LÓGICA EI
Mestrado Integrado em Engenharia Informática
Universidade do Minho

Departamento de Matemática

2020/2021

2. Cálculo de Predicados de Primeira Ordem da Lógica Clássica

Observação: O *Cálculo de Predicados de Primeira Ordem da Lógica Clássica* (adiante abreviado por *Cálculo de Predicados*) é também conhecido na literatura por *Lógica de Primeira Ordem Clássica* ou, simplesmente, por *Lógica de Primeira Ordem*.

Observação:

Ao contrário do Cálculo Proposicional, no Cálculo de Predicados existem duas classes sintáticas: a classe dos termos e a classe das fórmulas.

Termos corresponderão a objetos do domínio de discurso em questão (por exemplo, números naturais ou conjuntos).

Fórmulas corresponderão a afirmações relativas a tais objetos (por exemplo, “dois é um número par” ou “o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto”).

Observação:

O Cálculo de Predicados será *parametrizado* por um *tipo de linguagem*.

O tipo de linguagem fixará símbolos que poderão ser usados para construir termos (símbolos de função) ou para denotar relações elementares entre os objetos (símbolos de relação), que dependerão do problema em estudo.

Por exemplo, se estivermos a considerar a *Aritmética* (a teoria dos números naturais), entre outros, será útil ter símbolos para denotar o número 0, a operação de adição e a relação de igualdade.

Se considerararmos *Teoria de Conjuntos*, será útil, por exemplo, ter símbolos para denotar o conjunto vazio, as operações de reunião de conjuntos e de conjunto potência, e as relações de pertença, inclusão e igualdade de conjuntos.

2.1 Sintaxe do Cálculo de Predicados

Definição: Um tipo de linguagem é um terno $(\mathcal{F}, \mathcal{R}, \mathcal{N})$ t.q.:

a) $\mathcal{F}$ e $\mathcal{R}$ são conjuntos disjuntos;

b) $\mathcal{N}$ é uma função de $\mathcal{F} \cup \mathcal{R}$ em $\mathbb{N}_0$.

Os elementos de $\mathcal{F}$ são chamados símbolos de função.

Os elementos de $\mathcal{R}$ são chamados símbolos de relação ou símbolos de predicado.

A função $\mathcal{N}$ é chamada função aridade.

Para cada $s \in \mathcal{F} \cup \mathcal{R}$, $n = \mathcal{N}(s)$ é chamada a *aridade de s* ("o número de argumentos que s espera"), dizendo-se s um símbolo n-ário.

Os símbolos de função de aridade 0 são chamados constantes.
(Assumiremos que os símbolos de relação nunca têm aridade 0.)

Os símbolos de aridade 1 dir-se-ão também símbolos unários, os de aridade 2 binários, etc.

Exemplo: O terno $L_{Arit} = (\{0, s, +, \times\}, \{=, <\}, \mathcal{N})$, onde $\mathcal{N}(0) = 0$, $\mathcal{N}(s) = 1$, $\mathcal{N}(+) = 2$, $\mathcal{N}(\times) = 2$, $\mathcal{N}(=) = 2$ e $\mathcal{N}(<) = 2$, é um tipo de linguagem.

Chamaremos a L_{Arit} o *tipo de linguagem para a Aritmética*.

Notação : Habitualmente, usaremos a letra L (possivelmente indexada) para denotar tipos de linguagens.

Caso nada seja dito em contrário, durante este capítulo, L denotará um tipo de linguagem $(\mathcal{F}, \mathcal{R}, \mathcal{N})$, cujo conjunto de constantes será denotado por $\mathcal{C}$.

Definição: O *alfabeto $\mathcal{A}_L$ induzido por um tipo de linguagem L* é o conjunto formado pelos seguintes símbolos:

a) $\perp$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ (os *conetivos proposicionais*);

b) $\exists$ e $\forall$, chamados *quantificador existencial* e *quantificador universal*, respetivamente;

c) $x_0, x_1, ..., x_n, ...$, chamados *variáveis (de primeira ordem)*, formando um conjunto numerável, denotado por $\mathcal{V}$;

d) "(", ")" e ",", chamados *símbolos auxiliares*;

e) os símbolos de função e os símbolos de relação de L (que se assumem distintos de todos os símbolos anteriores).

Exemplo:

A sequência de 8 símbolos

$$\exists x_0 \neg (x_0 = 0)$$

é uma palavra sobre o alfabeto $\mathcal{A}_{L_{Arit}}$.

