Mestrado Integrado em Engenharia Informática

Tópicos de Matemática Discreta

1. Elementos de Lógica Matemática

José Carlos Costa

Dep. Matemática
Universidade do Minho

1º semestre 2020/2021

Índice

Neste capítulo estudaremos:

- Cálculo Proposicional (da Lógica Clássica)
  - Sintaxe do Cálculo Proposicional
  - Semântica do Cálculo Proposicional
- Introdução ao Cálculo de Predicados (de 1ª ordem da Lógica Clássica): quantificação existencial e quantificação universal

A lógica consiste no estudo dos princípios e das técnicas do raciocínio, procurando definir linguagens formais que permitam representar de forma precisa e sem ambiguidade (parte d)a linguagem natural e definindo regras que permitam a construção rigorosa e sistemática de argumentos válidos.

- Sintaxe: é o conjunto de símbolos e regras de formação que definem as palavras, designadas por fórmulas, que podem ser utilizadas para representar de forma precisa, concisa e sem ambiguidade a linguagem natural (ou parte dela);
- Semântica: é o conjunto de regras que associam um significado às fórmulas.

Definição

1. Uma *proposição* é uma frase declarativa que assume um valor lógico.
2. Existem dois *valores lógicos*:
   - verdade, que se representa por V (ou 1);
   - falsidade, que se representa por F (ou 0).
3. Uma proposição cujo valor lógico é V diz-se verdadeira.
4. Uma proposição cujo valor lógico é F diz-se falsa.

Daqui decorrem os dois princípios seguintes:

1. Princípio da não contradição: uma proposição não pode ser simultaneamente verdadeira e falsa;
2. Princípio do terceiro excluído: uma proposição é verdadeira ou falsa.

Exercício

Indique quais das seguintes frases são proposições e dessas o seu valor lógico quando possível:

1. Braga é uma cidade do norte de Portugal.
2. Existe vida noutros planetas.
3. $x^2 + 5$.
4. A Rita vive em Braga e o João vive em Lisboa.
5. Existe uma cidade portuguesa a sul do rio Tejo e outra a norte.
6. Come depressa Francisco.
7. Se receber hoje o salário, então amanhã vou jantar num restaurante.
8. Que dia é hoje?
9. Todo o número par maior do que 2 pode ser escrito como a soma de dois números primos. [Conjetura de Goldbach.]
10. $10 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

- Interessa o modo como uma proposição é formada a partir de proposições mais elementares. Geralmente denotamos proposições por letras maiúsculas P, Q, R, etc, possivelmente com um índice.
- Como elementos de ligação entre proposições temos o "*não*", o "*e*", o "*ou*", o "*se...então*", o "*se e só se*".

Definição

Uma proposição é dita *simples* (ou *atómica*) se nenhuma componente da proposição é ela própria uma proposição e é dita *composta* caso contrário.

Exercício

Indique quais das proposições seguintes são simples e quais são compostas:

1. $1 + 1 = 1$.
2. Deus existe se e só se $1 + 1 = 1$.
3. Se Braga é a capital de Portugal ou $1 < 2$, então $1 + 1 \neq 1$.
4. Hoje é dia de aula.

No Cálculo Proposicional,

- as proposições simples são representadas por $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots$ (com $n \in \mathbb{N}_0$). Estes símbolos são chamados variáveis proposicionais. O conjunto das variáveis proposicionais é denotado por $\mathcal{V}^{CP}$.
- As proposições compostas são representadas usando:
  - as variáveis proposicionais $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots$;
  - os símbolos $\perp$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$, chamados conectivos proposicionais, e designados, respetivamente, por absurdo, negação, conjunção, disjunção, implicação e equivalência;
  - os símbolos (e) designados símbolos auxiliares.

Definição

O alfabeto do Cálculo Proposicional, que se denota por $\mathcal{A}^{CP}$, é o conjunto $\mathcal{V}^{CP} \cup \{\perp, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, (,)\}$ constituído pelas variáveis proposicionais, pelos conectivos proposicionais e pelos símbolos auxiliares.

Representemos por P e Q duas proposições.

$\neg P$

A proposição "não P" designa-se por negação de P e é representada por $\neg P$. A $\neg P$ também podemos associar as leituras "é falso P" e "não é verdade P".

$P \wedge Q$

A proposição "P e Q" designa-se por conjunção de P e Q e é representada por $P \wedge Q$.

$P \vee Q$

A proposição "P ou Q" designa-se por disjunção de P e Q e é representada por $P \vee Q$.

$P \rightarrow Q$

A proposição "Se P, então Q" designa-se por implicação de P e Q e é representada por $P \rightarrow Q$. A $P \rightarrow Q$ também podemos associar as leituras:

"P implica Q"

"P é suficiente para Q"

"P só se Q"

"P somente se Q"

"Q é necessária para P"

"Q se P"

"Q sempre que P".

