Tópicos de Matemática Discreta

folha 1

1. Noções elementares de lógica

1.1. Das seguintes frases declarativas, indique aquelas que são proposições:

(a) Está a chover lá fora.

(b) 7 é um número primo.

(c) 2 é ímpar ou 3 é múltiplo de 4.

(d) $4 < 3$.

(e) Neste turno há estudantes nascidos em Ponta Delgada.

(f) Todos os naturais ímpares são primos.

(g) $2 + x = 3$.

(h) Esta frase é falsa.

1.2. De entre as seguintes palavras sobre o alfabeto do Cálculo Proposicional, indique, justificando, aquelas que pertencem ao conjunto $\mathcal{F}^{CP}$:

(a) $(\neg\,(p_1 \vee p_2))$

(b) $((\neg p_5) \to (\neg p_6))$

(c) $((p_3 \wedge p_1) \vee ($

(d) $((p_0 \wedge (\neg p_0)) \leftrightarrow \perp)$

(e) $(\perp)$

(f) $(((p_1 \to ((p_2 \vee (\neg p_3)) \wedge p_4)))$

1.3. Considere as proposições *7 é um número inteiro par*, *3+1=4* e *24 é divisível por* 8 representadas, respetivamente, por p_0, p_1 e p_2.

(a) Escreva fórmulas que representem as afirmações:

  (i) $3 + 1 \neq 4$ e 24 é divisível por 8.

  (ii) Não é verdade que: 7 é ímpar ou $3 + 1 = 4$.

  (iii) Se $3 + 1 = 4$ então 24 não é divisível por 8.

(b) Traduza por frases cada uma das seguintes fórmulas:

  (i) $p_0 \vee (\neg p_2)$ (ii) $\neg(p_0 \wedge p_1)$ (iii) $(\neg p_2) \to (\neg p_1 \vee p_0)$

1.4. Representando as frases *Eu gosto de ouvir música*, *Eu gosto de fado* e *Eu sei tocar guitarra* por p_0, p_1 e p_2, respetivamente, traduza as seguintes fórmulas para linguagem corrente:

(a) $p_0 \wedge \neg p_1$

(b) $\neg p_1 \vee p_2$

(c) $\neg p_2$

(d) $\neg(p_0 \vee p_1)$

(e) $\neg p_0 \vee p_1$

(f) $p_2 \to p_0$

(g) $(p_2 \wedge p_0) \vee \neg p_1$

(h) $p_2 \wedge (p_0 \vee \neg p_1)$

1.5. Nas implicações que se seguem, identifique o antecedente e o consequente.

(a) Se x é ímpar, então x é primo.

(b) Se x é primo, então x é ímpar.

(c) x é primo se x é ímpar.

(d) x é primo só se x é ímpar.

(e) x ser ímpar é condição suficiente para x ser primo.

(f) x ser ímpar é condição necessária para x ser primo.

Tópicos de Matemática Discreta

folha 2

1.6. Negue as seguintes afirmações:

(a) Estou a perceber este exercício.

(b) Vou fazer este exercício e perceber como negar a conjunção de duas proposições.

(c) Estou a perceber este exercício mas não percebo como negar quantificações.

(d) Vou fazer este exercício ou passá-lo à frente.

(e) Se perceber este exercício vou perceber como se negam quantificações.

(f) Vou estudar melhor as tabelas de verdade só se não perceber este exercício.

1.7. Suponha que p_0 representa uma proposição verdadeira, p_1 uma proposição falsa, p_2 uma proposição falsa e p_3 uma proposição verdadeira. Quais das seguintes fórmulas são verdadeiras e quais são falsas?

(a) $p_0 \vee p_2$

(b) $\neg p_3 \vee \neg p_2$

(c) $p_2 \to p_1$

(d) $p_3 \to (p_0 \to \neg p_3)$

(e) $(p_2 \wedge p_3) \vee p_1$

(f) $(p_3 \wedge p_0) \vee (p_1 \wedge p_2)$

(g) $p_0 \leftrightarrow p_2$

(h) $((p_1 \to p_3) \leftrightarrow p_3) \wedge \neg p_0$

(i) $\neg(p_0 \wedge p_1)$

(j) $p_2 \vee (p_3 \vee (p_0 \wedge p_1))$

(k) $(p_1 \leftrightarrow p_3) \wedge p_0$

(l) $(p_3 \to p_0) \leftrightarrow \neg(p_2 \vee p_1)$

1.8. Admitindo que p_0, p_1 e p_2 representam proposições e que $p_0 \leftrightarrow p_1$ é falsa, o que pode dizer sobre o valor lógico das seguintes fórmulas?

