Mestrado Integrado em Engenharia Informática

Tópicos de Matemática Discreta

4. Relações Binárias

José Carlos Costa

Dep. Matemática
Universidade do Minho

1º semestre 2020/2021

Neste capítulo estudaremos

Relações Binárias

- Noções básicas
- Relações de equivalência
- Relações de ordem parcial

- Um par ordenado (a, b) pode ser utilizado para representar a noção de que o objeto a está em *relação* (i.e., associado de uma forma determinada) com o objeto b.
- Uma *relação binária* é, então, um conjunto R de pares ordenados: um par ordenado (a, b) pertence a R se e só se a está R-relacionado com b.

Definição

Sejam A e B conjuntos.

- Uma *relação (binária)* de A em B (ou *correspondência* de A para B) é um subconjunto R do produto cartesiano $A \times B$.
- Os conjuntos A e B dizem-se, respetivamente, o *conjunto de partida* e o *conjunto de chegada* de R.
- Quando $A = B$, diz-se simplesmente que R é uma *relação (binária)* em A.

Notação

Seja $R \subseteq A \times B$ uma relação e sejam $a \in A$ e $b \in B$.

- Se $(a, b) \in R$, então diz-se que a *está relacionado* com b por R (ou que a *está R-relacionado* com b), e denota-se $a \, R \, b$.
- Se $(a, b) \notin R$, então diz-se que a *não está relacionado* com b por R (ou que a *não está R-relacionado* com b), e escreve-se $a \not R \, b$.

Exemplos

1. Sejam $A = \{0, 2, 4\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3\}$. Então

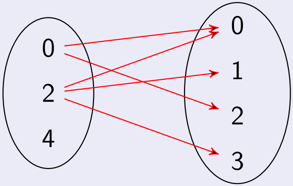
$$\begin{aligned} R_1 &= \{(0,1)\}, \\ R_2 &= \{(0,1),(0,2),(2,2),(4,1)\}, \\ R_3 &= \{(0,0),(0,2),(2,0),(2,1),(2,3)\}, \end{aligned}$$

   são relações de A em B, enquanto que

$$S = \{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3)\}$$

   não o é pois $S \not\subseteq A \times B$. A correspondência R_3, por exemplo, pode ser descrita pelo seguinte diagrama

$$A \xrightarrow{R_3} B$$



Exemplos

2. Sejam $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{2,4,6,9,10\}$, e seja R a relação de A em B definida por
$$a \, R \, b \quad \text{se e só se} \quad a|b \text{ (ou seja, } a \text{ divide } b).$$
Então
$$R = \{(1,2),(1,4),(1,6),(1,9),(1,10),(2,2),(2,4),(2,6),(2,10),(3,6),(3,9)\}.$$
Note-se que:
   - $2 \not R \, 9$ pois $2 \nmid 9$, embora $(2,9) \in A \times B$;
   - $5 \not R \, 10$ pois $(5,10) \notin A \times B$, embora $5|10$.

3. Seja $A = \{1,2,3\}$. Então
$$\emptyset, \quad \{(1,1),(1,2),(2,2),(3,2)\}, \quad \{(1,2),(3,3)\}, \quad A^2$$
são relações em A.

4. $R = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 : y = 2x\}$ é uma relação em $\mathbb{Z}$. Por exemplo,
$$\begin{array}{lll} (0,0) \in R, & (1,2) \in R, & (4,8) \in R, \\ (-2,-4) \in R, & (2,3) \notin R, & (8,4) \notin R. \end{array}$$

Observação

Sejam A e B conjuntos. Note-se que:

1. O conjunto de todas as relações binárias de A em B é o conjunto potência $\mathcal{P}(A \times B)$. Em particular:
   - $\emptyset$ é uma relação de A em B, chamada a *relação vazia*;
   - $A \times B$ é uma relação de A em B, chamada a *relação universal*.
2. Se A e B são conjuntos finitos, com m e n elementos respetivamente, então
   - $A \times B$ tem mn elementos, donde $\mathcal{P}(A \times B)$ tem 2^{mn} elementos;
   - existem portanto 2^{mn} relações binárias de A em B.

Notação

Seja A um conjunto não vazio. Então,

- $\mathrm{id}_A = \{(a,a) : a \in A\}$ é uma relação em A, dita a *relação identidade* em A;
- $\omega_A = A^2$ é uma relação em A, chamada a *relação universal* em A.

As relações id_A e ω_A são também usualmente denotadas por Δ_A ("delta A") e ∇_A ("nabla A") respetivamente.

Exercício

Considere os conjuntos

$$A = \{2, 3, 4, 5\}, \quad B = \{a, b, c\} \quad \text{e} \quad R = \{(x, y) \in A^2 : x < y\}.$$

Indique o valor lógico das seguintes proposições:

(a) $\{(2, a), (4, b)\}$ é uma relação binária de A em B;

(b) $\{(a, 2), (b, 2), (b, b), (c, a)\}$ é uma relação binária de B em A;

(c) $\mathrm{id}_A = \{(2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$;

(d) $\{(c, c), (a, a), (b, b)\}$ é a relação identidade em B;

(e) $(2, 4) \in R$;

(f) $4 \; R \; 2$;

(g) $(1, 5) \in R$;

(h) R é uma relação em A com 6 elementos.

