Lista III - Física Matemática 1

Lyliana Myllena Santos de Sousa - 11223740
Lyliana.Sousa@usp.br

1.a)

Dada a equação de calor em uma dimensão, com as condições de Dirichlet a seguir: $u_t = u_{xx}$ (1.1), $u(0, t) = u(1, t) = 0$ (1.2), $t > 0$, $u(x, 0) = x(1 - x)$ (1.3), $x \in [0, 1]$ (1.4). Para descobrirmos a solução de u, usaremos o método da separação de variáveis, onde u terá o seguinte formato: $u(x, t) = X(x)\,T(t)$ (1.5), usaremos esse formato de u na Eq.(1.1), que multiplicaremos o lado direito por α para que possamos utilizar as soluções nas próximas questões. Assim, teremos:

$\rightarrow u_t = u_{xx} \rightarrow X\,\dot{T} = \alpha\,T\,X'' \rightarrow \frac{\dot{T}}{\alpha T} = \frac{X''}{X} = -k^2$, onde k é uma constante. Disso tiramos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dot{T} = -\alpha k^2 T \\ X'' = -k^2 X \end{cases}$$ (1.6), que a solução consiste na solução das EDOs.

$$\begin{cases} T(t) = e^{-\alpha k^2 t} \\ X(x) = a\mathrm{Cos}(kx) + b\mathrm{Sin}(kx) \end{cases}$$ (1.7). Assim, a nossa solução terá o seguinte formato, para $\alpha = 1$:

$u(x, t) = e^{-k^2 t}\,[a\mathrm{Cos}(kx) + b\mathrm{Sin}(kx)]$ (1.8). Aplicando as condições de contorno, temos:

$\rightarrow u(0, t) = e^{-k^2 t}\,[a\mathrm{Cos}(kx) + b\mathrm{Sin}(kx)] = 0 \rightarrow a = 0$ (1.9)

$\rightarrow u(1, t) = e^{-k^2 t}\; b\mathrm{Sin}(kx) = 0 \rightarrow k = n\pi$ (1.10), para n = 1, 2, 3 ...

Portanto, das condições de contorno, tiramos que por linearidade : $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, e^{-k_n^2\, t}\, \mathrm{Sin}(kx)$ (1.11), onde b_n dependerá das condições iniciais.

Tenho que b_n será dado por: $b_n = \frac{2}{L}\int_0^L u_0 \sin(k_n\, x)\, dx$(1.12), onde L = 1. Portanto,

$b_n = 2\int_0^1 x(1 - x)\sin(k_n\, x)\, dx = 2\int_0^1 [x\sin(k_n\, x) - x^2\sin(k_n\, x)]\, dx$. Resolvendo as integrais tenho:

```
In[5]:= 2 * Integrate[x * Sin[n π x] - x^2 * Sin[n π x], {x, 0, 1}](*1.13*)
           integra          seno                 seno
```

Out[5]= $\frac{2\,(2 - 2\,\mathrm{Cos}[n\,\pi] - n\,\pi\,\mathrm{Sin}[n\,\pi])}{n^3\,\pi^3}$

```
In[6]:= FullSimplify[%, n ∈ Integers](*1.14*)
        simplifica completamente  números inteiros
```

Out[6]= $-\frac{4\,(-1 + (-1)^n)}{n^3\,\pi^3}$

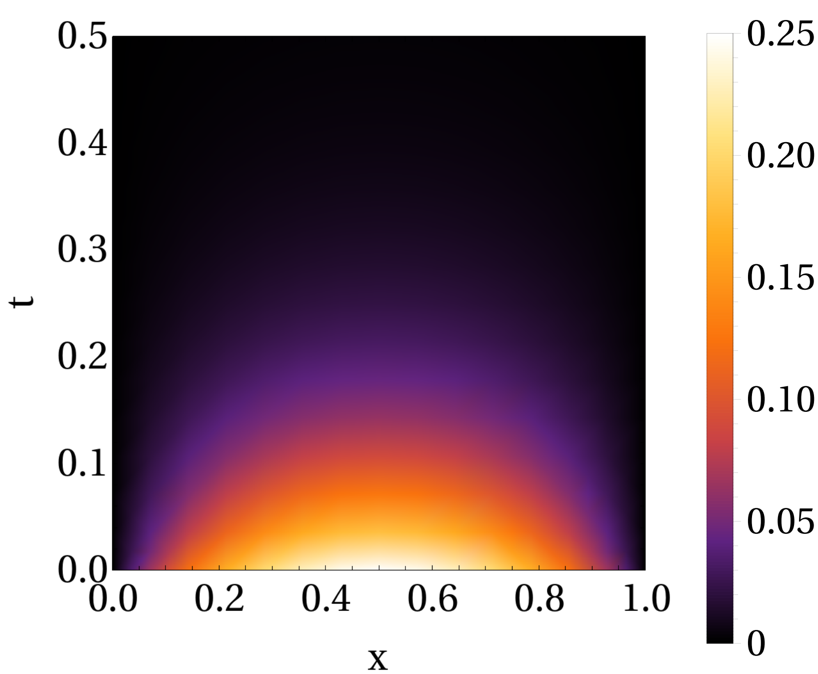
Assim, $b_n = -\frac{4\,(-1+(-1)^n)}{n^3\,\pi^3}$ (1.15)

Concluímos então que a solução é: $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{4\left(-1+(-1)^n\right)}{n^3 \pi^3} \sin(n\pi x)\, e^{-(n\pi)^2 t}$ (1.16)

In[7]:=
```
nmax1 = 100;
bn1 = -(4 (-1 + (-1)^n))/(n^3 π^3);
sol1 = Sum[bn1 * Exp[-(n π)^2 t] * Sin[n π * x], {n, 1, nmax1}];
       soma      exponencial        seno
```

In[12]:=
```
plot1 = DensityPlot[sol1, {x, 0, 1}, {t, 0, 0.5},
        gráfico de densidade
  ImageSize → 350,
  tamanho da imagem
  FrameLabel → {"x", "t"},
  legenda do quadro
  ColorFunction → "SunsetColors",
  função de cores
  PlotLegends → Automatic,
  legenda do gráfico  automático
  PlotRangePadding → None,
  preenchimento de interva··  nenhum
  PlotRange → All,
  intervalo do gr··  tudo
  LabelStyle → {FontFamily → "Times", 20, Black}
  estilo de etiqueta  família da fonte  multiplicação  preto
 ]
```

Out[12]=



1.b)

Dada a equação de calor em uma dimensão, com as condições de Neumann a seguir: $u_t = 3\,u_{xx}$ (1.17), $u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0$ (1.18), $t > 0$, $u(x, 0) = x^2(3/2 - x)$ (1.19), $x \in [0, 1]$.Para esse item, partiremos já da solução da Eq. com $\alpha = 3$. Com isso, temos: $u(x, t) = e^{-3k^2 t}\,[\text{aCos}(kx) + \text{bSin}(kx)]$ (1.20). As condições de contorno, nos diz que: $u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0$. Disso tiramos:

$u_x(x, t) = e^{-3k^2 t}\,[\text{bk}_n\,\text{Cos}(kx) - \text{ak}_n\,\text{Sin}(kx)]$ (1.21)

$\to u_x(0, t) = e^{-3k^2 t}\,\text{bk} = 0 \to b = 0$ (1.22).

