Lista II - Física Matemática 1

Lyliana Myllena Santos de Sousa - 11223740
Lyliana.Sousa@usp.br

2.a)

COnsiderado uma partícula quântica confinada num poço de potencial, região onde x ∈ [0,L], temos que esse tipo de sistema é descrito por uma função ψ(x), chamada de função de onda, que satisfaz $\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi(x)$ (2.1). Mostraremos que sendo $\psi(x) =$ ASin[kx] + BCos[kx](2.2), A, B e k são constantes, então, E = $\frac{-\hbar^2 k^2}{2m}$

Primeiro derivarei ψ(x):

$\rightarrow\psi'(x) =$ AkCos[kx] - BkSin[kx] (2.3)

$\rightarrow\psi''(x) = -k^2$ ASin[kx] $-k^2$ BCos[kx] $= -k^2\,\psi(x)$ (2.4)

Substituindo o resultado da Eq.(2.4) na Eq.(2.1) , temos:

$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi \Leftrightarrow \frac{-\hbar^2}{2m} -k^2\,\psi(x) = E\psi(x) \Leftrightarrow E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ (2.5)

2.b)

Mostraremos que dadas as condições de contorno $\psi(0) = \psi(L) = 0$, a Eq.(2.2) será satisfeita para B = 0 e se k for discreto, de forma que k = $\frac{\pi n}{L}$(2.6), n = 1, 2...

$\psi(0) =$ ASin[0] + BCos[0] = B = 0 (2.7), levando em consideração que B = 0.

$\psi(L) =$ ASin[kL] + BCos[kL] = ASin[kL] = 0 (2.8), com isso teremos que:

Sin[kL] = 0 ⇔ kL = Sin^{-1}[0] = nπ.Por fim, temos que: k = $\frac{n\pi}{L}$

2.c)

Encontrando um A que satisfaça a solução: $\int_0^L |\,\psi(x)\,|^2 dx = 1$ (2.9). Para isso temos que, $|\psi(x)|^2 = A^2\sin^2(\frac{n\pi}{L}x)$ (2.10). Com isso fazemos,

$A^2 \int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = A^2\left[\frac{x}{2} - \frac{\sin\left(\frac{2n\pi}{L}x\right)L}{4n\pi}\right]_0^L = A^2\left[\frac{L}{2} - \frac{\sin(2n\pi)L}{4n\pi}\right] = 1$, como para todo n inteiro sin(2nπ)=0 (2.11). Temos que por fim que: $A = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{L}}$ (2.12)

3.a)

Considerando a equação não-linear de primeira ordem, chamada de Equação de Bernoulli: $y' + P(x)\,y = Q(x)\,y^n$ (3.1), sendo n um número arbitrário, podemos reagrupar a equação da seguinte maneira: $\frac{y'}{y^n} + \frac{P(x)\,y}{y^n} = Q(x)$ (3.2), sendo $Z = y^{1-n}$ (3.3), o que implica que a sua derivada é dada por:
$Z' = (1-n)\,y^{-n}\,y'$(3.4), substituímos a Eq.(3.3) e Eq.(3.4) em Eq.(3.1):
$y'\,y^{-n} + P(x)\,y^{1-n} = Q(x) \to \frac{Z'}{(1-n)} + P(x)\,Z = Q(x) \to Z' + (1-n)\,P(x)\,Z = (1-n)\,Q(x)$ (3.5)

3.b)

Como já vimos em sala, a solução da EDO linear não homogênea:
$y' + \alpha(x)\,y = \beta(x)$ (3.6), possui o seguinte formato:
$y(x) = Ce^{-I(x)} + e^{-I(x)} \int \beta(x)\,e^{I(x)}\,dx$ (3.7), sendo $I(x) = \int \alpha(x)\,dx$ (3.8) (nosso fator integrante).
Adaptando para o nosso caso temos:
$Z(x) = Ce^{-\int (1-n)\,P(x)\,dx} + e^{-\int (1-n)\,P(x)\,dx} \int (1-n)\,Q(x)\,e^{\int (1-n)\,P(x)\,dx}\,dx$ (3.9)
Por fim, temos que a solução de y é: $y(x) = Z^{\frac{1}{1-n}}$ (3.10)

3.c)

Aplicando os conhecimentos anteriores para a resolução da EDO:
$3xy^2y' + 3y^3 = 1$ (3.11) $\to y^2y' + y^3\frac{1}{x} = \frac{1}{3x}$ (3.12) $\to Z = y^3$ (3.13) $\to Z' = 3y^2y'$ (3.14)
$\frac{Z'}{3} + Z\frac{1}{x} = \frac{1}{3x}$ (3.15) $\to Z' + \frac{3}{x}Z = \frac{1}{x}$ (3.16)
Podemos resolver a integral do jeito citado no item b, porém existe uma

maneira mais simples.

$Z' + \frac{3}{x} Z = \frac{1}{x}$ (3.17) $\to Z'(x) = \frac{1}{x}(1-3\,Z(x))$ (3.18) $\to \frac{Z'(x)}{(1-3\,Z(x))} = \frac{1}{x}$ (3.19), supondo 1 - 3Z(x) ≠ 0 e sendo u = 1-3Z ⇒ du =-3dZ, temos:

$\frac{\frac{dZ}{dx}}{(1-3\,Z(x))} = \frac{1}{x}$ (3.20) $\to \int \frac{dZ}{(1-3\,Z(x))} = \int \frac{dx}{x}$ (3.21) $\to -\frac{1}{3}\int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x}$ (3.22) $\to$

$-\frac{1}{3}\text{Log}(u) = \text{Log}(x)$ (3.23) $\to -\frac{1}{3}\text{Log}(1-3\,Z) = \text{Log}(x) + C$ (3.24) $\to$

