Atividade de Integração Numérica (AtIntegr)

Esta Atividade só tem uma questão, dividida em várias partes.

Q0

Nesta questão, você terá que obter uma aproximação numérica para uma integral definida. Mas o integrando (isto é, a função que é integrada) não é dado explicitamente por uma fórmula. Ele é dado por um programa em Python, que está disponível dentro do seu arquivo de dados. A ideia é que, como os métodos de integração numérica apenas utilizam os valores da função, basta então ter uma maneira de se obter esses valores, não importa se por uma fórmula, por um programa, por uma medida experimental etc.

Além disso, por não termos uma fórmula explícita para a função, não teremos como obter sua quarta derivada, que é importante para dimensionar o número de repetições a ser utilizado no Método de Simpson. No entanto, conforme orientações de aula, poderemos estimar essa quarta derivada usando diferenças divididas de 5 pontos. Isso também pode ser obtido com o programa, que já tem uma função especialmente construída para isso.

Explicitamente, vamos usar a aproximação

$$f''''(x) = 4!\,f[x-2h, x-h, x, x+h, x+2h] =$$

$$= \frac{1}{h^4} \cdot \{f(x-2h) - 4f(x-h) + 6f(x) - 4f(x+h) + f(x+2h)\}$$

(ver aula de 14.10.2021). Atenção: Infelizmente, derivação numérica é um treco que não funciona muito bem. Fixe um valor de x e obtenha a aproximação da 4ª derivada usando diferentes valores de h. Você verá que para h nem tão pequeno assim a coisa começa a desandar. Eu indico ficar em $h = 0.005$, mas, como isso pode depender da função, sugiro dar uma examinada antes.

Para rodar o programa, abra um arquivo em branco no Colab e copie o trecho de código que está dentro do seu arquivo de dados. Não altere a função!

Apertando o "play" para rodar o programa, vão rodar os comandos de exemplo que estão no final. A partir daí você pode programar outras coisas para obter os dados que precisará para responder às perguntas.

Parte 0. (1.5)

Liste os pontos do seu intervalo de integração (incluindo os nós e os pontos médios das células, em ordem crescente) que são usados para estimar a integral por 4-Simpson.

Liste os valores de f para esses pontos, com arredondamento (pelo menos) na 6ª casa decimal depois da vírgula.

Resposta: 1 linha para os valores de x com a quantidade correta de floats, separados por ponto-e-vírgula e sem espaços. Tolerância de correção: 0%. E outra linha para os valores de $f(x)$. Tolerância de correção: absoluta em 1e-6.

Parte 1. (1.5)

Obtenha a aproximação da integral por 4-Simpson, usando os valores da Parte 0.

Resposta: 1 float, com tolerância absoluta de 1e-5

Parte 2. (1.5)

Usando a mesma lista de pontos e valores da Parte 0, obtenha a estimativa de n-Trapézios para o maior n que for possível com essas informações.

Resposta: 1 inteiro em uma linha, indicando o n; e 1 float na outra linha, com tolerância absoluta de 1e-5

Parte 3. (1.0)

Procure encontrar o máximo de $|f''''(x)|$ dentro do seu intervalo de integração, fazendo uma amostragem com muitos valores de x e usando o estimador de 4ª derivada.

Resposta: 1 float, com tolerância de 15%.

Parte 4. (0.5)

Usando a informação da sua resposta na Parte 4, você saberá que o erro de integração do Método de Simpson está limitado por

$$C \cdot n^{-4} \,,$$

em que n é o número de repetições. Encontre seu valor de C, conforme a fórmula de erro de n-Simpson da aula do dia 11.11.

Resposta: 1 float, com tolerância de 5% (será corrigido com base na resposta da Parte 3).

Parte 5. (1.5)

Com base na sua resposta da Parte 4, obtenha um valor de n que garanta um erro menor do que 10^{-3} (primeira resposta). Faça o mesmo para garantir um erro menor do que 3×10^{-5} (segunda resposta).

Resposta: 2 inteiros, um em cada linha. Serão aceitos como corretos os valores de n entre o menor valor que sua constante C permite ou maior em até 15%.

Parte 6. (2.5)

Nesta questão, investigue a taxa real de decaimento do erro da aproximação da integral por n-Trapézios e por n-Simpson. Como você não tem o valor da integral, use a estimativa de 10000-Simpson e tome-a como valor exato.

Ou seja, descartando valores pequenos de n, o erro de n-Trapézios cai aproximadamente como $C_T \cdot n^{-2}$ e o erro de n-Simpson cai aproximadamente como $C_S \cdot n^{-4}$. Na verdade, em alguns casos especiais, essas potências podem até ser maiores. Por isso, é bom verificar usando gráfico dilog (ver aula de 08.11). Se a potência não bater, por favor entrar em contato com o professor.

Obtenha os valores de C_T e de C_S.

Resposta: dois floats, um em cada linha (C_T na primeira, C_S na segunda). Correção com tolerância de 15%.