Problemas de Ondas

Ricardo Mendes Ribeiro

26 de Março de 2015

Funções de onda

1. Verifique que as seguintes equações descrevem a mesma onda progressiva:

$$
\begin{aligned}
\Psi(x,t) &= A \sin\left[kx - \omega t\right] \\
\Psi(x,t) &= A \sin\left[2\pi \frac{x - ct}{\lambda}\right] \\
\Psi(x,t) &= A \sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right] \\
\Psi(x,t) &= A \sin\left[2\pi\left(\frac{k}{2\pi}x - ft\right)\right] \\
\Psi(x,t) &= -A \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right]
\end{aligned}
$$

2. A função de uma onda é: $\Psi(x,t) = 10\sin\left(4\pi\, x - 200\pi\, t\right)$, com x em metros, t em segundos e Ψ em metros. Calcule:

   (a) A amplitude, o comprimento de onda, a frequência e a velocidade de propagação da onda.
   R:[1]

   (b) A expressão da função de onda para as posições $x = 0, x = 0.25$ m$, x = 0.5$ m.
   R:[2]

   (c) A expressão da função de onda nos instantes $t = 0$ e $t = 0.01$ s.
   R:[3]

3. A função de uma onda transversal progressiva é dada por

$$\Psi(x,t) = 5.0\sin\left(0.4\pi\, x + 8.0\pi\, t\right)$$

   onde x e Ψ são expressos em cm e t em s. Calcule a amplitude, o comprimento de onda, a frequência, a velocidade de propagação da onda e o sentido de propagação da onda.

   R:[4]

4. Uma onda sinusoidal propaga-se ao longo de uma corda. Um dado ponto da corda move-se desde o deslocamento máximo até ao deslocamento zero num intervalo de tempo de 0.2 s. Suponha que o comprimento de onda seja igual a 1.2 m. Determine o período, a frequência e a velocidade de propagação da onda.

   R:[5]

5. Escreva a função de uma onda sinusoidal que se propaga no sentido positivo do eixo OX, com amplitude 1.5 m, período 0.04 s e velocidade de propagação 250 m/s, admitindo que no instante inicial ($t = 0$) a função de onda em $x = 0$ era $\Psi = 0.8$ m e a *velocidade transversal* inicial nesse ponto era negativa.

   R:[6]

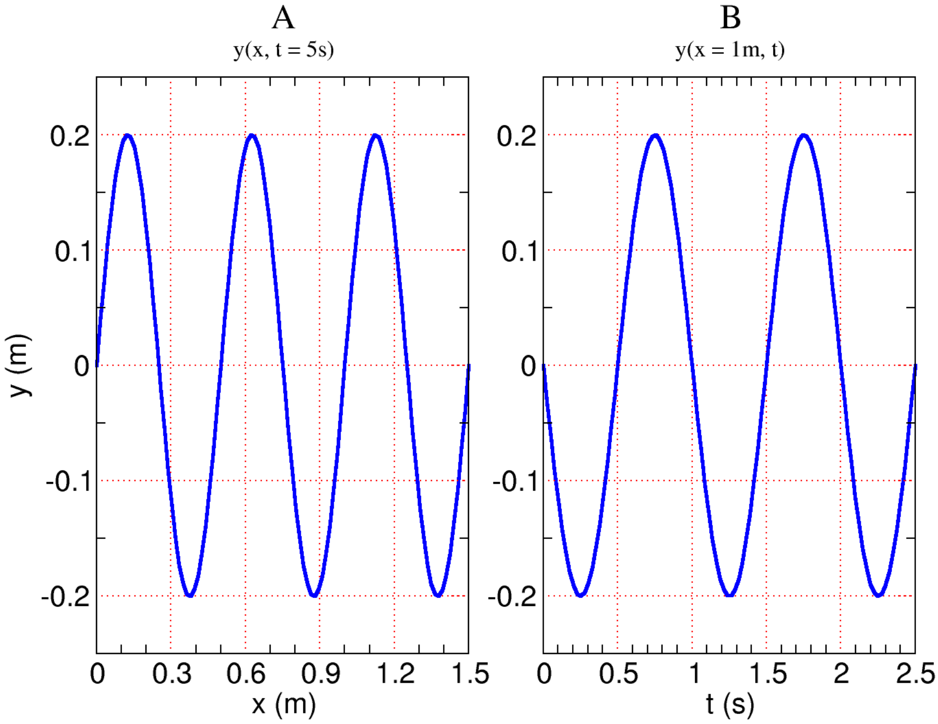

Figura 1:

6. Mostram-se na figura 1 dois gráficos correspondentes a uma onda progressiva transversal que se propaga com uma velocidade positiva segundo a direcção x. x e y estão em metros e t em segundos. No gráfico (A) indica-se a função de onda em função da posição para um tempo de 5 s e no (B) a função de onda em função do tempo para $x = 1$ m. Calcule a amplitude, a frequência e a frequência angular, o período, o comprimento de onda e o número de onda angular e a velocidade de propagação.

   R:[7]

7. A figura 2 mostra a função de onda no instante inicial para uma onda progressiva que se propaga com uma velocidade $c = 5$ m/s segundo a direcção x (x e y estão em metros). Calcule a amplitude, frequência e frequência angular, o período, o comprimento de onda e o número de onda angular.

   R:[8]

8. Uma onda sinusoidal progressiva tem comprimento de onda 0.27 m e propaga-se com uma velocidade de 13 m/s. Calcule o número de onda angular e a frequência desta onda.

   R:[9]

9. O comboio de alta velocidade TGV (acrónimo de *Train à Grand Vitesse*) desloca-se num determinado troço do seu percurso a 300 km/h. Calcule a frequência a que passam as carruagens do comboio por um determinado ponto sabendo que o comprimento das carruagens é 30 m.

   R:[10]

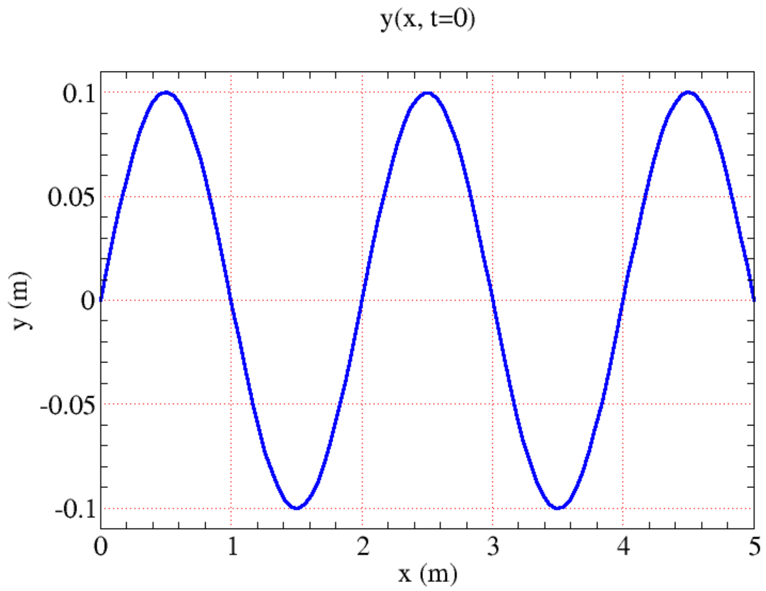

Figura 2:

10. Um sistema mecânico vibra ligado a uma mola helicoidal e produz uma onda sinusoidal longitudinal que se propaga continuamente ao longo da mola. A frequência da fonte de vibração é igual a 20 Hz e a distância entre duas rarefacções sucessivas na mola é igual a 20 cm. O deslocamento longitudinal máximo de uma partícula da mola é igual a 2.5 mm e a onda propaga-se no sentido negativo do eixo OX. Suponha que a fonte de vibração esteja no ponto $x = 0$ e que nesse ponto, no instante $t = 0$, o deslocamento seja nulo.

    (a) Calcule a velocidade de propagação da onda.