Já considerando que b = 0, tenho:

$\to u_x(1, t) = -e^{-3k^2 t}\,\text{akSin}(k) = 0 \to k = n\pi$ (1.23), para n = 0, 1, 2, 3 ...

Das condições de contorno tiramos que:

$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, e^{-3k_n^2 t}\cos(k_n x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, e^{-3k_n^2 t}\cos(k_n x)$ (1.24)

Agora, analisando as condições iniciais, tenho que, sendo $u_0 = u(x, 0) = x^2(3/2 - x)$. Vimos em aula que, a_n é dado por: $a_n = \frac{2}{L}\int_0^L u_0 \cos(k_n x)\,dx$ (1.25), onde L = 1. Assim, tenho: $a_n = 2\int_0^1 u_0\cos(k_n x)\,dx$ =

$2\int_0^1 x^2(3/2 - x)\cos(k_n x)\,dx = 2\left[\frac{3}{2}\int_0^1 x^2\cos(k_n x)\,dx - \int_0^1 x^3\cos(k_n x)\,dx\right]$

```
In[19]:= 2 * Integrate[3/2 x^2 * Cos[n π x] - x^3 * Cos[n π x], {x, 0, 1}]
          integra                  cosseno              cosseno
```

Out[19]= $\frac{-12 + 12\,\text{Cos}[n\pi] + n\pi\,(6 + n^2\pi^2)\,\text{Sin}[n\pi]}{n^4\pi^4}$

```
FullSimplify[%, n ∈ Integers](*(1.26)*)
simplifica completamente   números inteiros
```

Out[14]= $\frac{12\,(-1 + (-1)^n)}{n^4\pi^4}$

Assim, temos: $a_n = \frac{12(-1+(-1)^n)}{n^4\pi^4}$(1.26)

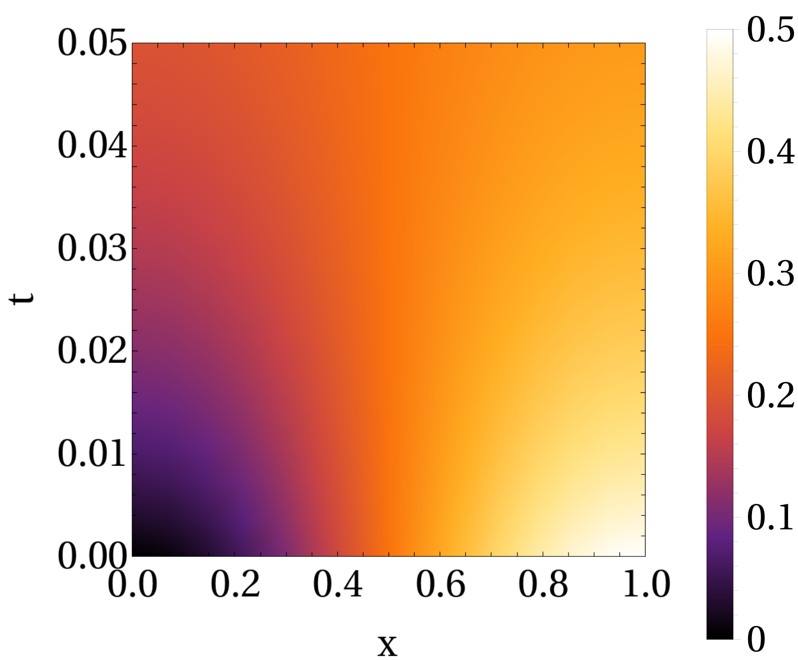
Obtenho o a_0 da seguinte forma: $a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L u_0\,dx = 2\int_0^1 u_0\,dx = 2\int_0^1\left(\frac{3}{2}x^2 - x^3\right)dx = 2\left[\frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 =$ $2\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right] = \frac{2}{4}$(1.27)

Portanto, a solução será: $u(x, t) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{12(-1+(-1)^n)}{n^4\pi^4}\,e^{-3k_n^2 t}\cos(k_n x)$ (1.28)

In[88]:=
```
nmax2 = 100;
```
$$an2 = \frac{12\left(-1+(-1)^{n}\right)}{n^{4}\,\pi^{4}};$$
$$sol2 = \text{Sum}\left[an2 * \text{Exp}\left[-3 * (n\,\pi)^{2}\, t\right] * \text{Cos}[n\,\pi * x], \{n, 1, nmax2\}\right];$$
soma exponencial cosseno

In[91]:=
```
plot = DensityPlot[1/4 + sol2, {x, 0, 1}, {t, 0, 0.05},
  ImageSize → 350,
  FrameLabel → {"x", "t"},
  ColorFunction → "SunsetColors",
  PlotLegends → Automatic,
  PlotRangePadding → None,
  PlotRange → All,
  LabelStyle → {FontFamily → "Times", 20, Black}
]
```

Out[91]=



1.c)

Resolveremos a equação de calor em uma dimensão para condições Mistas a seguir: $u_t = u_{xx}$ (1.29), $u(0, t) = u_x(1, t) = 0$ (1.30), $t > 0$, $u(x, 0) = x^2(3/2 - x)$ (1.31), $x \in [0, 1]$. Partindo da Eq. (1.7) , temos a seguinte solução: $u(x, t) = e^{-k^2 t}$ [aCos(kx) + bSin(kx)] (1.32).

Devido as condições de contorno, temos que:

$\rightarrow u(0, t) = e^{-k^2 t} a = 0 \rightarrow$ a = 0 (1.33)

Assim, tenho que $u(x, t) = e^{-k^2 t}$ bSin(kx) e $u_x(x, t) = e^{-k^2 t}$ bkcos(kx) (1.34). Disso, tenho que pela condição de contorno, $u_x(1, t) = e^{-k^2 t}$ bkcos(k) = 0 $\rightarrow k_n = \left(\frac{1}{2} + n\right)\pi$ (1.35), para n = 0, 1, 2 ...

Disso tiramos que: $u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{-k_n^2 t} \sin(k_n x)$ (1.36).