Mas, a sequência de 8 símbolos

$$\exists x_0 \neg (x_0 = 1)$$

não é uma palavra sobre $\mathcal{A}_{L_{Arit}}$ (1 não é uma das letras de $\mathcal{A}_{L_{Arit}}$).

Definição: O conjunto $\mathcal{T}_L$ é o menor conjunto de palavras sobre $\mathcal{A}_L$ que satisfaz as seguintes condições:

a) para todo $x \in \mathcal{V}$, $x \in \mathcal{T}_L$;

b) para toda a constante c de L, $c \in \mathcal{T}_L$;

c) para todo o símbolo de função f de L, de aridade $n \geq 1$,

$$t_1 \in \mathcal{T}_L \text{ e ... e } t_n \in \mathcal{T}_L \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} f(t_1, ..., t_n) \in \mathcal{T}_L, \\ \text{para todo } t_1, ..., t_n \in (\mathcal{A}_L\ )^*. \end{array}$$

Aos elementos de $\mathcal{T}_L$ chamaremos *termos de tipo L* ou *L-termos*, ou simplesmente termos (quando for claro qual o tipo de linguagem subententendido).

Exemplo:

1. As seguintes seis palavras sobre $\mathcal{A}_{L_{Arit}}$ são L_{Arit}-termos. Porquê?

$$x_1\ ,\quad x_2\ ,\quad 0\ ,\quad s(0)\ ,\quad \times(x_1, x_2)\ ,\quad +(\times(x_1, x_2), s(0))$$

2. As duas seguintes palavras sobre $\mathcal{A}_{L_{Arit}}$ (de comprimento 6)

$$= (0, x_1)\ ,\quad < (0, x_1)\ ,$$

não são L_{Arit}-termos.

Apesar de $=$ e $<$ serem símbolos de aridade 2 e de 0 e x_1 serem dois L_{Arit}-termos, $=$ e $<$ são símbolos de relação e não símbolos de função, como exigido na condição *c*) da definição anterior.

Estas duas palavras são exemplos do que adiante designaremos por *fórmulas atómicas*.

Exemplo: Seja L o tipo de linguagem $(\{c, f_1, f_2\}, \{R_1, R_2\}, \mathcal{N})$, onde $\mathcal{N}(c) = 0$, $\mathcal{N}(f_1) = 1$, $\mathcal{N}(f_2) = 2$, $\mathcal{N}(R_1) = 1$ e $\mathcal{N}(R_2) = 2$.

As seguintes quatro palavras sobre $\mathcal{A}_L$ são L-termos. Porquê?

$$c\,, \quad x_1\,, \quad f_2(c, x_1)\,, \quad f_1(f_2(c, x_1))$$

Notação :

Quando f é um símbolo de função binário e $t_1, t_2 \in \mathcal{T}_L$, a notação $t_1 \, f \, t_2$, possivelmente entre parênteses, representará o L-termo $f(t_1, t_2)$.

Por exemplo, a notação $(x_1 \times x_2) + s(0)$ representará o L_{Arit}-termo $+(\times(x_1, x_2), s(0))$.

Teorema (Indução Estrutural em L-Termos):

Seja $P(t)$ uma condição sobre um L-termo t.

Se:

a) para todo $x \in \mathcal{V}$, $P(x)$;

b) para todo $c \in \mathcal{C}$, $P(c)$;

c) para todo $f \in \mathcal{F}$, de aridade $n \geq 1$, e para todo $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$,

$$P(t_1) \text{ e } ... \text{ e } P(t_n) \implies P(f(t_1, ..., t_n));$$

então, para todo $t \in \mathcal{T}_L$, $P(t)$.

Observação:

A definição indutiva do conjunto dos L-termos é determinista e tem associado um *princípio de recursão estrutural*, para definir funções cujo domínio é o conjunto dos L-termos.

Este princípio é usado nas três definições que se seguem.

Definição: O *conjunto das variáveis* que ocorrem num L-termo t é notado por $VAR(t)$ e é definido, por recursão estrutural em L-termos, do seguinte modo:

a) $VAR(x) = \{x\}$, para todo $x \in \mathcal{V}$;

b) $VAR(c) = \emptyset$, para todo $c \in \mathcal{C}$;

c) $VAR(f(t_1, ..., t_n)) = \bigcup_{i=1}^{n} VAR(t_i)$,

para todo $f \in \mathcal{F}$, de aridade $n \geq 1$, e para todo $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$.