Resposta

(a) V; (b) F; (c) F; (d) V; (e) V; (f) F; (g) F; (h) V.

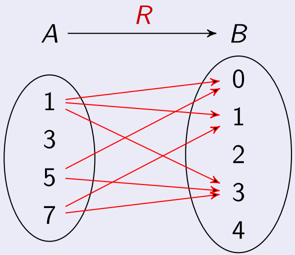
Definição

Seja R uma relação binária de A em B.

- O *domínio* de R é o seguinte subconjunto de A
$$\mathrm{Dom}(R) = \{a \in A : \exists_{b\in B}\ (a,b) \in R\}.$$
- A *imagem* ou *contradomínio* de R é o seguinte subconjunto de B
$$\mathrm{Im}(R) = \{b \in B : \exists_{a\in A}\ (a,b) \in R\}.$$

Exemplo

Seja $R = \{(1,0),(1,1),(1,3),(5,0),(5,3),(7,1),(7,3)\}$ a relação do conjunto $A = \{1,3,5,7\}$ no conjunto $B = \{0,1,2,3,4\}$, ilustrada pelo seguinte diagrama



Então,
$$\mathrm{Dom}(R) = \{1,5,7\},$$
$$\mathrm{Im}(R) = \{0,1,3\}.$$

Exercício

Seja R a relação binária em $\mathbb{Z}$ definida por

$$a\,R\,b \quad \text{se e só se} \quad |a| = 2b.$$

Calcule $\mathrm{Dom}(R)$ e $\mathrm{Im}(R)$.

Definição

Dados conjuntos A e B, uma relação binária R de A em B diz-se:

- *total* quando $\mathrm{Dom}(R) = A$;
- *unívoca* quando $\forall_{a\in A}\forall_{b_1,b_2\in B}\ ((a\,R\,b_1 \wedge a\,R\,b_2) \rightarrow b_1 = b_2)$;
- uma *função* ou *aplicação* quando R é uma relação total e unívoca.

Observação

- Escreve-se $f : A \rightarrow B$ para indicar que f é uma função de A em B.
- Se f é uma função de A em B então, para cada $a \in A$, escreve-se $f(a) = b$, onde b é o único elemento de B tal que $(a, b) \in f$, e diz-se que *b é a imagem de a por f* ou que *b é o valor que a função f assume em a*.

Observação

Se R e S são relações binárias de A em B, então $R \cup S$, $R \cap S$ e $R \setminus S$ são também relações binárias de A em B.

Exemplo

Consideremos as relações

$$R = \{(1,d),(1,e),(2,d),(3,d)\}$$

e

$$S = \{(1,d),(2,d),(3,d),(4,e)\}$$

do conjunto $A = \{1,2,3,4\}$ no conjunto $B = \{d,e\}$. Então

$$R \cup S = \{(1,d),(1,e),(2,d),(3,d),(4,e)\},$$
$$R \cap S = \{(1,d),(2,d),(3,d)\},$$
$$R \setminus S = \{(1,e)\}$$

são relações binárias de A em B.

As operações de união, interseção e complementação permitem obter relações a partir de outras. Estudaremos de seguida outras operações sobre relações.

Definição

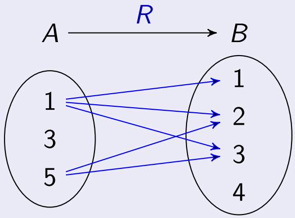
Dada uma relação binária R de A em B, a relação binária de B em A

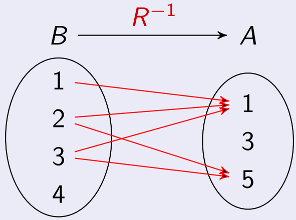
$$R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A : (a, b) \in R\}$$

é chamada a *relação inversa* de R.

Exemplos

1. Consideremos os conjuntos $A = \{1, 3, 5\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$. A relação $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (5, 2), (5, 3)\}$ de A em B, tem como inversa a relação $R^{-1} = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (2, 5), (3, 5)\}$ de B em A.





Exemplos

2. A relação $S = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : x \leq y\}$ em $\mathbb{N}$, dada em extensão por

   $$S = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(1,4),(2,3),(1,5),(2,4),(3,3),\dots\},$$

   tem como inversa a relação em $\mathbb{N}$,

   $$\begin{aligned} S^{-1} &= \{(y, x) \in \mathbb{N}^2 : x \leq y\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : x \geq y\} \\ &= \{(1,1),(2,1),(3,1),(2,2),(4,1),(3,2),(5,1),(4,2),(3,3),\dots\}. \end{aligned}$$

Teorema

Sejam R e S relações binárias de A em B. Então,

1. $\mathrm{Dom}(R^{-1}) = \mathrm{Im}(R)$ e $\mathrm{Im}(R^{-1}) = \mathrm{Dom}(R)$;
2. $(R^{-1})^{-1} = R$;
3. Se $R \subseteq S$, então $R^{-1} \subseteq S^{-1}$.

