Lista IV - Física Matemática 1

Lyliana Myllena Santos de Sousa - 11223740
Lyliana.Sousa@usp.br

1.a)

Nessa questão, vamos mostrar algumas das famosa Transformadas de Fourier da física. Primeiro vou mostrar a Transformada de Fourier da função $f(x) = e^{-mx}\,\theta(x)$ (1.1), onde $m > 0$ (1.2) e $\theta(x) = \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$ (1.3) é função Heaviside, com isso tenho que $f(x) = \begin{cases} e^{-mx} & , x > 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$(1.4). Usarei esses conceitos para mostrar que a Inversa da Transformada de Fourier para concluir que $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{e^{ikx}}{m + ik} = e^{-mx}\,\theta(x)$ (1.5).

→ Calculando a Transformada de Fourier: Usarei uma mudança de variável no processo, onde $u = -(mx + ikx)$(1.6), onde $du = -(m + ik)\,dx$ (1.7), com $u(\infty) = -\infty$ e $u(0) = 0$

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ikx}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-(mx + ikx)}\, dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{-\infty} \frac{e^{u}}{m + ik}\, du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{m + ik} \int_{-\infty}^{0} e^{u}\, du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{m + ik} e^{u} \Big|_{-\infty}^{0}$$

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{m + ik} \text{(1.8)}$$

Agora calculando a sua transformada inversa: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k)\, e^{ikx}\, dk =$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \frac{e^{ikx}}{m + ik}\, dk = e^{-mx}\,\theta(x) \text{ (1.9)}$$

1.b)

Agora, utilizarei uma mudança de variável na Eq.(1.9) para mostrar algumas relações:

→ Usando a mudança de variável -k = k' ⇒ -dk = dk' . Assim, tenho:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \frac{e^{ikx}}{m+ik} dk = -\int_{\infty}^{-\infty} \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-ik'x}}{m-ik'} dk' = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-ik'x}}{m-ik'} dk' = e^{-mx}\,\theta(x) \quad (1.10)$$

→ Usando a mudança de variável de -x’=x , tenho que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \frac{e^{ikx}}{m+ik} dk = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-ikx'}}{m+ik} dk' = e^{mx'}\,\theta(-x') \quad (1.11)$$

→ Usando a mudança de variavel k’= - $\bar{k}$ ⇒ dk’= -d $\bar{k}$, na relação anterior, eu tenho que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-ikx'}}{m+ik} dk' = -\int_{\infty}^{-\infty} \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-i\bar{k}x'}}{m-i\bar{k}} d\bar{k} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-i\bar{k}x'}}{m-i\bar{k}} d\bar{k} = e^{mx'}\,\theta(-x') \quad (1.12)$$

1.c)

Agora combinarei em uma soma as equações Eq.(1.9) e Eq.(1.12) , assim:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx}\left(\frac{1}{m+ik} + \frac{1}{m-ik}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \frac{2m}{m^2+k^2} = e^{-mx}\,\theta(x) + e^{mx}\,\theta(-x) =$$

$\begin{cases} e^{-mx} & , x>0 \\ e^{mx} & , x<0 \end{cases} = e^{-m|x|}$. Disso, eu tiro que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{e^{ikx}}{m^2+k^2} = \frac{e^{-m|x|}}{2m} \quad (1.13)$$

1.d)

Agora combinarei em uma soma as equações Eq.(1.9) e Eq.(1.12) , assim:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx}\left(\frac{1}{m+ik} - \frac{1}{m-ik}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \frac{-2ik}{m^2+k^2} = e^{-mx}\,\theta(x) - e^{mx}\,\theta(-x) =$$

$\begin{cases} e^{-mx} & , x>0 \\ -e^{mx} & , x<0 \end{cases}$. Disso, eu tiro que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{k e^{ikx}}{m^2+k^2} = \begin{cases} -\frac{e^{-mx}}{2i} & , x>0 \\ \frac{e^{mx}}{2i} & , x<0 \end{cases} \quad (1.14)$$

2.

Analisaremos agora o problema de Cauchy para a Equação de Calor com um termo restaurador linear. Onde eu usarei a Transformada de Fourier para obter a solução. A condições do nosso problema são: $u_t = \alpha u_{xx} - m^2 u$ (2.1), $u(x,0) = \delta(x - x_0)$ (2.2) e $m > 0$ (2.3). Assim, aplicando a Transformada de Fourier na equação do calor:

$$\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx} u_t(x,t) = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx} u_{xx}(x,t) - m^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx} u(x,t)$$
(2.4)

Vou resolver separadamente cada integral, assim:

$$\mapsto \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx} u_t(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx} \frac{d}{dt} u(x,t) = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx} u(x,t) = \frac{d}{dt} \tilde{u}(k,t) \quad (2.5)$$

$$\mapsto \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx} u_{xx}(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx} (ik)^2 u(x,t) = (ik)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx} u(x,t) = (ik)^2 \tilde{u}(k,t) = -k^2 \tilde{u}(k,t) \quad (2.6)$$

$$\mapsto -m^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx} u(x,t) = -m^2 \tilde{u}(k,t) \quad (2.7)$$

Juntando tudo, tenho então uma EDO $\frac{d}{dt} \tilde{u}(k,t) = -(m^2 + k^2) \tilde{u}(k,t)$ (2.8).