Exemplo:

O conjunto das variáveis que ocorrem no L_{Arit}-termo $x_2 + s(x_1)$ é:

$$
\begin{array}{rl}
 & VAR(x_2 + s(x_1)) \\
= & VAR(x_2) \cup VAR(s(x_1)) \\
= & \{x_2\} \cup VAR(x_1) \\
= & \{x_2, x_1\}.
\end{array}
$$

Definição: O *conjunto dos subtermos* de um L-termo t é notado por $subt(t)$ e é definido, por recursão estrutural em L-termos, do seguinte modo:

a) $subt(x) = \{x\}$, para todo $x \in \mathcal{V}$;

b) $subt(c) = \{c\}$, para todo $c \in \mathcal{C}$;

c) $$subt(f(t_1, ..., t_n)) = \{f(t_1, ..., t_n)\} \cup \bigcup_{i=1}^{n} subt(t_i),$$

para todo $f \in \mathcal{F}$, de aridade $n \geq 1$, e para todo $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$.

Exemplo:

O conjunto dos subtermos do L_{Arit}-termo $(x_2 + s(x_1)) \times 0$ é:

$$\{x_2, x_1, s(x_1), x_2 + s(x_1), 0, (x_2 + s(x_1)) \times 0\}$$

Definição: A operação de *substituição* de uma variável x por um L-termo t num L-termo t' é notada por $t'[t/x]$ e é definida por recursão estrutural (em t') do seguinte modo:

a) $y[t/x] = \begin{cases} t, & se \;\; y = x \\ y, & se \;\; y \neq x \end{cases}$, para todo $y \in \mathcal{V}$;

b) $c[t/x] = c$, para todo $c \in \mathcal{C}$;

c) $f(t_1, ..., t_n)[t/x] = f(t_1[t/x], ..., t_n[t/x])$,
para todo $f \in \mathcal{F}$, de aridade $n \geq 1$, e para todo $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$.

Exemplo:

1. O L_{Arit}-termo que resulta da substituição da variável x_1 pelo L_{Arit}-termo $s(0)$ no L_{Arit}-termo $x_2 + s(x_1)$ é:

$$\begin{array}{rl} & (x_2 + s(x_1))[s(0)/x_1] \\ = & x_2[s(0)/x_1] + s(x_1)[s(0)/x_1] \\ = & x_2 + s(x_1[s(0)/x_1]) \\ = & x_2 + s(s(0)) \end{array}$$

2. $(x_2 + s(x_1))[s(0)/x_0] = x_2 + s(x_1)$

   (observe que $x_0 \notin VAR(x_2 + s(x_1))$).

Proposição: Sejam x uma variável e t_1 e t_2 L-termos.
Se $x \notin VAR(t_1)$, então $t_1[t_2/x] = t_1$.

Dem.: Por indução estrutural em t_1. □

Definição: Uma palavra sobre o alfabeto induzido por L da forma

$$R(t_1, ..., t_n),$$

onde R é um símbolo de relação n-ário e $t_1, ..., t_n$ são L-termos, é chamada uma *fórmula atómica de tipo L* ou, abreviadamente, uma *L-fórmula atómica*.

O conjunto das L-fórmulas atómicas é notado por At_L.

Exemplo:

1. As três palavras sobre $\mathcal{A}_{L_{Arit}}$ que se seguem são fórmulas atómicas de tipo L_{Arit}:

$$= (0, x_1), \quad < (0, x_1), \quad = (+(0, x_1), \times(s(0), x_1)).$$

2. Já a palavra sobre $\mathcal{A}_{L_{Arit}}$ $\times(0, x_1)$ não é uma L_{Arit}-fórmula atómica ($\times$ é um símbolo de função e não um símbolo de relação; de facto, esta palavra é um L_{Arit}-termo).

Notação :

Quando R é um símbolo de relação binário e $t_1, t_2 \in \mathcal{T}_L$, a notação $t_1\, R\, t_2$, possivelmente entre parênteses, representará o L-fórmula atómica $R(t_1, t_2)$.

Por exemplo, a notação $x_0 < s(0)$ representará a L_{Arit}-fórmula atómica $<(x_0, s(0))$.

