Lista V - Física Matemática 1

Lyliana Myllena Santos de Sousa - 11223740
Lyliana.Sousa@usp.br

1.a)

Mostrarei que existe uma solução para a equação $i\hbar \frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\,\psi$, na forma de $\psi(t) = e^{-\mathrm{iEt}/\hbar}\,\phi$, para E uma constante indeterminada e ϕ m vetos indeterminado. Onde isso só será verdade se $\hat{H}\ \phi\ =\ E\,\phi$. Assim, $\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\mathrm{iE}/\,\hbar\, e^{-\mathrm{iEt}/\hbar}\,\phi$, substituindo a Eq. na Eq. tenho:

$\hat{H}\,\psi\ =\ \hat{H}\,e^{-\mathrm{iEt}/\hbar}\,\phi = i\,\hbar\,\frac{\partial\psi}{\partial t} =\ E\,e^{-\mathrm{iEt}/\hbar}\,\phi \Leftrightarrow \hat{H}\,\phi\ =\ E\,\phi$

1.b)

Para N = 5, $\phi\ =\ (\phi_1,\ \ \ldots,\ \ \phi_N)$, $\phi_{N+1} = \phi_1$ e $\phi_N = \phi_0$. Mostrarei que a partir da Eq. chagarei na equação de recorrência $\epsilon\phi_n - g\,\phi_{n-1} - g\,\phi_{n+1} = E\,\phi_n$. Para $\hat{H}\ = \begin{pmatrix} \epsilon & -g & 0 & 0 & -g \\ -g & \epsilon & -g & 0 & 0 \\ 0 & -g & \epsilon & -g & 0 \\ 0 & 0 & -g & \epsilon & -g \\ -g & 0 & 0 & -g & \epsilon \end{pmatrix}$,

assim:

$\hat{H}\ \phi = \begin{pmatrix} \epsilon & -g & 0 & 0 & -g \\ -g & \epsilon & -g & 0 & 0 \\ 0 & -g & \epsilon & -g & 0 \\ 0 & 0 & -g & \epsilon & -g \\ -g & 0 & 0 & -g & \epsilon \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon\phi_1 & -\mathrm{g}\phi_2 & -g\,\phi_5 \\ -g\,\phi_1 & +\epsilon\phi_2 & -g\,\phi_3 \\ -g\,\phi_2 & +\epsilon\,\phi_3 & -g\,\phi_4 \\ -g\,\phi_3 & +\epsilon\,\phi_4 & -g\,\phi_5 \\ -g\,\phi_1 & -g\,\phi_4 & +\epsilon\,\phi_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{E}\phi_1 \\ \mathrm{E}\phi_2 \\ \mathrm{E}\phi_3 \\ \mathrm{E}\phi_4 \\ \mathrm{E}\phi_5 \end{pmatrix}$. Se você observar com atenção essa matriz, você verá que equação de recorrência já está aparente, por exemplo quando observamos a primeira linha: $\mathrm{E}\phi_1\ =\ \epsilon\phi_1\ \ -\mathrm{g}\phi_2\ \ -g\,\phi_5$

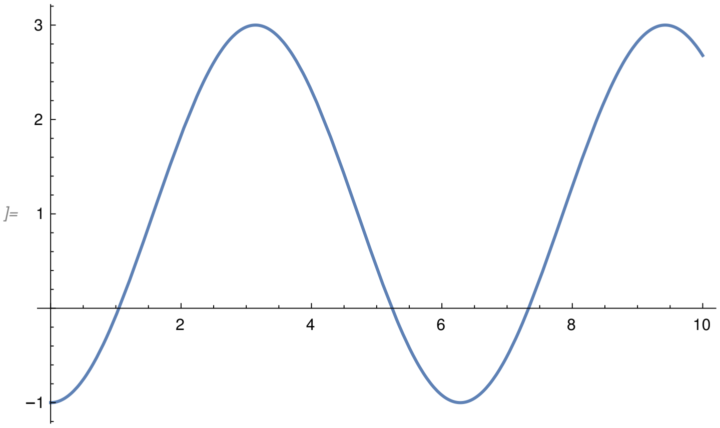
1.c)

Agora, vou supor que uma solução para $E\,\phi_n\ =\ \epsilon\phi_n - g\,\phi_{n-1} - g\,\phi_{n+1}$ e da forma $\phi_n =\ A\,e^{\mathrm{ikn}}$, para k e A constantes indeterminadas. Vou provar a seguir que $E\ =\ \epsilon - 2\,g\cos(k)$:

$E\,\phi_n\ =\ \epsilon\phi_n - g\,\phi_{n-1} - g\,\phi_{n+1} \Rightarrow E\,A\,e^{\mathrm{ikn}}\ =\ \epsilon\,A\,e^{\mathrm{ikn}} - g\,A\,e^{\mathrm{ikn}}\,A\,e^{-\mathrm{ik}} - g\,A\,e^{\mathrm{ikn}}\,A\,e^{\mathrm{ik}} \Rightarrow$

