Universidade do Minho
Escola de Engenharia
Departamento de Produção e Sistemas

Caminhos: programação inteira

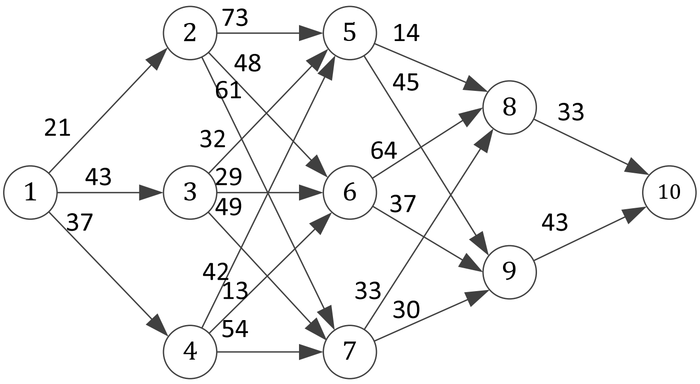
Filipe Alvelos
falvelos@dps.uminho.pt

Março 2014
Fevereiro, 2016

Índice

- Caminho mais curto
- Caminho mais curto com restrição temporal
- Caminhos disjuntos nos arcos com menor comprimento total
- Caminhos disjuntos nos nodos com menor comprimento total
- Objectivo minmax
- Caminho mais fiável
- k caminhos mais curtos
- Árvore dos caminho mais curtos

Exemplo



Caminho mais curto

- *A* é o conjunto dos arcos da rede, *A={(1,2),(1,3),...,(9,10)}*
- Variáveis de decisão
  - $x_{ij}=1$, se o arco *ij* faz parte do caminho mais curto;
    $x_{ij}=0$, caso contrário, $\forall ij \in A$
- Modelo de programação inteira para caminho mais curto entre 1 e 10

$$Min\ z = 21x_{12} + 43x_{13} + 37x_{14} + 73x_{25} + \cdots 43x_{9,10}$$
$$sujeito\ a:$$
$$x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1$$
$$-x_{12} + x_{25} + x_{26} + x_{27} = 0$$
$$-x_{13} + x_{35} + x_{36} + x_{37} = 0$$
$$-x_{14} + x_{45} + x_{46} + x_{47} = 0$$
$$-x_{25} - x_{35} - x_{45} + x_{58} + x_{59} = 0$$
$$-x_{26} - x_{36} - x_{46} + x_{68} + x_{69} = 0$$
$$-x_{27} - x_{37} - x_{47} + x_{78} + x_{79} = 0$$
$$-x_{58} - x_{68} - x_{78} + x_{8,10} = 0$$
$$-x_{59} - x_{69} - x_{79} + x_{9,10} = 0$$
$$-x_{8,10} - x_{9,10} = -1$$
$$x_{ij} \in \{0,1\}, \forall ij \in A$$

Caminho mais curto

- Em qualquer problema de caminho mais curto entre dois nodos, as restrições $x_{ij} \in \{0,1\}$ podem ser substituídas por $x_{ij} \geq 0$, já que mesmo efectuando essa substituição existe sempre uma solução óptima em que, para todos os arcos ij, $x_{ij}=0$ ou $x_{ij}=1$
- Pressuposto
  - Não existem ciclos de custo negativo
- Parâmetros
  - $G=(N,A)$ grafo orientado
  - c_{ij} custo unitário do arco de i para j, $\forall ij \in A$
  - o nodo origem (ou fonte)
  - d nodo destino (ou poço)
  - n número de nodos

Caminho mais curto

- Variáveis de decisão
  - $x_{ij}=1$ se o arco ij faz parte do caminho mais curto;
    $x_{ij}=0$, caso contrário, $\forall ij \in A$
- Modelo de programação inteira

$$Min\ z = \sum_{ij \in A} c_{ij} x_{ij}$$

$$sujeito\ a:$$

$$\sum_{j:ij \in A} x_{ij} - \sum_{j:ji \in A} x_{ji} = \begin{cases} 1, se\ i = o \\ 0, se\ i \neq o, i \neq d \\ -1, se\ i = d \end{cases}, \forall i \in N$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \forall ij \in A$$

Caminho mais curto com restrição temporal

- Parâmetros adicionais
  - t_{ij} tempo de viagem de i para j, $\forall ij \in A$
  - T tempo máximo
- De forma geral, em extensões do problema do caminho mais curto já não é possível substituir as restrições $x_{ij} \in \{0,1\}$ por $x_{ij} \geq 0$
- O problema do caminho mais curto com restrição temporal é um caso particular do problema de caminhos mais curto com restrições de recursos
- No exemplo
  - Tempo máximo: 45
  - Tempos de viagem (t_{ij})

