Mestrado Integrado em Engenharia Informática

Tópicos de Matemática Discreta

5. Funções

José Carlos Costa

Dep. Matemática
Universidade do Minho

1º semestre 2020/2021

Observação

Recorde-se que uma *função* ou *aplicação* é uma correspondência $f : A \to B$ que é

- *total*: $\mathrm{Dom}(f) = A$ (o domínio é igual ao conjunto de partida);
- *e unívoca*: $\forall_{a\in A}\forall_{b_1,b_2\in B}\ ((a, b_1) \in f \wedge (a, b_2) \in f) \to b_1 = b_2)$.

Equivalentemente, f é uma função se

$$\forall_{a\in A}\, \exists^1_{b\in B}\ (a, b) \in f.$$

- O único elemento b de B tal que $(a, b) \in f$ é dito *a imagem de a por f* ou *o valor que a função f assume em a*, e escreve-se $f(a) = b$ ou $a \mapsto b$.
- Ao conjunto de chegada B também é usual chamar-se o *codomínio* de f.

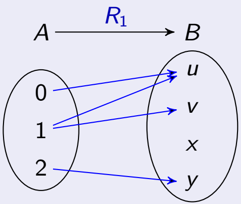
Notação

Sejam A e B conjuntos.

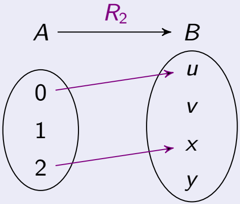
- O conjunto de todas as funções de A em B é um subconjunto de $\mathcal{P}(A \times B)$ que se denota por B^A.
- Se A e B são conjuntos finitos, com m e n elementos respetivamente, então B^A tem n^m elementos. Ou seja, existem n^m funções de A em B.

Exemplos

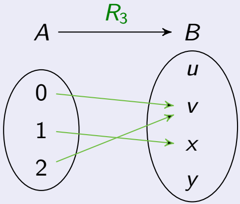
1. Sejam $A = \{0, 1, 2\}$ e $B = \{u, v, x, y\}$. Considere as seguintes relações binárias R_1, R_2 e R_3 de A em B,



R_1 não é uma função pois não é relação unívoca: $(1, u), (1, v) \in R_1$ e $u \neq v$.



R_2 não é uma função pois não é relação total: $\mathrm{Dom}(R_2) = \{0, 2\} \neq A$.



R_3 é uma função.

2. A relação identidade $\mathrm{id}_A = \{(a, a) : a \in A\}$ num conjunto A, que a cada elemento $a \in A$ faz corresponder a, é uma função chamada a *função identidade* em A. Pode escrever-se

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_A : \ A &\to A \\ a &\mapsto a. \end{aligned}$$

Exemplos

3. A relação $R = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : y = 2x\}$ é uma função de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$. Para cada $x \in \mathbb{Z}$, tem-se $R(x) = 2x$. Escreve-se

$$\begin{aligned} R:\ \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ x &\mapsto 2x. \end{aligned}$$

4. A relação $S = \{(x,y) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{Z} : x = y^2\}$ não é uma aplicação de $\mathbb{N}_0$ em $\mathbb{Z}$. Tem-se, por exemplo, $(4,2) \in S$ e $(4,-2) \in S$ e $2 \neq -2$.

5. As relações

$$\begin{aligned} f_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = x^2\}, \\ f_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} : y = x^2\}, \\ f_3 &= \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+ : y = x^2\}, \\ f_4 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ : y = x^2\} \end{aligned}$$

são aplicações

$$\begin{aligned} f_1:\ \mathbb{R} &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f_2:\ \mathbb{R}_0^+ &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f_3:\ \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_0^+, \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f_4:\ \mathbb{R}_0^+ &\to \mathbb{R}_0^+ \\ x &\mapsto x^2. \end{aligned}$$

Definição

Funções $f : A \to B$ e $g : C \to D$ dizem-se *iguais*, e escreve-se $f = g$, se

i) $A = C$ (ou seja, f e g têm o mesmo domínio);

ii) $B = D$ (ou seja, f e g têm o mesmo codomínio);

iii) $\forall_{x \in A}\ f(x) = g(x)$.

Exemplos

1. As funções do exemplo 5 anterior são todas distintas.
2. Consideremos as funções

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad x \mapsto \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}, \qquad g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad x \mapsto |x|, \qquad h : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0, \quad x \mapsto |x|, \qquad k : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad x \mapsto -x.$$

Tem-se que:

- $f = g$ porque f e g têm o mesmo domínio, $\mathbb{Z}$, o mesmo codomínio, $\mathbb{Z}$, e $f(x) = g(x)$ para todo o elemento x do domínio;
- $f \neq h$ pois f e h têm codomínios distintos, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{N}_0$ respetivamente;
- $f \neq k$ já que para $x = 6$, por exemplo, $f(x) = 6 \neq -6 = k(x)$;
- $h \neq k$ pois h e k têm codomínios distintos e, por exemplo, $h(4) \neq k(4)$.