    (b) Escreva a equação da onda.
    R:[11]

11. Uma pessoa está à entrada de um porto de pesca e vê ondas sinusiodais a aproximarem-se do porto. Conta 50 cristas de onda a passarem pelo local em que se encontra durante 1 minuto e estima a distância entre cristas sucessivas como sendo aproximadamente 3 m (observando um barco ancorado próximo). Calcule o comprimento de onda e o número de onda angular, a frequência e frequência angular, o período, e a velocidade de propagação.

    R:[12]

12. Dois pontos de um fio são observados quando uma onda progressiva passa por eles. Os pontos são $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$ m. O movimento transversal destes dois pontos é descrito, respectivamente, por:

$$\Psi_1 = 0.2 \sin(3\pi t)$$

$$\Psi_2 = 0.2 \sin\left(3\pi t + \frac{\pi}{8}\right)$$

Determine o sentido do movimento da onda, a velocidade de propagação da onda, o comprimento de onda e a frequência.

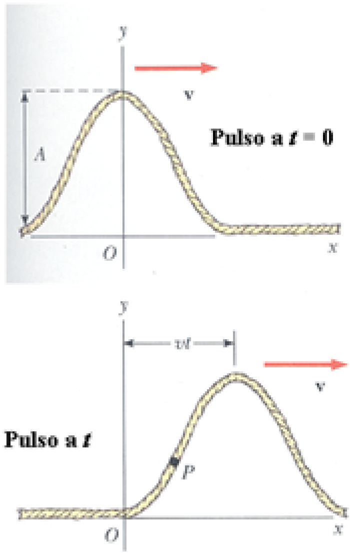

Figura 3:

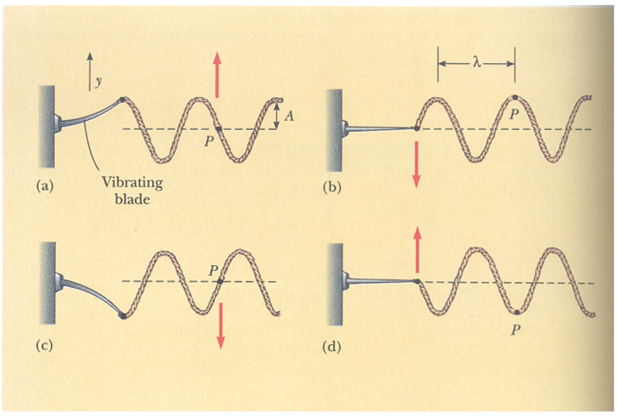

Figura 4:

R:[13]

13. Uma onda progressiva transversal é representada matematicamente pela seguinte expressão:

$$\Psi(x,t) = \frac{2}{(x-3t)^2+1}$$

onde x e Ψ são representados em centímetros e t em segundos. A figura 3 mostra esta onda no instante inicial e num instante genérico t. Calcule a amplitude e a velocidade de propagação da onda.

R:[14]

14. Uma onda sinusoidal desloca-se no sentido positivo do eixo dos xx com uma amplitude de 15.0 cm, um comprimento de onda de 40 cm e uma frequência de 8.00 s^{-1}. O deslocamento vertical do meio a $t = 0$ e $x = 0$ é de 15.0 cm. Calcule:

   (a) O número de onda angular, a frequência angular, o período e a velocidade de propagação da onda.

(b) Escreva uma expressão geral para a onda.
R:[15]

15. Mostra-se na figura 4 um sistema gerador de ondas numa corda. A vareta metálica à qual se encontra ligada a corda no lado esquerdo é posta a oscilar com um movimento harmónico simples com frequência 5.00 Hz. A amplitude da oscilação é 12.0 cm e a velocidade de propagação da onda 20.0 m/s.