A P chamamos o antecedente ou a hipótese da implicação e a Q chamamos o consequente ou a conclusão.

$P \leftrightarrow Q$

A proposição "P se e só se Q", que resulta da conjunção das implicações "Se P, então Q" e "Se Q, então P", designa-se por equivalência de P e Q e é representada por $P \leftrightarrow Q$. A $P \leftrightarrow Q$ também podemos associar as leituras:

"P é equivalente a Q"
"P se e somente se Q"
"Q é necessária e suficiente para P".

Ao representarmos proposições compostas, devemos recorrer aos símbolos auxiliares "(" e ")", de modo a evitar ambiguidades.

EXEMPLO:

- Suponhamos que as variáveis proposicionais p_0, p_1 e p_2 representam as proposições simples,

  p_0: $1 + 1 = 1$.
  p_1: Braga é a capital de Portugal.
  p_2: $1 < 2$.

- Então, a proposição 3 do exercício da página 6, "Se Braga é a capital de Portugal ou $1 < 2$, então $1 + 1 \neq 1$", pode ser representada por

  $(p_1 \vee p_2) \to \neg p_0$
  ou $(p_1 \vee p_2) \to (\neg p_0)$
  ou $((p_1 \vee p_2) \to (\neg p_0))$

Especificados os símbolos que definem o alfabeto da linguagem do Cálculo Proposicional, definimos agora as palavras (chamadas fórmulas) desta linguagem.

Definição

O conjunto $\mathcal{F}^{CP}$ das fórmulas do Cálculo Proposicional é o conjunto definido indutivamente pelas seguintes regras:

(F_1) $\perp$ é uma fórmula;

(F_2) toda a variável proposicional p_n é uma fórmula;

(F_3) se φ é uma fórmula, então $(\neg\varphi)$ é uma fórmula;

(F_4) se φ e ψ são fórmulas, então $(\varphi \wedge \psi)$ é uma fórmula;

(F_5) se φ e ψ são fórmulas, então $(\varphi \vee \psi)$ é uma fórmula;

(F_6) se φ e ψ são fórmulas, então $(\varphi \rightarrow \psi)$ é uma fórmula;

(F_7) se φ e ψ são fórmulas, então $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ é uma fórmula.

Exemplos

1. A palavra $((\neg p_0) \wedge (p_1 \to p_0))$ é uma fórmula do CP, pois:
   - (*i*) Pela regra (F_2), as variáveis proposicionais p_0 e p_1 são fórmulas;
   - (*ii*) Por (*i*) e pela regra (F_3), $(\neg p_0)$ é uma fórmula;
   - (*iii*) Por (*i*) e pela regra (F_6), $(p_1 \to p_0)$ é uma fórmula;
   - (*iv*) Por (*ii*), (*iii*) e pela regra (F_4), $((\neg p_0) \wedge (p_1 \to p_0))$ é uma fórmula.
2. $((\neg(p_2 \wedge \bot)) \to (\neg p_4)) \in \mathcal{F}^{CP}$;
3. $((p_2(\neg\wedge)\bot) \to (\neg p_4)) \notin \mathcal{F}^{CP}$.

- Será que $\neg(p_2 \wedge \bot) \to \neg p_4$ é uma fórmula do CP?
- Os parêntesis servem para uma representação não ambigua das fórmulas, mas para simplificar a escrita (e sem criar ambiguidade) convenciona-se que os parêntesis extremos e os parêntesis à volta de negações podem ser omitidos.
- Assim, $\neg(p_2 \wedge \bot) \to \neg p_4$ simplifica $((\neg(p_2 \wedge \bot)) \to (\neg p_4))$ e, abusando da linguagem, será também chamada uma fórmula.

A semântica do CP associa significado às fórmulas. Associar significado a uma fórmula consiste em atribuir-lhe um valor lógico.

Observação

- O valor lógico de uma proposição obtida por aplicação de um conectivo é determinado pelo conectivo e pelo valor lógico das proposições às quais o conectivo é aplicado.

  Por exemplo, quando se aplica a uma proposição P o conectivo negação obtém-se a proposição $\neg P$ de valor lógico oposto: isto é,

  - se P tem valor lógico 1, então $\neg P$ tem o valor lógico 0;
  - se P tem valor lógico 0, então $\neg P$ tem o valor lógico 1.

- Em termos matemáticos, isto significa que a cada conectivo pode ser associada uma função de verdade, a qual pode ser apresentada sob a forma de uma tabela, chamada a tabela de verdade do conectivo.

Negação

O conectivo $\neg$ tem associada uma função de verdade unária e a sua tabela de verdade é a seguinte, onde P representa uma proposição:

P	$\neg P$
1	0
0	1

Exercício

Negue as seguintes proposições e indique os respetivos valores lógicos:

P: "5 é maior do que 3".