Definição: O conjunto $\mathcal{F}_L$ é o menor conjunto de palavras sobre $\mathcal{A}_L$ que satisfaz as seguintes condições:

a) $\varphi \in \mathcal{F}_L$, para toda a *L*-fórmula atómica φ;

b) $\perp \in \mathcal{F}_L$;

c) $\varphi \in \mathcal{F}_L \implies (\neg\varphi) \in \mathcal{F}_L$, para todo $\varphi \in (\mathcal{A}_L)^*$;

d) $\varphi \in \mathcal{F}_L$ e $\psi \in \mathcal{F}_L \implies (\varphi \Box \psi) \in \mathcal{F}_L$,
para todo $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e para todo $\varphi, \psi \in (\mathcal{A}_L)^*$;

e) $\varphi \in \mathcal{F}_L \implies (Qx\,\varphi) \in \mathcal{F}_L$,
para todo $Q \in \{\exists, \forall\}$, para todo $x \in \mathcal{V}$ e para todo $\varphi \in (\mathcal{A}_L)^*$.

Aos elementos de $\mathcal{F}_L$ chamaremos *fórmulas de tipo L* ou *L-fórmulas*, ou simplesmente fórmulas (quando for claro o tipo de linguagem subentendido).

Exemplo:

As seguintes palavras sobre $\mathcal{A}_{L_{Arit}}$ são fórmulas de tipo L_{Arit} (fazendo uso das simplificações anteriormente mencionadas na representação de fórmulas atómicas):

$$x_0 < s(0),$$

$$(\neg(x_0 < s(0))),$$

$$x_0 = x_1,$$

$$((\neg(x_0 < s(0))) \to (x_0 = x_1)),$$

$$(\exists x_1((\neg(x_0 < s(0))) \to (x_0 = x_1))),$$

$$(\forall x_0(\exists x_1((\neg(x_0 < s(0))) \to (x_0 = x_1)))).$$

Exemplo:

Recordemos o tipo de linguagem L do Slide 14:
$L = (\{c, f_1, f_2\}, \{R_1, R_2\}, \mathcal{N})$, onde $\mathcal{N}(c) = 0$, $\mathcal{N}(f_1) = 1$, $\mathcal{N}(f_2) = 2$, $\mathcal{N}(R_1) = 1$ e $\mathcal{N}(R_2) = 2$.

As seguintes quatro palavras sobre $\mathcal{A}_L$ são L-fórmulas:

$$R_1(x_1),$$

$$R_2(x_1, f_2(c, x_1)),$$

$$(R_1(x_1) \to R_2(x_1, f_2(c, x_1))),$$

$$(\forall x_1 (R_1(x_1) \to R_2(x_1, f_2(c, x_1)))).$$

Notação :

Os parênteses extremos e os parênteses à volta de negações ou de quantificadores são geralmente omitidos.

Por exemplo, a L_{Arit}-fórmula

$$(\forall x_0(\exists x_1((\neg(x_0 < s(0))) \to (x_0 = x_1))))$$

pode ser abreviada por

$$\forall x_0 \exists x_1(\neg(x_0 < s(0)) \to (x_0 = x_1)).$$

Teorema (Indução Estrutural em L-Fórmulas):
Seja $P(\varphi)$ uma condição sobre uma L-fórmula φ.
Se:

a) $P(\psi)$, para toda a L-fórmula atómica ψ;

b) $P(\perp)$;

c) $P(\psi) \implies P(\neg\psi)$, para todo $\psi \in \mathcal{F}_L$;

d) $P(\psi_1)$ e $P(\psi_2) \implies P(\psi_1 \square \psi_2)$,
para todo $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}, \psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}_L$;

e) $P(\psi) \implies P(Qx\,\psi)$, para todo $Q \in \{\exists, \forall\}, x \in \mathcal{V}, \psi \in \mathcal{F}_L$;

então $P(\varphi)$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}_L$.

Observação:

A definição indutiva do conjunto das L-fórmulas é determinista e tem associado um *princípio de recursão estrutural*, para definir funções cujo domínio é o conjunto das L-fórmulas.

Este princípio é usado na definição seguinte.