Definição

Consideremos relações $R \subseteq A \times B$ e $S \subseteq B \times C$. A relação binária de A em C dada por

$$S \circ R = \{(a, c) \in A \times C : \exists_{b \in B} \; (a \, R \, b \; \wedge \; b \, S \, c)\}$$

é chamada a *relação composta* de S com R, também dita "S *após* R".

Exemplos

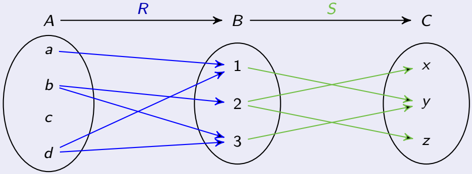
1. Sejam $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ e $C = \{x, y, z\}$. As relações

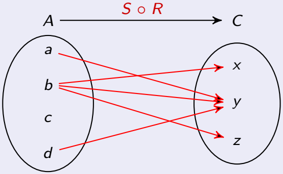
   $$R = \{(a, 1), (b, 2), (b, 3), (d, 1), (d, 3)\}, \text{ de } A \text{ em } B,$$

   e $$S = \{(1, y), (2, x), (2, z), (3, y)\}, \text{ de } B \text{ em } C,$$

   têm como composta a relação

   $$S \circ R = \{(a, y), (b, x), (b, y), (b, z), (d, y)\}, \text{ de } A \text{ em } C.$$





Exemplos

2. Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e consideremos as relações em A

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 1)\}$$

e $$S = \{(1, 3), (2, 3), (3, 2)\}.$$

Então,

$$S \circ R = \{(1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\},$$

$$R \circ S = \{(1, 1), (2, 1), (3, 2), (3, 3)\},$$

$$R \circ R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\},$$

$$(R \circ S) \circ S = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 1)\},$$

$$R^{-1} = \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 2)\},$$

$$R \circ R^{-1} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\},$$

etc.

Exercício

Seja $A = \{D, E, F, H, I, J, L, N, T, X\}$. Considere as seguintes relações em A:

$$P = \{(J, L), (J, D), (L, T), (L, I), (X, N)\},$$

$$M = \{(E, J), (E, H), (H, N), (D, F)\}.$$

1. Determine P^{-1}, $P \circ M$, $M \circ P$ e $P \circ P^{-1}$.
2. Se P é a relação "é pai de" e M é a relação "é mãe de", o que é:
   - *i*) E em relação a L?
   - *ii*) J em relação a F?
   - *iii*) D em relação a L?
   - *iv*) D em relação a I?

Resposta

1. $P^{-1} = \{(L, J), (D, J), (T, L), (I, L), (N, X)\}$,
   $P \circ M = \{(E, L), (E, D)\}$, $M \circ P = \{(J, F)\}$,
   $P \circ P^{-1} = \{(L, L), (D, D), (D, L), (L, D), (I, I), (I, T), (T, I), (T, T), (N, N)\}$.
2. *i*) Avó paterna; *ii*) Avô materno; *iii*) Irmã; *iv*) Tia.

Teorema

Sejam $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$ e $T \subseteq C \times D$ relações binárias. Então,

1. $\mathrm{Dom}(S \circ R) \subseteq \mathrm{Dom}(R)$ e $\mathrm{Im}(S \circ R) \subseteq \mathrm{Im}(S)$;
2. $(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$;
3. $R \circ \mathrm{id}_A = R = \mathrm{id}_B \circ R$;
4. $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$.

Demonstração

Apresentamos a prova de 4 e deixamos as restantes como exercício.

4. Note-se que $(S \circ R)^{-1}$ e $R^{-1} \circ S^{-1}$ são relações de C em A. Para qualquer $(c, a) \in C \times A$, tem-se

$$\begin{array}{rll} (c,a) \in (S \circ R)^{-1} & \text{sse} & (a,c) \in S \circ R \\ & \text{sse} & \exists_{b \in B} \ \ ((a,b) \in R \wedge (b,c) \in S) \\ & \text{sse} & \exists_{b \in B} \ \ ((b,a) \in R^{-1} \wedge (c,b) \in S^{-1}) \\ & \text{sse} & \exists_{b \in B} \ \ ((c,b) \in S^{-1} \wedge (b,a) \in R^{-1}) \\ & \text{sse} & (c,a) \in R^{-1} \circ S^{-1}. \end{array}$$

Daqui resulta que $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$.

Dedicar-nos-emos agora ao estudo de relações num conjunto A. Começamos por introduzir algumas propriedades importantes que estas relações podem ter.

Definição

Seja $R \subseteq A \times A$ uma relação binária num conjunto A. Diz-se que R é:

- *reflexiva* quando $\forall_{a \in A}\ a\,R\,a$;
- *simétrica* quando $\forall_{a,b \in A}\ (a\,R\,b \to b\,R\,a)$;
- *antissimétrica* quando $\forall_{a,b \in A}\ ((a\,R\,b \wedge b\,R\,a) \to a = b)$ ou, equivalentemente, quando $\forall_{a,b \in A}\ ((a\,R\,b \wedge a \neq b) \to b \not R\, a)$;
- *transitiva* quando $\forall_{a,b,c \in A}\ ((a\,R\,b \wedge b\,R\,c) \to a\,R\,c)$.