	2	3	4
1	6	20	16

	5	6	7
2	10	14	6
3	19	14	10
4	12	11	19

	8	9
5	5	18
6	14	11
7	12	11

	10
8	19
9	19

Caminho mais curto com restrição temporal

- Modelo

$$Min\ z = \sum_{ij \in A} c_{ij} x_{ij}$$

$$sujeito\ a:$$

$$\sum_{j:ij \in A} x_{ij} - \sum_{j:ji \in A} x_{ji} = \begin{cases} 1, se\ i = o \\ 0, se\ i \neq d, i \neq d, \forall i \in N \\ -1, se\ i = d \end{cases}$$

$$\sum_{ij \in A} t_{ij} x_{ij} \leq T$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \forall ij \in A$$

$$\cancel{x_{ij} \geq 0, ij \in A}$$

Caminho mais curto com restrição temporal

	2	3	4
1	6	20	16

	5	6	7
2	10	14	6
3	19	14	10
4	12	11	19

	8	9
5	5	18
6	14	11
7	12	11

	10
8	19
9	19

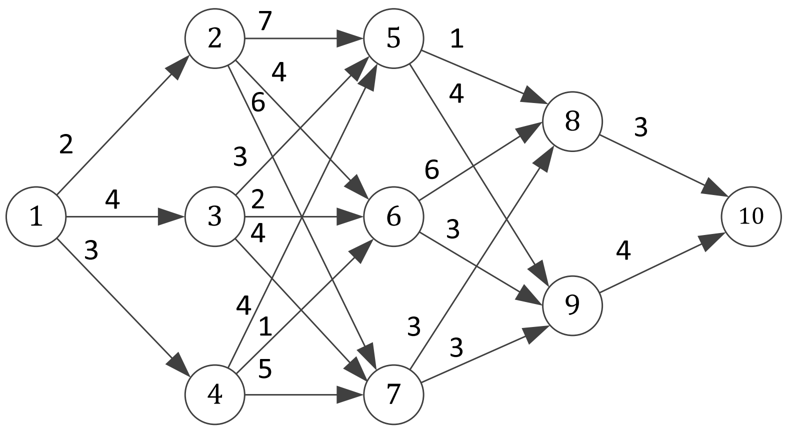
- $\sum_{ij \in A} t_{ij} x_{ij} \leq T$
- $6x_{12} + 20x_{13} + 16x_{14} + \cdots + 19x_{9,10} \leq 45$

Caminho mais curto com restrição temporal

- Caso particular: caminho mais curto com restrição de número de saltos
  - $t_{ij} = 1, \forall ij \in A$
  - T – número máximo de saltos
- Extensão: caminho mais curto com restrições de múltiplos recursos
  - m – número de recursos
  - t_{ij}^k – consumo unitário do recurso k no arco $ij, \forall\ ij \in A, k = 1, \dots, m$
  - T^k – disponibilidade do recurso, $k = 1, \dots, m$

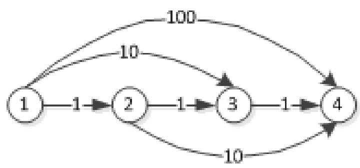
Caminhos disjuntos nos arcos

- Determinar dois caminhos disjuntos nos arcos (cada arco não pode fazer parte de mais de um caminho) entre *o* e *d* de forma a minimizar a distância total



Caminhos disjuntos nos arcos

- Notar que determinar o caminho mais curto e em seguida o caminho mais curto que não usa nenhum arco do primeiro não conduz a uma solução óptima, como se comprova no exemplo abaixo



