LÓGICA EI
Mestrado Integrado em Engenharia Informática
Universidade do Minho

Departamento de Matemática

2020/2021

Observação: Normalmente, referir-nos-emos ao Cálculo Proposicional da Lógica Clássica apenas por Cálculo Proposicional e usaremos a abreviatura CP.

Definição: O *alfabeto do CP* é notado por $\mathcal{A}^{CP}$ e é constituído pelos seguintes símbolos (letras):

a) $p_0, p_1, ..., p_n, ...$ (com $n \in \mathbb{N}_0$), chamados *variáveis proposicionais*, formando um conjunto numerável, denotado por $\mathcal{V}^{CP}$;

b) $\perp$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, chamados *conetivos proposicionais* (respetivamente, *absurdo*, *negação*, *conjunção*, *disjunção*, *implicação* e *equivalência*);

c) (,) (abrir e fechar parênteses), chamados *símbolos auxiliares*.

Exemplo:

As sequências de símbolos $\perp p_{20})$ e (p_1) (ambas de comprimento 3) são palavras sobre $\mathcal{A}^{CP}$.

A sequência de símbolos p_1 (de comprimento 1) é também uma palavra sobre $\mathcal{A}^{CP}$.

As palavras p_1 e (p_1) são diferentes (os seus comprimentos são diferentes).

Definição: O *conjunto das fórmulas do CP* (também designadas por *fórmulas proposicionais*) é notado por $\mathcal{F}^{CP}$ e é a linguagem em $\mathcal{A}^{CP}$ definida indutivamente pelas seguintes regras:

a) $\perp \in \mathcal{F}^{CP}$;

b) $p \in \mathcal{F}^{CP}$, para todo $p \in \mathcal{V}^{CP}$;

c) $\varphi \in \mathcal{F}^{CP} \implies (\neg\varphi) \in \mathcal{F}^{CP}$, para todo $\varphi \in \left(\mathcal{A}^{CP}\right)^*$;

d) $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP} \implies (\varphi \square \psi) \in \mathcal{F}^{CP}$, para todo $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e para todo $\varphi, \psi \in \left(\mathcal{A}^{CP}\right)^*$.

Exemplo:

A palavra $((\neg \perp) \wedge p_6)$ é uma fórmula proposicional:

1. pela regra a), $\perp \in \mathcal{F}^{CP}$;
2. pela regra c) e por 1, $(\neg \perp) \in \mathcal{F}^{CP}$;
3. pela regra b), $p_6 \in \mathcal{F}^{CP}$;
4. pela regra d), por 2 e por 3, $((\neg \perp) \wedge p_6) \in \mathcal{F}^{CP}$.

As palavras $\perp p_{20})$ e (p_1) não são fórmulas do CP.

De facto, pode provar-se que nenhuma palavra sobre $\mathcal{A}^{CP}$ de comprimento 3 é uma fórmula do CP.

Notação : Os parênteses extremos e os parênteses à volta de negações são muitas vezes omitidos.

Por exemplo, a palavra $(p_5 \wedge \neg p_0) \vee \perp$ poderá ser utilizada como uma representação da fórmula $((p_5 \wedge (\neg p_0)) \vee \perp)$.

Por abuso de linguagem, também chamaremos fórmulas a tais representações de fórmulas.

Observação:

A definição indutiva de $\mathcal{F}^{CP}$ admite um princípio de recursão estrutural.

Uma aplicação deste princípio para definir uma função (cujo domínio é $\mathcal{F}^{CP}$) é chamada uma *definição por recursão estrutural em fórmulas do CP*.

Definição: A função *var* : $\mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{V}^{CP})$, que a cada fórmula faz corresponder o conjunto das variáveis proposicionais que nela ocorrem, é definida, por recursão estrutural em fórmulas do CP, do seguinte modo:

a) $var(\perp) = \emptyset$;

b) $var(p) = \{p\}$, para todo $p \in \mathcal{V}^{CP}$;

c) $var(\neg\varphi) = var(\varphi)$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$;

d) $var(\varphi \Box \psi) = var(\varphi) \cup var(\psi)$, para todo $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$.