Obterei o b_n das condições iniciais: $b_n = \frac{2}{L}\int_0^L u(x, 0) \sin(k_n x)\, dx = 2\int_0^1 \left[\frac{3}{2} x^2 \sin(k_n x) - x^3 \sin(k_n x)\right] dx$

In[51]:=

```
2 * Integrate[3/2 * x^2 * Sin[(1/2 + n) π x] - x^3 * Sin[(1/2 + n) π x], {x, 0, 1}]
```

integra seno seno

Out[51]=

$$\frac{2\left(96\,\text{Cos}[n\,\pi] + (1 + 2\,n)\,\pi\left(-24 + \left(24 + (\pi + 2\,n\,\pi)^2\right)\text{Sin}[n\,\pi]\right)\right)}{(\pi + 2\,n\,\pi)^4}$$

In[54]:=

```
FullSimplify[%, n ∈ Integers]
```

simplifica completamente números inte

Out[54]=

$$-\frac{48\,(-4\,(-1)^n + \pi + 2\,n\,\pi)}{(\pi + 2\,n\,\pi)^4}$$

Disso, tiro que, $b_n = -\frac{48(-4(-1)^n + \pi + 2n\pi)}{(\pi + 2n\pi)^4}$ (1.37)

Portanto, nossa solução é: $u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{48(-4(-1)^n + \pi + 2n\pi)}{(\pi + 2n\pi)^4} e^{-k^2 t} \sin(kx)$ (1.38)

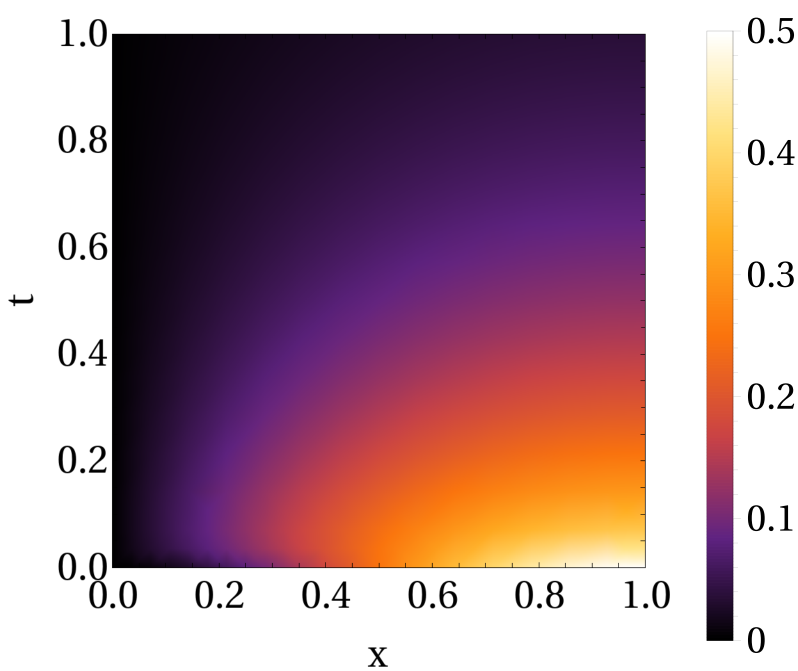
In[122]:=

```
nmax3 = 100;
k3 = (1/2 + n) π;
bn3 = - (48 (-4 (-1)^n + π + 2 n π)) / (π + 2 n π)^4;
sol3 = Sum[bn3 * Exp[-1 * (k3)^2 t] * Sin[k3 * x], {n, 0, nmax3}];
```

soma exponencial seno

In[126]:=
```
plot = DensityPlot[sol3, {x, 0, 1}, {t, 0, 1},
       gráfico de densidade
  ImageSize → 350,
  tamanho da imagem
  FrameLabel → {"x", "t"},
  legenda do quadro
  ColorFunction → "SunsetColors",
  função de cores
  PlotLegends → Automatic,
  legenda do gráfico  automático
  PlotRangePadding → None,
  preenchimento de interva‥ nenhum
  PlotRange → All,
  intervalo do gr‥ tudo
  LabelStyle → {FontFamily → "Times", 20, Black}
  estilo de etiqueta  família da fonte  multiplicação  preto
 ]
```

Out[126]=



2.

A equação de calor em uma dimensão numa barra de -L/2 à L/2 com as condições de contorno de Dirichlet. Com isso, temos que: $u_t = \alpha\, u_{xx}$ (2.1), com u(-L/2,t) = u(L/2,t) = 0 (2.2) e $u_0(x)$ (2.3). Dessa vez, usarei a solução do espaço como sendo: X(x) = Asin(kx + ϕ)(2.4). Assim a solução geral é:

$u(x,t)=e^{-\alpha k^2 t}\text{Asin}(\text{kx}+\phi)$ (2.5)
Com isso, aplicando as condições de contorno, tenho:
$\to u(-L/2,t)=e^{-k^2 t}\text{Asin}(-\text{kL}/2+\phi)=0\to$ -kL/2+ϕ= nπ
$\to u(L/2,t)=e^{-k^2 t}\text{Asin}(\text{kL}/2+\phi)=0\to$ kL/2+ϕ= nπ
Nosso k deve ser diferente de zero, com isso temos: $k=\frac{n\pi}{L}$ (2.6) e o ϕ será dado em função de k, assim o $\phi=\frac{n\pi}{2}=\frac{kL}{2}$ (2.7)
Disso temos a solução: $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-\alpha k^2 t}\sin\left(\frac{n\pi}{L}\left[x+\frac{L}{2}\right]\right)$ (2.8).
Obtemos a_n pela condição inicial: $a_n=\frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2}u_0\cos\left(\frac{n\pi}{L}\left[x+\frac{L}{2}\right]\right)dx$ (2.8).
Com isso, nossa solução é: $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2}u_0\cos\left(\frac{n\pi}{L}\left[x+\frac{L}{2}\right]\right)dx\, e^{-\alpha k^2 t}\sin\left(\frac{n\pi}{L}\left[x+\frac{L}{2}\right]\right)$ (2.10)

3.a)

Oscilador harmonico quântico é descrita por uma Hamitoniana: $H=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2$(3.1), onde H é um operador diferencial em x e sendo $p=-i\hbar\frac{d}{dx}$ (3.2). Considerando os operadores diferenciais, $a=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x+\frac{ip}{m\omega}\right)$ (3.3) e $a^\dagger=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x-\frac{ip}{m\omega}\right)$(3.4). Analisaremos agora o comutador de a e $a^\dagger$, lembrando que [a,b]= ab-ba (3.5) e que [x,p] = $i\hbar$=xp-px (3.6)

$\to[a,a^\dagger]=\frac{m\omega}{2\hbar}\left[x+\frac{ip}{m\omega},\ x-\frac{ip}{m\omega}\right]=\frac{m\omega}{2\hbar}\left[\left(x+\frac{ip}{m\omega}\right)\left(x-\frac{ip}{m\omega}\right)-\left(x-\frac{ip}{m\omega}\right)\left(x+\frac{ip}{m\omega}\right)\right]$
$=\frac{m\omega}{2\hbar}\left[x^2-\frac{ixp}{m\omega}+\frac{ipx}{m\omega}+\left(\frac{p}{m\omega}\right)^2-x^2-\frac{ixp}{m\omega}+\frac{ipx}{m\omega}-\left(\frac{p}{m\omega}\right)^2\right]=\frac{i}{2\hbar}(-xp+px-xp+px)=\frac{i}{2\hbar}(-2\,i\hbar)=1$ (3.7)

3.b)

Agora mostrarei que a Hamiltoniana pode ser escrita como $H=\hbar\omega(a^\dagger a+1/2)$ (3.8).