$\text{Log}(1-3\,Z) = -3\,\text{Log}(x) + C$ (3.25) $\to 1-3\,Z = \frac{c}{x^3}$ (3.26) $\to Z = \frac{1}{3} + \frac{c}{X^3}$ (3.27)

Por fim, teremos que $y(x) = \sqrt[3]{Z(x)} = \sqrt[3]{\frac{1}{3} + \frac{c}{X^3}} = \frac{\sqrt[3]{x^3 + C}}{\sqrt[3]{3}\,x}$ (3.28)

4.a)

Sendo o modelo da evolução de uma população y(t) de uma certa espécie dado por: $\frac{dy}{dt} = ry\left(1-\frac{y}{k}\right)$ (4.1), sendo y e k constantes. Usaremos os resultados do item anterior para encontrar a solução de y(t), já que a Eq. se enquadra como uma equação de Bernoulli, onde temos a seguinte condição inicial y(t=0) = y_0 (4.2).

$\frac{dy}{dt} = ry\left(1-\frac{y}{k}\right)$ (4.3) $\to y' = ry - \frac{r}{k}y^2$ (4.4) $\to y' - ry = -\frac{r}{k}y^2$ (4.5) $\to \frac{y'}{y^2} + -\frac{r}{y} = -\frac{r}{k}$ (4.6) $\to$

$y'\,y^{-2} - ry^{-1} = -\frac{r}{k}$ (4.7), sendo Z = $-y^{-1}$ (4.8) e suas derivada $Z' = y^{-2}\,y'$ (4.9).

Temos então que a Eq.(4.1) terá o seguinte formato: $Z' + rZ = -\frac{r}{k}$ (4.10)

→Encontrando o nosso fator integrante: $I(t') = \int_0^t r\,dt \Rightarrow I(t) - I(0) = rt$ (4.11).

Nesse ponto é legal lembrarmos que dado Eq.(4.2) e a Eq.(4.8) temos que Z(0) = $-\frac{1}{y_0}$ (4.12)

Por uma adaptação da Eq.(3.9), que vimos em sala, temos que:

$Z(t) = Z(0)\,e^{-rt} + e^{-rt}\int_0^t\left(-\frac{r}{k}\right)e^{rt'}\,dt' = -\frac{1}{y_0}e^{-rt} - \frac{e^{-rt}}{k}e^{rt'}\Big|_0^t =$

$Z(t) = -\frac{1}{y_0}e^{-rt} - \frac{e^{-rt}}{k}\left[e^{rt} - 1\right] \Rightarrow Z(t) = -\frac{1}{y_0}e^{-rt} - \frac{1}{k} + \frac{e^{-rt}}{k}$

$Z(t) = \left(-\frac{1}{y_0} + \frac{1}{k}\right)e^{-rt} - \frac{1}{k}$ (4.13)

Com isso, temos que a solução y(t) será dada por: $y(t) = -\frac{1}{Z}$ (4.14)

Por fim, temos que $y(t) = \frac{k}{1-k\left(-\frac{1}{y_0}+\frac{1}{k}\right)e^{-rt}} = \frac{k}{1+\left(\frac{k}{y_0}-1\right)e^{-rt}}$ (4.15)

4.b)

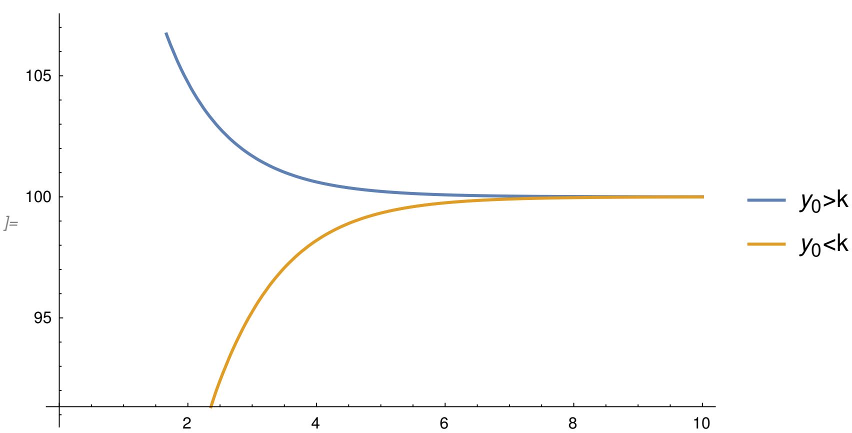
Considerando y_0 e k constantes positivas, x = rt = tempo adimensional e y/k a medida adimensional da população. Ao plotarmos a função $y(t) = \frac{k}{1+\left(\frac{k}{y_0}-1\right)e^{-rt}}$,

podemos analisar que quando $y_0 > k$ teremos uma função decrescente e quando $y_0 < k$ teremos uma função crescente. No entanto depois de um tempo ambas as funções convergem para o valor de k.

