Temos dois referenciais S e S', em movimento relativo v.

Sabemos as coordenadas em S:

$$x, y, z, t$$

Queremos saber as coordenadas em S'

$$x', y', z', t'$$

e vice-versa.

- Orientamos os eixos de modo a $v \parallel x$

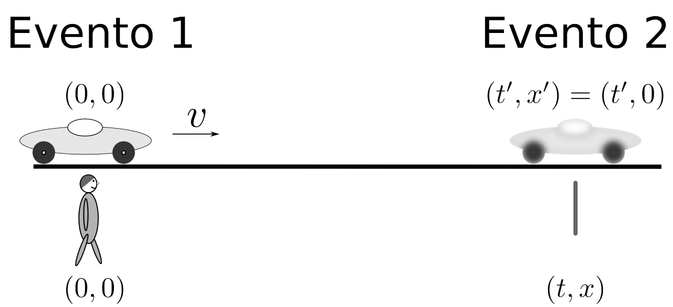
Logo

$$y' = y$$
$$z' = z$$

Pela invariância na direcção transversal ao movimento relativo (neste caso x).

Começamos por um caso particular: $x' = 0$

É o caso de os dois eventos acontecerem no referencial S'



Invariância do Espaço-Tempo

$$s^2 = t^2 - x^2 = s'^2 = t'^2 - x'^2 = t'^2$$

Logo

$$t'^2 = t^2 - x^2$$

Como $x = vt$

$$t'^2 = t^2 - (vt)^2 = t^2 \left(1 - v^2\right)$$

$$t' = t \left(1 - v^2\right)^{1/2}$$

$$t = \frac{t'}{(1 - v^2)^{1/2}} = \gamma t' \qquad \gamma = \frac{1}{(1 - v^2)^{1/2}}$$

Temos ainda $x = vt = v\gamma t'$.

Resumindo: se $x' = 0$,

$$t = \gamma t' \qquad x = v\gamma t'$$

Caso geral

Queremos uma transformação linear entre S e S':

$$\begin{cases} t = Bx' + Dt' \\ x = Gx' + Ht' \end{cases}$$

em que B, D, G e H são constantes a determinar.

Usando o resultado anterior para $x' = 0$, ficamos logo com $D = \gamma$ e $H = v\gamma$:

$$\begin{cases} t = Bx' + \gamma t' \\ x = Gx' + v\gamma t' \end{cases}$$

Falta determinar B e G.

Invariância do Espaço-Tempo

$$t^2 - x^2 = t'^2 - x'^2$$

$$(Bx' + \gamma t')^2 - (Gx' + v\gamma t')^2 = t'^2 - x'^2$$

Desenvolvendo:

$$B^2 x'^2 + 2B\gamma x' t' + \gamma^2 t'^2 - G^2 x'^2 - 2Gv\gamma x' t' - v^2\gamma^2 t'^2 = t'^2 - x'^2$$

Agrupamos os termos em x' e t':

$$\gamma^2 \left(1 - v^2\right) t'^2 + 2\gamma \left(B - vG\right) x' t' - \left(G^2 - B^2\right) x'^2 = t'^2 - x'^2$$

Temos:

$$\begin{cases} \gamma^2 \left(1 - v^2\right) = 1 \\ 2\gamma \left(B - vG\right) = 0 \\ \left(G^2 - B^2\right) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = vG \\ G^2 - v^2 G^2 = 1 \Rightarrow G^2 \left(1 - v^2\right) = 1 \end{cases}$$

$$G = \left(1 - v^2\right)^{-1/2} = \gamma$$

e

$$B = v\gamma$$

Logo:

$$\begin{cases} t = v\gamma x' + \gamma t' \\ x = \gamma x' + v\gamma t' \end{cases}$$

A inversa:

$$\begin{cases} t' = -v\gamma x + \gamma t \\ x' = \gamma x - v\gamma t \end{cases}$$