Solucionando essa EDO, tenho:

$$\rightarrow \frac{d\tilde{u}(k,t)}{\tilde{u}(k,t)} = -(m^2 + k^2)\, dt \rightarrow \int_{\tilde{u}(k,0)}^{\tilde{u}(k,t)} \frac{d\tilde{u}(k,t)}{\tilde{u}(k,t)} = \int_0^t -(m^2 + k^2)\, dt \rightarrow$$

$$\ln\left(\frac{\tilde{u}(k,t)}{\tilde{u}(k,0)}\right) = -(m^2 + k^2)\, t \rightarrow \tilde{u}(k,t) = \tilde{u}(k,0)\, e^{-(m^2+k^2)t} \quad (2.9)$$

Vimos nas notas de aula que a Transformada de Fourier para a condição inicial $\delta(x - x_0)$ é: $\tilde{u}(k,0) = \frac{e^{-ikx_0}}{\sqrt{2\pi}}$ (2.10). Portanto, tenho que: $\tilde{u}(k,t) = \frac{e^{-ikx_0 - (m^2+k^2)t}}{\sqrt{2\pi}}$ (2.11).

Aplicarei agora a Inversa de Fourier para voltar para o nosso espaço. Com isso tenho que:

$\rightarrow u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(k,t) e^{-ikx}\, dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik(x-x_0)-(m^2+k^2)t}\, dk$ (2.12), vou usar o Mathematica para calcular essa integral:

In[ ]:=
```
Integrate[Exp[-I*(x - x0) - t*m^2 - t*k^2]/(2 π), {k, -∞, ∞}]
```
integra

$$\text{In[ ]:=}\ \text{Integrate}\left[\frac{\text{Exp}[-i*(x - x_0) - t*m^2 - t*k^2]}{2\pi}, \{k, -\infty, \infty\}\right]$$

Out[ ]=
$$\text{ConditionalExpression}\left[\frac{e^{-m^2 t - i x + i x_0}}{2\sqrt{\pi}\sqrt{t}}, \text{Re}[t] > 0\right]$$
expressão condicional — parte real

3.

Considerarei o problema de Cauchy para a equação de onda, onde obterei a solução de D'Alembert para a equação de onda, com as seguintes condições: $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ (3.1), $u(x, 0) = f(x)$ (3.2), $u_t(x, 0) = 0$ (3.3), com f(x) uma função arbitrária, definida em x ∈ ℝ. Vou utilizar a Transformada de Fourier para obter a solução.

$\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-i kx} u_{tt} = c^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-i kx} u_{xx} \rightarrow$

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-i kx} \frac{d^2}{dt^2} u = c^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-i kx} (i k)^2 u \rightarrow$

$\frac{d^2}{dt^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-i kx} u = -c^2 k^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-i kx} u \rightarrow \frac{d^2}{dt^2} \tilde{u}(k, t) = -c^2 k^2 \tilde{u}(k, t)$ (3.4)

Assim, eu chego em uma EDO a qual a solução já conhecemos das aulas passadas. Com isso, nossa solução para Transformada de Fourier é:

$\tilde{u}(k, t) = A\cos(ckt) + B\text{sen}(ckt)$ (3.5), onde o valor dessas constantes podem ser obtidas das condições iniciais. Com isso, tenho:

$\rightarrow \tilde{u}(k, 0) = A = \tilde{f}(k)$ (3.6)

$\rightarrow \tilde{u}_t(k, t) = B\cos(ckt) - A\text{sen}(ckt) \rightarrow \tilde{u}_t(k, 0) = B = 0$ (3.7)

Assim, eu tenho que $\tilde{u}(k, t) = \tilde{f}(k) \cos(ckt)$ (3.8). Para voltarmos para o nosso espaço, utilizarei o teorema da Convolução, que diz:

$\mathcal{F}[f * g] = \tilde{f} * \tilde{g}$ (3.9) e $f * g = \mathcal{F}^{-1}[\tilde{f} * \tilde{g}]$ (3.10). Disso, eu tiro que $u(x, t) = f(x) \mathcal{F}^{-1}[\cos(ckt)]$ (3.11). Calcularemos então a Transformada de Fourier Inversa de cos(ckt):

