Cálculo

Mestrado Integrado em Engenharia Informática

Teste 2 B :: 11 de janeiro de 2021

Nome: Resposta de correção   Número:

I

As respostas às questões deste grupo devem ser convenientemente justificadas.

Questão 1. [3 valores] Considere a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)=\begin{cases}\frac{\ln(1-x)}{1-x}+2, & \text{se } x\le 0\\ \cos(2x)+1, & \text{se } x>0\end{cases}$.

Determine o conjunto dos pontos onde f é derivável, indicando o valor da derivada nesses pontos.

f é derivável em $]-\infty,0[$ e em $]0,+\infty[$ por ser obtida por composição, quociente e soma de funções deriváveis.

$$f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{\ln(1-x)}{1-x}+2-2}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln(1-x)}{x-x^2}=\frac{0}{0}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{-1}{1-x}}{1-2x}=-1$$ (por aplicação da Regra de l'Hôpital à indeterminação $\frac{0}{0}$)

$$f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos(2x)+1-2}{x}=\frac{0}{0}$$ (por aplicação da Regra de l'Hôpital à indeterminação $\frac{0}{0}$)

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{-2\,\mathrm{sen}(2x)}{1}=0$$

- $x<0$, $f'(x)=\dfrac{\frac{-1}{1-x}(1-x)-\ln(1-x)(-1)}{(1-x)^2}=\dfrac{-1+\ln(1-x)}{(1-x)^2}$
- $x=0$, $f'(0)$ não existe
- $x>0$, $f'(x)=-2\,\mathrm{sen}(2x)$

Questão 2. [2 valores] Considere função $f(x)=x^2+e^{x^2}-1$.

a) Verifique que $f(0)=0$.

b) Mostre que a função f não tem mais zeros.

a) $f(0)=0+e^0-1=0$

b) $f'(x)=2x+2xe^{x^2}=2x(1+e^{x^2})=0 \Leftrightarrow x=0$

Como $1+e^{x^2}>0$, para todo o $x\in\mathbb{R}$, então

- se $x<0$, $f'(x)<0$ e f é estritamente decrescente em $]-\infty,0[$
- se $x>0$, $f'(x)>0$ e f é estritamente crescente em $]0,+\infty[$

Então

$\forall x\in\mathbb{R}^-\ f(x)>f(0)=0$ e $\forall x\in\mathbb{R}^+\ 0=f(0)<f(x)$

Questão 3. [2,5 valores] Calcule $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos(x^2)}{x^2}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos(x^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen} x - 2x\operatorname{sen}(x^2)}{2x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x - 2\operatorname{sen}(x^2) - 4x^2\cos(x^2)}{2} = -\frac{1}{2},$$ tendo aplicado duas vezes a Regra de l'Hôpital a indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$.

Questão 4. [4 valores] Calcule os seguintes integrais:

a) $\int \frac{1+\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; *b)* $\int_1^e x^5 \ln x\,dx$.

a) $$\int \frac{1+\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\operatorname{arcsen} x\,dx$$

$$= \operatorname{arcsen} x + \frac{1}{2}(\operatorname{arcsen} x)^2 + C,\ C\in\mathbb{R}$$

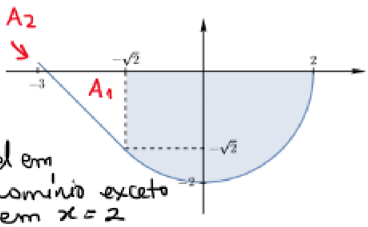
b) $$\int_1^e x^5 \ln x = \left[\frac{x^6}{6}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^5}{6}\,dx = \left(\frac{e^6}{6}\ln e - \frac{1}{6}\ln 1\right) - \left[\frac{x^6}{36}\right]_1^e$$

$u' = x^5$ $u = x^6/6$

$v = \ln x$ $v' = 1/x$

$$= \frac{5e^6+1}{36}$$

Questão 5. [3,5 valores] Considere a função $f : [-3,2] \to \mathbb{R}$ cujo gráfico se representa abaixo. O gráfico é constituído por um arco de circunferência centrada na origem e um segmento de reta que se unem no ponto $(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$, onde f é derivável.



a) Indique o conjunto dos pontos onde f é derivável.