As propriedades acima podem ser caracterizadas da seguinte forma.

Teorema

Uma relação binária R em A é:

- reflexiva se e só se $\mathrm{id}_A \subseteq R$;
- simétrica se e só se $R^{-1} = R$;
- antissimétrica se e só se $R \cap R^{-1} \subseteq \mathrm{id}_A$;
- transitiva se e só se $R \circ R \subseteq R$.

Exemplos

Seja A um conjunto.

1. A relação id_A é reflexiva, simétrica, antissimétrica e transitiva.
2. A relação ω_A é reflexiva, simétrica e transitiva. Esta relação é antissimétrica se e só se A tem no máximo um elemento.
3. A relação $\emptyset$ em A é simétrica, transitiva e antissimétrica. Esta relação é reflexiva se e só se $A = \emptyset$.
4. Se $A = \{1, 2, 3\}$, então a relação em A:
    - $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3)\}$ é reflexiva, não simétrica, antissimétrica e transitiva;
    - $S = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$ é não reflexiva, simétrica, não antissimétrica e transitiva;
    - $T = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\}$ é não reflexiva, simétrica, não antissimétrica e não transitiva.
5. A relação $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x \leq y\}$ em $\mathbb{Z}$ é reflexiva, não simétrica, antissimétrica e transitiva.

Definição

Seja A um conjunto. Uma relação binária em A diz-se uma *relação de equivalência* se é reflexiva, simétrica e transitiva.

Exemplos

1. As relações id_A e ω_A são relações de equivalência num conjunto A.
2. Seja A o conjunto dos alunos da Universidade do Minho inscritos num único curso. A relação R definida, para cada $x, y \in A$, por

   $x\,R\,y$ se e só se x e y são alunos do mesmo curso da UM

   é uma relação de equivalência em A.
3. $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3)\}$ é uma relação de equivalência no conjunto $A = \{1,2,3\}$. De facto:
   - R é reflexiva visto que $\mathrm{id}_A = \{(1,1),(2,2),(3,3)\} \subseteq R$;
   - R é simétrica porque $R^{-1} = R$;
   - R é transitiva pois $R \circ R = R \subseteq R$.

Exemplo

Dada uma função $f : A \to B$, a relação binária $Ker(f)$ definida, para cada $x, y \in A$, por

$$x\, Ker(f)\, y \quad \text{se e só se} \quad f(x) = f(y)$$

é uma relação de equivalência em A. De facto, $Ker(f)$ é

- reflexiva: $\forall_{x \in A}\; f(x) = f(x)$;
- simétrica: $\forall_{x,y \in A}\; (f(x) = f(y) \to f(y) = f(x))$;
- transitiva: $\forall_{x,y,z \in A}\; ((f(x) = f(y) \wedge f(y) = f(z)) \to f(x) = f(z))$.

A relação binária

$$Ker(f) = \{(x, y) \in A^2 : f(x) = f(y)\}$$

é chamada a equivalência *kernel* (ou *núcleo*) da função f.

Exemplo (Congruência módulo m)

Dado um natural m, dito um *módulo*, a relação $\equiv_m$ em $\mathbb{Z}$ dada por

$$x \equiv_m y \quad \text{se e só se} \quad m \text{ divide } x - y \text{ (i.e., } \exists_{k\in\mathbb{Z}}\ x - y = km\text{).}$$

é uma relação de equivalência em $\mathbb{Z}$. Com efeito, para todos os $x, y, z \in \mathbb{Z}$,

- $x - x = 0m$ e $0 \in \mathbb{Z}$, donde $x \equiv_m x$; [$\equiv_m$ é reflexiva]
- se $x \equiv_m y$, então $x - y = km$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. Logo $y - x = -(x-y) = -(km) = (-k)m$, com $-k \in \mathbb{Z}$, pelo que $y \equiv_m x$; [$\equiv_m$ é simétrica]
- se $x \equiv_m y$ e $y \equiv_m z$, então $x - y = k_1 m$ e $y - z = k_2 m$ para alguns $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$. Logo, $x - z = (x-y) + (y-z) = (k_1 + k_2)m$, com $k_1 + k_2 \in \mathbb{Z}$, pelo que $x \equiv_m z$. [$\equiv_m$ é transitiva]

A relação de equivalência

$$\equiv_m = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : m \text{ divide } x - y\}$$

é chamada a *congruência módulo m*. Também se escreve $x \equiv y \pmod{m}$ em vez de $x \equiv_m y$ e lê-se "*x é congruente com y módulo m*".