$\to a^\dagger a=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x-\frac{ip}{m\omega}\right)\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x+\frac{ip}{m\omega}\right)=\frac{m\omega}{2\hbar}\left(x^2+\frac{ixp}{m\omega}-\frac{ipx}{m\omega}+\frac{p^2}{m^2\omega^2}\right)=\frac{m\omega}{2\hbar}\left(x^2-\frac{\hbar}{m\omega}+\frac{p^2}{m^2\omega^2}\right)=$
$\frac{m\omega x^2}{2\hbar}+\frac{p^2}{2\hbar m\omega}-\frac{1}{2}$
$\to a^\dagger a+\frac{1}{2}=\frac{m\omega x^2}{2\hbar}+\frac{p^2}{2\hbar m\omega}$
$\to\hbar\omega(a^\dagger a+1/2)=\frac{m\omega^2x^2}{2}+\frac{p^2}{2m}=H$ (3.9)

3.c)

Considerando $a\,\psi(x)=0$ (3.10), que é uma equação ordinária diferencial, encontrarei a solução.
$\to a\,\psi_0(x)=0\to\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x+\frac{ip}{m\omega}\right)\psi_0(x)=0\to\left(x+\frac{ip}{m\omega}\right)\psi_0(x)=0\to x\,\psi_0(x)+\frac{\hbar}{m\omega}\frac{d}{dx}\psi_0(x)=0\to$

$x\,\psi_0(x) = -\frac{\hbar}{m\omega}\frac{d\dot{\psi}_0(x)}{dx} \to -\frac{m\omega}{\hbar}\,x\,dx = \frac{d\psi_0(x)}{\psi_0(x)} \to \ln\,|\,\psi_0(x)\,| = -\frac{m\omega}{2\hbar}x^2 + \text{constante} \to \psi_0(x) = \alpha\, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$ (3.11). Devo escolher uma valor de α para que a função seja normalizada: $\int_{-\infty}^{\infty}|\,\psi_0(x)\,|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty}\alpha^2 e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}\,\alpha^2}{\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}} = 1$ (3.12), com isso, tenho: $\alpha = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}$ (3.13). Com isso temos que,

$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$ (3.14)

4.

Encontraremos a solução da equação de onda em uma dimensão, com as seguintes condições: $u_{tt} = u_{xx}$ (4.1), $u(0,t) = u(1,t) = 0$ (4.2), $u(x,0) = x(1-x)$ (4.3), $u_t(x, 0) = 0$ (4.4), $t > 0$, $x \in [0,1]$. Usaremos os mesmos princípios anteriores, onde $u(x,t)=X(x)T(t)$ (4.5). Disso temos que, $u_{tt} = u_{xx} \leftrightarrow X\ddot{T} = TX'' \Rightarrow \frac{\ddot{T}}{T} = \frac{X''}{X} = -k^2$ (4.6). Disso obtemos o sistema: $\begin{cases} \ddot{T} = -\alpha k^2 T \\ X'' = -k^2 X \end{cases}$ (4.7). Disso eu tiro as seguintes soluções:

$X(x) = A\cos(kx) + B\,\text{sen}(kx)$ (4.8) e $T(t) = \tilde{A}e^{ikt} + \tilde{B}\,e^{-ikt}$ (4.9). Logo, nossa a solução geral é:

$u(x, t) = [A\cos(kx) + B\,\text{sen}(kx)][\tilde{A}e^{ikt} + \tilde{B}\,e^{-ikt}]$ (4.10). Usando as condições de contorno, temos que:

$\to u(0, t) = A[\tilde{A}e^{ikt} + \tilde{B}\,e^{-ikt}] = 0 \to A = 0$ (4.11)

$\to u(1, t) = B\,\text{sen}(k)[\tilde{A}e^{ikt} + \tilde{B}\,e^{-ikt}] = 0 \to k = n\pi$ (4.12), para n = 1, 2, 3...

$\to u_t(x, t) = [A\cos(kx) + B\,\text{sen}(kx)][\tilde{A}ike^{ikt} - \tilde{B}\,ike^{-ikt}]$

$u_t(x, 0) = [A\cos(kx) + B\,\text{sen}(kx)][\tilde{A}ik - \tilde{B}\,ik] = 0 \to \tilde{A} = \tilde{B}$ (4.13).

Juntando todas as constantes em uma só, tenho que: $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,\text{sen}(n\pi x)[\,e^{ikt} + e^{-ikt}]$ (4.14), onde o b_n é dado pela condição inicial: $b_n = \frac{2}{L}\int_0^L 2\,x(1-x)\,\text{sen}(n\pi x)\,dx = 4\int_0^1 x(1-x)\,\text{sen}(n\pi x)\,dx = 4\int_0^1[x\,\text{sen}(n\pi x) - x^2\text{sen}(n\pi x)]\,dx$.

Podemos observar que esse é o mesmo b_n de item 1.a), só que dividida por 2. Logo, nosso b_n é $b_n = -\frac{4(-1+(-1)^n)}{2*n^3\,\pi^3}$ (4.15). Assim, nossa solução é:

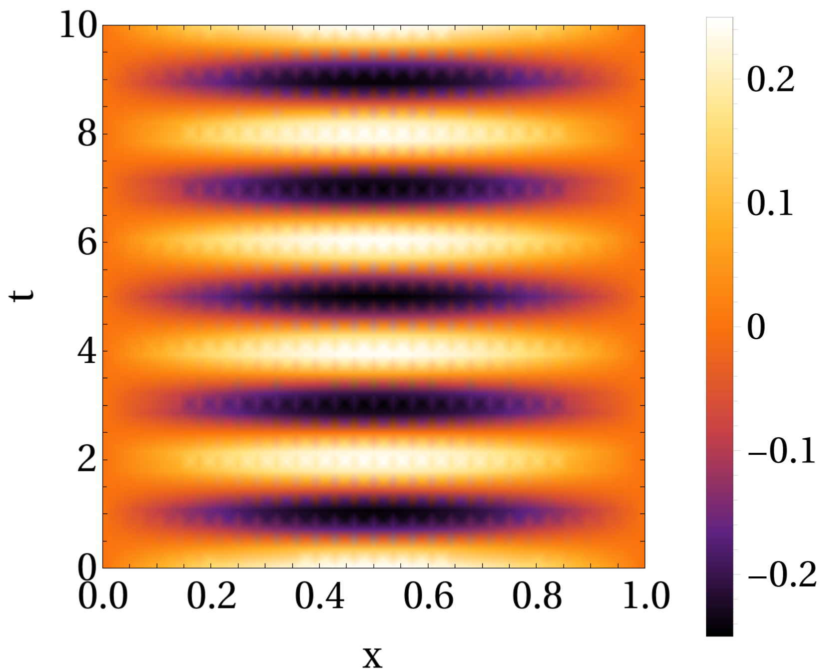
$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{4(-1+(-1)^n)}{2*n^3\,\pi^3}\,\text{sen}(n\pi x)[\,e^{ikt} + e^{-ikt}]$ (4.16)

Um resultado muito parecido com o item 1.a), eles são diferentes apenas pelo fator 2 e pelas exponenciais.