Definição: O conjunto das *subfórmulas* de uma *L*-fórmula φ é notado por *subf*(φ) e é definido, por recursão estrutural, do seguinte modo:

a) $\mathit{subf}(\psi) = \{\psi\}$, para toda a *L*-fórmula atómica ψ;

b) $\mathit{subf}(\bot) = \{\bot\}$;

c) $\mathit{subf}(\neg\psi) = \mathit{subf}(\psi) \cup \{\neg\psi\}$,
para todo $\psi \in \mathcal{F}_L$;

d) $\mathit{subf}(\psi_1 \Box \psi_2) = \mathit{subf}(\psi_1) \cup \mathit{subf}(\psi_2) \cup \{\psi_1 \Box \psi_2\}$,
para todo $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}_L$;

e) $\mathit{subf}(Qx\,\psi) = \mathit{subf}(\psi) \cup \{Qx\,\psi\}$,
para todo $Q \in \{\exists, \forall\}$, $x \in \mathcal{V}$, $\psi \in \mathcal{F}_L$.

Definição:

Seja φ uma L-fórmula e seja $Qx\,\psi$ uma subfórmula de φ, onde $Q \in \{\exists, \forall\}$, $x \in \mathcal{V}$ e $\psi \in \mathcal{F}_L$.

O *alcance* desta ocorrência do quantificador Qx em φ é a L-fórmula ψ.

Exemplo: Na L_{Arit}-fórmula

$$\forall x_0(\exists x_1(x_0 = s(x_1)) \to (\neg(x_0 = 0) \land \exists x_1(x_1 < x_0))) :$$

1. o alcance da única ocorrência de $\forall x_0$ é

$$\exists x_1(x_0 = s(x_1)) \to (\neg(x_0 = 0) \land \exists x_1(x_1 < x_0));$$

2. o alcance da primeira ocorrência do quantificador $\exists x_1$ é $x_0 = s(x_1)$;
3. o alcance da segunda ocorrência do quantificador$\exists x_1$ é $x_1 < x_0$.

Definição:

Numa L-fórmula φ, uma ocorrência (em subfórmulas atómicas de φ) de uma variável x diz-se *livre* quando x não está no alcance de nenhuma ocorrência de um quantificador Qx (com $Q \in \{\exists, \forall\}$); caso contrário, essa ocorrência de x diz-se *ligada*.

$LIV(\varphi)$ denotará o conjunto das variáveis com ocorrências livres em φ.

$LIG(\varphi)$ denotará o conjunto das variáveis com ocorrências ligadas em φ.

Exemplo:

Seja φ a L_{Arit}-fórmula

$$\exists x_1(\neg(\underbrace{x_0}_{(a)} < s(0)) \to \forall x_0(\underbrace{x_0}_{(b)} = \underbrace{x_1}_{(a)})).$$

A ocorrência (a) de x_0 é livre.

A ocorrência (b) de x_0 é ligada.

A ocorrência (a) de x_1 é ligada.

Assim, $LIV(\varphi) = \{x_0\}$ e $LIG(\varphi) = \{x_0, x_1\}$.

Observação:

Note-se que $LIV(\varphi) \cap LIG(\varphi)$ não é necessariamente o conjunto vazio (veja-se o exemplo anterior).

Definição: A operação de *substituição das ocorrências livres* de uma variável x por um L-termo t numa L-fórmula φ é notada por $\varphi[t/x]$ e é definida, por recursão estrutural em L-fórmulas, do seguinte modo:

a) $R(t_1, ..., t_n)[t/x] = R(t_1[t/x], ..., t_n[t/x])$,
para todo $R \in \mathcal{R}$, de aridade n, e para todo $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$;

b) $\perp [t/x] = \perp$;

c) $(\neg\psi)[t/x] = \neg\psi[t/x]$,
para todo $\psi \in \mathcal{F}_L$;

d) $(\psi_1 \Box \psi_2)[t/x] = \psi_1[t/x] \Box \psi_2[t/x]$,
para todo $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}_L$;

e) $(Qy\,\psi)[t/x] = \begin{cases} Qy\,\psi & \text{se } y = x \\ Qy\,\psi[t/x] & \text{se } y \neq x \end{cases}$,
para todo $Q \in \{\exists, \forall\}$, $y \in \mathcal{V}$, $\psi \in \mathcal{F}_L$.