In[ ]:=
```
(*Defino k = 100, plotarei dois gráfico o "y0>k" para y0=
 150 (onde (k/y0 -1)=-1/3) e o "y0<k" para y0=50 (onde (k/y0 -1)=1 ).*)

Plot[{100/(1 - 1/3 * Exp[-x]), 100/(1 + 1 * Exp[-x])}, {x, 0, 10}, PlotLegends → {"y0>k", "y0<k"}]
gráfico                                                              legenda do gráfico
```

Out[ ]=

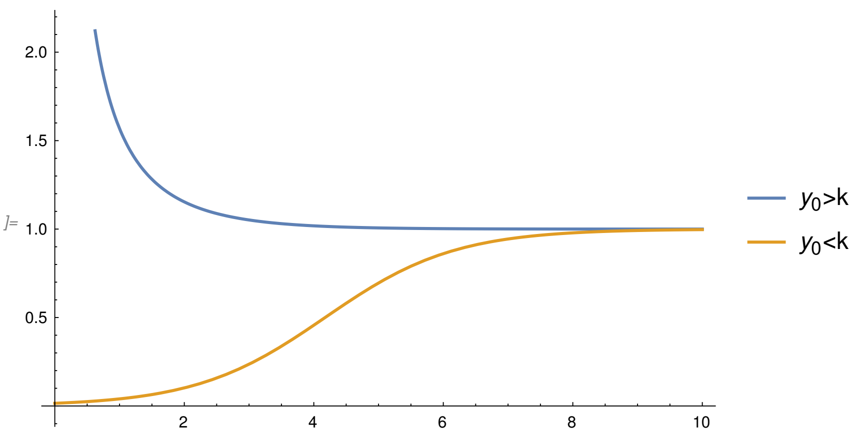


In[ ]:= (*Defino k = 1, plotarei dois gráfico o "y_0>k" para y_0= 66 $\left(\text{onde } \left(\frac{k}{y_0}-1\right)=-\frac{65}{66}\right)$ e o "y_0<k" para y_0=$\frac{1}{66}$ $\left(\text{onde } \left(\frac{k}{y_0}-1\right)=65\right)$.*)

$$\text{Plot}\left[\left\{\frac{1}{1-\frac{65}{66}*\text{Exp}[-x]}, \frac{1}{1+65*\text{Exp}[-x]}\right\}, \{x, 0, 10\}, \text{PlotLegends} \to \{"y_0>k", "y_0<k"\}\right]$$

gráfico legenda do gráfico

Out[ ]=

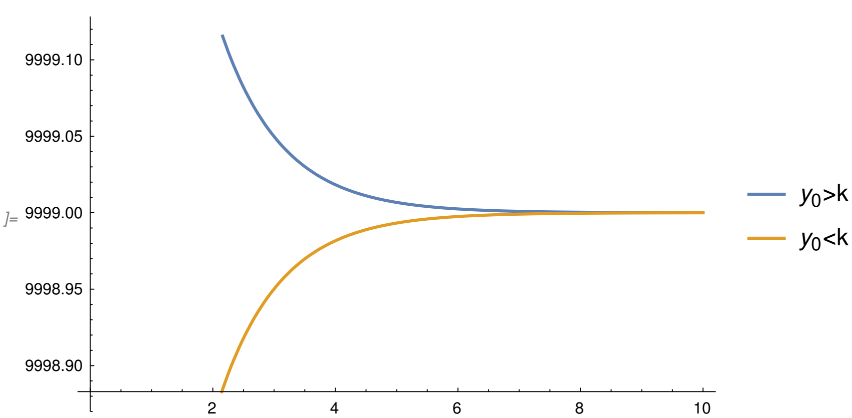


In[ ]:= (*Defino k = 9999, plotarei dois gráfico o "y_0>k" para y_0= 10000 $\left(\text{onde } \left(\frac{k}{y_0}-1\right)=-\frac{1}{10000}\right)$ e o "y_0<k" para y_0=9998 $\left(\text{onde } \left(\frac{k}{y_0}-1\right)=\frac{1}{9998}\right)$.*)

$$\text{Plot}\left[\left\{\frac{9999}{1-\frac{1}{10\,000}*\text{Exp}[-x]}, \frac{9999}{1+\frac{1}{9998}*\text{Exp}[-x]}\right\}, \{x, 0, 10\}, \text{PlotLegends} \to \{"y_0>k", "y_0<k"\}\right]$$

gráfico legenda do gráfico

Out[ ]=



5.a)

Para encontrar a solução da EDO $R\,\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = V(t)$(5.1), com a condição inicial Q(0)=0 (5.2), primeiro devemos expandir a tensão $V(t) = \begin{cases} V_0 & 0 < t < \pi/\omega \\ -V_0 & -\pi < t < 0 \end{cases}$ (5.3)em série de Fourier. Serei bem simples no desenvolvimento da série de Fourier.

→V(t) terá o seguinte formato: $V(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\, e^{i\omega n t}$ (5.4),

$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} V(t)\, e^{-i\omega n t}\, dt = \frac{\omega}{2\pi}\left[-\int_{-T/2}^{0} V_0\, e^{-i\omega n t}\, dt + \int_{0}^{T/2} V_0\, e^{-i\omega n t}\, dt\right]$

$\frac{V_0}{2\pi n i}\left[e^{-i\omega n t}\ \Big|_{\frac{-\pi}{\omega}}^{0} - e^{-i\omega n t}\ \Big|_{0}^{\frac{\pi}{\omega}}\right] = \frac{V_0}{2\pi n i}\left[1 - e^{-i\pi n} - e^{-i\pi n} + 1\right] = \frac{V_0}{\pi n i}\left[1 - (-1)^n\right]$

Com isso, $V(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left[\frac{V_0}{R\pi n i}\left[1 - (-1)^n\right]\right] e^{i\omega n t}$(5.5)

Assim, nossa EDO será: $\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{RC} = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left[\frac{V_0}{\pi n i}\left[1 - (-1)^n\right]\right] e^{i\omega n t}$(5.6)

A solução de Q(t) pode ser obtida pela pelo método do fator de integração, como vimos em aula e citamos nas outras questões:

$Q(t) = Q(0)\, e^{-\int_0^t 1/RC\, dt} + e^{-\int 1/RC\, dt} \int_0^t \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left[\frac{V_0}{R\pi n i}\left[1 - (-1)^n\right]\right] e^{i\omega n t}\, e^{\int 1/RC\, dt}\, dt$