In[150]:=
```
nmax4 = 100;
k4 = n * π;
bn4 = - (4 (-1 + (-1)^n)) / (2 * n^3 π^3);
sol4 = Sum[bn4 * Sin[k4 * x] * (Exp[ⅈ * k4 * t] + Exp[-ⅈ * k4 * t]), {n, 1, nmax4}];
       soma      seno             exponencial          exponencial
```

```
In[154]:= plot = DensityPlot[sol4, {x, 0, 1}, {t, 0, 10},
                 gráfico de densidade
    ImageSize → 350,
    tamanho da imagem
    FrameLabel → {"x", "t"},
    legenda do quadro
    ColorFunction → "SunsetColors",
    função de cores
    PlotLegends → Automatic,
    legenda do gráfico  automático
    PlotRangePadding → None,
    preenchimento de interva··  nenhum
    PlotRange → All,
    intervalo do gr··  tudo
    LabelStyle → {FontFamily → "Times", 20, Black}
    estilo de etiqueta  família da fonte   multiplicação  preto
  ]
```

Out[154]=



5.a)

Encontrando a solução geral para a equação de Klein-Gordon $u_{tt} = c^2 u_{xx} - \mu^2 u$ (5.1), $u(0, t) = u(L, t) = 0$ (5.2), $u(x, 0) = f(x)$ (5.3), $u_t(x, 0) = g(x)$ (5.4), onde μ é uma constante. Basicamente, isso é uma equação de onda com uma força restauradora de -$\mu^2 u$.

Para isso, assumo que a nossa solução será do formato $u(x, t) = X(x)\,T(t)$ (5.5), assim, $u_{xx} = X\ddot{T}$ (5.6) e $u_{tt} = TX''$ (5.7).

$\rightarrow u_{tt} = c^2 u_{xx} - \mu^2 u \rightarrow TX'' = c^2 X\ddot{T} - \mu^2 XT$. Isolando a parte temporal da espacial, temos:

$\rightarrow \frac{\ddot{T}}{c^2 T} + \frac{\mu^2}{c^2} = \frac{X''}{X} = -k^2$. Disso, tenho o sistema de EDOs

$\begin{cases} \ddot{T} = -(k^2c^2 + \mu^2)\,T & T(t) = \tilde{a}\cos(Et) + \tilde{b}\,\text{sen}(Et) \\ X'' = -k^2 X & X(x) = a\cos(kx) + b\,\text{sen}(kx) \end{cases}$ (5.8), onde chamo $E = k^2c^2 + \mu^2$.

Assim, nossa solução geral é: $u(x, t) = [\tilde{a}\cos(Et) + \tilde{b}\,\text{sen}(Et)][a\cos(kx) + b\,\text{sen}(kx)]$ (5.9).

Das condições de contorno, tiro:

$\rightarrow u(0, t) = T\,a = 0 \Rightarrow a = 0$ (5.10)

Já utilizando que a = 0, tenho

$\rightarrow u(L, t) = T\,b\,\text{sen}(kL) = 0 \Rightarrow k_n = \frac{n\pi}{L}$ (5.11), para n = 1, 2, 3 ...

A partir das condições de contorno e incorporando a constante b nas constantes $\tilde{a}$ e $\tilde{b}$, nossa solução fica: $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\tilde{a}_n\cos(E_n t) + \tilde{b}_n\,\text{sen}(E_n t)\right]\text{sen}(k_n x)$ (5.12).

Agora analisarei as condições iniciais. Assim,

$\rightarrow u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{a}_n\,\text{sen}(k_n x) = f(x)$. Logo, pelo que vimos nas notas de aula

$\tilde{a}_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\text{sen}(k_n x)\,dx$ (5.13)

Agora, sendo $u_t(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[-\tilde{a}_n E_n\,\text{sen}(Et) + \tilde{b}_n E_n\cos(E_n t)\right]\text{sen}(k_n x)$, temos que

$\rightarrow u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{b}_n E_n\,\text{sen}(k_n x) = g(x)$, pelo vimos nas notas de aula $\tilde{b}_n = \frac{2}{E_n L}\int_0^L g(x)\,\text{sen}(k_n x)\,dx$

(5.14)

POrtanto, a nossa solução é:

$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\text{sen}(k_n x)\,dx\right)\cos(E_n t) + \left(\frac{2}{E_n L}\int_0^L g(x)\,\text{sen}(k_n x)\,dx\right)\text{sen}(E_n t)\right]\text{sen}(k_n x)$ (5.15)

5.b)

Vou utilizar uma derivação pragmática, para obter a Energia total do sistema. Me atentando que $\frac{d\,\text{Energia}_{\text{Total}}}{dt} = 0$(5.16). Assim,

$\rightarrow u_{tt} = c^2 u_{xx} - \mu^2 u$ (5.17)

$\rightarrow u_{tt}\,u_t = c^2 u_{xx}\,u_t - \mu^2 u u_t$ (5.18)

$\rightarrow \int_0^L dx\,u_{tt}\,u_t = \int_0^L dx\,c^2 u_{xx}\,u_t - \int_0^L dx\,\mu^2 u u_t$ (5.19)

Podemos simplificar a expressão arranjando ela com: $u_{tt}\,u_t = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}{u_t}^2$ (5.20) e $u\,u_t = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}u^2$ (5.21).

Disso, tenho:

$\rightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L dx\,{u_t}^2 = c^2\int_0^L dx\,u_{xx}\,u_t - \frac{\mu^2}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L dx\,u^2$ (5.22)

Analisando o termo, $c^2\int_0^L dx\,u_{xx}\,u_t = c^2\left[u_x u_t\,\Big|_0^L - \int_0^L dx\,u_x u_{xt}\right]$. Pelas condições de contorno, temos que $u_x\,u_t\,\Big|_0^L = 0$. Logo $c^2\int_0^L dx\,u_{xx}\,u_t = -c^2\int_0^L dx\,u_x u_{xt} = -\frac{c^2}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L dx\,u_x^2$. Reescrevendo, temos:

$\rightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L dx\, u_t{}^2 = -\frac{c^2}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L dx\, u_x^2 - \frac{\mu^2}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L dx\, u^2$ (5.23)

$\rightarrow \frac{d}{dt}\int_0^L dx\left(\frac{1}{2}u_t{}^2 + \frac{c^2}{2}u_x^2 + \frac{\mu^2}{2}u^2\right) = 0$ (5.24). Como eu citei anteriormente, $\frac{d\,\mathrm{Energia}_{\mathrm{Total}}}{dt} = 0$. Assim,

$\mathrm{Energia}_{\mathrm{Total}} = \frac{1}{2}\int_0^L dx\left(u_t{}^2 + c^2u_x^2 + \mu^2u^2\right)$ (5.25).

