.

Exemplo

1. $f : [0,5] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^2$ não é par;

2. $h : [1,2] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad h(x) = x^2$ não é par;

3. $g : [-5,5] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad g(x) = x^2$ é par;

4. $\ell : [-5,5] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \ell(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0,5]; \\ 0, & x \in [-5,0[\end{cases}$ não é par.

Sugestão: Represente graficamente as funções acima indicadas.

Seja $D \subset \mathbb{R}$. Diz-se que a função $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ é

- majorada quando $\exists M \in \mathbb{R} \; : \; \forall\, x \in D, \; f(x) \leq M$

- minorada quando $\exists m \in \mathbb{R} \; : \; \forall\, x \in D, \; f(x) \geq m$

- limitada quando f é majorada e minorada, isto é,

$$\exists A \in \mathbb{R}^+ \; : \; \forall x \in D, \quad |f(x)| \leq A.$$

Seja $D \subset \mathbb{R}$. Diz-se que a função $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ é

- crescente quando
$$\forall x, y \in D \qquad x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$
- estritamente crescente quando
$$\forall x, y \in D \qquad x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$
- decrescente quando
$$\forall x, y \in D \qquad x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$$
- estritamente decrescente quando
$$\forall x, y \in D \qquad x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$$
- monótona quando f é crescente ou decrescente
- estritamente monótona quando f é estritamente crescente ou estritamente decrescente

Sejam $D, E \subset \mathbb{R}$. Uma função $f : D \longrightarrow E$ diz-se

- injetiva quando

$$\forall\, x, y \in D \quad x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

- sobrejetiva quando

$$\forall y \in E \quad \exists x \in D : \quad f(x) = y$$

- bijetiva quando f for simultaneamente injetiva e sobrejetiva.

Exemplo

1. Não é injetiva nem sobrejetiva a função

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

2. Não é injetiva mas é sobrejetiva a função

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow [0, +\infty[\\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

3. É injetiva e sobrejetiva, logo bijetiva, a função

$$\begin{aligned} h :]-\infty, 0] &\longrightarrow [0, +\infty[\\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

Extremos locais[2]

Seja $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Um ponto $a \in D$ diz-se

- um ponto de máximo local ou maximizante local de f quando

$$\exists \varepsilon > 0 : \ \forall x \in (\,]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\cap D\,), \ f(x) \leq f(a)$$

  e $f(a)$ diz-se máximo local de f;

- um ponto de mínimo local ou minimizante local de f quando

$$\exists \varepsilon > 0 : \ \forall x \in (\,]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\cap D\,), \ f(x) \geq f(a)$$

  e $f(a)$ diz-se mínimo local de f.

[2] Ou extremos relativos

Extremos globais[3]

Seja $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Um ponto $a \in D$ diz-se

- um ponto de máximo global ou maximizante global de f quando
$$\forall x \in D \; f(x) \leq f(a),$$
e $f(a)$ diz-se máximo global de f;

- um ponto de mínimo global ou minimizante global de f quando
$$\forall x \in D \; f(x) \geq f(a),$$
e $f(a)$ diz-se mínimo global de f;

- um ponto de extremo (local ou global) quando for ponto de máximo ou de mínimo (local ou global) de f.

[3] Ou extremos absolutos

Função inversa

- [Função inversa] Seja $f : D \longrightarrow E$ uma função bijetiva. A função
$$g : E \longrightarrow D$$
que faz corresponder a $y \in E$ o único $x \in D$ tal que $f(x) = y$ é chamada função inversa de f. Denotar-se-á g por f^{-1}.

Nota

Não confundir f^{-1} com $\dfrac{1}{f}$.

[Propriedades da função inversa] Seja $f : D \longrightarrow E$ uma função bijetiva.

1. Se $g : E \longrightarrow D$ é uma função bijetiva, então g é a função inversa de f se e só se
   - $g(f(x)) = x, \qquad \forall x \in D$;
   - $f(g(y)) = y, \qquad \forall y \in E$.

2. Se g é a função inversa de f, então
   - $D_f = \mathrm{CD}_g$;
   - $\mathrm{CD}_f = D_g$;
   - $g^{-1} = f$.

Exemplo

1. A função $g : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty[$ definida por $g(x) = x^2$ não tem inversa pois embora seja sobrejetiva não é injetiva.

2. A função $h :]-\infty, 0[\longrightarrow [0, +\infty[$ definida por $h(x) = x^2$ tem inversa pois é bijetiva.

   A sua inversa é a função

$$\begin{array}{rccc} h^{-1}: & [0, +\infty[& \longrightarrow &]-\infty, 0\,] \\ & x & \longmapsto & -\sqrt{x} \end{array}$$