$Q(t) = e^{-t/RC} \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left[\frac{V_0}{R\pi n i}\left[1 - (-1)^n\right]\right] \int_0^t e^{(1/RC + i\omega n)\, t}\, dt$

$Q(t) = e^{-t/RC} \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left[\frac{V_0}{R\pi n i}\, \frac{\left[1-(-1)^n\right]}{(1/RC + i\omega n)}\right]\left[e^{(1/RC + i\omega n)\, t} - 1\right]$

$Q(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left[\frac{V_0}{R\pi n}\, \frac{\left[1-(-1)^n\right]}{(i/RC - \omega n)}\right]\left[e^{i\omega n t} - e^{-t/RC}\right]$ (5.7)

Posso simplificar ainda mais a solução Q(t), considerando essa somatório em um novo conjunto $\mathbb{S} = \{s : s = 2n+1,\ n \in \mathbb{Z}\}$ (5.8)

$Q(t) = \frac{V_0}{R\pi} \sum_{s\in\mathbb{S}}\left[\frac{2}{\left(\frac{i s}{RC} - \omega s^2\right)}\right]\left[e^{i\omega s t} - e^{-t/RC}\right]$ (5.9)

5.b)

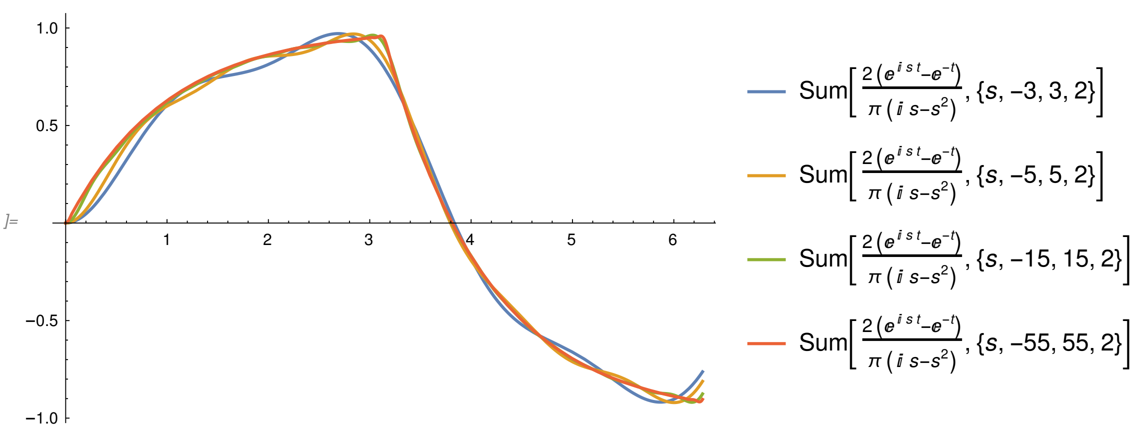
Plotaremos a função $\frac{Q(t)\,\omega R}{V_0} = \frac{1}{\pi} \sum_{s\in\mathbb{S}}\left[\frac{2}{\left(\frac{i\omega s}{RC} - s^2\right)}\right]\left[e^{i\omega s t} - e^{-t/RC}\right]$ (5.10), que corresponde a uma carga adimensional. Simplificaremos essa função colocando $\omega = 1$ e $\alpha = \frac{1}{RC}$. Com isso temos que:

$\frac{Q(t)R}{V_0} = \frac{1}{\pi}\sum_{s\in\mathbb{S}}\left[\frac{2}{(i s\alpha - s^2)}\right]\left[e^{i st} - e^{-\alpha t}\right]$ (5.11) . A seguir veremos alguns exemplos de plots para diferentes valores de α, onde usaremos um truquezinho de sempre começar de a soma por um numero ímpar negativo e terminar no seu simétrico positivo, para que todas as contribuições imaginarias sejam canceladas. Além disso, nosso passo da soma será de dois em dois para que o nosso s não passe por 0.

Já podemos adiantar que nos plots observamos que quanto maior for o valor de α, mais próximo da onda quadrada estaremos, e quando menor o valor de α, mais proximo da onda triangular estaremos.

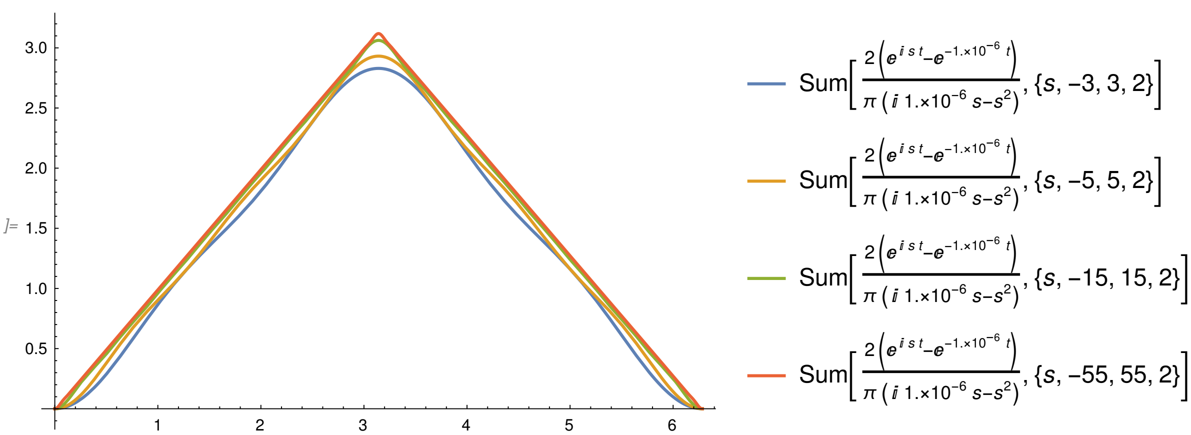
In[ ]:=
```
(*Para α = 1*)
Plot[{Sum[(2*(E^(ⅈ s t) - E^(-1*t)))/(π*(ⅈ*1*s - s^2)), {s, -3, 3, 2}], Sum[(2*(E^(ⅈ s t) - E^(-1*t)))/(π*(ⅈ*1*s - s^2)), {s, -5, 5, 2}],
  Sum[(2*(E^(ⅈ s t) - E^(-1*t)))/(π*(ⅈ*1*s - s^2)), {s, -15, 15, 2}], Sum[(2*(E^(ⅈ s t) - E^(-1*t)))/(π*(ⅈ*1*s - s^2)), {s, -55, 55, 2}]},
  {t, 0, 2 π}, PlotLegends → "Expressions"]
```
gráfico | soma | soma | soma | soma | legenda do gráfico

