LÓGICA EI
Mestrado Integrado em Engenharia Informática
Universidade do Minho

Departamento de Matemática

2020/2021

Definições:

1. Um *alfabeto* é um conjunto cujos elementos serão chamados *letras* (ou símbolos).

2. Chamaremos *palavra* (ou *string*) *sobre* um alfabeto A a uma sequência finita de letras de A.

   A notação A^* representará o conjunto de todas as palvras sobre A.

3. Dado $n \in \mathbb{N}$ e dadas n letras a_1, a_2, ..., a_n de um alfabeto A (possivelmente com repetições), utilizamos a notação $a_1 a_2 ... a_n$ para representar a palavra sobre A cuja i-ésima letra (para $1 \leq i \leq n$) é a_i.

4. À sequência vazia de letras de A chamaremos *palavra vazia*, notando-a por ϵ.

Definições (cont.):

5. O *comprimento* de uma palavra é o comprimento da respetiva sequência de letras.

   (A única palavra de comprimento 0 é ϵ.)

6. Duas palavras sobre um alfabeto dizem-se *iguais* quando têm o mesmo comprimento e coincidem letra a letra.

7. Dadas duas palavras u, v sobre um alfabeto, utilizamos a notação uv para representar a *concatenação* de u com v (*i.e.*, a concatenação das respetivas sequências de letras, colocando primeiro a sequência de letras relativa a u).

8. Uma *linguagem* sobre um alfabeto A é um conjunto de palavras sobre A (i.e. um subconjunto de A^*).

Exemplo: Seja C o menor[1] subconjunto de $\mathbb{N}_0$ que satisfaz as seguintes condições:

1. $0 \in C$;
2. para todo $n \in \mathbb{N}_0$, se $n \in C$, então $n+2 \in C$.

Esta forma de definir o conjunto C é um caso particular das chamadas *definições indutivas de conjuntos*.

Habitualmente, chamaremos regras às condições utilizadas numa definição indutiva.

A condição 1 é um exemplo de um regra base e a condição 2 é um exempo de uma regra indutiva.

[1] Dizemos que um conjunto A é menor que um conjunto B quando $A \subseteq B$

Exemplo (cont.):

Exemplos de elementos de C são: 0, 2, 4. De facto:

(a) $0 \in C$, pela regra 1;

(b) por (a) e pela regra 2, segue $0 + 2 = 2 \in C$;

(c) por (b) e pela regra 2, segue $2 + 2 = 4 \in C$.

Adiante (e como é fácil de intuir), mostraremos que C é o conjunto dos números pares.

Exemplo: A definição indutiva do conjunto C admite um princípio de recursão estrutural, que permite a definição de funções por recursão estrutural.

Por exemplo, existe uma e uma só função $f : C \longrightarrow \mathbb{N}_0$ que satisfaz as seguintes condições:

1. $f(0) = 0$;
2. para todo $n \in C$, $f(n+2) = 1 + f(n)$.

Por exemplo, f(4)=1+f(2)=1+1+f(0)=2+0=2.

Acerca desta função, pode provar-se, com recurso ao *Princípio de indução estrutural para C* (que veremos adiante), que, para todo $n \in C$, $f(n) = \frac{n}{2}$.

Observação: A cada definição indutiva de um conjunto está associado um princípio de indução estrutural, que permite provar proriedades sobre esse conjunto.

Por exemplo, o usual princípio de indução sobre os naturais é o princípio de indução estrutural associado à seguinte caracterização indutiva de $\mathbb{N}$:

$\mathbb{N}$ é o menor subconjunto de $\mathbb{N}$ que satisfaz as seguintes condições:

1. $1 \in \mathbb{N}$;
2. para todo $n \in \mathbb{N}$, se $n \in \mathbb{N}$, então $n + 1 \in \mathbb{N}$.

Exemplo: O Princípio de indução estrutural para C (associado à definição indutiva do conjunto C no exemplo inicial) é o seguinte:

Seja $P(n)$ uma condição sobre $n \in C$.

Se:

1. $P(0)$;
2. se $P(k)$, então $P(k+2)$, para todo o $k \in C$;

então $P(n)$, para todo o $n \in C$.

Exemplo: Consideremos a condição $P(n)$, sobre $n \in C$, dada por "n é par".

Provemos que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in C$.

Pelo Princípio de indução estrutural para C, basta mostrar:

1. $P(0)$;
2. se $P(k)$, então $P(k+2)$, para todo o $k \in C$.

Provemos cada uma destas propriedades.

1. 0 é par. Logo, $P(0)$ é verdadeira.
2. Seja $k \in C$. Suponhamos que $P(k)$ é verdadeira. Então, k é par. Logo, $k+2$ é também par e, portanto, $P(k+2)$ é verdadeira.

Observação: A propriedade demonstrada no exemplo anterior permite concluir que C é subconjunto dos números pares.

Para mostar que C é efetivamente o conjunto dos números pares, falta mostrar que C contém o conjunto dos números pares.

Para tal, bastaria provar, por indução em $\mathbb{N}_0$, que, para todo $n \in \mathbb{N}_0$, $2n \in C$. (Exercício.)