Caminhos disjuntos nos arcos

- Variáveis de decisão
  - $x_{ij1}=1$ se o arco ij faz parte do caminho 1; $x_{ij1}=0$, caso contrário, $\forall ij \in A$
  - $x_{ij2}=1$ se o arco ij faz parte do caminho 2; $x_{ij2}=0$, caso contrário, $\forall ij \in A$
- Modelo

$$Min\ z = \sum_{k=1}^{2} \sum_{ij \in A} x_{ijk}$$

$$sujeito\ a:$$

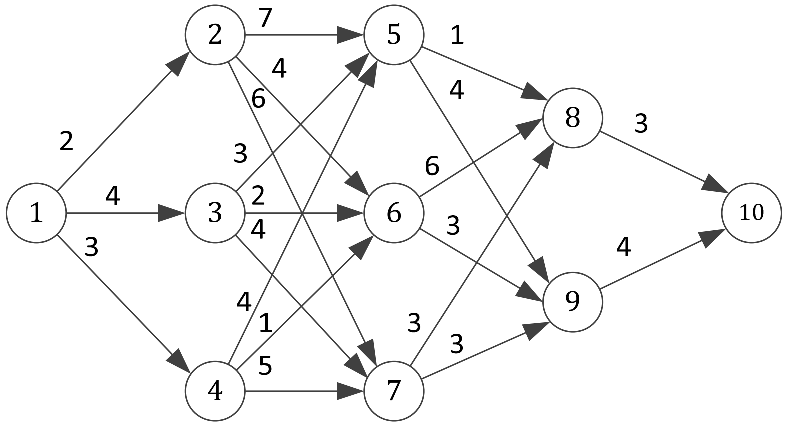
$$\sum_{j:ij \in A} x_{ijk} - \sum_{i:ji \in A} x_{jik} = \begin{cases} 1, se\ i = o \\ 0, se\ i \neq o, i \neq d \\ -1, se\ i = d \end{cases}, \forall i \in N, k = 1,2$$

$$x_{ij1} + x_{ij2} \leq 1, \forall ij \in A$$

$$x_{ijk} \in \{0,1\}, \forall ij \in A, k = 1,2$$

Caminhos disjuntos nos nodos

- Determinar dois caminhos disjuntos nos nodos (cada nodo não pode fazer parte de mais de um caminho) entre o e d de forma a minimizar a distância total



Caminhos disjuntos nos nodos

- Variáveis de decisão
  - x_{ij}^1=*1* se o arco *ij* faz parte do caminho 1;
    x_{ij}^1=*0*, caso contrário, $\forall ij \in A$
  - x_{ij}^2=*1* se o arco *ij* faz parte do caminho 2;
    x_{ij}^2=*0*, caso contrário, $\forall ij \in A$
- Modelo

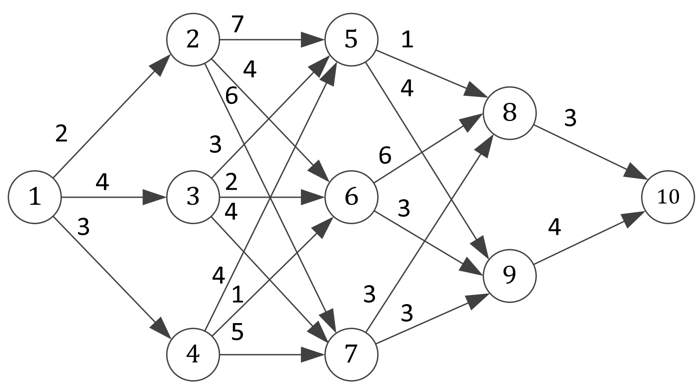
$$Min\ z = \sum_{k=1}^{2} \sum_{ij \in A} c_{ij} x_{ij}^k$$

- *sujeito a*:

$x_{12}^1 + x_{13}^1 + x_{14}^1 = 1$
...
$-x_{59}^1 - x_{69}^1 - x_{79}^1 + x_{9,10}^1 = 0$
$-x_{8,10}^1 - x_{9,10}^1 = -1$
$x_{12}^2 + x_{13}^2 + x_{14}^2 = 1$
...
$-x_{59}^2 - x_{69}^2 - x_{79}^2 + x_{9,10}^2 = 0$
$-x_{8,10}^2 - x_{9,10}^2 = -1$
$x_{12}^1 + x_{12}^2 \leq 1$
$x_{25}^1 + x_{35}^1 + x_{45}^1 + x_{25}^2 + x_{35}^2 + x_{45}^2 \leq 1$
$x_{ij}^1, x_{ij}^2 \in \{0,1\}, \forall ij \in A$

MinMax

- Determinar o caminho cujo arco mais comprido é mais curto.
- O arco mais longo do caminho 1-2-5-8-10 é o 2-5 com comprimento 7. O arco mais longo do caminho 1-4-7-9-10 é o arco 4-7 com comprimento 5. Como 5<7, o segundo caminho é melhor.



