

Tópicos de Matemática Discreta

folha 12

5. Funções

5.1. Sejam $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$. Considere as seguintes correspondências de A em B :

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(a, 2), (c, 1)\}, & R_2 &= \{(a, 2), (b, 3), (c, 1), (c, 3)\}, & R_3 &= \{(a, 1), (b, 3), (c, 2)\} \\ R_4 &= \{(a, 1), (a, 2), (a, 3)\}, & R_5 &= \{(a, 1), (b, 1), (c, 1)\}. \end{aligned}$$

Diga, justificando, quais das relações indicadas são funções de A em B .

5.2. Considere os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{a, b, c, d\}$.

- (a) Dê exemplo de uma correspondência de A para B que não seja função.
- (b) Quantas funções existem de A para B e quantas de B para A ?

5.3. Considere as funções

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} & e & & f: \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ x &\mapsto x^2 - 1 & & & n &\mapsto 2n - 1. \end{aligned}$$

Determine:

- (a) $g(\{-1, 0, 1\})$; (b) $g([-\infty, 0])$; (c) $g(\mathbb{R})$;
- (d) $g^{\leftarrow}(\{0\})$; (e) $g^{\leftarrow}([-\infty, 0])$; (f) $f(\{4, 6, 9\})$;
- (g) $f(\{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N} \ n = 3k\})$; (h) $f^{\leftarrow}(\{2\})$; (i) $f^{\leftarrow}(\{3, 4, 5\})$.

5.4. Sejam f, g e h as funções de \mathbb{N}_0 para \mathbb{N}_0 definidas por

$$f(n) = n + 1, \quad g(n) = 2n, \quad h(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é par} \\ 1 & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Determine:

- (a) $f \circ f$; (b) $f \circ g$; (c) $g \circ f$; (d) $g \circ h$;
- (e) $f \circ g \circ h$; (f) $h \circ f$; (g) $h \circ g$; (h) $h \circ f \circ g$.

5.5. Diga, justificando, quais das seguintes funções são injetivas, sobrejetivas ou bijetivas:

$$\begin{aligned} f_1: \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N}, & f_1(x) &= 2x; & f_2: \mathbb{Q} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{Q} \setminus \{0\}, & f_2(x) &= \frac{1}{x}; \\ f_3: \mathbb{R} &\longrightarrow [0, +\infty[, & f_3(x) &= x^2; & f_4: \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{N}, & f_4(x) &= |x| + 2. \end{aligned}$$

5.6. Considere as seguintes funções

$$\begin{aligned} f: [0, 1] &\longrightarrow [0, 1] & g: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} & h: \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{N}_0 \\ x &\longmapsto x^3, & x &\longmapsto 2x - 3, & x &\longmapsto \begin{cases} 2x & \text{se } x \geq 0 \\ -2x - 1 & \text{se } x < 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Verifique que f, g e h são funções bijetivas e determine as respetivas funções inversas.

5.7. Considere as funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = |x| + 2 \quad e \quad g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq -2 \\ x + 2 & \text{se } x > -2 \end{cases}.$$

- (a) Determine $f(\{-2, 2\})$ e $f([-2, 4])$.
- (b) Determine $f^{\leftarrow}(\{-2, 0, 1, 2\})$.
- (c) Diga se $g \circ f$ é injetiva e se é sobrejetiva.