Observação

Seja $\equiv_3$ a *congruência módulo* 3, a relação de equivalência em $\mathbb{Z}$ dada por

$$x \equiv_3 y \quad \text{se e só se} \quad 3 \text{ divide } x - y \text{ (i.e., } \exists_{k\in\mathbb{Z}}\ x - y = 3k).$$

Notemos que, dado $x \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} x \equiv_3 1 \quad &\text{sse} \quad x = 3k+1 \ \text{ para algum } k \in \mathbb{Z} \\ &\text{sse} \quad x \text{ tem resto } 1 \text{ na divisão inteira por } 3. \end{aligned}$$

De modo análogo se verifica que:

- $x \equiv_3 2$ se e só se x tem resto 2 na divisão inteira por 3;
- $x \equiv_3 0$ se e só se x tem resto 0 na divisão inteira por 3.

Assim, dado que 0, 1 e 2 são os únicos restos possíveis na divisão inteira por 3 e $\equiv_3$ é uma relação de equivalência, $\mathbb{Z}$ pode ser partido em três blocos:

$$\begin{aligned} X_0 &= \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv_3 0\} = \{3k+0 : k \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\} \\ X_1 &= \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv_3 1\} = \{3k+1 : k \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots, -5, -2, 1, 4, 7, \ldots\} \\ X_2 &= \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv_3 2\} = \{3k+2 : k \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots, -4, -1, 2, 5, 8, \ldots\}. \end{aligned}$$

Exercício

Seja $A = \{4, 5, 6, 7, 8\}$. Considere as seguintes relações binárias em A:

$$R = \{(4,4), (4,5), (5,4), (5,5), (6,6), (7,7), (7,8), (8,7), (8,8)\},$$
$$S = \{(4,4), (4,5), (5,4), (5,5), (5,6), (6,5), (6,6), (7,7), (8,8)\}.$$

1. Mostre que R é uma relação de equivalência em A.
2. Determine $X_a = \{x \in A : x \, R \, a\}$ para cada $a \in A$.
3. Mostre que S não é uma relação de equivalência em A.

Resposta

1. Para mostrar que R é uma relação de equivalência em A note-se que é
   - reflexiva visto que $\mathrm{id}_A = \{(4,4), (5,5), (6,6), (7,7), (8,8)\} \subseteq R$;
   - simétrica porque $R^{-1} = R$;
   - transitiva pois $R \circ R = R \subseteq R$.
2. $X_4 = X_5 = \{4, 5\}$, $X_6 = \{6\}$ e $X_7 = X_8 = \{7, 8\}$.
3. S não é uma relação de equivalência em A pois não é transitiva já que $(4,5), (5,6) \in S$ e, no entanto, $(4,6) \notin S$.

Definição

Seja R uma relação de equivalência num conjunto A e seja a um elemento de A.

- A *classe de equivalência* de a para a relação R (ou *R-classe* de a) é o conjunto
$$[a]_R = \{x \in A : x\,R\,a\} = \{x \in A : a\,R\,x\}$$
dos elementos de A que são *R-equivalentes* a a (i.e., R-relacionados com a).

  A R-classe $[a]_R$ é denotada de forma abreviada por $[a]$, e diz-se simplesmente a classe de equivalência de a, quando a relação R está subentendida.
- O *conjunto quociente* de A por R é a família de conjuntos
$$A/R = \{[a]_R : a \in A\}$$
formada pelas R-classes.

Exemplos

1. Seja $A \neq \emptyset$ e consideremos a relação de equivalência id_A. Para cada $a \in A$,
$$[a]_{\mathrm{id}_A} = \{x \in A : x\,\mathrm{id}_A\,a\} = \{x \in A : x = a\} = \{a\}$$
e, portanto,
$$A/\mathrm{id}_A = \{\{a\} : a \in A\}.$$

Exemplos

2. Seja $A \neq \emptyset$ e consideremos a relação de equivalência ω_A. Para $a \in A$, tem-se
$$[a]_{\omega_A} = \{x \in A : x\,\omega_A\,a\} = A,$$
pelo que
$$A/\omega_A = \{A\}.$$

3. Consideremos a relação de equivalência $\equiv_3$ em $\mathbb{Z}$. Como vimos na pág. 22,
$$[0]_{\equiv_3} = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv_3 0\} = \{3k+0 : k \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\}$$
$$[1]_{\equiv_3} = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv_3 1\} = \{3k+1 : k \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots, -5, -2, 1, 4, 7, \ldots\}$$
$$[2]_{\equiv_3} = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv_3 2\} = \{3k+2 : k \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots, -4, -1, 2, 5, 8, \ldots\}$$
donde
$$\mathbb{Z}/\!\equiv_3 = \{[0]_{\equiv_3}, [1]_{\equiv_3}, [2]_{\equiv_3}\}.$$

4. Seja $R = \{(4,4),(4,5),(5,4),(5,5),(6,6),(7,7),(7,8),(8,7),(8,8)\}$ a relação de equivalência em $A = \{4,5,6,7,8\}$ do exercício da pág. 23. Então,
$$[4]_R = [5]_R = \{4,5\}, \quad [6]_R = \{6\}, \quad [7]_R = [8]_R = \{7,8\}.$$
Assim,
$$A/R = \{\{4,5\},\{6\},\{7,8\}\}.$$

Na análise dos exemplos anteriores, verifica-se que as classes de equivalência são não vazias, são disjuntas duas a duas e a sua união é o conjunto no qual a relação de equivalência está definida. O teorema seguinte mostra que essa propriedade é válida para qualquer relação de equivalência.