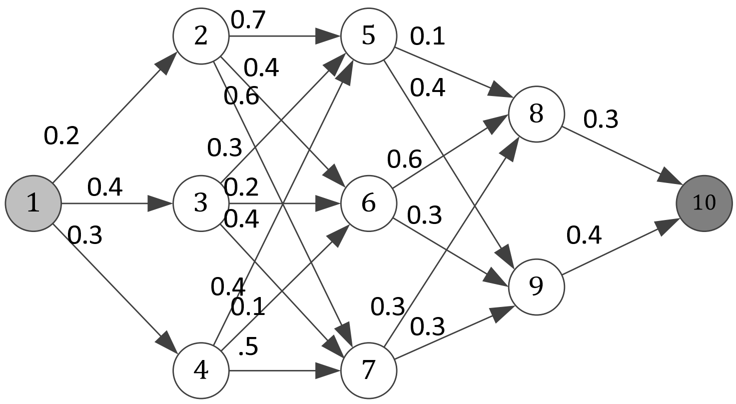
MinMax

- A é o conjunto dos arcos da rede, $A=\{(1,2),(1,3),\ldots,(9,10)\}$
- Variáveis de decisão
  - $x_{ij}=1$, se o arco ij faz parte do caminho mais curto;
    $x_{ij}=0$, caso contrário, $\forall ij \in A$
    u – comprimento do arco mais longo do caminho seleccionado
- Modelo

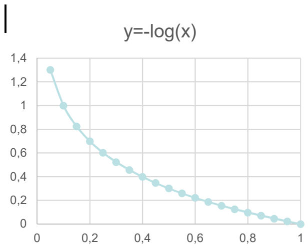
$Min\ z = u$
$sujeito\ a$:
$x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1$
…
$-x_{59} - x_{69} - x_{79} + x_{9,10} = 0$
$-x_{8,10} - x_{9,10} = -1$
$u \geq 2x_{12}$
$u \geq 4x_{13}$
$u \geq 3x_{14}$
…
$u \geq 4x_{9,10}$
$x_{ij} \in \{0,1\}, \forall ij \in A$
$u \geq 0$

Caminho mais fiável

- Comhecida a fiabilidade de cada arco (i.e. é a probabilidade de o arco não falhar), obter o caminho mais fiável. A fiabilidade de um caminho c é dada por $\prod_{ij\in c} p_{ij}$ em que p_{ij} é a probabilidade do arco ij não falhar



Caminho mais fiável



- $\max_{c \in C} \prod_{ij \in c} p_{ij}$

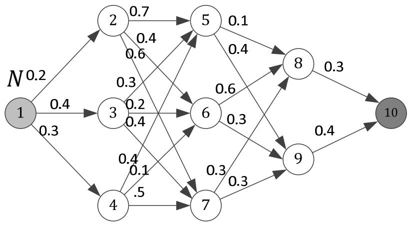
  tem as mesmas soluções óptimas que

$$Min \sum_{ij \in A} (-\log p_{ij}) x_{ij}$$

sujeito a:

$$\sum_{j:ij \in A} x_{ij} - \sum_{j:ji \in A} x_{ji} = \begin{cases} 1, se\ i = o \\ 0, se\ i \neq s, i \neq t, \forall i \in N \\ -1, se\ i = d \end{cases}$$

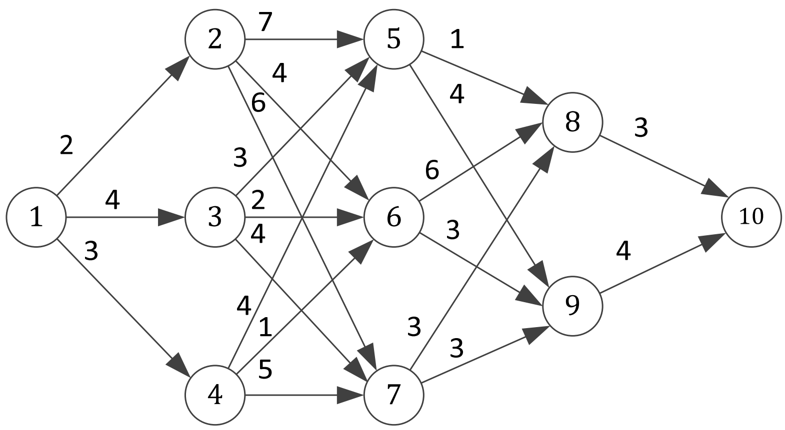
$$x_{ij} \in \{0,1\}, \forall ij \in A$$



ij	12	13	14	25	26	27	35	36	37	45	46	47	58	59	68	69	78	79	8,10	9,10
fiabilidade (ij)	0.2	0.4	0.3	0.7	0.4	0.6	0.3	0.2	0.4	0.4	0.1	0.5	0.1	0.4	0.6	0.3	0.3	0.3	0.3	0.4
-LOG(ij)	0.70	0.40	0.52	0.15	0.40	0.22	0.52	0.70	0.40	0.40	1.00	0.30	1.00	0.40	0.22	0.52	0.52	0.52	0.52	0.40

k caminhos mais curtos

- Obter os *k* caminhos mais curtos (em que *k* é uma constante) implica resolver *k* modelos de programação inteira
- O caminho mais curto obtém-se com o modelo básico