(a) $p_0 \wedge p_1$

(b) $p_0 \vee p_1$

(c) $p_0 \to p_1$

(d) $(p_0 \wedge p_2) \leftrightarrow (p_1 \wedge p_2)$

1.9. Construa tabelas de verdade para cada uma das seguintes fórmulas do Cálculo Proposicional:

(a) $p_0 \vee (\neg p_0)$

(b) $\neg(p_0 \vee p_1)$

(c) $p_0 \wedge \neg(p_0 \vee p_1)$

(d) $p_0 \wedge (\neg p_0 \vee p_1)$

(e) $\neg(p_0 \to \neg p_1)$

(f) $p_0 \leftrightarrow (p_1 \vee p_0)$

(g) $(p_0 \to p_1) \leftrightarrow (\neg p_0 \vee p_1)$

(h) $(p_0 \to p_1) \leftrightarrow (\neg p_1 \to \neg p_0)$

(i) $p_0 \to (p_1 \to p_2)$

(j) $p_0 \wedge \neg(p_1 \to p_2)$

(k) $(p_0 \leftrightarrow \neg p_2) \vee (p_1 \wedge p_2)$

(l) $(p_0 \to (p_1 \to p_2)) \to ((p_0 \wedge p_1) \to p_2)$

Tópicos de Matemática Discreta

folha 3

1.10. De entre as seguintes fórmulas, indique aquelas que são tautologias e aquelas que são contradições:

(a) $p_0 \to (p_0 \vee p_1)$

(b) $\neg(p_0 \wedge p_1) \to (p_0 \vee p_1)$

(c) $(p_0 \to p_1) \leftrightarrow (\neg p_1 \to \neg p_0)$

(d) $(p_0 \to (p_0 \vee p_1)) \wedge p_1$

(e) $(p_0 \vee \neg p_0) \to (p_0 \wedge \neg p_0)$

(f) $\neg(p_0 \to (p_1 \to p_0))$

1.11. Indique quais dos pares de fórmulas que se seguem são logicamente equivalentes:

(a) $\neg(p_0 \wedge p_1)$; $\neg p_0 \wedge \neg p_1$

(b) $\neg(p_0 \to p_1)$; $p_0 \wedge (p_1 \to (p_0 \wedge \neg p_0))$

(c) $p_0 \to p_1$; $p_1 \to p_0$

(d) $p_0 \to (p_1 \to p_2)$; $\neg(\neg p_2 \to \neg p_1) \to \neg p_0$

1.12. Encontre uma fórmula que seja logicamente equivalente à fórmula $p_0 \vee \neg p_1$ e que envolva apenas os conetivos $\wedge$ e $\neg$.

1.13. Suponha que o Manuel gosta da cor azul, não gosta da cor vermelha, gosta da cor amarela e não gosta da cor verde. Quais das seguintes proposições são verdadeiras e quais são falsas?

(a) O Manuel gosta de azul e de vermelho.

(b) O Manuel gosta de amarelo ou verde e o Manuel não gosta de vermelho.

(c) O Manuel gosta de vermelho ou o Manuel gosta de azul e amarelo.

(d) O Manuel gosta de azul ou amarelo e o Manuel gosta de vermelho ou verde.

(e) Se o Manuel gosta de azul então gosta de amarelo.

(f) O Manuel gosta de amarelo se e só se gosta de vermelho.

(g) O Manuel gosta de verde e se o Manuel gosta de amarelo então gosta de azul.

(h) Se o Manuel gosta de amarelo então gosta de verde ou o Manuel gosta de amarelo se e só se gosta de vermelho.

1.14. Considere as seguintes afirmações:

- Se há vida em Marte, então Zuzarte gosta de tarte.
- Zuzarte é um marciano ou não gosta de tarte.
- Zuzarte não é um marciano, mas há vida em Marte.

(a) Exprima as afirmações anteriores através de fórmulas do Cálculo Proposicional, utilizando variáveis proposicionais para representar as frases simples.

(b) Mostre que as três afirmações acima não podem ser simultaneamente verdadeiras.