$\mathcal{F}^{-1}[\cos(ckt)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{i kx} \cos(ckt) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{i kx}}{2} \left(e^{i kct} + e^{-i kct}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{2} \left(e^{i k(x+ct)} + e^{i k(x-ct)}\right)$ (3.12)

Podemos observar que a solução dessas integrais, que são a representação integral da função de Heaviside: $\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{i k(x-y)}}{2\pi} = \delta(x - y)$ (3.13)

$\mapsto \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{i k(x-ct)}}{2\pi} = \delta(x - ct)$ (3.14) $\quad \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{i k(x+ct)}}{2\pi} = \delta(x + ct)$ (3.15)

Assim, $\mathcal{F}^{-1}[\cos(ckt)] = \frac{\delta(x-ct) + \delta(x+ct)}{2}$ (3.16)

Disso, eu tenho que: $u(x, t) = f(x) \mathcal{F}^{-1}[\cos(ckt)] = \frac{f(x-ct) + f(x+ct)}{2}$ (3.17)

4.a)

Nesse exercício, considerarei uma partícula quântica em uma dimensão, no estado $\psi(x) = \begin{cases} A(a^2 - x^2) & , -a \leq x \leq a \\ 0 & , \text{caso contrário} \end{cases}$ (4.1), onde a>0.

Vou encontrar a constante A a partir da normalização da função de onda. Assim,

$\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = \int_{-a}^{a} A(a^2 - x^2)\, dx = A\left[a^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{a} = Aa^3 \frac{4}{3} = 1$. Portanto,

$A = \frac{3}{4a^3}$ (4.2)

4.b)

Nessa questão, calcularei agora a média do momento $\langle p \rangle$,para $p = -i\hbar\, \partial_x$, e a média da posição $\langle x \rangle$.

→ Calculando $\langle x \rangle$:

$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x\, |\psi(x)|^2 dx = \int_{-a}^{a} \frac{3}{4a^3} (a^2 x - x^3)\, dx = \frac{3}{4a^3}\left[a^2 \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_{-a}^{a} = 0 \Rightarrow \langle x \rangle = 0$ (4.3)

→ Calculando $\langle p \rangle$:Antes de começar a calculo, vou calcular a derivada por x de ψ. Além disso, como ψ é uma função real $\psi^* = \psi$

$\mapsto \frac{\partial}{\partial x}\psi = \begin{cases} -\frac{3x}{2a^3} & , -a \leq x \leq a \\ 0 & , \text{caso contrário} \end{cases}$

$\langle p \rangle = -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \frac{\partial}{\partial x} \psi\, dx = i\hbar \int_{-a}^{a} \frac{9}{8a^6} (a^2 x - x^3)\, dx = \frac{9 i\hbar}{8a^6}\left[a^2 \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_{-a}^{a} = 0 \Rightarrow \langle p \rangle = 0$ (4.4)

4.c)

Calcularei agora o segundo momento $\langle x^2 \rangle$ e a média do momento ao quadrado $\langle p^2 \rangle$,para assim calcular a variância da posição e do momento.

→ Calculando $\langle x^2 \rangle$:

$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, |\psi(x)|^2 dx = \int_{-a}^{a} \frac{3}{4a^3} (a^2 x^2 - x^4)\, dx = \frac{3}{4a^3}\left[a^2 \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_{-a}^{a} = \frac{a^2}{5} \Rightarrow$

$\langle x^2 \rangle = \frac{a^2}{5}$ (4.5)

Assim, a variância da posição é dada por: $\sigma_x^2 = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 = \frac{a^2}{5}$ (4.6)

→ Calculando $\langle p^2\rangle$: Antes de começar esse calculo, vou calcular a derivada segunda por x de ψ.

$$\mapsto \frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi = \begin{cases} -\frac{3}{2a^3} & , -a \le x \le a \\ 0 & , \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\langle p^2\rangle = -\hbar^2 \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi\, dx = \hbar^2 \int_{-a}^{a} \frac{9}{8a^6}(a^2 - x^2)\, dx = \frac{\hbar^2 9}{8a^6}\left[a^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{a} = \frac{3\hbar^2}{2a^3} \Rightarrow$$

$\langle p^2\rangle = \frac{3\hbar^2}{2a^3}$ (4.7)

Assim, a variância do momento é dada por: $\sigma_p^2 = \langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2 = \frac{3\hbar^2}{2a^3}$ (4.8)

Por fim, o principio da incerteza nos diz que $\sigma_x \sigma_p \ge \hbar/2 \Rightarrow \sigma_x^2 \sigma_p^2 \ge \hbar^2/4 \Rightarrow \frac{3\hbar^2}{2a^3}\frac{a^2}{5} \ge \hbar^2/4 \Rightarrow \frac{3\hbar^2}{10a} \ge \hbar^2/4$. Ou seja isso é satisfeito para $0 < a < 6/5$.