Q: "Em todas as fórmulas do CP ocorre alguma variável proposicional".

Conjunção

Dadas duas proposições P e Q, a proposição $P \wedge Q$ é verdadeira se e só se ambas as proposições P e Q são verdadeiras. Assim, $\wedge$ está associado a uma função de verdade binária que pode ser descrita pela tabela de verdade abaixo.

P	Q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Exercício

Considere as proposições P: "O rio Este nasce em Braga e desagua no rio Ave" e Q: "$\pi \not> 3$". Traduza em linguagem natural a proposição $P \wedge Q$ e determine o seu valor lógico.

Disjunção

Dadas duas proposições P e Q, a proposição $P \vee Q$ é falsa se e só se ambas as proposições P e Q são falsas. O conectivo $\vee$ tem associada uma função de verdade binária e a sua tabela de verdade é a seguinte:

P	Q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Exercício

Considere as proposições P: "O número 10 não é primo nem par" e Q: "$\pi = 3,14$". Traduza em linguagem corrente a proposição $P \vee Q$ e indique o seu valor lógico.

Implicação

Dadas proposições P e Q, a proposição $P \to Q$ é falsa se e só se P é verdadeira e Q é falsa. Assim, o conectivo $\to$ está associado a uma função de verdade binária, descrita pela tabela de verdade

P	Q	$P \to Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Exercício

Quais das proposições abaixo são verdadeiras?

P_1: "Se 8 é par, então 7 é primo", P_2: "Se 8 é par, então 7 é composto",
P_3: "Se 8 é ímpar, então 7 é primo", P_4: "Se 8 é ímpar, então 7 é composto".

Equivalência

Para proposições P e Q, a proposição $P \leftrightarrow Q$ é verdadeira se e só se P e Q têm o mesmo valor lógico. Ao conectivo $\leftrightarrow$ está portanto associada uma função de verdade binária, descrita pela tabela de verdade abaixo.

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Exercício

Quais das proposições abaixo são verdadeiras?

P_1: "8 é par se e só se $1 > 2$", P_2: "8 ser par é necessário e suficiente para $2 > 1$", P_3: "8 é ímpar se e somente se $1 > 2$", P_4: "8 ser ímpar é equivalente a $2 > 1$".

- Recorde-se que o conjunto $\mathcal{F}^{CP}$ das fórmulas do CP é o conjunto definido indutivamente pelas regras (F_1) a (F_7).
- Assim, para atribuir um valor lógico às fórmulas começamos por atribuir um valor lógico ao absurdo $\perp$.

ABSURDO

O conectivo $\perp$ é uma fórmula atómica que tem sempre o valor lógico 0. Assim, $\perp$ está associado a uma função de verdade que é uma constante (função $0-$ ária).

$\perp$
0

- As outras fórmulas atómicas (ou seja, as variáveis proposicionais p_n) podem tomar o valor lógico 1 ou 0.
- O valor lógico de uma fórmula não atómica φ é determinado pelos valores lógicos das variáveis proposicionais que ocorrem em φ e pelas funções de verdade associadas aos conectivos $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$.

Observação

As tabelas de verdade dos conectivos podem ser sintetizadas da seguinte forma, onde φ e ψ são fórmulas,

$\perp$
0

φ	$\neg\varphi$
1	0
0	1

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$	$\varphi \vee \psi$	$\varphi \rightarrow \psi$	$\varphi \leftrightarrow \psi$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

Em linguagem corrente, a fórmula

- $\neg\varphi$ é verdadeira se e só se φ é uma fórmula falsa.
- $\varphi \wedge \psi$ é verdadeira se e só se φ e ψ são ambas verdadeiras e, portanto, $\varphi \wedge \psi$ é falsa se e só se pelo menos uma das fórmulas, φ ou ψ, é falsa.
- $\varphi \vee \psi$ é falsa se e só se φ e ψ são ambas falsas, donde $\varphi \vee \psi$ é verdadeira se e somente se pelo menos uma das fórmulas, φ ou ψ, é verdadeira.
- $\varphi \rightarrow \psi$ é falsa se e só se φ é verdadeira e ψ é falsa.
- $\varphi \leftrightarrow \psi$ é verdadeira se e só se φ e ψ têm o mesmo valor lógico.

Observação

- Ao atribuirmos um valor lógico a cada variável proposicional que ocorre numa fórmula φ fica determinado o valor lógico de φ.
- Assim, cada fórmula φ define uma função de verdade que fica bem representada através de uma tabela de verdade, com uma linha para cada uma das combinações possíveis dos valores lógicos das variáveis proposicionais que ocorrem na fórmula φ.
- Como cada variável pode tomar um de dois valores (1 ou 0), a tabela de verdade de uma fórmula na qual ocorrem n variáveis tem 2^n linhas.