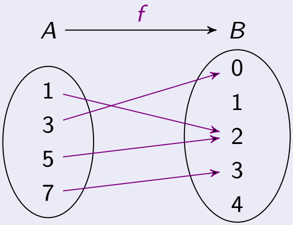
Definição

Seja $f : A \to B$ uma função e sejam $X \subseteq A$ e $Y \subseteq B$. Designa-se por:

- *imagem* de X por f o conjunto
$$f(X) = \{f(x) : x \in X\};$$
- *imagem inversa* ou *pré-imagem* de Y por f o conjunto
$$f^{\leftarrow}(Y) = \{a \in A : f(a) \in Y\}.$$

Exemplos

1. Sejam $A = \{1, 3, 5, 7\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Consideremos a função $f : A \to B$ representada pelo diagrama seguinte. Então,



- $f(A) = Im(f) = \{0, 2, 3\}$;
- $f(\{1, 3\}) = f(\{3, 5\}) = \{0, 2\}$;
- $f^{\leftarrow}(B) = A$;
- $f^{\leftarrow}(\{0, 1\}) = \{3\}$;
- $f^{\leftarrow}(\{4\}) = \emptyset$;
- $f^{\leftarrow}(\{1, 2, 3\}) = \{1, 5, 7\}$.

Exemplos

2. Consideremos a aplicação $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ definida por

$$f(n)=\begin{cases} 2n+3 & \text{se } n\geq 0\\ 3-n & \text{se } n<0\end{cases}$$

e sejam $X=\{-4,0,1,2\}$ e $Y=\{-5,0,5\}$. Então,

$$f(X)=\{f(-4),f(0),f(1),f(2)\}=\{7,3,5,7\}=\{3,5,7\}$$

e

$$\begin{aligned} f^{\leftarrow}(Y) &= \{n\in\mathbb{Z}: f(n)=-5\vee f(n)=0\vee f(n)=5\}\\ &= \{n\in\mathbb{Z}: (2n+3=-5\wedge n\geq 0)\vee(3-n=-5\wedge n<0)\vee\\ &\qquad\vee(2n+3=0\wedge n\geq 0)\vee(3-n=0\wedge n<0)\vee\\ &\qquad\vee(2n+3=5\wedge n\geq 0)\vee(3-n=5\wedge n<0)\}\\ &= \{1,-2\}.\end{aligned}$$

As propriedades que introduzimos de seguida são fundamentais no estudo de funções.

Definição

Uma aplicação $f : A \to B$ diz-se:

- *injetiva* quando $\forall_{a_1,a_2 \in A}\ (f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$;
- *sobrejetiva* quando $\forall_{b \in B}\ \exists_{a \in A}\ f(a) = b$;
- *bijetiva* quando é injetiva e sobrejetiva.

As propriedades acima podem ser caracterizadas da seguinte forma.

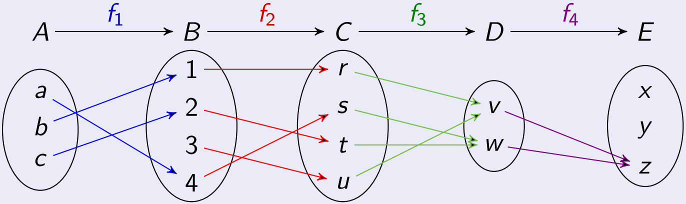
Observação

Uma aplicação $f : A \to B$ é:

- injetiva se e só se $\forall_{a_1,a_2 \in A}\ (a_1 \neq a_2 \to f(a_1) \neq f(a_2))$;
- sobrejetiva se e só se $\mathrm{Im}(f) = B$;
- bijetiva se e só se $\forall_{b \in B}\ \exists^1_{a \in A}\ f(a) = b$.

Exemplos

1. Consideremos as funções f_1, f_2, f_3 e f_4 definidas pelo diagrama seguinte:



   - f_1 é injetiva e não é sobrejetiva (logo também não é bijetiva);
   - f_2 é bijetiva;
   - f_3 não é injetiva (donde não é bijetiva) e é sobrejetiva;
   - f_4 não é injetiva nem sobrejetiva (nem bijetiva).

2. Consideremos a aplicação $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto |x|$.
   - f não é injetiva porque, por exemplo, $f(2) = f(-2)$ e $2 \neq -2$.
   - f não é sobrejetiva pois $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{N}_0 \neq \mathbb{Z}$. Por exemplo, -5 pertence ao codomínio $\mathbb{Z}$ e não existe x no domínio $\mathbb{Z}$ tal que $f(x) = -5$.

