# Mecânica Quântica

Ricardo Mendes Ribeiro

27 de Abril de 2017

# Mecânica Quântica

## Sobreposição de Estados

1. Um protão encontra-se no estado de spin descrito por

$$|\Psi\rangle = 0.5|\uparrow\rangle + 0.866|\downarrow\rangle$$

Qual é a probabilidade de, ao efectuar uma medida, encontrar o protão no estado $|\uparrow\rangle$ e qual a probabilidade de o encontrar no estado $|\downarrow\rangle$?

**R:** [1]

2. Uma determinada partícula está num estado quântico definido pela função de onda

$$|\Psi\rangle = 0.1|\leftarrow\rangle + 0.3i|\uparrow\rangle + 0.5|\rightarrow\rangle - 0.4|\downarrow\rangle + a|\leftrightarrow\rangle$$

Qual é a probabilidade de a partícula, ao se efectuar uma medida, ficar no estado $|\leftrightarrow\rangle$?

**R:** [2]

3. A soma das probabilidades de medida tem de dar 1; a isto chama-se *normalização* e a um estado que obedeça a essa condição diz-se *normalizado*. Verifique se os seguintes estados estão normalizados:

   (a) $|\psi_1\rangle = \frac{1}{2}\left(|HH\rangle + |HV\rangle + |VH\rangle + |VV\rangle\right)$

   (b) $|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|HV\rangle + |VH\rangle\right)$

   (c) $|\psi_3\rangle = \frac{1}{2}|HH\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(|VH\rangle + |VV\rangle\right)$

   (d) $|\psi_4\rangle = \cos\alpha|HH\rangle + \sin\alpha|VV\rangle$

**R:** [3]

4. Se tivermos duas partículas em que uma pode estar nos estados $|A\rangle$ ou $|B\rangle$, e a segunda pode estar nos estados $|\uparrow\rangle$, $|\downarrow\rangle$, $|\leftarrow\rangle$ ou $|\rightarrow\rangle$, quais são os estados possíveis das duas partículas?

**R:** [4]

5. Considere um trio de partículas que podem, cada uma, estar num estado $|0\rangle$ ou $|1\rangle$. A sua função de onda é descrita por:

$$|\Psi\rangle = 0.1|000\rangle + 0.3535(1+i)|001\rangle + 0.2|010\rangle - 0.1|100\rangle + 0.5|011\rangle - 0.361|101\rangle + 0.55|111\rangle$$

(a) Qual é o estado mais provável, após uma medida?

(b) Se fizer 200 medidas em 200 sistemas idênticos a este, quantas vezes espera obter o estado $|010\rangle$?

(c) Se fizer 20 medidas no mesmo sistema, quantas vezes espera obter o estado $|010\rangle$?

(d) Qual é a probabilidade de, ao medir apenas a primeira das três partículas, a encontrar no estado $|0\rangle$?

(e) Há alguma combinação de medidas que nunca aconteça?

**R:** [5]

6. Mostre que o estado a duas partículas

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|HH\rangle + |VV\rangle\right)$$

não pode ser escrito como dois estados independentes, ou seja, representa um estado entrelaçado.

7. Indique quais dos estados seguintes não estão entrelaçados:

(a) $|\psi_1\rangle = \frac{1}{2}\left(|HH\rangle + |HV\rangle + |VH\rangle + |VV\rangle\right)$

(b) $|\psi_2\rangle = \frac{1}{2}\left(|HH\rangle + |HV\rangle + |VH\rangle - |VV\rangle\right)$

(c) $|\psi_3\rangle = \frac{1}{2}|HH\rangle + \sqrt{\frac{3}{8}}\left(|VH\rangle + |VV\rangle\right)$

(d) $|\psi_4\rangle = \cos\alpha|HH\rangle + \sin\alpha|VV\rangle$

(e) $|\psi_5\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|HV\rangle - |VH\rangle\right)$

**R:** [6]

8. Considere o seguinte estado de spin segundo $z$ de um electrão: $|S_z\rangle = |+_z\rangle$. Qual é a probabilidade de ao efectuar uma medida do spin segundo $x$ obter o estado $S_x = |+_x\rangle$?