Exemplo

Seja φ a fórmula $(p_3 \vee \perp) \to \neg p_3$. A tabela de verdade de φ é a seguinte.

p_3	$\perp$	$p_3 \vee \perp$	$\neg p_3$	φ
1	0	1	0	0
0	0	0	1	1

Definição

Uma fórmula φ diz-se uma:

- tautologia se φ é sempre verdadeira (independentemente dos valores lógicos das variáveis proposicionais que a compõem);
- contradição se φ é sempre falsa.

Exemplo

Seja φ a fórmula $(p_0 \to p_2) \leftrightarrow (\neg p_2 \to \neg p_0)$. A tabela de verdade de φ é

p_0	p_2	$\neg p_0$	$\neg p_2$	$p_0 \to p_2$	$\neg p_2 \to \neg p_0$	φ
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

A análise da última coluna permite concluir que φ é uma tautologia.

Exemplo

Considere a fórmula φ: $(p_0 \wedge p_1) \rightarrow \neg p_2$. A tabela de verdade de φ é

p_0	p_1	p_2	$p_0 \wedge p_1$	$\neg p_2$	φ
1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1
0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1
0	0	0	0	1	1

e mostra que φ não é uma tautologia nem uma contradição.

Supondo que a fórmula φ representa a proposição "O João não vai ao teatro se o Pedro e a Rita forem", a análise da tabela permite concluir que esta afirmação é verdadeira exceto no caso de o João, o Pedro e a Rita irem os três ao teatro.

Como é evidente, a negação de uma tautologia é uma contradição e a negação de uma contradição é uma tautologia.

Exercício

Sejam φ e ψ fórmulas. Das seguintes fórmulas quais são tautologias e quais são contradições?

1. $\varphi \vee \neg\varphi$;
2. $\varphi \wedge \neg\varphi$;
3. $\varphi \rightarrow \varphi$;
4. $\varphi \rightarrow \neg\varphi$;
5. $\varphi \leftrightarrow \neg\varphi$;
6. $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$;
7. $(\varphi \vee \psi) \rightarrow (\varphi \wedge \psi)$;
8. $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\varphi \vee \psi)$;
9. $(\varphi \wedge (\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow \psi$.

Definição

Sejam φ e ψ fórmulas. Diz-se que φ e ψ são logicamente equivalentes, e escreve-se $\varphi \Leftrightarrow \psi$, se a fórmula $\varphi \leftrightarrow \psi$ é uma tautologia.

Ou seja, tem-se $\varphi \Leftrightarrow \psi$ se φ e ψ assumem o mesmo valor lógico para cada uma das combinações possíveis dos valores lógicos das variáveis proposicionais que nelas ocorrem.

Exemplo

Tem-se

$$p_0 \to p_2 \Leftrightarrow \neg p_2 \to \neg p_0$$

pois, como vimos no exemplo anterior, a fórmula

$$(p_0 \to p_2) \leftrightarrow (\neg p_2 \to \neg p_0)$$

é uma tautologia. Mais geralmente, pode-se mostrar que, para todas as fórmulas φ e ψ,

$$\varphi \to \psi \Leftrightarrow \neg \psi \to \neg \varphi$$

chamada a lei do contrarrecíproco.

Exemplo

Para toda a fórmula $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$,

$$\perp \Leftrightarrow \varphi \wedge \neg\varphi.$$

De facto, consideremos a fórmula $\psi : \perp \leftrightarrow (\varphi \wedge \neg\varphi)$. A tabela de verdade de ψ é

$\perp$	φ	$\neg\varphi$	$\varphi \wedge \neg\varphi$	$\perp \leftrightarrow (\varphi \wedge \neg\varphi)$
0	1	0	0	1
0	0	1	0	1

donde se pode concluir que ψ é uma tautologia, uma vez que o seu valor lógico é sempre 1.

O teorema seguinte apresenta algumas equivalências lógicas importantes.

Teorema

Para quaisquer $\varphi, \psi, \sigma \in \mathcal{F}^{CP}$, são válidas as seguintes equivalências lógicas:

1. $(\varphi \vee \psi) \vee \sigma \Leftrightarrow \varphi \vee (\psi \vee \sigma)$,
   $(\varphi \wedge \psi) \wedge \sigma \Leftrightarrow \varphi \wedge (\psi \wedge \sigma)$, ... (associatividade)
2. $\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \psi \vee \varphi$, $\quad \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \psi \wedge \varphi$, ... (comutatividade)
3. $\varphi \vee \varphi \Leftrightarrow \varphi$, $\quad \varphi \wedge \varphi \Leftrightarrow \varphi$, ... (idempotência)
4. $\varphi \vee \perp \Leftrightarrow \varphi$, $\quad \varphi \wedge \neg\perp \Leftrightarrow \varphi$, ... (elemento neutro)
5. $\varphi \vee (\psi \wedge \sigma) \Leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \sigma)$,
   $\varphi \wedge (\psi \vee \sigma) \Leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \sigma)$, ... (distributividade)
6. $\neg(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi$,
   $\neg(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi$, ... (leis de De Morgan)
7. $\neg\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi$. .... (dupla negação)