Out[ ]=



In[ ]:=
```
(*Para α = 0.000001*)
Plot[{Sum[(2*(E^(ⅈ s t) - E^(-0.000001*t)))/(π*(ⅈ*0.000001*s - s^2)), {s, -3, 3, 2}],
  Sum[(2*(E^(ⅈ s t) - E^(-0.000001*t)))/(π*(ⅈ*0.000001*s - s^2)), {s, -5, 5, 2}],
  Sum[(2*(E^(ⅈ s t) - E^(-0.000001*t)))/(π*(ⅈ*0.000001*s - s^2)), {s, -15, 15, 2}], Sum[(2*(E^(ⅈ s t) - E^(-0.000001*t)))/(π*(ⅈ*0.000001*s - s^2)),
  {s, -55, 55, 2}]}, {t, 0, 2 π}, PlotLegends → "Expressions"]
```
gráfico, soma, legenda do gráfico

Out[ ]=



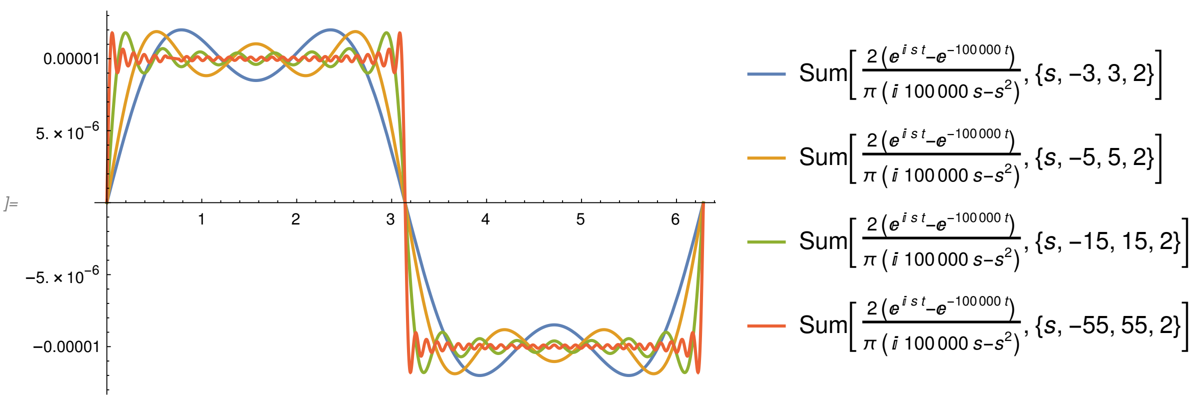
In[ ]:= (*Para α = 100000*)

$$\text{Plot}\left[\left\{\text{Sum}\left[\frac{2*\left(E^{i\,s\,t}-E^{-100000*t}\right)}{\pi*\left(i*100000*s-s^{2}\right)},\{s,-3,3,2\}\right],\right.\right.$$
gráfico soma

$$\text{Sum}\left[\frac{2*\left(E^{i\,s\,t}-E^{-100000*t}\right)}{\pi*\left(i*100000*s-s^{2}\right)},\{s,-5,5,2\}\right],\ \text{Sum}\left[\frac{2*\left(E^{i\,s\,t}-E^{-100000*t}\right)}{\pi*\left(i*100000*s-s^{2}\right)},\{s,-15,15,2\}\right],$$
soma soma

$$\left.\left.\text{Sum}\left[\frac{2*\left(E^{i\,s\,t}-E^{-100000*t}\right)}{\pi*\left(i*100000*s-s^{2}\right)},\{s,-55,55,2\}\right]\right\},\ \{t,0,2\pi\},\ \text{PlotLegends}\to\text{"Expressions"}\right]$$
soma legenda do gráfico

Out[ ]=



In[ ]:= (*Para α = 1*)