Teorema

Se R é uma relação de equivalência num conjunto A, então o conjunto quociente A/R é uma partição do conjunto A.

A cada relação de equivalência num conjunto A está portanto associada uma partição de A. O próximo resultado mostra que, reciprocamente, cada partição de A determina uma relação de equivalência em A.

Teorema

Sejam Π uma partição de um conjunto A e $\mathcal{R}_\Pi$ a relação binária em A definida por

$$a \, \mathcal{R}_\Pi \, b \quad \text{se e só se} \quad \exists_{X \in \Pi} \; a, b \in X.$$

Então, $\mathcal{R}_\Pi$ é uma relação de equivalência em A.

Exemplo

A partição $\Pi = \{\{1,3,5\},\{2,4\},\{6\}\}$ do conjunto $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ determina em A a relação de equivalência

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_\Pi = \{&(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),(3,3),(3,5),(5,1),(5,3),(5,5),\\&(2,2),(2,4),(4,2),(4,4),(6,6)\}.\end{aligned}$$

Note-se que $[1]_{\mathcal{R}_\Pi} = \{1,3,5\}$. Ou seja, a $\mathcal{R}_\Pi$-classe de equivalência do elemento 1 de A é o bloco $\{1,3,5\}$ de Π que contém 1. Esta propriedade é verificada por cada elemento de A.

Combinando os dois últimos resultados obtém-se o *teorema fundamental das relações de equivalência*.

Teorema

Seja A um conjunto e sejam R uma relação de equivalência em A e Π uma partição de A. Então,

1. A/R é uma partição de A e $\mathcal{R}_{A/R} = R$.
2. $\mathcal{R}_\Pi$ é uma relação de equivalência em A e $A/\mathcal{R}_\Pi = \Pi$.

Definição

Uma relação binária R num conjunto A é chamada uma *(relação de) ordem parcial* quando R é reflexiva, antissimétrica e transitiva. Neste caso, o par (A, R) diz-se um *conjunto parcialmente ordenado (cpo)*.

Exemplos

Cada um dos seguintes pares é um cpo:

1. (A, id_A), onde A é um conjunto e id_A é a relação identidade em A;
2. $(\mathbb{R}, \leq)$, onde $\leq$ é a relação "é menor ou igual a" usual em $\mathbb{R}$. De facto, $\leq$ é
   - reflexiva: $\forall_{x \in \mathbb{R}}\ x \leq x$;
   - antissimétrica: $\forall_{x,y \in \mathbb{R}}\ ((x \leq y \wedge y \leq x) \rightarrow x = y)$;
   - transitiva: $\forall_{x,y,z \in \mathbb{R}}\ ((x \leq y \wedge y \leq z) \rightarrow x \leq z)$.
3. $(\mathbb{N}, \mid)$, onde $\mid$ é a relação "divide" em $\mathbb{N}$, ou seja,
$$x \mid y \quad \text{se e só se} \quad \exists_{k \in \mathbb{N}}\ y = kx.$$
4. $(\mathcal{F}, \subseteq)$, onde $\mathcal{F}$ é uma família de conjuntos e $\subseteq$ é a relação de inclusão usual. Em particular, para qualquer conjunto A, $(\mathcal{P}(\mathcal{A}), \subseteq)$ é um cpo.

Exemplos

Os seguintes pares não são cpo:

1. $(\mathbb{R}, <)$, onde $<$ é a relação "é menor que" usual em $\mathbb{R}$. De facto, $<$ não é reflexiva.
2. $(\mathbb{Z}, \mid)$, onde $\mid$ é a relação "divide" em $\mathbb{Z}$, ou seja,
$$x \mid y \quad \text{se e só se} \quad \exists_{k \in \mathbb{Z}}\ y = kx.$$
De facto, tem-se por exemplo $4 \mid -4$ e $-4 \mid 4$ e, no entanto, $4 \neq -4$. A relação $\mid$ não é portanto uma relação antissimétrica em $\mathbb{Z}$.
3. (A, R), onde $A = \{1, 2, 3\}$ e $R = \{(1,1), (1,2), (2,2), (2,3), (3,3)\}$. De facto R não é transitiva pois $1\,R\,2$ e $2\,R\,3$ e, no entanto, $1 \not R\, 3$.

Habitualmente, usa-se o símbolo $\leq$ para representar uma ordem parcial genérica num conjunto A.

Apresentamos de seguida alguma da terminologia usada em conjuntos parcialmente ordenados.

Notação

Dado um cpo $(A, \leq)$ e dados $a, b \in A$, escreve-se:

- $a \leq b$, e lê-se "a é menor ou igual a b" ou "a precede b", para representar $(a, b) \in \leq$;
- $a < b$, e lê-se "a é menor que b" ou "a precede propriamente b", se $a \leq b$ e $a \neq b$;
- $a \ll b$, e lê-se "b é sucessor de a" ou "a é sucedido por b" ou "b cobre a" ou "a é coberto por b", se $a < b$ e $\neg(\exists_{c \in A}\ (a < c \wedge c < b))$;
- $a \parallel b$, e lê-se "a e b são incomparáveis", se $a \not\leq b$ e $b \not\leq a$.