**R:** [7]

9. Considere o seguinte estado de spin segundo $z$ de um electrão: $|S_z\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|+_z\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}|-_z\rangle$.

(a) Qual é a probabilidade de ao efectuar uma medida do spin segundo $x$ obter o estado $S_x = |+_x\rangle$?

(b) Qual é a probabilidade de ao efectuar uma medida do spin segundo $y$ obter o estado $S_y = |+_y\rangle$?

**R:** [8]

10. Mostre que os operadores $\mathbf{X}$ e $\mathbf{H}$ são unitários, ou seja $\mathbf{XX} = 1$ e $\mathbf{HH} = 1$.

11. Qual é o estado resultante de aplicar o operador $\mathbf{H}$ ao segundo qubit do estado $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|101\rangle + |010\rangle)$?

    **R:** [9]

12. Considere um sistema no estado $|\psi\rangle = |000\rangle$. Aplique sucessivamente o operador $\mathbf{H}$ a cada um dos qubits.

    (a) Qual é a probabilidade de obter o estado $|000\rangle$ se fizer uma medida no fim destas operações?

    (b) Suponha que fez uma medida só no segundo qubit, e obteve o valor 0. Qual é o estado resultante?

    (c) Aplique o operador **cNOT** aos dois primeiros qubits (a contar da esquerda; o mais à esquerda como controlador) deste estado. Qual é a probabilidade de obter o estado $|000\rangle$ se fizer uma medida no fim destas operações?

    **R:** [10]

## Relações de de Broglie: $p = \hbar k$; $E = \hbar\omega$

13. Utilizando a relatividade ($p^2 = 2mE_c + \frac{E_c^2}{c^2}$) nos três últimos casos e a física clássica ($p^2 = 2mE_c$) no primeiro, determine o comprimento de onda de um electrão que:

    (a) se move a 1000 km/h;

    (b) se move com uma energia cinética de 10 keV (televisão a preto e branco);

    (c) se move com uma energia cinética de 30 keV (microscópio electrónico);

    (d) se move com uma energia cinética de 15 GeV (acelerador de partículas).

    **R:** [11]

14. O comprimento de onda da risca amarela do espectro do sódio é 5890 Å. A que energia cinética um electrão tem o mesmo comprimento de onda? Assuma a aproximação clássica. (1 Å $= 10^{-10}$ m)

    **R:** [12]

15. Um electrão e um fotão têm ambos um comprimento de onda de 2.0 Å. Assuma que o electrão não tem uma velocidade relativística.

    (a) Quais são os seus momentos lineares?

    (b) Quais são as suas energias cinéticas totais?

    (c) Compare a energia cinética do electrão com a do fotão.

    **R:** [13]

16. Uma dada partícula não-relativística sem carga eléctrica desloca-se três vezes mais rápidamente que um electrão. A razão entre os comprimentos de onda da partícula e do electrão, é de $1.813 \times 10^{-4}$. Identifique a partícula.

    **R:** [14]

17. Um neutrão térmico tem uma energia cinética média de $\frac{3}{2}k_B T$ em que $T$ é a temperatura ambiente (300 K) e $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K é a constante de Boltzmann. Tais neutrões estão em equilíbrio térmico com o meio.

    (a) Qual a energia cinética em eV do neutrão térmico (1 eV $= 1.6 \times 10^{-19}$ J)?

    (b) Qual é o comprimento de onda?

    **R:** [15]

18. Uma partícula movendo-se com uma energia cinética igual à sua energia em repouso tem um comprimento de onda de $1.7898 \times 10^{-6}$ Å. Se a energia cinética duplicar qual será o novo comprimento de onda?

    **R:** [16]

19. O acelerador de 50 GeV da Universidade de Stanford fornece um feixe de electrões relativístico, de comprimento de onda muito pequeno, adequado ao estudo dos detalhes finos da estrutura nuclear através de experiências de espalhamento (*scattering*). Qual é este comprimento de onda e como é que se compara com o tamanho médio do núcleo?