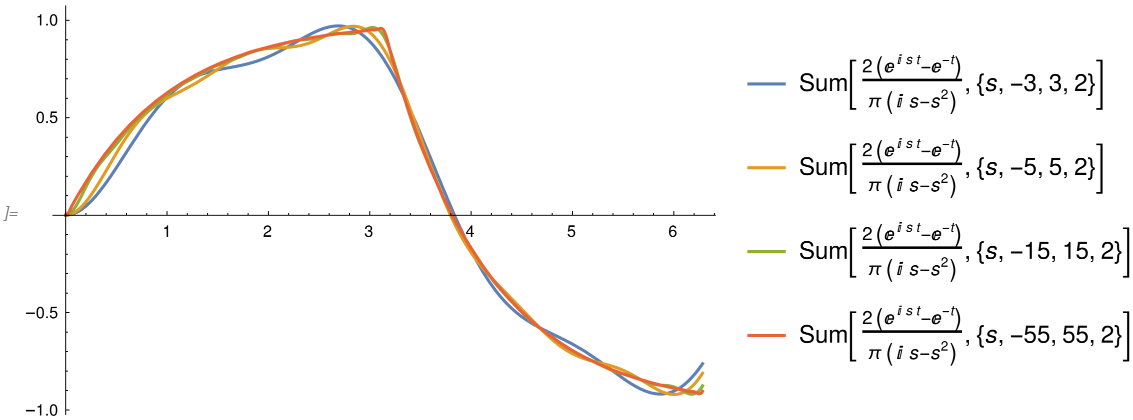
$$\text{Plot}\left[\left\{\text{Sum}\left[\frac{2*\left(E^{i\,s\,t}-E^{-1*t}\right)}{\pi*\left(i*1*s\ -\ s^2\right)},\ \{s,-3,3,2\}\right],\ \text{Sum}\left[\frac{2*\left(E^{i\,s\,t}-E^{-1*t}\right)}{\pi*\left(i*1*s\ -\ s^2\right)},\ \{s,-5,5,2\}\right],\right.\right.$$

$$\left.\text{Sum}\left[\frac{2*\left(E^{i\,s\,t}-E^{-1*t}\right)}{\pi*\left(i*1*s\ -\ s^2\right)},\ \{s,-15,15,2\}\right],\ \text{Sum}\left[\frac{2*\left(E^{i\,s\,t}-E^{-1*t}\right)}{\pi*\left(i*1*s\ -\ s^2\right)},\ \{s,-55,55,2\}\right]\right\},$$

$$\left.\{t, 0, 2\pi\},\ \text{PlotLegends} \rightarrow \text{"Expressions"}\right]$$

gráfico soma soma soma soma legenda do gráfico

Out[ ]=



5.c)

Para encontrarmos a energia armazenada no circuito, devemos levar em consideração a identidade de Parseval, onde $\frac{1}{T}\int_0^T y^2(t)\,dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\,d_n\,|^2$(5.12) para $y(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n\, e^{i\,\omega t}$(5.13), sendo $Q(t) = \sum_{s\in\mathbb{S}} \frac{V_0}{R\pi}\left[\frac{2}{\left(\frac{i s}{RC}-\omega s^2\right)}\right]\left[e^{i\,\omega s t}-e^{-t/RC}\right]$ (5.13) . Considero que d_s de Q(t) e $d_s = \frac{V_0}{R\pi}\left[\frac{2}{\left(\frac{i s}{RC}-\omega s^2\right)}\right]$ (5.14)e assim $|\,d_s\,|^2 = \frac{V_0}{R\pi}\ \frac{2}{\left(\frac{s}{RC}\right)^2+\left(\omega s^2\right)^2}$(5.15). Com essas informações posso encontrar a energia armazenada no sistema, a qual corresponde a seguinte expressão: $\bar{E} = \frac{1}{T}\int_0^T Q^2(t)\,dt$(5.16). Logo, a energia será:

$\bar{E} = \frac{1}{T}\int_0^T Q^2(t)\,dt = \frac{1}{C}\sum_{s\in\mathbb{S}} \frac{V_0}{R\pi}\ \frac{2}{\left(\frac{s}{RC}\right)^2+\left(\omega s^2\right)^2}$(5.17)

Usaremos a propriedade trigonométrica do enunciado para simplificar nossa expressão: $\frac{1}{\pi}\sum_{n=1,2...}\frac{1}{n^2(\lambda^2+n^2)} = \frac{\pi\lambda-2\,\mathrm{Tanh}(\pi\lambda/2)}{8\,\lambda^3}$ (5.18) .

Adaptando para o nosso caso, temos que como os s estão ao quadrado, os seus sinais não importam. Portanto, $\bar{E} = = \frac{4\,v_0}{RC\pi}\sum_{s=1,2...}\frac{2}{(\frac{s}{RC})^2+(\omega s^2)^2}$(5.19).

Fazendo as mesmas considerações do item b, podemos reescrever a energia como sendo: $\bar{E} = \frac{4\,v_0}{\alpha\pi}\sum_{s=1,2...}\frac{2}{s^2(\alpha^2+s^2)}$(5.20). Usando a propriedade trigonométrica Eq.(5.18) , temos por fim que:

$\bar{E} = \frac{4\,v_0}{\alpha}\;\frac{\pi\alpha-2\,\mathrm{Tanh}(\pi\alpha/2)}{8\,\alpha^3}$ (5.21)

6.a)

Para encontrarmos a solução da EDO $y'' - 4y = 10$ (6.1), vou separar em dois passos, onde encontrarei primeiro a solução homogênea e depois a particular.

→ Solução homogênea: Encontraremos a solução da EDO $y'' - 4y = 0$ (6.3), usando o que vimos em sala sobre operadores diferenciais, me atendo ao fato que o operador diferencial D só comuta com constantes e funções de D. Podemos escrever a EDO da seguinte maneira: $\mathcal{L}y = D^2\,y - 4\,y$ (6.4), onde $\mathcal{L} = D^2\,y - 4$ (6.5), fatorando $\mathcal{L}$, encontraremos que:

$\mathcal{L} = (D+2)\,(D-2)$ (6.5), onde consideraremos as raízes do polinómio D, como sendo as soluções da nossa homogênea, logo:

$y_h(x) = c_1\,e^{-2\,x} + c_2\,e^{2\,x}$ (6.6)

