Universidade do Minho
Departamento de Matemática

LEI | MIEI
2021/2022

Elementos de Probabilidades
e
Teoria de Números

Teoria de Números - folha 2

12. Sejam a e b inteiros não simultaneamente nulos. Mostre que:
    (a) $\text{m.d.c.}(a, b) = \text{m.d.c.}(a, -b) = \text{m.d.c.}(-a, b) = \text{m.d.c.}(-a, -b)$.
    (b) Se $\text{m.d.c.}(a, b) = d$, então $\text{m.d.c.}(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1$.

13. Verifique que, dados um inteiro positivo n e um inteiro a, $\text{m.d.c.}(a, a + n)$ divide n. Conclua que dois inteiros consecutivos são primos entre si.

14. Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ tais que $\text{m.d.c.}(a, 4) = \text{m.d.c.}(b, 4) = 2$. Mostre que $\text{m.d.c.}(a+b, 4) = 4$.

15. Mostre que se k é um inteiro positivo, então $3k + 2$ e $5k + 3$ são números primos entre si.

16. Sejam a e b números inteiros. Mostre que se x e y são inteiros tais que $ax + by = \text{m.d.c.}(a, b)$, então $\text{m.d.c.}(x, y) = 1$.

17. Mostre que $\text{m.d.c.}(a, b) = 1 = \text{m.d.c.}(a, c)$ se e só se $\text{m.d.c.}(a, bc) = 1$.

18. Utilizando o Algoritmo de Euclides, determine o máximo divisor comum de cada par de inteiros a e b e escreva-o como combinação linear de a e b:
    (a) $a = 1001$, $b = 357$.
    (b) $a = 1001$, $b = 33$.
    (c) $a = 56$, $b = 126$.
    (d) $a = -90$, $b = 1386$.
    (e) $a = -2860$, $b = -2310$.

19. Determine, usando o Algoritmo de Euclides, inteiros x e y que satisfaçam:
    (a) $\text{m.d.c.}(56, 72) = 56x + 72y$;
    (b) $\text{m.d.c.}(24, 138) = 24x + 138y$.

20. Determine o menor inteiro positivo k da forma $k = 22x + 55y$, onde x e y são inteiros.

21. Prove que
    (a) todo o primo da forma $3n + 1$ é da forma $6m + 1$ $(m, n \in \mathbb{N})$;
    (b) o único primo da forma $n^3 - 1$ é o 7 $(n \in \mathbb{N})$;
    [Sugestão: Escreva $n^3 - 1$ como $(n - 1)(n^2 + n + 1)$.]
    (c) todo o inteiro da forma $n^4 + 4$, em que $n > 1$, é composto.

22. Usando a fatorização de 507 e 1287 em fatores primos, determine $\text{m.d.c.}(507, 1287)$ e $\text{m.m.c.}(507, 1287)$.

23. Verifique que 701 é um número primo, testando todos os primos $p \leq \sqrt{701}$ como possíveis divisores.

24. Prove que $\sqrt{p}$ é irracional para todo o primo p;

25. Mostre que há uma infinidade de primos da forma $6n + 5$.