Exemplo:

1

$$
\begin{array}{lll}
 & (x_0 < s(x_1))[0/x_0] & \\
= & x_0[0/x_0] < s(x_1)[0/x_0] & \text{(def. anterior } \textbf{a)}) \\
= & 0 < s(x_1) & \text{(substituição em termos)}
\end{array}
$$

2

$$
\begin{array}{lll}
 & (\exists x_0(x_0 < s(x_1)))[0/x_0] & \\
= & \exists x_0(x_0 < s(x_1)) & \text{(def. anterior } \textbf{e)}, 1^o \text{ caso)}
\end{array}
$$

3

$$
\begin{array}{lll}
 & (\exists x_0(x_0 < s(x_1)))[0/x_1] & \\
= & \exists x_0(x_0 < s(x_1))[0/x_1] & \text{(def. anterior } \textbf{e)}, 2^o \text{ caso)} \\
= & \exists x_0(x_0 < s(0)) & \text{(def. anterior } \textbf{a)} \text{ e subst. em termos)}
\end{array}
$$

4

$$
\begin{array}{lll}
 & (\exists x_0(x_0 < s(x_1)) \wedge (0 < x_0))[0/x_0] & \\
= & \exists x_0(x_0 < s(x_1)) \wedge (0 < 0) & \text{(porquê?)}
\end{array}
$$

Exemplo: Seja φ a L_{Arit}-fórmula $\exists x_1(x_0 < x_1)$. Então,

$$\varphi[s(x_1)/x_0] = \exists x_1(s(x_1) < x_1).$$

Observe que em φ a ocorrência de x_0 "não depende" da quantificação $\exists x_1$, mas, após a substituição, o termo $s(x_1)$, que substituiu x_0, "depende" da quantificação $\exists x_1$.

Este fenómeno de *captura de variáveis em substituições* é indesejado.

A definição seguinte caracteriza as circunstâncias em que este não ocorre.

Definição: Sejam x uma variável, t um L-termo e φ uma L-fórmula. Diz-se que *x está livre para t em φ* ou que *x é substituível (sem captura de variáveis) por t em φ* quando para todas as ocorrências livres de x em φ no alcance de algum quantificador Qy, $y \notin VAR(t)$.

Exemplo: Seja $\varphi = \forall x_1(x_1 < x_2) \vee \neg(x_1 < x_2)$.

a) x_0 está livre para $x_1 + s(x_2)$ em φ, pois x_0 não tem ocorrências livres na fórmula;

b) x_1 está livre para $x_1 + s(x_2)$ em φ, pois a única ocorrência livre de x_1 não está no alcance de qualquer quantificador;

c) x_2 não está livre para $x_1 + s(x_2)$ em φ, pois x_2 tem uma ocorrência livre no alcance do quantificador $\forall x_1$ e $x_1 \in VAR(x_1 + s(x_2))$;

d) x_2 está livre para $x_0 + s(x_2)$ em φ, pois, embora exista uma ocorrência livre de x_2 no alcance do quantificador $\forall x_1$, $x_1 \notin VAR(x_0 + s(x_2))$.

Observação: Note-se que, mesmo quando uma variável x não está livre para um L-termo t numa L-fórmula φ, a operação de substituição de x por t em φ está definida.

Por exemplo, x_2 não está livre para $x_1 + s(x_2)$ em

$$\varphi = \forall x_1 (x_1 < x_2) \vee \neg(x_1 < x_2).$$

A L_{Arit}-fórmula resultante da substituição de x_2 por $x_1 + s(x_2)$ em φ está definida, sendo igual a

$$\forall x_1 (x_1 < x_1 + s(x_2)) \vee \neg(x_1 < x_1 + s(x_2)).$$

No entanto, ao efetuar esta substituição, ocorre o fenómeno de captura de variáveis.

Proposição: Sejam x uma variável, t um L-termo e φ uma L-fórmula.

1. Se $x \notin LIV(\varphi)$, então x está livre para t em φ.
2. Se $VAR(t) = \emptyset$, então x está livre para t em φ.

Dem.: Imediata da definição. $\square$

Proposição: Sejam x uma variável, t um L-termo e φ uma L-fórmula. Se $x \notin LIV(\varphi)$, então $\varphi[t/x] = \varphi$.

Dem.: Por indução estrutural em L-fórmulas. $\square$

Definição: Uma L-fórmula φ diz-se uma *sentença de tipo L* ou uma *fórmula fechada de tipo L* (abreviadamente, uma *L-sentença* ou uma *L-fórmula fechada*), quando $LIV(\varphi) = \emptyset$.

Proposição: Seja φ uma L-sentença. Então, para toda a variável x e para todo o L-termo t,

1. x está livre para t em φ;
2. $\varphi[t/x] = \varphi$.

Dem.: Exercício. $\square$