→ Solução particular: Usaremos o método de coeficientes indeterminados, a solução particular deve ter a forma de $y_p(x) =$ constante (6.7), onde sabemos que $\frac{d^2y_p}{dx^2} = \frac{d\,y_p}{d\,x} = 0$ (6.8). Substituindo isso na Eq. (6.1), temos que $0 - 4\,y_p = 10 \rightarrow$ $y_p = -\frac{5}{2}$ (6.9)

Com isso, nossa solução é: $y(x) = y_p(x) + y_h(x) = c_1\,e^{-2\,x} + c_2\,e^{2\,x} - \frac{5}{2}$ (6.10)

6.b)

Usando os princípios anteriores para descobrir a solução da EDO $y'' + y' - 2y = e^{2\,x}$ (6.11):

→ Solução homogênea: $y'' + y' - 2y = e^{2x}$ → $\mathcal{L}y = D^2y + Dy - 2y$ → $\mathcal{L} = D^2 + D - 2 = (D-1)(D+2)$ (6.12)

$y_h(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x}$ (6.13)

→ Solução particular: Ela terá a forma $y_p(x) = \alpha e^{2x}$ (6.14), onde as suas derivadas correspondem a: $y'_p(x) = 2\alpha e^{2x}$ (6.15), $y''_p(x) = 4\alpha e^{2x}$ (6.16), substituiremos na Eq.(6.11), para descobrirmos os valores de α:

$y_p'' + y_p' - 2y_p = e^{2x} \to \alpha e^{2x}(4 + 2 - 2) = e^{2x} \to \alpha = \frac{1}{4} \longrightarrow y_p(x) = \frac{1}{4} e^{2x}$ (6.12)

Solução geral: $y(x) = y_p(x) + y_h(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x} - \frac{e^{2x}}{4}$ (6.13)

6.c)

Usando os princípios anteriores para descobrir a solução da EDO

$2y'' + y' = 2x \to y'' + \frac{y'}{2} = x$ (6.14):

→ Solução homogênea: $y'' + \frac{y'}{2} = 0 \to \mathcal{L}y = D^2y + D\frac{y}{2} \to \mathcal{L} = D^2 + \frac{D}{2} \to \mathcal{L} = D(D + \frac{1}{2})$

$y_h(x) = c_1 e^{\frac{-1}{2}x} + c_2$ (6.15)

→ Solução particular: Obtendo a particular pelo método dos coeficientes indeterminados, temos que y_p terá uma forma polinomial de grau 1, porém multiplicaremos essa polinómio por x para obtermos o elemento “perdido da homogênea”. Ela terá a forma $y_p(x) = x(\alpha + \beta x) = \alpha x + \beta x^2$ (6.16), onde as suas derivadas correspondem a: $y'_p(x) = \alpha + 2\beta x$ (6.17), $y''_p(x) = 2\beta$ (6.18), substituiremos na Eq.(6.14), para descobrirmos os valores de α e β:

$2y_p'' + y_p' = 2x \to 4\beta + \alpha + 2\beta x = 2x \to \begin{cases} \alpha + 4\beta = 0 & \alpha = -4 \\ 2\beta = 2 & \beta = 1 \end{cases} \longrightarrow$

$y_p(x) = -4x + x^2$ (6.19)

Solução geral: $y(x) = y_p(x) + y_h(x) = c_1 e^{\frac{-1}{2}x} + c_2 - 4x + x^2$ (6.20)

7.a)

Considere a EDO de segunda ordem $(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$ (7.1), onde n é considerado um parâmetro. Essa EDO possui duas soluções diferentes, onde uma delas é uma solução polinomial de ordem n, chamamos esse polinomio de polinomio de Chebyshev e nomearemos ele de $T_n(x)$.

→ Calculando a solução da Eq.(7.1) para n = 1: Para isso temos que a EDO $(1-x^2)\, y'' - xy' + y = 0$(7.2) terá como solução o polinomio $T_1(x) = ax + b$ (7.3), onde suas derivadas correspondem a: $T'_1(x) = a$(7.4) e $T''_1(x) = 0$ (7.5). Substituímos as derivadas na equação temos: $(1-x^2)\, T_1'' - xT_1' + T_1 = 0$ (7.6) → -ax + ax +b = 0. Disso tiramos que b = 0 e a pode ser qualquer número, a pode ser encarado como um coeficiente arbitrário, portanto, nossa solução será: $T_1(x) = x$ (7.7)

→ Calculando a solução da Eq.(7.1) para n = 2: Para isso temos que a EDO $(1-x^2)\, y'' - xy' + 4\, y = 0$ (7.8) terá como solução o polinomio $T_2(x) = 2\,x^2 + bx + c$ (7.9), onde suas derivadas correspondem a: $T'_2(x) = 4\,x + b$ (7.10) e $T''_2(x) = 4$ (7.11). Substituímos as derivadas na equação temos: $(1-x^2)\, T_2'' - xT_2' + 4\, T_2 = 0$ → $(1-x^2)\,4 - x(4\,x + b) + 4\,(2\,x^2 + bx + c) = 0$ → $4 - 4x^2 - 4x^2 - bx + 8x^2 + 4bx + 4c = 0$ → $4(1 + c) + 3bx = 0$. Disso tiramos, que b = 0 (7.12) e c = - 1 (7.13), com isso, $T_2(x) = 2\,x^2 - 1$ (7.14)

In[ ]:=
```
(*Verficando os polinomios de Chebyshev pelo Mathematica*)
(*T1*) ChebyshevT[1, x]
```
polinômios de Chebyshev de primeira ordem

Out[ ]= x

In[ ]:=
```
(*T2*)
ChebyshevT[2, x]
```
polinômios de Chebysl

Out[ ]= $-1 + 2\,x^2$

7.b)

