Elementos de Probabilidades e Teoria de Números

Elementos de Probabilidades - Folha 4

1. Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s independentes e identicamente distribuídas, todas com função de distribuição F.

   (a) Mostre que as v.a.'s
   $$M = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n) \quad \text{e} \quad N = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$
   têm função de distribuição dada por, respectivamente,
   $$F_M(c) = [F(c)]^n \quad \text{e} \quad F_N(c) = 1 - [1 - F(c)]^n.$$

   (b) Assuma agora que F é a função de distribuição da $Exp(\lambda)$, i.e., que
   $$F(c) = \begin{cases} 0 & se \quad c < 0 \\ 1 - e^{-\lambda c} & se \quad c \geq 0 \end{cases}.$$
   Identifique, justificando, a distribuição da v.a. N.

2. Sejam X e Y duas v.a.'s discretas e independentes e identicamente distribuídas com a lei Uniforme no conjunto $\{-1, 1\}$. Diga, justificando, se as v.a.'s:

   (a) X e e^Y ainda são independentes?

   (b) X e XY ainda são independentes?

3. Para cada uma das seguintes alíneas defina uma v.a. que tenha distribuição Binomial e que seja relevante para a resolução dos problemas colocados.

   (a) É sabido que 60% dos indivíduos de uma determinada população são pobres. Determine a probabilidade de, numa amostra de 10 indivíduos escolhidos, ao acaso e com reposição, nesta população, haver exatamente 9 pobres? E de haver pelo menos 9 pobres? E de não haver qualquer pobre?

   (b) Em 10 lançamentos consecutivos de uma moeda equilibrada, qual a probabilidade de saírem 2 caras? E qual a probabilidade de saírem pelo menos 2 caras?

   (c) Em 10 lançamentos consecutivos de um dado equilibrado, qual a probabilidade de saírem 2 faces par? E qual a probabilidade de saírem pelo menos 2 faces ímpar?

   (d) Uma urna contém 3 bolas brancas e 2 bolas vermelhas. Determine a probabilidade de ao extrair, com reposição, 4 bolas desta urna, todas as bolas escolhidas serem brancas. E qual a probabilidade de todas as bolas extraídas serem vermelhas? E se a extracção for feita sem reposição?

4. Suponha que o número de partículas emitidas por uma fonte radioativa, numa unidade de tempo, é uma v.a. discreta que segue uma distribuição de Poisson. É sabido que a probabilidade de não ser emitida qualquer partícula numa unidade de tempo é igual a $\frac{1}{e}$.

   (a) Determine o número médio de partículas emitidas numa unidade de tempo.

   (b) Calcule a probabilidade de, numa unidade de tempo,

      i. serem emitidas exactamente 2 partículas.

      ii. serem emitidas, no máximo, 2 partículas.

      iii. serem emitidas pelo menos 2 partículas.

5. Assuma que o número de artigos de luxo vendidos diariamente num certa loja é uma v.a. discreta, X, que segue uma distribuição de Poisson com média de 0.6.

   (a) Determine a probabilidade de, num dia, não se vender qualquer artigo de luxo.

   (b) Qual a probabilidade de, numa semana, não se vender qualquer artigo destes (assuma que a semana é de 6 dias e que as quantidades vendidas em dias distintos são independentes).

   (c) Suponha agora que cada artigo de luxo tem, independentemente dos outros, probabilidade p $(0 < p < 1)$ de ter defeito. Determine a f.m.p. da v.a. que representa o número de artigos defeituosos vendidos diariamente (em particular, mostre que esta v.a. tem distribuição $Poisson(0.6 \times p)$.

   (d) Generalize a alínea anterior quando $X \sim Poisson(\lambda)$, com um qualquer parâmetro $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

   (e) Assuma agora que, por cada artigo de luxo vendido, a loja tem um lucro de 100€.

      i. Determine o valor médio e a variância do lucro diário com a venda de artigos de luxo.

      ii. Determine o valor médio a a variância do lucro obtido ao fim de 5 dias de vendas (aasuma que as quantidades vendidas em dias distintos são independentes).

6. Seja X uma v.a. contínua com função densidade de probabilidade dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x < a \vee x > b \\ \frac{1}{10} & se \quad a \leq x \leq b \end{cases},$$

   com a e b constantes reais, e tal que $P(X > 8) = 0.4$.

   (a) Mostre que $a = 2$ e $b = 12$ e identifique a distribuição de X.

   (b) Suponha agora que X representa o consumo diário de água, em metros cúbicos (m^3), de uma certa empresa.

      i. Calcule a probabilidade de, num dia, o consumo de água ser de inferior a $8\mathrm{m}^3$?

      ii. Determine a probabilidade de, em 5 dias, haver pelo menos três dias em que o consumo de água é superior a $8\mathrm{m}^3$ (assuma que os consumos de água em dias diferentes são quantidades aleatórias independentes).

7. O rótulo de uma garrafa de água indica que o seu conteúdo é de 350 ml. A linha de produção que enche estas garrafas pode não conseguir colocar exatamente os 350 ml, mas garante que a quantidade de água contida numa garrafa é uma v.a., X, uniformemente distribuída no intervalo $[340, 360]$.

   (a) Qual é a probabilidade de uma garrafa conter menos do que 345 ml de água?

   (b) Qual é a probabilidade de uma garrafa conter mais de 355 ml de água?

   (c) O controle de qualidade aceita uma garrafa se a quantidade de água que esta contém não se afastar em mais de 2 ml do indicado no rótulo. Qual é a probabilidade de uma garrafa de água produzida nesta linha ser rejeitada no controle de qualidade?

   (d) Determine os quantis de X.

8. O tempo, em minutos, decorrido entre chegadas consecutivas de dois clientes a uma repartição pública é uma v.a. com distribuição exponencial e valor médio igual a 10.

   (a) Determine o parâmetro da distribuição exponencial referida.

   (b) Qual é a probabilidade de o tempo entre chegadas de dois clientes ser inferior a 8 minutos?

   (c) Qual é a probabilidade de o tempo entre chegadas de dois clientes ser de pelo menos 10 minutos?

9. Seja $X \sim Exp(\lambda)$. Calcule $P(X > E[X])$.