   (a) Determine a frequência angular e o número de onda angular.
   (b) Escreva uma expressão geral para a onda.
   (c) Se soubesse que na origem ($x = 0$) a posição inicial ($t = 0$) é zero e a velocidade transversal inicial ($t = 0$) é um valor diferente de zero mas positivo, qual a equação que descreve a onda de forma completa? Quais as semelhanças e diferenças em relação à equação da alínea anterior?
   R:[16]

16. Uma onda sinusoidal contínua propaga-se numa corda com velocidade de 50 cm/s. Verifica-se que o deslocamento das partículas da corda no ponto $x = 10$ cm, varia com o tempo de acordo com a equação

$$\Psi(x,t) = 5.0 \sin(1.0 - 4.0t)$$

   Determine:

   (a) A frequência da onda.
   (b) O comprimento de onda.
   (c) A equação geral que descreve o deslocamento transversal das partículas da corda, em função da posição e do tempo.
   R:[17]

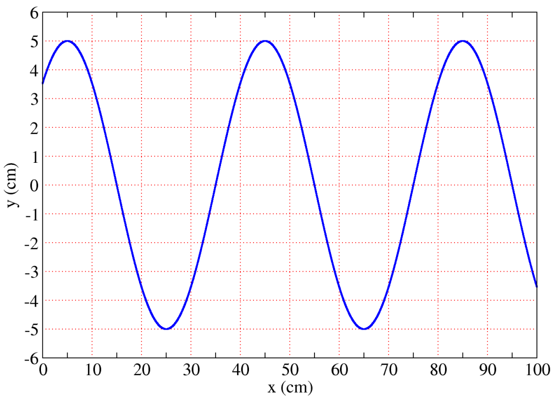

Figura 5:

17. Uma onda transversal harmónica simples propaga-se ao longo de uma corda para a esquerda. A figura 5 mostra um gráfico do deslocamento em função da posição, no instante $t = 0$. A velocidade da onda é 12 m/s.

(a) Determine a amplitude, o comprimento de onda, o período e a velocidade transversal máxima de uma partícula da corda.

(b) A equação de propagação da onda sabendo que no instante inicial ($t = 0$), $\Psi(x = 0.05\text{ m}, t = 0) = 0.05$ m.
R:[18]

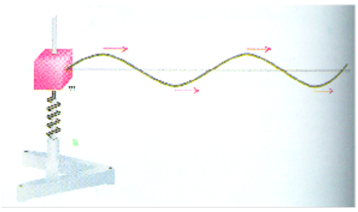

Figura 6:

18. Uma onda sinusoidal transversal é gerada numa das extremidades de uma longa corda horizontal através de uma massa que se desloca para cima e para baixo com um movimento harmónico simples de 14 cm de amplitude conforme se mostra na figura 6. Este movimento produz uma onda de comprimento de onda $\lambda = 2.5$ m que se propaga no sentido positivo do eixos dos xx com uma velocidade $c = 245$ m/s.

(a) Qual a frequência da onda progressiva?

(b) Qual a velocidade transversa máxima de um ponto da corda?

(c) Qual a aceleração transversa máxima de um ponto da corda?
R:[19]

19. Uma onda transversal propaga-se numa corda. O deslocamento transversal y é dado por $\Psi = 2\sin(3x - 4t)$, onde x e Ψ são dados em centímetros e t em segundos. Determine a expressão da velocidade transversal de uma partícula da corda em função de x e t.

R:[20]

Sobreposição de ondas: interferência

20. Duas oscilações transversais de uma onda são dadas por:

$$\begin{aligned}\Psi_1 &= \sin\left(2x - 3t - \frac{2\pi}{3}\right)\\ \Psi_2 &= \sin\left(2x - 3t\right)\end{aligned}$$

Em que a grandeza Ψ mede-se em cm, a distância x em cm e o tempo t em s.

(a) Ache a expressão da onda total, resultante da sobreprosição destes dois movimentos vibratórios.
R:[21]

(b) Classifique os oscilações 1, 2 e total em progressivas ou estacionárias e calcule a amplitude, o comprimento de onda, a frequência e a velocidade de propagação das ondas.
R:[22]

21. Suponha que tem duas ondas com a mesma frequência $f = 500$ kHz e comprimento de onda $\lambda = 3$ cm, e que partem em fase de origens diferentes. Estas duas ondas encontram-se num ponto que dista 2.5 m da origem da primeira onda e 99 cm da origem da segunda onda.

    Qual é a diferença de fase entre as duas ondas nesse ponto?