3. A função $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$, $x \mapsto |x|$, não é injetiva mas é sobrejetiva.

Exemplos

4. Seja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ a função definida por $f(x) = 2x + 3$ para todo o $x \in \mathbb{Z}$.
   - f é injetiva pois, para quaisquer $x, y \in \mathbb{Z}$,
   $$\begin{array}{rcl} f(x) = f(y) & \to & 2x + 3 = 2y + 3 \\ & \to & x = y. \end{array}$$
   - f não é sobrejetiva pois, por exemplo, não existe $x \in \mathbb{Z}$ com $f(x) = 4$.
5. A aplicação $\begin{array}{rccl} g : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 2x+3 \end{array}$ é bijetiva.
6. A aplicação identidade $\begin{array}{rccl} \mathrm{id}_A : & A & \to & A \\ & a & \mapsto & a \end{array}$ num conjunto A é bijetiva.
7. Consideremos as aplicações

$$\begin{array}{rccl} f_1 : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}, \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array} \qquad \begin{array}{rccl} f_2 : & \mathbb{R}_0^+ & \to & \mathbb{R}, \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array} \qquad \begin{array}{rccl} f_3 : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_0^+, \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array} \qquad \begin{array}{rccl} f_4 : & \mathbb{R}_0^+ & \to & \mathbb{R}_0^+ \\ & x & \mapsto & x^2. \end{array}$$

   - f_1 não é injetiva nem sobrejetiva;
   - f_2 é injetiva e não é sobrejetiva;
   - f_3 não é injetiva mas é sobrejetiva;
   - f_4 é bijetiva.

Observação

1. Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ funções.

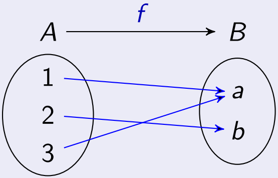
   A relação composta $g \circ f$ é uma função (de A em C), tendo-se $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ para cada $a \in A$. Ou seja, $g \circ f$ é a função

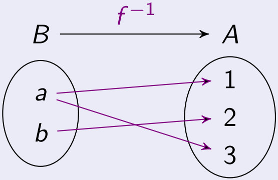
   $$\begin{aligned} g \circ f : \ & A \to C \\ & a \mapsto g(f(a)) \end{aligned}$$

   chamada a *função composta* de g com f.

2. A relação inversa de uma função pode não ser uma função.

   Por exemplo, sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{a, b\}$. Para $f : A \to B$, $1 \mapsto a$, $2 \mapsto b$, $3 \mapsto a$, tem-se $f^{-1} = \{(a, 1), (b, 2), (a, 3)\}$ que não é uma função pois $(a, 1) \in f^{-1}$, $(a, 3) \in f^{-1}$ e $1 \neq 3$.





Teorema

Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ funções.

1. Se f e g são injetivas (resp. sobrejetivas, bijetivas), então a função composta $g \circ f$ é injetiva (resp. sobrejetiva, bijetiva).
2. A relação inversa f^{-1} é uma função (de B em A) se e só se f é bijetiva.

Observação

Seja $f : A \to B$ uma aplicação bijetiva.

1. A relação inversa de f é uma aplicação $f^{-1} : B \to A$, chamada a *função inversa* de f, tal que
$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A \quad \text{e} \quad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B.$$
2. Prova-se que f^{-1} é a única função de B para A nestas condições. Ou seja, se existe uma aplicação $g : B \to A$ tal que
$$g \circ f = \mathrm{id}_A \quad \text{e} \quad f \circ g = \mathrm{id}_B,$$
então $g = f^{-1}$.
3. Note-se que, dados $a \in A$ e $b \in B$, tem-se
$$b = f(a) \quad \text{se e só se} \quad a = f^{-1}(b).$$

Exemplos

1. A função $\begin{array}{rcl} f: \mathbb{R}_0^+ & \to & \mathbb{R}_0^+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ é bijetiva. A sua inversa é $\begin{array}{rcl} f^{-1}: \mathbb{R}_0^+ & \to & \mathbb{R}_0^+ \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$.

   Tem-se, por exemplo, $f(3) = 9$ e $f^{-1}(9) = 3$.

2. A função bijetiva $\begin{array}{rcl} g: \mathbb{N}_0 & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}$ tem inversa $\begin{array}{rcl} g^{-1}: \mathbb{N} & \to & \mathbb{N}_0 \\ n & \mapsto & n-1 \end{array}$.

3. Sejam $\begin{array}{rcl} f: \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x+2 \end{array}$ e $\begin{array}{rcl} g: \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 3x \end{array}$. Neste caso existem as funções

   compostas $g \circ f$ e $f \circ g$. Para cada $x \in \mathbb{R}$, tem-se

   $$g(f(x)) = g(x+2) = 3(x+2) = 3x+6$$

   e

   $$f(g(x)) = f(3x) = 3x+2.$$

   Então, $\begin{array}{rcl} g \circ f: \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 3x+6 \end{array}$ e $\begin{array}{rcl} f \circ g: \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 3x+2 \end{array}$.