    **R:** [17]

# Função de Onda

20. Considere um electrão descrito pela função de onda

$$\Psi(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin(x)}{x}$$

    (a) Determine a densidade de probabilidade de encontrar o electrão no ponto $x = 0$.

    (b) Determine a densidade de probabilidade de encontrar o electrão no ponto $x = 5$.

    **R:** [18]

21. Considere uma partícula numa caixa rígida (ou um poço de potencial infinito) a uma dimensão, com um tamanho $a$. A solução da equação de Schrödinger independente do tempo para este caso é:

$$\psi(x) = A\sin(\frac{n\pi}{a}x)$$

    em que $A$ é uma constante de normalização.

    (a) Qual é o valor da constante de normalização $A$? $[\int \sin^2(kx)dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4k}\sin(2kx)]$

    (b) Qual é a probabilidade de encontrar a partícula na posição $x = a/2$, para cada $n$?

(c) Use as relações de de Broglie e a aproximação clássica para determinar a expressão da energia cinética da partícula.

**R:** [19]

22. A probabilidade de uma partícula de energia $E$ incidir numa barreira de potencial de valor $U > E$ e a atravessar é dada por

$$P = e^{-2\alpha L}$$

em que $L$ é o comprimento da barreira e

$$\alpha = \sqrt{\frac{2m(U-E)}{\hbar^2}}$$

Qual é a probabilidade de um electrão de 0.5 eV de energia atravessar uma barreira de potencial de 3 eV e 1 nm de espessura?

**R:** [20]

# Princípio de Incerteza: $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$

23. Pretende-se medir a velocidade de um electrão confinado num cubo de 5 nm de lado. Determine o mínimo valor da velocidade que corresponde a uma precisão de 0.1%.

**R:** [21]

24. Para uma partícula livre, o princípio de incerteza pode ser escrito como

$$\Delta\lambda\Delta x = \frac{\lambda^2}{4\pi}$$

Se $\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda} = 10^{-7}$ para um fotão, qual o correspondente valor de $\Delta x$ para

(a) $\lambda = 5.00 \times 10^{-4}$ Å (raio gama)

(b) $\lambda = 5.00$ Å (raio x)

(c) $\lambda = 5000$ Å (luz)

**R:** [22]

25. Considere um feixe laser com um comprimento de onda de $800 \pm 5$ nm. Pode-se provar que

$$\Delta\lambda\Delta t = \frac{\lambda^2}{4\pi c}$$

Determine a duração do pulso laser em fs.

**R:** [23]

26. O tempo de vida de um estado excitado de um núcleo é cerca de $10^{-12}$ s. Qual é a incerteza na energia do fotão gama emitido pelo núcleo?

**R:** [24]

27. Um átomo num estado excitado tem um tempo de vida de $1.2 \times 10^{-8}$ s; num segundo estado excitado o tempo de vida é de $2.3 \times 10^{-8}$ s. Qual é a incerteza em energia dos fotões emitidos quando o átomo transita entre os dois estados referidos.

    **R:** [25]

28. Os núcleos atómicos têm um tamanho típico de $10^{-14}$ m e frequentemente emitem electrões de energia 1 a 10 MeV. No ínicio do desenvolvimento da física nuclear, pensava-se que os electrões residiam dentro do núcleo. Utilize o princípio de incerteza de Heisenberg para mostrar que electrões com as referidas energias não podem estar contidos dentro do núcleo.

## Transições

29. Os níveis energéticos do átomo de hidrogénio podem ser descritos pela fórmula:

$$E = -\frac{m_e\, e^4}{8\epsilon_0^2\, h^2}\,\frac{1}{n^2}$$

Ou, substituindo os valores:

$$E = (-13.6 \text{ eV})\ \frac{1}{n^2}$$

Determine as energias de transição do estado fundamental para os três estados seguintes.

**R:** [26]

30. Os níveis energéticos de um poço de potencial infinito são dados por

$$E_n = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \qquad\qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

em que $a$ é a largura do poço, e $n$ é um inteiro.

Determine as frequências emitidas quando um electrão transita dos estados em que $n = 4$ para $n = 3$ e $n = 2$, assumindo que $a = 1$ nm.