5.c)

Pela conservação de energia, temos que E(0)= E(t) = constante de movimento (5.26). Seja u_1 e u_2 duas soluções. Defino $u = u_1 - u_2$ (5.27), já que a combinação linear de soluções é uma solução. Com isso, u satisfaz: $u_{tt} = c^2u_{xx} - \mu^2 u$, temos:

$\rightarrow u_1(0, t) = u_1(L, t) = 0, u_1(x, 0) = f(x), u_{1t}(x, 0) = g(x)$ (5.28)

$\rightarrow u_2(0, t) = u_2(L, t) = 0, u_2(x, 0) = f(x), u_{2t}(x, 0) = g(x)$ (5.29)

$\rightarrow u(0, t) = u(L, t) = 0, u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0$ (5.30)

Por mais que as soluções sejam diferentes, energia é a mesma para todas as soluções. Assim, analisando a energia para a soluções u_1 e u_2.

$\rightarrow \mathrm{Energia}_{1\,\mathrm{Total}}(x, 0) = \frac{1}{2}\int_0^L dx\left(u_{1t}{}^2(x, 0) + c^2u_{1x}^2(x, 0) + \mu^2u_1^2(x, 0)\right) =$
$\frac{1}{2}\int_0^L dx\left(g^2(x) + c^2u_{1x}^2(x, 0) + \mu^2 f^2(x)\right)$

$\rightarrow \mathrm{Energia}_{2\,\mathrm{Total}}(x, 0) = \frac{1}{2}\int_0^L dx\left(u_{2t}{}^2(x, 0) + c^2u_{2x}^2(x, 0) + \mu^2u_2^2(x, 0)\right) =$
$\frac{1}{2}\int_0^L dx\left(g^2(x) + c^2u_{2x}^2(x, 0) + \mu^2 f^2(x)\right)$

Como $\mathrm{Energia}_{1\,\mathrm{Total}}(x, 0) = \mathrm{Energia}_{2\,\mathrm{Total}}(x, 0)$, tenho que $u_{1x} = u_{2x}$ (5.31) .

Agora vou analisar a energia para $u = u_1 - u_2$:

$\rightarrow \mathrm{Energia}_{\mathrm{Total}} = \frac{1}{2}\int_0^L dx\left(u_t{}^2 + c^2u_x^2 + \mu^2u^2\right) =$.

$$\frac{1}{2}\int_0^L dx\, c^2u_x^2 = \frac{1}{2}\int_0^L dx\, c^2(u_{1x} - u_{2x})^2 = \frac{1}{2}\int_0^L dx\, c^2\left(u_{1x}{}^2 + u_{2x}{}^2 - 2u_{1x}u_{2x}\right) = 0$$

Com isso, para que $\mathrm{Energia}_{\mathrm{Total}} = \frac{1}{2}\int_0^L dx\left(u_t{}^2 + c^2u_x^2 + \mu^2u^2\right) = 0$. Isso implica que u(x,t) = constante e como foi dito nas condições de contorno, u(x,0) = 0. Isso que dizer que u=0, portanto, $u_1 = u_2$.

Provando então que a solução é única.

6.a)

Nesse exemplo, consideraremos uma placa retangular de largura L_x e altura L_y, com seus lados esquerdo e direito sobre as condições de Dirichlet, ou seja, $T(0, y) = T(L_x, y) = 0$(6.1) e suas condições para y=0 em: $T(x, 0) = \begin{cases} 0 & , 0 < x < L_x/2 \\ T_1 & , L_x/2 < x < L_x \end{cases}$ (6.2). A distribuição de temperatura em condutividade constante T(x,y) será uma solução da equação de Laplace $\nabla^2 T = T_{xx} + T_{yy} = 0$ (6.3). Vou supor que a solução será dada por separação de variáveis, assim, $T(x, y) = X(x)\,Y(y)$(6.4). Logo, $YX'' + XY'' = 0 \rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{-Y''}{Y} = -k^2$ (6.5)sendo k$\in\mathbb{R}$, com isso, temos agora que encontrar a solução das duas EDOs: $\begin{cases} X'' = -kX & X = a\cos(kx) + b\,\text{sen}(kx) \\ Y'' = kY & Y = \tilde{a}\,e^{ky} + \tilde{b}\,e^{-ky} \end{cases}$ (6.6). Disso tenho,

$T(x,\ y) = [a\cos(kx) + b\,\text{sen}(kx)]\left[\tilde{a}\,e^{ky} + \tilde{b}\,e^{-ky}\right]$(6.7).

Utilizando as condições de contorno de Dirichlet.

$\rightarrow T(0,\ y) = a\left[\tilde{a}\,e^{ky} + \tilde{b}\,e^{-ky}\right] = 0 \Rightarrow a = 0$ (6.8)

Já supondo a = 0:

$\rightarrow T(L_x,\ y) = b\,\text{sen}(kL_x)\left[\tilde{a}\,e^{ky} + \tilde{b}\,e^{-ky}\right] = 0 \Rightarrow k_n = \frac{n\pi}{L_x}$(6.9), para n = 1,2 ....

Com isso, nossa solução fica: $T(x,\ y) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}(k_n\,x)\left[\tilde{a}_n\,e^{ky} + \tilde{b}_n\,e^{-ky}\right]$ (6.10), incorporei a constante b nos $\tilde{a}$ e $\tilde{b}$.

Para $L_y \rightarrow \infty$, $T(x,\ \infty) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}(k_n\,x)\left[\tilde{a}\,e^{k\infty} + \tilde{b}\,e^{-k\infty}\right] < \infty$, com isso, $\tilde{a} = 0$ (6.11).

Logo, $T(x,\ y) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}(k_n\,x)\,\tilde{b}_n\,e^{-ky}$(6.12). Agora vou usar o T(x,0) para calcular o $\tilde{b}_n$.

