

## Tópicos de Matemática Discreta

———— 1.º teste — 8 de novembro de 2019 ————— duração: 120 minutos —————

1. Diga, justificando, se cada uma das afirmações que se seguem é verdadeira ou falsa.
  - (a) A fórmula  $\varphi : \neg(p_0 \vee \neg p_1)$  do Cálculo Proposicional tem valor lógico verdadeiro se e somente se a fórmula  $\psi : \neg(p_1 \rightarrow p_0)$  tem valor lógico falso.
  - (c) Se  $\sigma$  e  $\theta$  são fórmulas do Cálculo Proposicional logicamente equivalentes, então a fórmula  $\theta \rightarrow (\theta \rightarrow \sigma)$  é uma tautologia.
2. Considerando que  $p$  representa a proposição  $\forall_{x \in A}(x > 0 \rightarrow \forall_{y \in A} xy^2 > 0)$ ,
  - (a) verifique, justificando, se  $p$  é verdadeira para:
    - (i)  $A = \mathbb{R}$ ;
    - (ii)  $A = \mathbb{R} \setminus ]-2, 5]$ .
  - (b) indique, sem recorrer ao conetivo *negação*, uma proposição equivalente a  $\neg p$ .
3. Mostre que, para quaisquer inteiros  $m$  e  $n$ , se  $m^2(n+3)$  é par, então  $m$  é par ou  $n$  é ímpar.
4. Dê exemplo de subconjuntos  $A$ ,  $B$  e  $C$  de  $\mathbb{Z}$ , não vazios, tais que
  - (a)  $A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) = \emptyset$ .
  - (b)  $(A \setminus B) \subseteq (C \setminus A)$ .
  - (c)  $A \in \mathcal{P}(\{2, 4, 5\})$ .
5. Considere os conjuntos
 
$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists_{n \in \mathbb{Z}} x = 2n + 5\}, \quad B = \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists_{m \in \mathbb{Z}} x = 2m\},$$

$$C = \{1, 2, 3\} \quad \text{e} \quad D = \left\{1, \{1\}, \left\{1, \{1\}\right\}\right\}.$$
  - (a) Justificando, determine  $\mathbb{Z} \setminus (A \cup B)$ .
  - (b) Justificando, determine  $(C \setminus D) \times C$ .
  - (c) Determine  $D \cap \mathcal{P}(D)$ . Justifique a sua resposta.
6. Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  conjuntos. Mostre que  $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ .
7. Prove, por indução nos naturais, que

$$3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^n = \frac{3^{n+1} - 1}{2},$$

para todo o natural  $n$ .

|          |     |        |      |                |                |      |    |
|----------|-----|--------|------|----------------|----------------|------|----|
| Cotações | 1.  | 2.     | 3.   | 4.             | 5.             | 6.   | 7. |
|          | 2+2 | 2 +1,5 | 1,75 | 1,25+1,25+1,25 | 1,25+1,25+1,25 | 1,25 | 2  |