Exercício 3.1 Sendo $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ a função definida por $f(x,y)=x^2y$, calcule, usando a definição:

a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$;

b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$;

c) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2)$;

d) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$.

Exercício 3.2 Calcule as derivadas parciais de 1ª ordem das funções seguintes, nos pontos possíveis:

a) $f(x,y)=3x^2+2y^2$;

b) $f(x,y)=\operatorname{sen}(x^2-3xy)$;

c) $f(x,y)=x^2y^2e^{2xy}$;

d) $f(x,y)=e^x\ln(xy)$;

e) $f(x,y)=e^{\operatorname{sen}(x\sqrt{y})}$;

f) $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$;

g) $f(x,y)=x\cos x\cos y$;

h) $f(x,y)=\operatorname{arctg}(x^2y^3)$;

i) $f(x,y)=x+y^2x+\ln(\operatorname{sen}(x^2+y))$;

j) $f(x,y,z)=z\,e^{x^2+y^2}$;

k) $f(x,y,z)=\ln(e^x+z^y)$;

l) $f(x,y,z)=\dfrac{xy^3+e^z}{x^3y-e^z}$.

Exercício 3.3 Para cada uma das funções seguintes, calcule, se existirem, $f_x(0,0)$ e $f_y(0,0)$.

a) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x+y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ \pi & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

b) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Exercício 3.4 Mostre que:

a) se $f(x,y)=e^{xy}$, então $x\frac{\partial f}{\partial x}=y\frac{\partial f}{\partial y}$;

b) se $f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2+xy\right)$, então $xf_x+yf_y=2$;

c) se $f(x,y,z)=x+\frac{x-y}{y-z}$, então $f_x+f_y+f_z=1$.

Exercício 3.5 Determine a derivada direcional de cada uma das funções, no ponto P e na direção do vetor v indicados.

a) $f(x,y)=x^2y+x$, $P=(1,0)$ e $v=(1,1)$;

b) $f(x,y)=x^2\operatorname{sen}(2y)$, $P=(1,\frac{\pi}{2})$ e $v=(3,-4)$;

c) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, $P=(1,2,3)$ e $v=(1,1,1)$.

Exercício 3.6 Calcule o gradiente das seguintes funções:

a) $f(x,y)=xe^{-x+y}$;

b) $f(r,\theta)=r\operatorname{sen}\theta$;

c) $f(r,h)=\pi r^2h$;

d) $f(x,y,z)=xe^{-x^2-y^2-z^2}$;

e) $f(x,y,z)=\dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2+1}$;

f) $f(x,y,z)=z^2e^x\cos y$.

Exercício 3.7 Encontre uma equação do plano tangente ao gráfico da função $f(x,y)=x^2+y^3$ no ponto de coordenadas $(3,1)$.

Exercício 3.8 Mostre que os gráficos das funções $f(x,y) = x^2 + y^2$ e $g(x,y) = -x^2 - y^2 + xy^3$ têm o mesmo plano tangente em $(0,0)$.

Exercício 3.9 Considere a função $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$.

a) Determine o ponto de interseção do plano tangente à superfície de equação $z = f(x,y)$ no ponto $(1,1,1)$ com o eixo dos zz.

b) Usando uma aproximação linear de f em $(1,1)$, calcular uma estimativa para $f(1.02, 0.90)$.

Exercício 3.10 Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

a) Verifique que f possui derivadas parciais em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$.

b) Verifique que f não é contínua na origem e conclua que f não é diferenciável na origem.

c) Mostre que existe $Df\big((0,0);(\alpha,\beta)\big)$ com $\alpha\beta = 0$, mas não existe $Df\big((0,0);(\alpha,\beta)\big)$ com $\alpha\beta \neq 0$.

Exercício 3.11 Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^6+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

a) Mostre que existe derivada direcional em $(0,0)$ segundo qualquer vetor de $\mathbb{R}^2$.

b) Verifique que f não é diferenciável.

Exercício 3.12 Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

a) Mostre que existe $Df(\boldsymbol{a};\boldsymbol{u}), \forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2$

b) Verifique se f é diferenciável em $(0,0)$.

Exercício 3.13 Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2) \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

a) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

b) Determine $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ e verifique que não são contínuas em $(0,0)$.

c) Verifique que f é diferenciável em $(0,0)$.

Exercício 3.14 Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Mostre que:

a) f é contínua;

b) $Df\big((0,0);(a,b)\big) = f(a,b), \ \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$.