Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática

Cálculo

Mestrado Integrado em Engenharia Informática

Teste 2 B :: 11 de janeiro de 2021

Nome ____________________ Número __________

I

As respostas às questões deste grupo devem ser convenientemente justificadas.

Questão 1. [3 valores] Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1-x)}{1-x} + 2, & \text{se } x \leq 0 \\ \cos(2x) + 1, & \text{se } x > 0 \end{cases}$.

Determine o conjunto dos pontos onde f é derivável, indicando o valor da derivada nesses pontos.

Questão 2. [2 valores] Considere função $f(x) = x^2 + e^{x^2} - 1$.

a) Verifique que $f(0) = 0$.

b) Mostre que a função f não tem mais zeros.

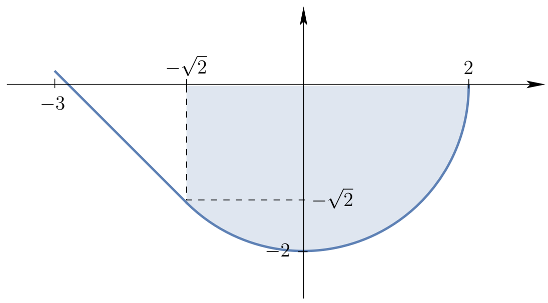
Questão 3. [2,5 valores] Calcule $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - \cos(x^2)}{x^2}$.

Questão 4. [4 valores] Calcule os seguintes integrais:

a) $\displaystyle\int \frac{1 + \operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$;

b) $\displaystyle\int_1^e x^5 \ln x \, dx$.

Questão 5. [3,5 valores] Considere a função $f : [-3, 2] \to \mathbb{R}$ cujo gráfico se representa abaixo. O gráfico é constituído por um arco de circunferência centrada na origem e um segmento de reta que se unem no ponto $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, onde f é derivável.



a) Indique o conjunto dos pontos onde f é derivável.

b) Indique os pontos onde a derivada de f se anula.

c) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

d) Sabendo que o valor da área da região sombreada na figura é $\frac{3\pi}{2}+1$, determine o valor de $\displaystyle\int_{-3}^{2} f(x)\,dx$. (Caso necessite e não saiba calcular $f(-3)$, pode usar $f(-3)=\frac{1}{5}$.)

II

Em cada uma das questões seguintes, assinale neste enunciado, a afirmação verdadeira.
Não deve apresentar qualquer justificação.
Cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta 0,25 valores.

Questão 1. Seja $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ uma função derivável tal que $f(-1)=f(1)=-1$ e $f(\frac{1}{2})=0$. Então:

- ○ f' nunca se anula;
- ○ f' tem pelo menos um zero;
- ○ f' tem um zero à esquerda de $\frac{1}{2}$ e outro à sua direita;
- ○ f é crescente em $]-1,0[$ e decrescente em $]0,1[$.

Questão 2. Seja $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ uma função derivável cuja derivada nunca se anula. Então:

- ○ f é monótona;
- ○ $f(x)\neq 0,\ \forall x\in[0,1]$;
- ○ f não tem mínimo nem máximo;
- ○ f' é derivável.

Questão 3. Seja $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ uma função contínua não negativa e seja F uma sua primitiva. Então:

- ○ F é não negativa;
- ○ F é crescente;
- ○ F admite pelo menos um ponto de descontinuidade;
- ○ F verifica a desigualdade $F(x)\geq f(x)$, para todo o $x\in[0,1]$.

Questão 4. O integral $\displaystyle\int \frac{8}{x(x^2-4)}\,dx$ é igual a:

- ○ $\displaystyle\int \frac{8}{x}\,dx \int \frac{1}{x^2-4}\,dx$;
- ○ $\displaystyle\int \frac{1}{x+2}\,dx+\int \frac{1}{x-2}\,dx-\int \frac{2}{x}\,dx$;
- ○ $\displaystyle\int \frac{1}{x+2}\,dx+\int \frac{1}{x-2}\,dx+\int \frac{1}{x}\,dx$;
- ○ nenhuma das anteriores.

Questão 5. Seja $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)=\begin{cases}0, & x\in[0,2]\setminus\{1\}\\ 1, & x=1\end{cases}$. Então:

- ○ $\displaystyle\underline{\int_0^2} f(x)\,dx < \overline{\int_0^2} f(x)\,dx$;
- ○ $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx > 0$;
- ○ existe uma partição P do intervalo $[0,2]$ tal que $S(f,P)=0$;
- ○ qualquer que seja a partição P do intervalo $[0,2]$, $s(f,P)=0$.