    R:[23]

22. Duas ondas progressivas possuem a mesma amplitude ($A = 3$ cm) e propagam-se no mesmo sentido com a mesma velocidade ($c = 15$ cm/s). As duas possuem o mesmo comprimento de onda ($\lambda = 1.5$ cm) e a diferença de fase entre elas é igual a $\pi/2$ radianos. Obtenha a expressão da onda resultante destes dois movimentos e diga se se trata de uma onda progressiva ou estacionária.

    R:[24]

Ondas estacionárias

23. Considere as seguintes ondas:

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= A\sin(kx - \omega t) \\ \Psi_2 &= A\sin(kx + \omega t) \end{aligned}$$

Suponha que estas duas ondas se sobrepõem.

(a) Determine a equação da onda resultante.

(b) Mostre que a onda resultante é uma onda estacionária.

(c) Calcule os nodos e os antinodos em função do comprimento de onda.
R:[25]

24. Considere uma onda estacionária formada numa corda vibrante e descrita matematicamente por $\Psi = 2A\sin(kx)\cos(\omega t)$. A corda está fixa em duas extremidades e tem comprimento L.

(a) Aplique as condições limite nas extremidades da corda, ou seja, $\Psi(x = 0, t) = \Psi(x = L, t) = 0$, e calcule o comprimento de onda dos três primeiros modos normais de vibração em função do comprimento da corda.
R:[26]

(b) Localize os nodos e os antinodos para os três primeiros modos normais de vibração.

R:[27]

25. Duas ondas progressivas sinusoidais deslocam-se ao longo da mesma direcção mas em sentidos opostos num meio unidimendional.

    As ondas são transversais e podem ser descritas por

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= A\sin(kx - \omega t) \\ \Psi_2 &= A\sin(kx + \omega t) \end{aligned}$$

    As ondas têm ambas velocidade de propagação 1.8 m/s a frequência angular 29 rad/s.

    (a) Mostre que a onda resultante é uma onda estacionária.
    (b) Determine o comprimento de onda das duas ondas progressivas.
    (c) Calcule a relação entre o comprimento de onda da onda estacionária resultante e o das ondas progressivas.
    R:[28]

26. Duas ondas progressivas deslocam-se em direcções opostas ao longo da mesma direcção e dão origem a uma onda estacionária por sobreposição. As duas ondas são dadas por

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= 4.0\sin(3.0x - 2.0t) \\ \Psi_2 &= 4.0\sin(3.0x + 2.0t) \end{aligned}$$

    onde x e Ψ são medidos em centímetros e t em segundos.

    (a) Calcule o valor máximo da onda resultante para $x = 2.3$ cm.
    (b) Calcule a posição dos nodos e dos antinodos.
    R:[29]

27. Duas ondas progressivas sinusoidais deslocam-se numa corda no mesmo sentido e interferem. A amplitude da cada uma das ondas é 9.7 mm e a diferença de fase entre ambas 110°.

    (a) Qual a amplitude da onda formada pela interferência destas duas ondas?
    (b) Qual deveria ser a diferença de fase $\Delta\phi$ entre as ondas que interferem para que a amplitude da onda resultante fosse igual à amplitude das ondas originais ?
    R:[30]

28. Deduza a equação para os níveis energéticos do átomo de Bohr, assumindo que os electrões se comportam como ondas estacionárias.

Soluções

Notes

[1] $A = 10$ m; $\lambda = 0.5$ m; $f = 100$ Hz; $\omega = 200\pi$ rad/s; $c = 50$ m/s

[2]

$$\Psi(0,t) = 10\sin(-200\pi t)$$
$$\Psi(0.25,t) = 10\sin(-200\pi t + \pi)$$
$$\Psi(0.5,t) = 10\sin(2\pi - 200\pi t)$$

[3] $\Psi(x, t = 0) = 10\sin(4\pi x)$; $\Psi(x, t = 0.01\ s) = 10\sin(4\pi x - 2\pi)$