**R:** [27]

31. Num oscilador harmónico os níveis de energia obtidos são particularmente simples:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c \qquad\qquad n = 0, 1, 2, 3, \cdots$$

em que $\omega_c = \sqrt{\dfrac{K}{m}}$ é igual à frequência de oscilação de um oscilador clássico com as mesmas características.

Os níveis são portanto igualmente espaçados.

Qual a frequência de transição entre dois estados adjacentes se se duplica a massa da partícula?

**R:** [28]

# Corpo negro

32. Determine o comprimento de onda correspondente ao máximo de intensidade do espectro de um corpo negro cuja temperatura absoluta é de $10^6$ K.

    **R:** [29]

33. O poder emissivo de um corpo negro, em equilíbrio térmico num recinto onde se fez vácuo, é máximo para a radiação de comprimento de onda $\lambda = 100$ Å. Calcule a temperatura do recinto.

    **R:** [30]

34. Supondo que a superfície da Terra permanece a uma temperatura constante e que a Terra pode ser considerada como um corpo negro em equilíbrio térmico, determine a sua temperatura. Considere $T_{Sol} = 5800$ K, $R_{Sol} = 7 \times 10^8$ m, $D_{Terra-Sol} = 1.3 \times 10^{11}$ m.

    **R:** [31]

35. Considere a lei de Wien. Assuma que temos um corpo negro irradiando a 2500 K. Calcule o comprimento de onda em Å em que a radiação emitida é máxima. Este comprimento de onda está na parte visível do espectro?

    **R:** [32]

# Soluções

# Notes

[1] $P_\uparrow = 0.25; P_\downarrow = 0.75$
[2] 0.49
[3] Estão todos normalizados menos (c).
[4] $|A\uparrow\rangle$, $|A\downarrow\rangle$, $|A\leftarrow\rangle$, $|A\rightarrow\rangle$, $|B\uparrow\rangle$, $|B\downarrow\rangle$, $|B\leftarrow\rangle$, $|B\rightarrow\rangle$
[5] $|111\rangle$; 8; 20 ou zero; 0.55; sim: $|110\rangle$
[6] Só o estado $|\psi_1\rangle$.
[7] 0.5
[8] $0.029, 0.5$
[9] $\frac{1}{2}\left(|101\rangle + |111\rangle + |000\rangle - |010\rangle\right)$
[10] $1/8$, $\frac{1}{2}\left(|000\rangle + |001\rangle + |100\rangle + |101\rangle\right)$, $1/4$
[11] $2.62\times10^{-6}\text{m}, 1.22\times10^{-11}\text{m}, 6.99\times10^{-12}\text{m}, 8.3\times10^{-17}\text{m}$
[12] $4.34\times10^{-6}$ eV
[13] $P_f = P_e = 3.315\times10^{-24}$ kg m/s; $E_f = 9.95\times10^{-16}$ J; $E_e = 6.03\times10^{-18}$ J
[14] neutrão
[15] 0.0388 eV; $1.456\times10^{-10}$ m
[16] $1.096\times10^{-6}$ Å
[17] $2.5\times10^{-17}$ m
[18] $\frac{1}{\pi^2}$; 0.00372
[19] $A = \sqrt{\frac{2}{a}}$; $P = \frac{2}{a}\sin^2(n\pi/2)$; $E_c = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$
[20] $8\times10^{-8}$ (colocar as casas decimais todas!)
[21] $6.7\times10^{6}$ m/s
[22] 397.9 Å; $3.979\times10^{6}$ Å; $3.979\times10^{9}$ Å
[23] 16.98 fs
[24] $5.28\times10^{-23}$ J
[25] $4.17\times10^{-8}$ eV
[26] 10.2 eV; 12.1 eV; 12.75 eV
[27] $f_{4-3} = 6.38\times10^{14}$ Hz, $f_{4-2} = 1.09\times10^{15}$ Hz
[28] $\omega_c' = \omega_c/\sqrt{2}$
[29] 2.898 nm
[30] $289.8\times10^{3}$ K
[31] 300.9 K
[32] $1.1592\times10^{-6}$ m; não, está no infra-vermelho.