Por exemplo,

- $4 \parallel 6$ em $(\mathbb{N}, |\,)$;
- $6 \ll 7$ em $(\mathbb{N}, \leq)$;
- não existem $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $x \ll y$ em $(\mathbb{R}, \leq)$.

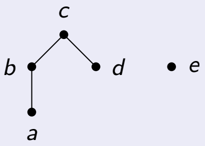
Representação gráfica de um cpo

Um cpo $(A, \leq)$, em que A é um conjunto finito não vazio, pode ser representado por meio de um *diagrama de Hasse*, como se descreve a seguir:

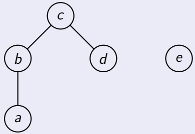
- cada elemento a de A é representado por um ponto do plano;
- se $a, b \in A$ são tais que $a \ll b$, então representa-se b acima de a e unem-se estes dois pontos por um segmento de reta.

Exemplos

1. Seja $A = \{a, b, c, d, e\}$ e seja $\leq$ a relação $\mathrm{id}_A \cup \{(a, b), (a, c), (b, c), (d, c)\}$. O cpo $(A, \leq)$ pode ser representado alternativamente por um dos seguintes diagramas de Hasse

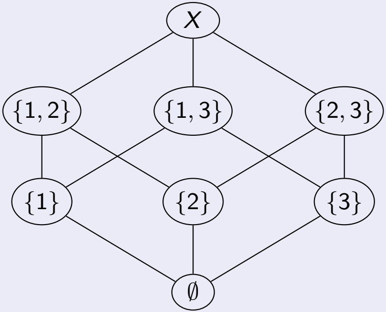


ou



Exemplos

2. Seja $X = \{1, 2, 3\}$. O cpo $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ pode ser representado pelo seguinte diagrama de Hasse

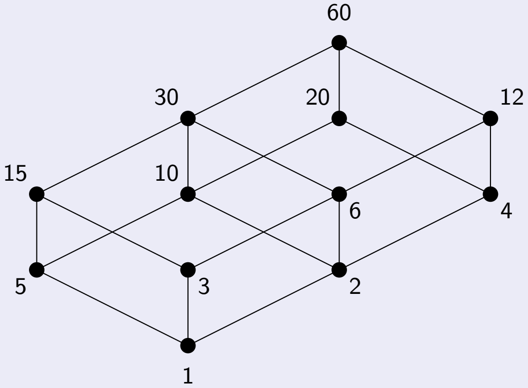


Exemplos

3. Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$ o conjunto dos divisores de 60 e seja $\mid$ a ordem parcial definida em A por

$$x \mid y \quad \text{se e só se} \quad \exists_{k \in \mathbb{N}}\ y = kx.$$

O cpo $(A, \mid)$ pode ser representado pelo seguinte diagrama de Hasse:



Definição

Seja $(A, \leq)$ um cpo e seja $X \subseteq A$. Um elemento m de A diz-se um:

- *majorante* de X quando $\forall_{x \in X}\ x \leq m$;
- *minorante* de X quando $\forall_{x \in X}\ m \leq x$;
- *supremo* de X quando m é majorante de X e $m \leq m'$ para todo o majorante m' de X (ou seja, m é o menor dos majorantes de X);
- *ínfimo* de X quando m é minorante de X e $m' \leq m$ para todo o minorante m' de X (ou seja, m é o maior dos minorantes de X);
- *máximo* de X quando $m \in X$ e m é majorante de X;
- *mínimo* de X quando $m \in X$ e m é minorante de X;
- *elemento maximal* de X quando $m \in X$ e $\neg(\exists_{x \in X}\ m < x)$;
- *elemento minimal* de X quando $m \in X$ e $\neg(\exists_{x \in X}\ x < m)$.

Os conceitos de *majorante*, *supremo*, *máximo* e *elemento maximal* são duais, respetivamente, dos conceitos de *minorante*, *ínfimo*, *mínimo* e *elemento minimal*.

Notação

Seja $(A, \leq)$ um cpo e seja $X \subseteq A$.

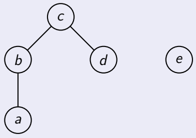
- O conjunto dos majorantes de X e o conjunto dos minorantes de X são denotados respetivamente por $\mathrm{Maj}(X)$ e $\mathrm{Min}(X)$.
- Caso existam, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de X são únicos e representam-se respetivamente por $\sup(X)$, $\inf(X)$, $\max(X)$ e $\min(X)$.

Note-se que, em particular:

- A tem elemento máximo se $\exists_{m \in A} \forall_{x \in A}\ x \leq m$;
- A tem elemento mínimo se $\exists_{m \in A} \forall_{x \in A}\ m \leq x$.