Uma formula geral para o polinomio de Chebyshev é dada por $T_n(x) = \cos\left(n\cos^{-1}(x)\right)$ (7.15), que pode ser simplificada como $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$ (7.16). Com isso temos que $T_3(\cos\theta) = \cos(3\,\theta)$ (7.17), para encontrarmos o nosso polinomio primeiro devemos simplificar $\cos(3\theta)$, para que ele dependa apenas de $\cos\theta$. Para isso usaremos as seguintes propriedades trigonométricas: $\cos(A-B) = \cos A\cos B + \mathrm{sen}A\,\mathrm{sen}B$ (7.18); $\cos(A+B) = \cos A\cos B - \mathrm{sen}A\,\mathrm{sen}B$ (7.19); $\mathrm{sen}(2\,A) = 2\,\mathrm{sen}A\cos A$ (7.20)

→ Usando as propriedades trigonométricas para encontrar $\cos(3\theta)$:

$\cos(3\,\theta) =$ $\text{Cos}(2\,\theta + \theta) = \cos(2\,\theta)\cos\theta\ - \text{sen}(2\,\theta)\,\text{sen}\theta\ =$
$[2\cos^2(\theta) - 1]\cos\theta\ - 2\,\text{sen}^2\theta\cos\theta =$
$[2\cos^2(\theta) - 1]\cos\theta\ - 2[1 - \cos^2\theta]\cos\theta =$ $4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ (7.21)
Assim, temos que: $\cos(3\,\theta) =$ $4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ (7.21), fazendo a substituição de variável $x = \cos\theta$ (7.22). Temos que, $T_3(x)\ =\ 4\,x^3 - 3\,x$ (7.23).
Usando $T_3(x)$ para resolver a Eq.(7.1) para n = 3, sendo as derivadas de T_3:
$T_3{}' = 12\,x^2 - 3$ (7.24) e $T''_3\ =\ 24\,x$ (7.25). Temos $(1 - x^2)\,y''\ -\ xy'\ + 9\,y \rightarrow$
$(1 - x^2)\,T_3{}''\ -\ xT_3{}'\ + 9\,T_3 \rightarrow (1 - x^2)\,(24\,x)\ -\ x(12\,x^2 - 3)\ + 9\,(\,4\,x^3 - 3\,x)$
$\rightarrow$ 24x - 24x^3 -12x^3 + 3x +36x^3 -27x =0

In[ ]:=
```
(*T3*)
ChebyshevT[3, x]
```
polinômios de Chebysl

Out[ ]= $-3\,x + 4\,x^3$

7.c)

Provando que a Eq.(7.1) tem como solução a Eq.(7.15) . Para isso, devemos calcular as derivadas de $T_n\,(x)$, sendo elas:
$T'_n\,(x) = \frac{n\sin(n\cos^{-1}(x))}{\sqrt{1-x^2}}$ (7.26) e $T''_n\,(x) = -\frac{n^2\cos(n\cos^{-1}(x))}{1-x^2} + \frac{nx\sin(n\cos^{-1}(x))}{(1-x^2)^{3/2}}$(7.27)
Substituiremos as derivadas na EDO, temos:
$(1 - x^2)\,T_n{}''\ -\ xT_n{}'\ + n^2T_n\ =$
$(1 - x^2)\left(-\frac{n^2\cos(n\cos^{-1}(x))}{1-x^2} + \frac{nx\sin(n\cos^{-1}(x))}{(1-x^2)^{3/2}}\right) - x\,\frac{n\sin(n\cos^{-1}(x))}{\sqrt{1-x^2}} + n^2\cos\left(n\cos^{-1}(x)\right)\ =$
$-n^2\cos\left(n\cos^{-1}(x)\right)\ + \frac{xn\sin(n\cos^{-1}(x))}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{xn\sin(n\cos^{-1}(x))}{\sqrt{1-x^2}} + n^2\cos\left(n\cos^{-1}(x)\right)\ = 0$

7.d)

Mostrando que o $\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta$ (7.28), com base nas propriedades da Eq.(7.18) e Eq.(7.19) :
$\cos(n\theta +\ \theta)\ +\ \cos(n\theta - \theta) =$
$\cos(n\theta)\cos\theta -\ \text{sen}(n\theta)\,\text{sen}\theta + \cos(n\theta)\cos\theta\ + \text{sen}(n\theta)\,\text{sen}\theta = 2\cos(n\theta)\cos\theta$
Usarei as considerações acima para chegar na expressão
$T_{n+1}(x)\ =\ 2\,xT_n(x) - T_{n-1}(x)$(7.29). Para isso devo levar em consideração:

$T_{n+1}(\cos\theta) = \cos(n+1)\,\theta$ (7.30) e $T_{n-1}(\cos\theta) = \cos(n-1)\,\theta$ (7.31). Substituindo, temos:

$\cos(n+1)\,\theta + \cos(n-1)\,\theta = 2\cos(\mathrm{n}\theta)\cos\theta$

$T_{n+1}(\cos\theta) + T_{n-1}(\cos\theta) = 2\cos\theta\, T_n(\cos\theta)$ (7.32), fazendo a substituição de variável, temos:

$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2\,\mathrm{x}\mathrm{T}_n(x) \Leftrightarrow T_{n+1}(x) = 2\,\mathrm{x}\mathrm{T}_n(x) - T_{n-1}(x)$ (7.33)

Usando essas relações podemos obter T_3 a partir de T_1 e T_2, obtidas nas Eq.(7.7) e Eq.(7.14) .

$T_3\,(x) = 2\,x\,T_2\,(x) - T_1(x) = 2\,x(2\,\mathrm{x}^2 - 1) - x = 4\,\mathrm{x}^3 - 3\,x$