Demonstração

Mostraremos apenas uma das leis de De Morgan, a saber

$$\neg(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi.$$

A prova das restantes equivalências lógicas fica como exercício. Para tal, construindo a tabela de verdade da fórmula τ: $\neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ verifica-se que esta fórmula é uma tautologia:

φ	ψ	$\neg\varphi$	$\neg\psi$	$\varphi \vee \psi$	$\neg(\varphi \vee \psi)$	$\neg\varphi \wedge \neg\psi$	τ
1	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	1	1

Logo, as fórmulas $\neg(\varphi \vee \psi)$ e $\neg\varphi \wedge \neg\psi$ são logicamente equivalentes.

Quando se pretende mostrar a equivalência lógica entre duas fórmulas sem usar tabelas de verdade, pode-se partir de uma das fórmulas e chegar à outra por meio de uma sequência de equivalências lógicas (já conhecidas).

Exemplo

Usando uma sequência de equivalências lógicas, pode-se mostrar que a fórmula

$$(p_1 \vee p_3) \wedge \neg(\neg p_1 \wedge p_3)$$

é logicamente equivalente à fórmula p_1. De facto,

$$\begin{aligned}
(p_1 \vee p_3) \wedge \neg(\neg p_1 \wedge p_3) &\Leftrightarrow (p_1 \vee p_3) \wedge (\neg\neg p_1 \vee \neg p_3) && \text{[leis de De Morgan]}\\
&\Leftrightarrow (p_1 \vee p_3) \wedge (p_1 \vee \neg p_3) && \text{[dupla negação]}\\
&\Leftrightarrow p_1 \vee (p_3 \wedge \neg p_3) && \text{[distributividade]}\\
&\Leftrightarrow p_1 \vee \perp && \text{[exemplo pag. 26]}\\
&\Leftrightarrow p_1 && \text{[elemento neutro]}
\end{aligned}$$

O resultado seguinte mostra que, usando a equivalência lógica, é possível "definir conectivos à custa de outros". Desta forma é possível "retirar" alguns dos conectivos do alfabeto, no sentido em que qualquer fórmula é logicamente equivalente a outra em que tais conectivos não são usados.

Teorema

Sejam φ e ψ fórmulas. Então,

1. $\varphi \leftrightarrow \psi \Leftrightarrow (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$;
2. $\varphi \rightarrow \psi \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \psi$;
3. $\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \neg\varphi \rightarrow \psi$, $\quad \varphi \vee \psi \Leftrightarrow \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$;
4. $\varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$.

Exercício

Usando as equivalências lógicas acima, determine uma fórmula logicamente equivalente à fórmula $p_0 \rightarrow p_1$ e que envolve apenas os conetivos $\neg$ e $\wedge$.

A Lógica Proposicional, estudada até agora, é incapaz de (ou insuficiente para) expressar certos argumentos, tais como:

- "*Todos os homens são mortais. Sócrates é um homem. Logo, Sócrates é mortal.*"
- "*Todos os quadrados são positivos. Como* 16 *é um quadrado, então* 16 *é positivo.*"
- "*Existe um número real cujo quadrado é* 5*.*"

Esta terceira afirmação é do tipo "*Existe um x com a propriedade p*", que pode ser simbolizada por

$$\exists_x \; p(x).$$

Frases como as anteriores são tratadas pelo Cálculo de Predicados, que é um ramo da lógica ao qual faremos uma breve introdução. Ele será estudado com maior profundidade no 2º semestre, na uc "Lógica EI".

Conforme estabelecido anteriormente, frases tais como

- "$x^2 < 5$",
- "x é marido de y",
- "x é um natural ímpar e múltiplo de 3",

não são proposições por não ser possível atribuir-lhes um valor lógico, já que as letras x e y, ditas *variáveis*, designam indivíduos ou objetos indeterminados. Nas frases deste tipo está implícito um domínio de discurso para cada variável, um conjunto não vazio chamado *universo* ou domínio de variação da variável.

Exemplo

Na frase

- "x é um natural ímpar e múltiplo de 3", a variável x refere-se a um natural e, por isso, o seu universo é o conjunto $\mathbb{N}$;
- "x é marido de y", o domínio de variação de x e y não está explícito mas, implicitamente, pode ser o conjunto de todas as pessoas.