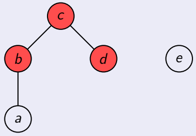
Exemplos

1. Consideremos o cpo $(A, \leq)$ do exemplo 1 anterior. Então,



- A não tem majorantes nem minorantes.
- A não tem supremo, nem ínfimo, nem máximo, nem mínimo.
- Elementos maximais de A: c, e.
- Elementos minimais de A: a, d, e.

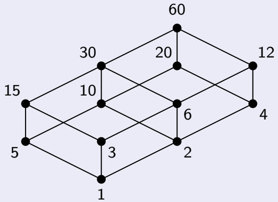
Consideremos o subconjunto $X = \{b, c, d\}$ de A. Então,



- $\mathrm{Maj}(X) = \{c\}$ e $\mathrm{Min}(X) = \emptyset$.
- $\sup(X) = \max(X) = c$.
- X não tem ínfimo nem mínimo.
- Elementos maximais de X: c.
- Elementos minimais de X: b, d.

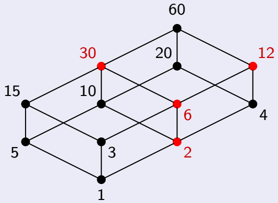
Exemplos

2. Consideremos o cpo $(A, |)$ do exemplo 3 anterior. Então,



- $\mathrm{Maj}(A) = \{60\}$ e $\mathrm{Min}(A) = \{1\}$.
- $\sup(A) = \max(A) = 60$.
- $\inf(A) = \min(A) = 1$.
- 60 é o único elemento maximal e 1 é o único elemento minimal de A.

Consideremos o subconjunto $X = \{2, 6, 12, 30\}$ de A. Então,



- $\mathrm{Maj}(X) = \{60\}$ e $\mathrm{Min}(X) = \{1, 2\}$.
- $\sup(X) = 60$ e $\max(X)$ não existe.
- $\inf(X) = \min(X) = 2$.
- 12 e 30 são os elementos maximais e 2 é o único elemento minimal de X.

Teorema

Seja $(A, \leq)$ um cpo e sejam $a, b \in A$. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. $a \leq b$;
2. $\sup\{a, b\} = b$;
3. $\inf\{a, b\} = a$.

Definimos de seguida duas classes especiais de conjuntos parcialmente ordenados.

Definição

Um cpo $(A, \leq)$ diz-se um:

1. *conjunto totalmente ordenado* ou uma *cadeia* se, para quaisquer $a, b \in A$, os elementos a e b são comparáveis (i.e., $a \leq b$ ou $b \leq a$).

   Neste caso, a ordem parcial $\leq$ diz-se uma *ordem total* ou *ordem linear* em A.
2. *reticulado* se, para quaisquer $a, b \in A$, o conjunto $\{a, b\}$ tem ínfimo e supremo.

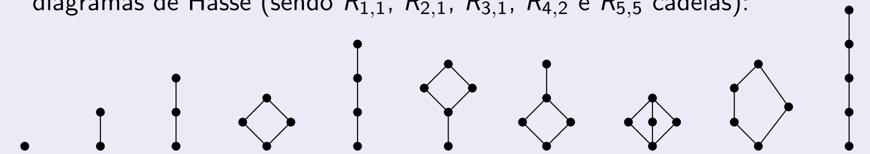
Exemplos

1. Do teorema da página anterior, decorre imediatamente que toda a cadeia é um reticulado. Em particular,

$$(\mathbb{R}, \leq),\ (\mathbb{Q}, \leq),\ (\mathbb{Z}, \leq),\ (\mathbb{N}, \leq),$$

com as relações $\leq$ usuais são cadeias e, por isso, são reticulados.

2. Os reticulados não vazios com até 5 elementos têm um dos seguintes diagramas de Hasse (sendo $R_{1,1}$, $R_{2,1}$, $R_{3,1}$, $R_{4,2}$ e $R_{5,5}$ cadeias):



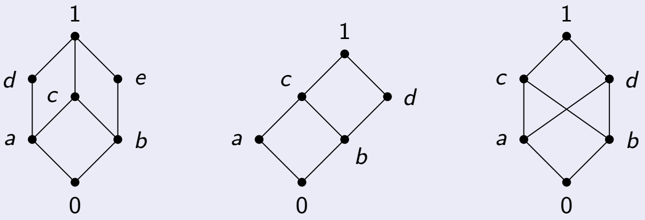
$R_{1,1}$ $R_{2,1}$ $R_{3,1}$ $R_{4,1}$ $R_{4,2}$ $R_{5,1}$ $R_{5,2}$ $R_{5,3}$ $R_{5,4}$ $R_{5,5}$

3. Para qualquer conjunto A, o cpo $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ é um reticulado, tendo-se

$$\forall_{X,Y\in\mathcal{P}(A)}\ (\sup\{X, Y\} = X \cup Y \wedge \inf\{X, Y\} = X \cap Y).$$

Exercício

1. Quais dos seguintes conjuntos parcialmente ordenados são reticulados?



A_1 A_2 A_3

2. Identifique todos os diagramas de Hasse possíveis para reticulados com 6 elementos (os diagramas nestas condições são 15).