$\rightarrow \tilde{b}_n = \frac{2}{L_x}\int_0^{L_x} T(x,\ 0)\,\text{sen}(k_n\,x)\,dx = \frac{2}{L_x}\int_{L_x/2}^{L_x} T_1\,\text{sen}(k_n\,x)\,dx = \frac{2}{L_x}\frac{T_1}{k_n}[-\cos(kx)]\ \Big|_{L_x/2}^{L_x} \rightarrow$

$\tilde{b}_n = \frac{2T_1}{n\pi}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \cos(n\pi)\right]$ (6.13)

Com isso, temos:

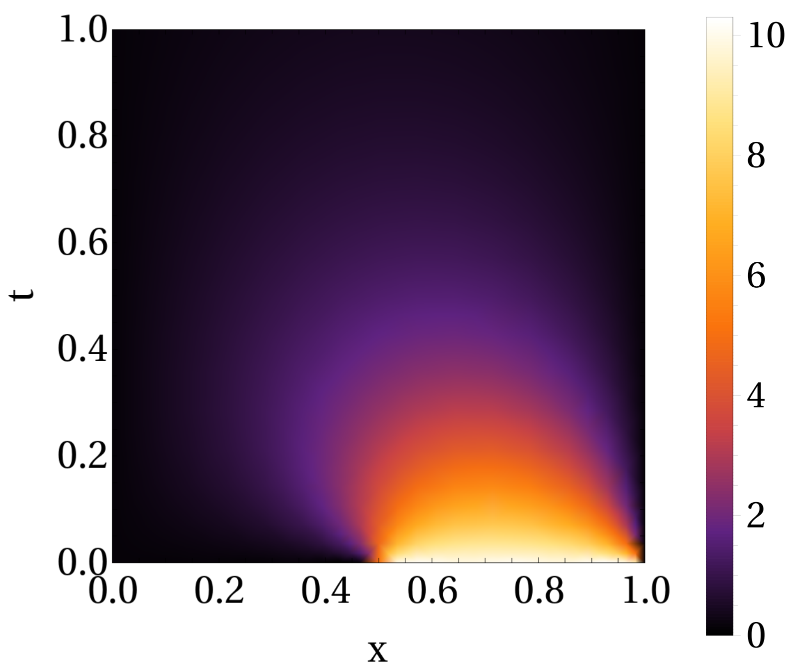
$T(x,\ y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2T_1}{n\pi}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \cos(n\pi)\right]\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L_x}\,x\right)e^{-ky}$ (6.14)

In[ ]:=
```
(*Supondo T1 = 10,Lx=1 e Ly=1*)
nmaxT1 = 100;
kt1 = n * π;
B1n = (2 * 10)/(n * π) (Cos[(n * π)/2] - Cos[n * π]);
                         cosseno         cosseno

T1 = Sum[B1n * Sin[kt1 * x] * Exp[-kt1 * y], {n, 1, nmaxT1}];
     soma       seno           exponencial
```

In[ ]:=
```
plot = DensityPlot[T1, {x, 0, 1}, {y, 0, 1},
       gráfico de densidade
  ImageSize → 350,
  tamanho da imagem
  FrameLabel → {"x", "t"},
  legenda do quadro
  ColorFunction → "SunsetColors",
  função de cores
  PlotLegends → Automatic,
  legenda do gráfico  automático
  PlotRangePadding → None,
  preenchimento de interva·· nenhum
  PlotRange → All,
  intervalo do gr··  tudo
  LabelStyle → {FontFamily → "Times", 20, Black}
  estilo de etiqueta  família da fonte  multiplicação  preto
 ]
```

Out[ ]=



6.b)

Agora da item anterior tenho: $T(x,\ y) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}(k_n\ x)\left[\tilde{a}_n e^{ky} + \tilde{b}_n e^{-ky}\right]$ (6.15). Usando a condição $T\left(x,\ L_y\right) = 0$ (6.16), tenho:

$\rightarrow T\left(x,\ L_y\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}(k_n\ x)\left[\tilde{a}_n e^{kL_y} + \tilde{b}_n e^{-kL_y}\right] = 0$

$\mapsto \tilde{a_n} e^{kL_y} + \tilde{b_n} e^{-kL_y} = 0 \rightarrow -\tilde{a_n} e^{2kL_y} = \tilde{b_n}$

Com isso, $T(x,\ y) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}(k_n\ x)\ \tilde{a_n}[e^{ky} - e^{2kL_y} e^{-ky}] = \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}(k_n\ x)\ A_n \sinh[K_n(y - L_y)]$ (6.17). Digo que $A_n \to \frac{A_n}{\sinh(k_n L_y)}$, assim: $T(x,\ y) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}(k_n\ x)\ A_n\ \frac{\sinh[K_n(y-L_y)]}{\sinh(k_n L_y)}$ (6.18).

Agora calculo então, $A_n = \frac{2}{L_x} \int_0^{L_x} T(x,\ 0) \sin(k_n\ x)\ d\!\!l\ x = \frac{2}{L_x} \int_{L_x/2}^{L_x} T_1 \sin(k_n\ x)\ d\!\!l\ x = \frac{2T_1}{n\pi}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \cos(n\pi)\right]$ (6.19).

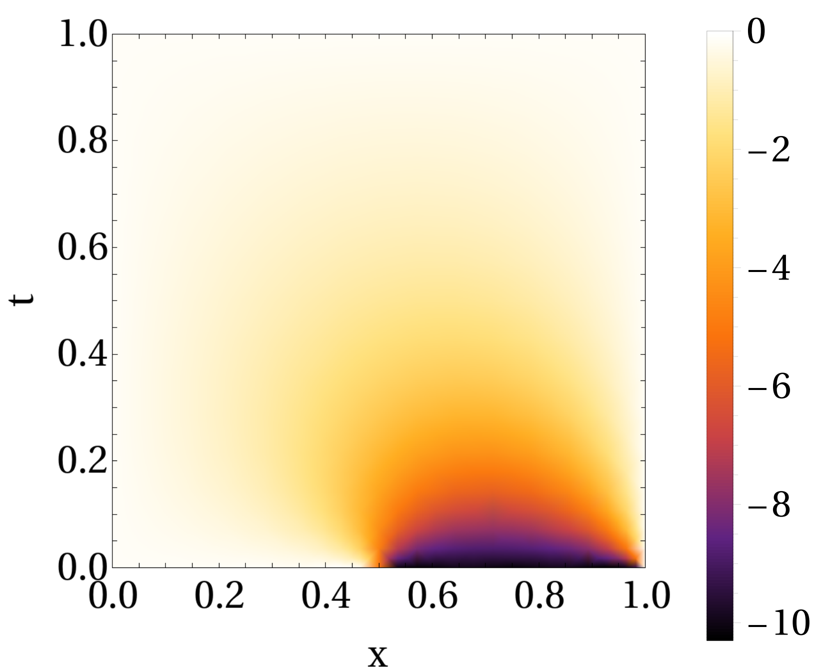
Por fim, temos então que: $T(x,\ y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2T_1}{n\pi}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \cos(n\pi)\right] \text{sen}(k_n\ x)\ \frac{\sinh[K_n(y-L_y)]}{\sinh(k_n L_y)}$ (6.20)