A frase "$x^2 < 5$" não é uma proposição. No entanto, se substituirmos a variável x por valores do seu domínio, que podemos especificar ser o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, obtemos frases às quais já é possível associar um valor lógico. Por exemplo,

- "$4^2 < 5$" é uma proposição falsa;
- "$(-\sqrt{3})^2 < 5$" é uma proposição verdadeira.

Definição

Um predicado nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$, onde $n \in \mathbb{N}$, é uma frase declarativa envolvendo as variáveis $x_1, \ldots, x_n$ que se transforma numa proposição quando as variáveis são substituídas por valores do seu universo.

Um predicado nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$ será representado por uma letra minúscula (por exemplo p) seguida da sequência $(x_1, \ldots, x_n)$ das variáveis.

Dado um predicado $p(x_1, \ldots, x_n)$, a expressão $p(a_1, \ldots, a_n)$ representa a proposição obtida pela substituição no predicado de cada variável x_i por um valor a_i do seu domínio de variação.

Exemplo

1. A frase "x é um inteiro que dividido por 5 tem resto 1" é um predicado na variável x, de universo $\mathbb{Z}$. Este predicado pode ser representado por $p(x)$. Substituindo a variável x pelo inteiro:
   - 16 obtém-se $p(16)$: "16 é um inteiro que dividido por 5 tem resto 1", que é uma proposição verdadeira;
   - -3 obtém-se $p(-3)$: "-3 é um inteiro que dividido por 5 tem resto 1", que é uma proposição falsa.
2. A frase "$x + 3 > y$" é um predicado nas variáveis x, y e de universo, digamos, $\mathbb{R}$. Se representarmos este predicado por $q(x, y)$, então:
   - $q(x, 6)$ representa o predicado "$x + 3 > 6$" na variável x;
   - $q(\sqrt{10}, y)$ representa o predicado "$\sqrt{10} + 3 > y$" na variável y;
   - $q(\sqrt{10}, 6)$ representa a proposição verdadeira "$\sqrt{10} + 3 > 6$".

Exercício

Considere o predicado $r(x, y, z)$: "$x^2 + y^2 = z^2$". Indique elementos $a, b, c \in \mathbb{N}$ tais que a proposição $r(a, b, c)$ seja verdadeira.

Considere-se o predicado

"x é um natural ímpar e múltiplo de 3".

Em linguagem corrente este predicado significa que

"x é um natural ímpar e x é um natural múltiplo de 3".

Esta frase é a conjunção de dois predicados.

Conforme exemplificado acima, os conectivos proposicionais são também utilizados no Cálculo de Predicados. Em vez de operarem apenas sobre proposições, os conectivos proposicionais operam (mais geralmente) sobre predicados.

Observação

Se $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ representam predicados nas variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$, então

- $\neg p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$,
- $p(x_1, x_2, \ldots, x_n) \wedge q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$,
- $p(x_1, x_2, \ldots, x_n) \vee q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$,
- $p(x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$,
- $p(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leftrightarrow q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

representam predicados nas variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$, onde os conectivos proposicionais têm o significado usual.

Exemplo

Sejam $p(x)$ o predicado "$x < 0$" e $q(x)$ o predicado "$x > 3$". Então, $p(x) \vee q(x)$ representa o predicado "$x < 0$ ou $x > 3$".

No Cálculo de Predicados há dois novos tipos de operadores. Para uma variável x, a expressão:

- $\forall_x$ lê-se "para todo o x" ou "qualquer que seja o x" ou "para cada x". O símbolo $\forall$ é chamado o quantificador universal.
- $\exists_x$ lê-se "existe (pelo menos) um x" ou "para algum x". O símbolo $\exists$ é chamado o quantificador existencial.

Uma das expressões acima aplicada a um predicado dá origem a um novo predicado, podendo, além disso, dar-se o caso de o novo predicado ser uma proposição.

Quantificação universal

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $i \in \{1, \ldots, n\}$.

- Se $p(x_1, \ldots, x_n)$ representa um predicado nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$, então

  $$\forall_{x_i}\; p(x_1, \ldots, x_n)$$

  representa um predicado, chamado quantificação universal, nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$.

- Se o universo da variável x_i é U, então U será também designado o universo de quantificação de x_i e pode escrever-se

  $$\forall_{x_i \in U}\; p(x_1, \ldots, x_n), \text{ em vez de } \forall_{x_i}\; p(x_1, \ldots, x_n).$$

- Se $n = 1$, então a quantificação universal

  $$\forall_{x_1}\; p(x_1)$$

  é uma proposição.

Observação

Seja $p(x)$ um predicado na variável x.

- A proposição $\forall_x \ p(x)$ é verdadeira se a proposição $p(a)$ é verdadeira *qualquer que seja* o elemento a do universo de quantificação de x.
- A proposição $\forall_x \ p(x)$ é falsa se a proposição $p(a)$ é falsa *para algum* elemento a do universo de quantificação de x.