Exemplo:

O conjunto das variáveis proposicionais de $p_1 \to (\neg p_2 \vee \perp)$ é:

$$
\begin{aligned}
& var(p_1 \to (\neg p_2 \vee \perp)) \\
= \; & var(p_1) \cup var(\neg p_2 \vee \perp) \\
= \; & \{p_1\} \cup var(\neg p_2) \cup var(\perp) \\
= \; & \{p_1\} \cup var(p_2) \cup \emptyset \\
= \; & \{p_1\} \cup \{p_2\} \\
= \; & \{p_1, p_2\}.
\end{aligned}
$$

Definição: A função *subf* : $\mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{F}^{CP})$ é definida, por recursão estrutural em fórmulas do CP, do seguinte modo:

a) $subf(\varphi) = \{\varphi\}$, para todo $\varphi \in \mathcal{V}^{CP} \cup \{\perp\}$;

b) $subf(\neg\varphi) = \{\neg\varphi\} \cup subf(\varphi)$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$;

d) $subf(\varphi \Box \psi) = \{\varphi \Box \psi\} \cup subf(\varphi) \cup subf(\psi)$, para todo $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$.

Dadas fórmulas φ e ψ, diremos que φ é uma *subfórmula* de ψ quando $\varphi \in subf(\psi)$.

Exemplo: O conjunto das subfórmulas de $\neg p_1 \rightarrow p_2$ é:

$$
\begin{aligned}
& subf(\neg p_1 \rightarrow p_2) \\
= \;& \{\neg p_1 \rightarrow p_2\} \cup subf(\neg p_1) \cup subf(p_2) \\
= \;& \{\neg p_1 \rightarrow p_2\} \cup \{\neg p_1\} \cup subf(p_1) \cup \{p_2\} \\
= \;& \{\neg p_1 \rightarrow p_2\} \cup \{\neg p_1\} \cup \{p_1\} \cup \{p_2\} \\
= \;& \{\neg p_1 \rightarrow p_2, \neg p_1, p_1, p_2\}.
\end{aligned}
$$

Definição: Sejam p uma variável proposicional e $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$.

A função $[\psi/p] : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{F}^{CP}$, que a cada fórmula φ faz corresponder $\varphi[\psi/p]$, a fórmula que resulta de φ por *substituição* das ocorrências de p por ψ, é definida, por recursão estrutural em fórmulas do CP, do seguinte modo:

a) $\perp [\psi/p] = \perp$;

b) $p_i[\psi/p] = \begin{cases} \psi & \text{se } p_i = p \\ p_i & \text{se } p_i \neq p \end{cases}$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$;

c) $(\neg\varphi_1)[\psi/p] = \neg\varphi_1[\psi/p]$, para todo $\varphi_1 \in \mathcal{F}^{CP}$;

d) $(\varphi_1 \square \varphi_2)[\psi/p] = \varphi_1[\psi/p] \square \varphi_2[\psi/p]$, para todo $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$.

Exemplo:

a) $$\begin{aligned} & (\neg p_1 \rightarrow (p_2 \wedge \perp))[p_0 \vee p_1 / p_2] \\ = \; & (\neg p_1)[p_0 \vee p_1 / p_2] \rightarrow (p_2 \wedge \perp)[p_0 \vee p_1 / p_2] \\ = \; & \neg p_1 [p_0 \vee p_1 / p_2] \rightarrow (p_2[p_0 \vee p_1 / p_2] \wedge \perp [p_0 \vee p_1 / p_2]) \\ = \; & \neg p_1 \rightarrow ((p_0 \vee p_1) \wedge \perp) \end{aligned}$$

b) Verifique que $(\neg p_1 \rightarrow (p_2 \wedge \perp))[p_0 \vee p_1 / p_0] = (\neg p_1 \rightarrow (p_2 \wedge \perp))$.

Observe que $p_0 \notin var(\neg p_1 \rightarrow (p_2 \wedge \perp))$.

Esta igualdade corresponde a um caso particular de uma propriedade da substituição que veremos adiante.

Observação: Como referido anteriormente, a qualquer definição indutiva está associado um princípio de indução estrutural.