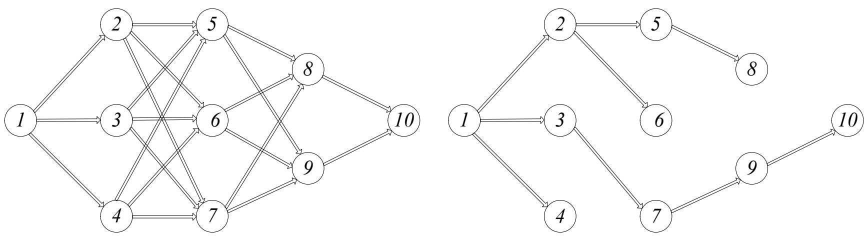


k caminhos mais curtos

- O segundo caminho mais curto obtém-se adicionando a restrição
$$\sum_{ij \in P^1} x_{ij} \leq |P^1|$$
em que P^1 representa o conjunto das variáveis com valor 1 na solução (óptima) do modelo básico
- O terceiro caminho mais curto obtém-se adicionando a restrição
$$\sum_{ij \in P^2} x_{ij} \leq |P^2|$$
em que P^2 representa o conjunto das variáveis com valor 1 na solução (óptima) do modelo anterior
- E assim sucessivamente até serem obtidos os k caminhos mais curtos desejados

Árvore dos caminhos mais curtos

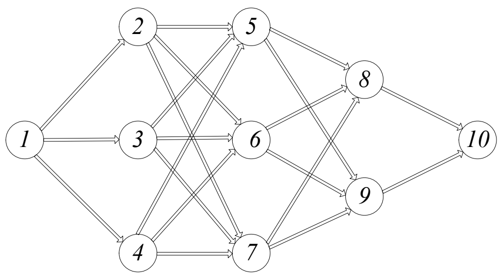
- O problema de determinar o caminho mais curto entre um nodo e todos os restantes tem como solução óptima um conjunto de arcos que formam uma árvore de suporte (ignorando a orientação dos arcos)
- Numa rede não orientada, uma árvore de suporte é um conjunto de $n - 1$ arcos (em que n é o número de nodos) que não tem ciclos
- Exemplo de uma rede e de uma possível árvore de caminhos mais curtos com raiz em 1:



Árvore dos caminhos mais curtos

- Abordagens para resolver o problema da árvore dos caminhos mais curtos
  - Programação linear / inteira
    - Fácil de implementar (e.g. solver do excel)
    - Fácil de incluir restrições adicionais (e.g. restrição temporal) ou estender para outros problemas (e.g. caminhos disjuntos)
    - Mais pesado computacionalmente do que os algoritmos específicos
  - **Algoritmos específicos**
    - Algoritmo para redes acíclicas
    - Algoritmos para redes que podem ter ciclos
      - Redes sem custos negativos (Dijsktra)
      - Redes com custos arbitrários (Bellman-Ford) – [não abordado nesta UC]
      - Inclusão de restrições ou extensão para outros problemas não são triviais

Árvore dos caminhos mais curtos



	2	3	4
1	2	4	3

	5	6	7
2	7	4	6
3	3	2	4
4	4	1	5

	8	9
5	1	4
6	6	3
7	3	3

	10
8	3
9	4

Árvore dos caminhos mais curtos

- Modelo agregado

$$x_{ij} - \text{ número de caminhos que incluem o arco } ij, \forall ij \in A$$

$$Min\ z = \sum_{ij \in A} c_{ij} x_{ij}$$

$$sujeito\ a:$$

$$\sum_{j:ij \in A} x_{ij} - \sum_{j:ji \in A} x_{ji} = \begin{cases} n-1, se\ i = o \\ -1, se\ i \neq o \end{cases}, \forall i \in N$$

$$x_{ij} \geq 0\ e\ inteiros, \forall ij \in A$$