[4] $A = 5$ cm; $\lambda = 5$ cm; $f = 4$ Hz; $c = -20$ cm/s

[5] $T = 0.8$ s; $f = 1.25$ Hz; $c = 1.5$ m/s

[6] $\Psi(x,t) = 1.5\sin\left(\frac{\pi}{5}x - 50\pi\, t + 0.563\right)$

[7] $A = 0.2$ m; $f = 1\ \mathrm{s}^{-1}$; $\omega = 2\pi$ rad/s; $T = 1$ s; $\lambda = 0.5$ m; $k = 4\pi$ rad/m; $c = 0.5$ m/s

[8] $A = 0.1$ m; $f = 2.5\ \mathrm{s}^{-1}$; $\omega = 5\pi$ rad/s; $T = 0.4$ s; $\lambda = 2$ m; $k = \pi$ rad/m

[9] $k = 23.3$ rad/m; $f = 48.2\ \mathrm{s}^{-1}$

[10] $f = 2.8\ \mathrm{s}^{-1}$

[11] $c = 4$ m/s; $\Psi(x,t) = 2.5 \times 10^{-3}\sin(10\pi x + 40\pi t)$

[12] $\lambda = 3$ m; $k = 2.1$ rad/m; $f = 0.83\ \mathrm{s}^{-1}$; $\omega = 5.2$ rad/s; $T = 1.2$ s; $c = 2.5$ m/s

[13] $c = -24$ m/s; $\lambda = 16$ m; $f = 1.5$ Hz

[14] $A = 2$ cm; $c = 3$ cm/s

[15] $k = 0.157$ rad/cm; $\omega = 50.3$ rad/s; $T = 0.125$ s; $c = 320$ cm/s;
$\Psi(x,t) = 15\sin\left(0.157x - 50.3t + \dfrac{\pi}{2}\right)$

[16] $\omega = 31.4$ rad/s; $k = 1.57$ rad/m;
$\Psi(x,t) = 0.120\sin(1.57x - 31.4t)$;
$\Psi(x,t) = 0.120\sin(1.57x - 31.4t + \pi)$

[17] $f = 2\pi$ Hz
$\lambda = 25\pi$ cm;
$\Psi(x,t) = 5\sin(0.08x - 4t + 0.2)$

[18] $A = 5$ cm; $\lambda = 0.4$ m; $T = 3.33 \times 10^{-2}$ s; $v_{y,max} = 9.4$ m/s
$\Psi(x,t) = 0.05\sin(5\pi x - 60\pi t + \pi/4)$

[19] $f = 98$ Hz; $\omega = 196\pi$ rad/s; $v_{y,max} = 86.2$ m/s; $a_{y,max} = 53081\ \mathrm{m/s^2}$

[20] $v(x,t) = -8\cos(3x - 4t)$ (cm/s)

[21] $\Psi = \sin\left(2x - 3t - \dfrac{\pi}{3}\right)$

[22] *Progressivas*; $A = 1$ cm; $\lambda = \pi$ cm; $f = 3/2\pi$ Hz; $c = 1.5$cm/s

[23] $\dfrac{2\pi}{3}$

[24] $\Psi(x,y) = 4.24\sin\left[\dfrac{4\pi}{3}(x - 15t) + \dfrac{\pi}{4}\right]$

[25] $\Psi = 2A\sin(kx)\cos(\omega t)$; $x_{nodos} = m\frac{\lambda}{2}$; $x_{antinodos} = (m + \frac{1}{2})\frac{\lambda}{2}$; $m = 0, 1, 2, ...$

[26] $\lambda_n = \dfrac{2L}{n}, n = 1, 2, ...$

[27]

(Modo fundamental Nodos: $x = 0, L$; Antinodos: $x = L/2$)
(2°Harmónica Nodos: $x = 0, L/2, L$; Antinodos: $x = L/4, 3L/4$)
(3°Harmónica Nodos: $x = 0, L/3, 2L/3, L$; Antinodos: $L/6, L/2, 5L/6$)

[28] 0.39 m; *mesmo*

[29] 4.6 cm; $x_{nodos} = m\frac{\pi}{3}$ cm; $x_{antinodos} = (m + \frac{1}{2})\frac{\pi}{3}$ cm; $m = 0, 1, 2, ...$

[30] 11 mm; $120^{\circ} = 2.1$ rad