Exemplo

1. Seja $p(x)$ o predicado "$|x| \geq 0$" e suponhamos que o universo de quantificação da variável x é $\mathbb{R}$. A proposição $\forall_x \ p(x)$ pode ser escrita como $\forall_{x \in \mathbb{R}} \ |x| \geq 0$ e é verdadeira pois, para cada real a, o módulo de a é positivo ou nulo.
2. Seja $q(x)$ o predicado "$x^3 \geq 0$" e seja $\mathbb{Z}$ o universo de quantificação de x. A proposição $\forall_x \ q(x)$ pode ser escrita na forma $\forall_{x \in \mathbb{Z}} \ x^3 \geq 0$ e é falsa já que, por exemplo, -2 é um número inteiro e a proposição $q(-2)$: "$(-2)^3 \geq 0$" é falsa.

Quantificação existencial

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $i \in \{1, \ldots, n\}$.

- Se $p(x_1, \ldots, x_n)$ representa um predicado nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$, então

  $$\exists_{x_i}\, p(x_1, \ldots, x_n)$$

  representa um predicado, chamado quantificação existencial, nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$.

- Se o universo da variável x_i é U, então U será também designado o universo de quantificação de x_i e pode escrever-se

  $$\exists_{x_i \in U}\, p(x_1, \ldots, x_n), \text{ em vez de } \exists_{x_i}\, p(x_1, \ldots, x_n).$$

- Se $n = 1$, então a quantificação existencial

  $$\exists_{x_1}\ p(x_1)$$

  é uma proposição.

Observação

Seja $p(x)$ um predicado na variável x.

- A proposição $\exists_x \; p(x)$ é verdadeira se $p(a)$ é uma proposição verdadeira *para algum* elemento a do universo de quantificação de x.
- A proposição $\exists_x \; p(x)$ é falsa se não existe um elemento a do universo de quantificação de x para o qual $p(a)$ seja verdadeira.

Exemplo

1. Suponhamos que $p(x)$ representa o predicado "$|x| = 0$" e que o universo de quantificação da variável x é $\mathbb{Z}$. A proposição $\exists_x \; p(x)$, que pode ser escrita como $\exists_{x\in\mathbb{Z}} \; |x| = 0$, é verdadeira pois $0 \in \mathbb{Z}$ e $|0| = 0$.
2. A proposição $\exists_{x\in\mathbb{R}} \; x^2 < 0$ é falsa porque não existe um número real cujo quadrado seja negativo.

Exercício

Considere o predicado $p(n, k)$: "$n = 2k$" e suponha que o domínio de variação de ambas as variáveis n e k é $\mathbb{N}$.

(a) A quantificação existencial

$$\exists_k \; p(n, k)$$

é uma proposição?

(b) Indique o valor lógico da proposição

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \exists_{k\in\mathbb{N}} \; n = 2k.$$

Esta proposição pode ser traduzida, em linguagem corrente, por "Todo o número natural é par".

No último exercício foi apresentada uma proposição obtida pela quantificação das duas variáveis de um certo predicado. Vejamos outros exemplos desta situação.

Exemplo

A proposição

(a) $\forall_{x\in\mathbb{N}}\,\forall_{y\in\mathbb{N}}\; x+y=y+x$ é verdadeira e significa que
"A adição nos naturais é comutativa".

(b) $\forall_{x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}\,\exists_{y\in\mathbb{R}}\; xy=1$ é verdadeira e representa a afirmação
"Cada número real não nulo admite um inverso para a multiplicação".

(c) $\exists_{y\in\mathbb{R}}\,\forall_{x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}\; xy=1$ é falsa e exprime a frase
"Existe um número real que é inverso multiplicativo de todos os reais não nulos".

(d) $\exists_{x\in\mathbb{Z}}\,\exists_{y\in\mathbb{Z}}\; 3x+6y=2$ é falsa e representa a declaração
"A equação $3x+6y=2$ tem solução no conjunto dos números inteiros".

Exercício

Escreva expressões, usando a notação do Cálculo de Predicados, que representem as afirmações abaixo e indique o respetivo valor lógico.

1. "Qualquer natural é quadrado de algum número real".
2. "Existem dois inteiros consecutivos cuja soma é par".
3. "Todo o número natural múltiplo de 8 é maior do que 5".
4. "Todos os números do conjunto $\{2, 5, 11, 23, 61\}$ são primos".