In[ ]:=
```
(*Supondo T1 = 10,Lx=1 e Ly=1*)
nmaxT2 = 100;
kt2 = n * π;
A2n = (2 * 10)/(n * π) (Cos[(n * π)/2] - Cos[n * π]);
       cosseno              cosseno

T2 = Sum[A2n * Sin[kt2 * x] * Sinh[kt2 (y - 1)]/Sinh[kt2], {n, 1, nmaxT2}];
     soma        seno
```

```
In[ ]:= plot = DensityPlot[T2, {x, 0, 1}, {y, 0, 1},
               gráfico de densidade
          ImageSize → 350,
          tamanho da imagem
          FrameLabel → {"x", "t"},
          legenda do quadro
          ColorFunction → "SunsetColors",
          função de cores
          PlotLegends → Automatic,
          legenda do gráfico  automático
          PlotRangePadding → None,
          preenchimento de interva··  nenhum
          PlotRange → All,
          intervalo do gr··  tudo
          LabelStyle → {FontFamily → "Times", 20, Black}
          estilo de etiqueta  família da fonte  multiplicação  preto
        ]
```

Out[ ]=



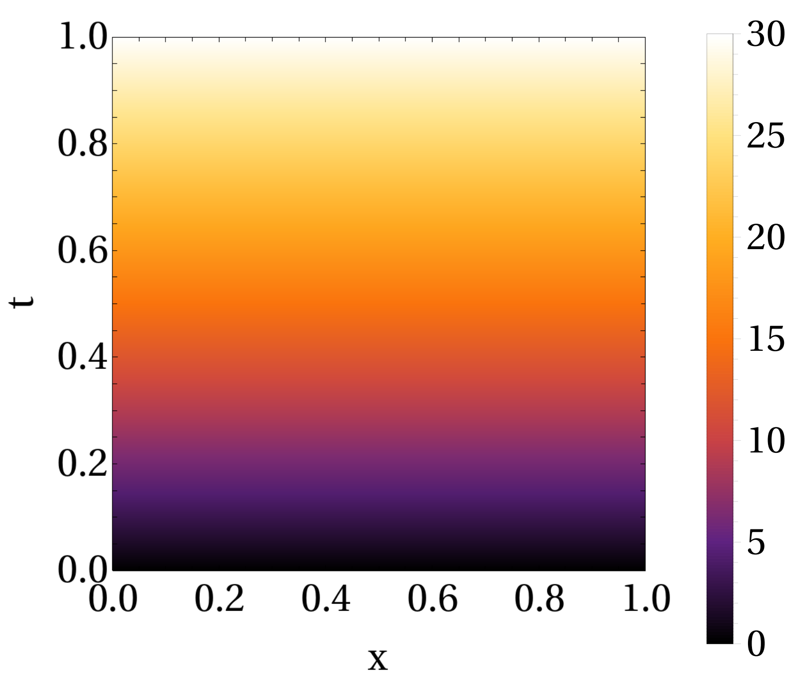
6.c)

Para esse item usarei as contas deduzidas nas notas de aula, onde para u(x,0) = T_1' (6.20) e $u(x, L_y)$ = T_2' (6.21), temos que: u(x,y) = T_1' + $\frac{(T_2' - T_1')}{L_y}$ y (6.22). Adaptando para o nosso caso, tenho: $T(x, y) = \frac{T_2}{L_y} y$

(6.23)

In[ ]:=
```
(*Supondo Lx=1, Ly=1 e T2= 30*)
plot = DensityPlot[30 y, {x, 0, 1}, {y, 0, 1},
       gráfico de densidade
  ImageSize → 350,
  tamanho da imagem
  FrameLabel → {"x", "t"},
  legenda do quadro
  ColorFunction → "SunsetColors",
  função de cores
  PlotLegends → Automatic,
  legenda do gráfico  automático
  PlotRangePadding → None,
  preenchimento de interva··  nenhum
  PlotRange → All,
  intervalo do gr··  tudo
  LabelStyle → {FontFamily → "Times", 20, Black}
  estilo de etiqueta  família da fonte  multiplicação  preto
 ]
```

Out[ ]=



7.a)

Nessa segunda parte da analise do oscilador harmonico quântico, a solução da equação de Schrodinger $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi$ (7.1) terá o seguinte formato $\psi(x, t) = \sum_n c_n e^{-i E_n t/\hbar} \psi_n(x)$ (7.2), onde $\psi_n(x)$ e

E_n são as soluções da equação ordinária diferencial: $H\psi = E\psi$ (7.3).

Usando o resultado da questão 3, e sendo: $a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - \frac{i p}{m\omega}\right)$ (7.4) e $\psi_0(x) = \alpha\, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$ (7.5), com $\alpha = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}$(7.6). Obterei $\psi_1 = a^\dagger\ \psi_0$(7.7).

$$\rightarrow \psi_1 = a^\dagger\ \psi_0 = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - \frac{i p}{m\omega}\right)\alpha\, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} = \alpha\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x\, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} - \frac{\hbar}{m\omega}\frac{d}{dx}e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\right) =$$

$$\alpha\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x\, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} + x\, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\right) = \alpha\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\ 2\,x\, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\ 2\,x\, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} = 2\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{3/4} x\, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

Portanto, $\psi_1 = 2\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{3/4} x\, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$ (7.8)

7.b)

Agora mostrarei que ψ_1 é uma solução da equação $H\psi = E\psi$, $E_1 = 3\,\hbar\omega/2$ (7.9). Para isso usarei a hamiltoniana no seguinte formato: $H = \hbar\omega\left(a^\dagger\,a + 1/2\right)$ (7.10).

$$\rightarrow H\psi_1 = 2\,\hbar\omega\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{3/4}\left(a^\dagger\,a\,x\,e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} + \frac{x\,e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}}{2}\right)$$

$$\mapsto a\,x\,e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{\hbar}{m\omega}\frac{d}{dx}\right)x\,e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x^2 e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} + \frac{\hbar}{m\omega}\left(1 - \frac{m\omega}{\hbar}x^2\right)e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\right) =$$

$$\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\ \frac{\hbar}{m\omega}\ e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\,m\omega}}\ e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

$$\mapsto a^\dagger\,a\,x\,e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} = a^\dagger\sqrt{\frac{\hbar}{2\,m\omega}}\ e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - \frac{i p}{m\omega}\right)\sqrt{\frac{\hbar}{2\,m\omega}}\ e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} =$$

$$\frac{1}{2}\left(x\,e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} - \frac{\hbar}{m\omega}\frac{d}{dx}e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\right) = \frac{1}{2}\left(x\,e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} + x e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\right) = x e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

$$\rightarrow H\psi_1 = 2\,\hbar\omega\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{3/4}\left(a^\dagger\,a\,x\,e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} + \frac{x\,e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}}{2}\right) = 2\,\hbar\omega\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{3/4}\left(x e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} + \frac{x\,e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}}{2}\right) =$$

$$3\,\hbar\omega\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{3/4} x e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

$$\rightarrow H\psi_1 = 3\,\hbar\omega\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{3/4} x e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} = \frac{3}{2}\hbar\omega\ \psi_1 = E_1\,\psi_1$$

Com isso, temos que $E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega$ (7.11).