Em $[\sqrt{2},2]$, $f(x) = -(4-x^2)^{1/2}$. Então

$$f'(2) = \lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-(2-x)^{1/2}(2+x)^{1/2}}{-(2-x)}$$

$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{(2+x)^{1/2}}{(2-x)^{1/2}} = +\infty.$$ Então f é derivável em todos os pontos do domínio exceto em $x=2$

b) Indique os pontos onde a derivada de f se anula.

O único ponto onde f' se anula é $x=0$.

c) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$.

Para $x\in[-\sqrt{2},2[$, $f'(x) = -\frac{1}{2}(4-x^2)^{-1/2}(-2x) = \frac{x}{(4-x^2)^{1/2}}$. Então $f'(-\sqrt{2}) = -1$ e a equação da reta tangente ao gráfico de f em $(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$ é $y+\sqrt{2} = -(x+\sqrt{2})$ ou, equivalentemente, $y = -x-2\sqrt{2}$

d) Sabendo que o valor da área da região sombreada na figura é $\frac{3\pi}{2}+1$, determine o valor de $\int_{-3}^{2} f(x)\,dx$.

(Caso necessite e não saiba calcular $f(-3)$, pode usar $f(-3)=\frac{1}{5}$.)

• $x<0$ e $f(x)=0 \iff x=-2\sqrt{2}$

$\text{Área}(A_1) = \frac{1}{2}\sqrt{2}\left(-\sqrt{2}-(-2\sqrt{2})\right) = 1$

• $f(-3) = 3-2\sqrt{2}$

$\text{Área}(A_2) = \frac{1}{2}(3-2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2}) = \frac{9-8\sqrt{2}+8}{2} = \frac{17-8\sqrt{2}}{2}$

$$\int_{-3}^{2} f(x)\,dx = -\left(\frac{3\pi}{2}+1\right) - \text{Área}(A_1) + \text{Área}(A_2)$$

$$= \frac{-3\pi-2-2+17-8\sqrt{2}}{2} = \frac{-3\pi+13-8\sqrt{2}}{2}$$

II

Em cada uma das questões seguintes, assinale neste enunciado, a afirmação verdadeira.
Não deve apresentar qualquer justificação.
Cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta 0,25 valores.

Questão 1. Seja $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ uma função derivável tal que $f(-1)=f(1)=-1$ e $f(\frac{1}{2})=0$. Então:

○ f' nunca se anula;
● f' tem pelo menos um zero;
○ f' tem um zero à esquerda de $\frac{1}{2}$ e outro à sua direita;
○ f é crescente em $]-1,0[$ e decrescente em $]0,1[$.

Questão 2. Seja $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ uma função derivável cuja derivada nunca se anula. Então:

● f é monótona;
○ $f(x)\neq 0, \forall x\in[0,1]$;
○ f não tem mínimo nem máximo;
○ f' é derivável.

Questão 3. Seja $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ uma função contínua não negativa e seja F uma sua primitiva. Então:

○ F é não negativa;
● F é crescente;
○ F admite pelo menos um ponto de descontinuidade;
○ F verifica a desigualdade $F(x)\geq f(x)$, para todo o $x\in[0,1]$.

Questão 4. O integral $\int \frac{8}{x(x^2-4)}\,dx$ é igual a:

○ $\int \frac{8}{x}\,dx \int \frac{1}{x^2-4}\,dx$;
● $\int \frac{1}{x+2}\,dx + \int \frac{1}{x-2}\,dx - \int \frac{2}{x}\,dx$;
○ $\int \frac{1}{x+2}\,dx + \int \frac{1}{x-2}\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx$;
○ nenhuma das anteriores.

Questão 5. Seja $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)=\begin{cases}0, & x\in[0,2]\setminus\{1\}\\ 1, & x=1\end{cases}$. Então:

○ $\underline{\int_0^2} f(x)\,dx < \overline{\int_0^2} f(x)\,dx$;
○ $\int_0^2 f(x)\,dx > 0$;
○ existe uma partição P do intervalo $[0,2]$ tal que $S(f,P)=0$;
● qualquer que seja a partição P do intervalo $[0,2]$, $s(f,P)=0$.