Resposta

1. $\forall_{n\in\mathbb{N}}\, \exists_{x\in\mathbb{R}}\ n = x^2$ (verdade)
2. $\exists_{x,y\in\mathbb{Z}}\ (x + 1 = y \wedge \exists_{k\in\mathbb{Z}}\ x + y = 2k)$ (falsidade)
3. $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ ((\exists_{k\in\mathbb{N}}\ n = 8k) \to n > 5)$ (verdade)
4. $\forall_{x\in\{2,5,11,23,61\}}\ (x > 1 \wedge ((\exists_{d\in\mathbb{N}}\ d|x) \to (d = 1 \vee d = x)))$ (verdade)

- Note-se que, conforme exemplificado na página 44, as proposições $\forall_x \exists_y \ p(x,y)$ e $\exists_y \forall_x \ p(x,y)$ podem ter valores lógicos distintos.
- No entanto, quando as quantificações das variáveis são feitas com o mesmo quantificador, o valor lógico da proposição não depende da ordem das quantificações. Ou seja, tem-se o seguinte resultado.

Teorema

As seguintes equivalências lógicas são válidas:

1. $\forall_x \forall_y \ p(x,y) \Leftrightarrow \forall_y \forall_x \ p(x,y)$;
2. $\exists_x \exists_y \ p(x,y) \Leftrightarrow \exists_y \exists_x \ p(x,y)$.

Se as variáveis x e y têm o mesmo universo de quantificação, então pode escrever-se simplesmente

- $\forall_{x,y\in U} \ p(x,y)$ em vez de $\forall_{x\in U} \forall_{y\in U} \ p(x,y)$;
- $\exists_{x,y\in U} \ p(x,y)$ em vez de $\exists_{x\in U} \exists_{y\in U} \ p(x,y)$;

Exemplo

1. A proposição (verdadeira) $\forall_{x\in\mathbb{R}}\,\forall_{y\in\mathbb{R}}\ (x+y)(x-y)=x^2-y^2$ pode ser escrita como $\forall_{x,y\in\mathbb{R}}\ (x+y)(x-y)=x^2-y^2$.
2. A proposição (falsa) $\exists_{x\in\mathbb{N}}\,\exists_{y\in\mathbb{N}}\ x=-y$ pode ser escrita como $\exists_{x,y\in\mathbb{N}}\ x=-y$.

Exercício

Diga quais das proposições abaixo são verdadeiras, para todo o predicado $p(x,y)$.

1. $(\forall_x\,\forall_y\ p(x,y))\rightarrow(\exists_x\,\forall_y\ p(x,y))$.
2. $(\exists_x\,\forall_y\ p(x,y))\rightarrow(\forall_x\,\forall_y\ p(x,y))$.
3. $(\exists_x\,\forall_y\ p(x,y))\rightarrow(\forall_y\,\exists_x\ p(x,y))$.
4. $(\forall_y\,\exists_x\ p(x,y))\rightarrow(\exists_x\,\forall_y\ p(x,y))$.
5. $(\forall_x\,\exists_y\ p(x,y))\rightarrow(\exists_x\,\exists_y\ p(x,y))$.

A proposição $\neg(\forall_{x\in U}\ p(x))$ é verdadeira
se e só se a proposição $\forall_{x\in U}\ p(x)$ é falsa,
se e só se a proposição $p(a)$ é falsa para algum $a \in U$,
se e só se a proposição $\neg p(a)$ é verdadeira para algum $a \in U$,
se e só se a proposição $\exists_{x\in U}\ (\neg p(x))$ é verdadeira.

Provou-se assim a primeira equivalência lógica do seguinte resultado.

Teorema (Segundas leis de De Morgan)

As seguintes equivalências lógicas são válidas:

1. $\neg(\forall_x\ p(x)) \Leftrightarrow \exists_x\ (\neg p(x))$;
2. $\neg(\exists_x\ p(x)) \Leftrightarrow \forall_x\ (\neg p(x))$;
3. $\neg(\forall_x \forall_y\ q(x,y)) \Leftrightarrow \exists_x \exists_y\ (\neg q(x,y))$.
4. $\neg(\forall_x \exists_y\ q(x,y)) \Leftrightarrow \exists_x \forall_y\ (\neg q(x,y))$.
5. $\neg(\exists_x \forall_y\ q(x,y)) \Leftrightarrow \forall_x \exists_y\ (\neg q(x,y))$.
6. $\neg(\exists_x \exists_y\ q(x,y)) \Leftrightarrow \forall_x \forall_y\ (\neg q(x,y))$.

Exercício

Negue as proposições seguintes e represente essas negações usando quantificadores.

1. "Existe um $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 < 0$".
2. "Para todo o $n \in \mathbb{N}$ existe um $k \in \mathbb{N}$ tal que $n = 2k$".

Resposta

1. "Para todo o $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$". Esta proposição pode ser representada por
$$\forall_{x \in \mathbb{R}}\ x^2 \geq 0.$$
2. "Existe pelo menos um $n \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $k \in \mathbb{N}$, $n \neq 2k$". Esta proposição pode ser representada por
$$\exists_{n \in \mathbb{N}}\, \forall_{k \in \mathbb{N}}\ \neg(n = 2k).$$