Assim, o conjunto $\mathcal{F}^{CP}$ admite um princípio de indução estrutural, que permitirá provar proriedades da forma

$$\text{“para todo } \varphi \in \mathcal{F}^{CP}, P(\varphi)\text{”},$$

onde P é uma condição sobre fórmulas proposicionais.

Uma aplicação deste princípio é chamada uma *demonstração por indução (estrutural) em fórmulas proposicionais*.

Teorema (Princípio de indução estrutural para fórmulas do CP):
Seja $P(\varphi)$ uma condição sobre $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$.
Se:

a) $P(\perp)$;

b) $P(p)$, para todo $p \in \mathcal{V}^{CP}$;

c) $P(\psi) \implies P(\neg\psi)$, para todo $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$;

d) $P(\psi_1)$ e $P(\psi_2) \implies P(\psi_1 \square \psi_2)$, para todo $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e para todo $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$;

então $P(\varphi)$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$.

Exemplo: Seja $P(\varphi)$ a condição sobre $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ dada por: "$var(\varphi) \subseteq subf(\varphi)$".

Provemos, por indução estrutural em fórmulas proposicionais, que $P(\varphi)$ é verdadeira para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$.

a) $var(\perp) = \emptyset \subseteq \{\perp\} = subf(\perp)$.
Logo, $var(\perp) \subseteq subf(\perp)$, ou seja, $P(\perp)$.

b) Seja p uma variável proposicional (arbitrária).
$var(p) = \{p\} = subf(p)$.
Logo, $var(p) \subseteq subf(p)$, ou seja, $P(p)$.

c) Seja ψ uma fórmula proposicional (arbitrária) e suponhamos $P(\psi)$ (a hipótese de indução). (Queremos mostrar $P(\neg\psi)$.)
Ora, $var(\neg\psi) = var(\psi) \subseteq subf(\psi) \subseteq subf(\psi) \cup \{\neg\psi\} = subf(\neg\psi)$,
onde a primeira inclusão segue por $P(\psi)$.
Logo, $var(\neg\psi) \subseteq subf(\neg\psi)$, ou seja, $P(\neg\psi)$.

Exemplo (cont.):

d) Sejam ψ_1 e ψ_2 fórmulas proposicionais (arbitrárias) e suponhamos $P(\psi_1)$ e $P(\psi_2)$ (as hipóteses de indução).
Seja ainda $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$. (Queremos mostrar $P(\psi_1 \Box \psi_2)$.)

Ora,

$$
\begin{array}{lll}
 & var(\psi_1 \Box \psi_2) & \\
= & var(\psi_1) \cup var(\psi_2) & \\
\subseteq & subf(\psi_1) \cup subf(\psi_2) & \text{(por } P(\psi_1) \text{ e } P(\psi_2)\text{)} \\
\subseteq & subf(\psi_1) \cup subf(\psi_2) \cup \{\psi_1 \Box \psi_2\} & \\
= & subf(\psi_1 \Box \psi_2) &
\end{array}
$$

Logo, $var(\psi_1 \Box \psi_2) \subseteq subf(\psi_1 \Box \psi_2)$, ou seja, $P(\psi_1 \Box \psi_2)$.

Proposição: Para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$ e para todo $p \in \mathcal{V}^{CP}$, se $p \notin var(\varphi)$, então $\varphi[\psi/p] = \varphi$.

Dem.: Sejam ψ uma fórmula proposicional (arbitrária) e p uma variável proposicional (arbitrária).

O resultado segue demonstrando, por indução estrutural em fórmulas proposicionais, que, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $P(\varphi)$, onde $P(\varphi)$ é a condição: se $p \notin var(\varphi)$, então $\varphi[\psi/p] = \varphi$. (Exercício.) $\square$

Proposição: Para todo $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$ e para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, φ é uma subfórmula de ψ se e só se uma das seguintes condições é satisfeita:

a) $\psi = \varphi$;

b) existe $\psi_1 \in \mathcal{F}^{CP}$ t.q. $\psi = \neg\psi_1$ e φ é uma subfórmula de ψ_1;

c) existe $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e existem $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$ t.q. $\psi = \psi_1 \square \psi_2$ e φ é uma subfórmula de ψ_1 ou de ψ_2.

Dem.: Por indução estrutural em ψ. $\square$