Tópicos de Matemática Discreta

folha 4

1.15. Exprima cada uma das seguintes frases como quantificações:

(a) A equação $x^3 = 28$ tem pelo menos uma solução nos números naturais.

(b) 1000000 não é o maior número natural.

(c) A soma de três números naturais consecutivos é um múltiplo de 3.

(d) Entre cada dois números racionais distintos existe um outro número racional.

1.16. Considere a seguinte proposição:

Todos os Hobbits são criaturas pacíficas.

Indique qual ou quais das seguintes proposições equivale à negação da proposição anterior:

(a) Todos os Hobbits são criaturas conflituosas.

(b) Nem todos os Hobbits são criaturas pacíficas.

(c) Existem Hobbits que são criaturas conflituosas.

(d) Nem todos os Hobbits são criaturas conflituosas.

1.17. Escreva quantificações equivalentes à negação de cada uma das seguintes proposições.

(a) Todo o OVNI tem o objetivo de conquistar alguma galáxia.

(b) Existem morcegos que pesam 50 ou mais quilogramas.

(c) A inequação $x^2 - 2x > 0$ verifica-se para todo o número real x.

(d) Existe um inteiro n tal que n^2 é um número perfeito.

1.18. Considere as seguintes proposições, em que o universo de cada uma das quantificações é o conjunto dos números reais.

(a) $\forall_x \exists_y \; x + y = 0$

(b) $\exists_x \forall_y \; x + y = 0$

(c) $\exists_x \forall_y \; x + y = y$

(d) $\forall_x \; (x > 0 \to \exists_y \; xy = 1)$

Para cada proposição p acima (i) indique se p é ou não verdadeira e (ii) apresente, sem recorrer ao conetivo negação, uma proposição que seja equivalente a $\neg p$.

Tópicos de Matemática Discreta

folha 5

1.19. Considerando que p representa a proposição $\forall_{a\in A}\exists_{b\in B}\ (a^2 = b \vee a+b=0)$,

(a) verifique se p é verdadeira para $A = \{-2, 0, 1, 2\}$ e $B = \{-1, 0, 4\}$.

(b) indique em linguagem simbólica, sem recorrer ao símbolo de negação, uma proposição equivalente à negação de p.

1.20. Considerando que p representa a proposição $\forall_{a\in A}\exists_{b\in B}\ a^2 = b$,

(a) dê exemplo de conjuntos A e B não vazios para os quais:

(i) a proposição p é verdadeira;

(ii) a proposição p é falsa.

(b) indique em linguagem simbólica, sem recorrer ao símbolo de negação, uma proposição equivalente à negação de p.

1.21. Considerando que p representa a proposição

$$\exists_{y\in A}\forall_{x\in A}(x \neq y \to (xy > 0 \vee x^2 + y = 0)),$$

(a) dê exemplo de um universo A não vazio para o qual:

(i) a proposição p é verdadeira;

(ii) a proposição p é falsa.

(b) indique, sem recorrer ao conetivo *negação*, uma proposição equivalente a $\neg p$.

1.22. Recorde que dizemos que um argumento é válido quando, sempre que as premissas são verdadeiras, a conclusão também é verdadeira. Averigue a validade dos seguintes argumentos:

(a) O João afirma: "Hoje vou ao cinema ou fico em casa a ver um filme na televisão". No dia seguinte o João comentou: "Ontem não fui ao cinema." Em resposta, a Joana concluiu: "Então viste um filme na televisão!".

(b) A Maria afirmou: "Se hoje encontrar a Alice e estiver calor, vou à praia". No dia seguinte a Maria comentou: "Ontem esteve calor e fui à praia". Em resposta, a Rita concluiu: "Então encontraste a Alice".

(c) O Tiago disse: "Vou almoçar no bar ou na cantina". E acrescentou: "Se comer no bar fico mal disposto e não vou ao cinema". Nesse dia, a Joana encontrou o Tiago no cinema e concluiu: "O Tiago foi almoçar à cantina".

(d) Paula e Ernesto não vão ambos ganhar o prémio *melhor poesia*. Ernesto vai ganhar o prémio *melhor ficção* ou o prémio *melhor poesia*. Paula não vai ganhar o prémio *melhor poesia*. Portanto, Ernesto vai ganhar o prémio *melhor poesia*.