5.

Utilizarei a transformada de Fourier para calcular a solução da equação diferencial $(-\nabla^2 + m^2)G(\mathbb{r}) = \delta(\mathbb{r})$ (5.1) e utilizarei alguns conceitos vistos em aula para facilitar o encontro da solução.

$$\to (-\nabla^2 + m^2)G(\mathbb{r}) = \delta(\mathbb{r}) \to -\nabla^2 G(\mathbb{r}) + m^2 G(\mathbb{r}) = \delta(\mathbb{r}) \to$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3\mathbb{r}}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i\mathbb{k}.\mathbb{r}} \nabla^2 G(\mathbb{r}) + m^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3\mathbb{r}}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i\mathbb{k}.\mathbb{r}} G(\mathbb{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3\mathbb{r}}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i\mathbb{k}.\mathbb{r}} \delta(\mathbb{r})$$

No espaço de Fourier, eu tenho que $-\nabla^2 = |\mathbb{k}|^2$ (5.2) e $\tilde{\delta}(\mathbb{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3\mathbb{r}}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i\mathbb{k}.\mathbb{r}} \delta(\mathbb{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}$ (5.3). Assim, eu tenho:

$$\to |\mathbb{k}|^2 \tilde{G}(\mathbb{k}) + m^2 \tilde{G}(\mathbb{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \to \tilde{G}(\mathbb{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{|\mathbb{k}|^2 + m^2} \quad (5.4)$$

Agora, voltando para o nosso espaço, temos: $G(\mathbb{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbb{k} \frac{e^{i\mathbb{k}.\mathbb{r}}}{|\mathbb{k}|^2 + m^2}$ (5.5).

Vou fazer uma mudança de variável $\mathbb{k}.\mathbb{r} = \mathrm{kr}\cos\theta$ (5.6) e $d^3\mathbb{k} = \mathrm{k}^2 \sin\theta\, d\mathrm{k}\, d\theta\, d\phi$ (5.7), para $k: [-\infty, \infty]$, $\phi: [0, 2\pi]$ e $\theta: [0, \pi]$.

$$\to G(\mathbb{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\mathrm{k} \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\mathrm{k}^2 e^{i\,\mathrm{kr}\cos\theta}}{|\mathbb{k}|^2 + m^2} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\mathrm{k} \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \frac{\mathrm{k}^2 e^{i\,\mathrm{kr}\cos\theta}}{|\mathbb{k}|^2 + m^2}$$

(5.8)

Fazendo uma mudança de variável $z = \cos\theta$ (5.9) $\Rightarrow dz = -\sin\theta d\theta$ (5.10), eu tenho que:

$$\rightarrow G(\mathbb{r}) = \frac{1}{(2\pi)^2 r i} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-1}^{1} dz \frac{k e^{i k r z}}{|\mathbb{k}|^2 + m^2} = \frac{1}{(2\pi)^2 r i} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{k(e^{i k r} - e^{-i k r})}{|\mathbb{k}|^2 + m^2} =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^2 r i}\left[\int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{k e^{i k r}}{|\mathbb{k}|^2 + m^2} - \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{k e^{-i k r}}{|\mathbb{k}|^2 + m^2}\right] \text{(5.11)}$$

Usando uma outra mudança de variável $-k = k'$ (5.12) $\Rightarrow$ $-dk = dk'$ (5.13).

Assim:

$$\rightarrow G(\mathbb{r}) = \frac{1}{(2\pi)^2 r i}\left[\int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{k e^{i k r}}{|\mathbb{k}|^2 + m^2} + \int_{-\infty}^{\infty} dk' \frac{k' e^{i k' r}}{|\mathbb{k}'|^2 + m^2}\right] \text{(5.14)}$$

Aplicando os conhecimentos do item 1.d, tenho que:

$$G(\mathbb{r}) = \begin{cases} \frac{e^{-mx}}{(2\pi)^2 r} & , x > 0 \\ -\frac{e^{mx}}{(2\pi)^2 r} & , x < 0 \end{cases}$$ (5.15). Considerando que estou na situação $x > 0$.

Tenho então que: $G(\mathbb{r}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{e^{-mx}}{r}$ (5.16). Com isso tenho que $g = \frac{1}{2\pi}$ (5.17).