$E\ =\ \epsilon\ - g\left(e^{-\mathrm{ik}} +\ e^{\mathrm{ik}}\right) \Rightarrow E\ =\ \epsilon\ - 2\,g\cos(k).$

In[ ]:=
```
(*Vou supor que ϵ = 1, g = 1 *)
Plot[1 - 2 Cos[k], {k, 0, 10}]
```
gráfico cosseno

Out[ ]=


In[ ]:=
```
(*Dando zoom*)
Plot[1 - 2 Cos[k], {k, 0, 0.5}]
```
gráfico cosseno

Out[ ]= **λλλλΩΩΩ**

Para k pequeno, temos que a expansão do cosseno e $\cos(k) = 1 - \frac{k^2}{2} + \ldots$, que expandimos até segunda ordem porque queremos relacioná-la com a relação de dispersão, onde pela equação de borh temos que $p = \hbar k$ e $E' = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$. Comparando E e E', tenho que $E = \epsilon - 2g + g k^2$, que desconsiderando a parte constante, temos que: $E' = E = g k^2 = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \Leftrightarrow g = \frac{\hbar^2}{2m} \Leftrightarrow m = \frac{\hbar^2}{2g}$

1.d)

Aplicando a solução $\phi_n = A e^{ikn}$ na equação $\phi_{N+1} = \phi_1$, temos que: $\phi_{N+1} = \phi_1 \Leftrightarrow A e^{ikN} e^{ik} = A e^{ik} \Leftrightarrow$ $e^{ikN} = 1 \Leftrightarrow kN = 2\pi l \Leftrightarrow k = \frac{2\pi l}{N}$, para l = 0, 1, 2, ..., N-1, se l fosse até N, teríamos N+1 vetores e o mesmo valor de l para N e 1.

Considerando que os vetores ϕ_l podem ser normalizados $|\phi_l|^2 = 1$. Temos então que, para $\phi_j = A e^{ikj}$:

$$|\phi| = \sum_{j=1}^{N} \phi_j \phi_j^* = \sum_{j=1}^{N} |\phi_j|^2 = \sum_{j=1}^{N} |A|^2 = |A|^2 N = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{\sqrt{N}}$$

3.a)

Usarei o método da serie de potencias, que consiste em uma solução do formato de $y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$, para encontrar a solução das EDOs a seguir : $y'' + y = 0$

$\to y'(x) = \sum_{j=1}^{\infty} j\, a_j x^{j-1}$

$\rightarrow y''(x) = \sum_{j=2}^{\infty} j\,(j-1)\,a_j\,x^{j-2} = \sum_{j=0}^{\infty} (j+2)\,(j+1)\,a_{j+2}\,x^j$

$y'' + y = \sum_{j=0}^{\infty} (j+2)\,(j+1)\,a_{j+2}\,x^j + \sum_{j=1}^{\infty} j\,a_j\,x^{j-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \{(j+2)\,(j+1)\,a_{j+2} + a_j\}\,x^j = 0$. Isso implica que $(j+2)\,(j+1)\,a_{j+2} + a_j{}^j$ deve ser igual a zero. O que nos leva a relação de recorrência:

$a_{j+2} = -\frac{a_j}{(j+2)\,(j+1)}$.

Analisando a relação temos que:

$\rightarrow$ Para j = 0: $a_2 = -\frac{a_0}{2*1}$

$\rightarrow$ Para j = 1: $a_3 = -\frac{a_1}{3*2}$

$\rightarrow$ Para j = 2: $a_4 = -\frac{a_2}{4*3} = \frac{a_0}{4*3*2*1}$

$\rightarrow$ Para j = 3: $a_5 = -\frac{a_3}{5*4} = \frac{a_1}{5*4*3*2}$

Portanto, para $a_{2j} = \frac{(-1)^j a_0}{(2j)!}$ e $a_{2j+1} = \frac{(-1)^j a_1}{(2j+1)!}$ e a nossa será a soma de duas soluções:

$y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^j a_0}{(2j)!} x^{2j} + \frac{(-1)^j a_1}{(2j+1)!} x^{2j+1} \right\}$

3.b)

Usaremos o mesmo principio para a EDO $xy' - y = x^2$

$xy' - y = x^2 \Leftrightarrow x \sum_{j=0}^{\infty} j\,a_j\,x^{j-1} - \sum_{j=0}^{\infty} a_j\,x^j = x^2 \Leftrightarrow \sum_{j=0}^{\infty} \{j\,a_j - a_j\}\,x^j = x^2$

Para j=0: $j\,a_j - a_j = 0 \Rightarrow a_0 = 0$

Para j=1: $j\,a_j - a_j = a_1 - a_1 = 0 \Rightarrow a_j = c_1 =$ constante qualquer

Para j=2: $j\,a_j - a_j = 2\,a_2 - a_2 = 1 \Rightarrow a_2 = 1$

Para j>2: $j\,a_j - a_j = 0 \Rightarrow a_j = 0$

Assim, nossa solução será: $y(x) = c_1\,x + x^2$

4.a)

Usarei a regra de Leibniz, $\frac{d^n}{dx^n}(u.v) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (\partial_x{}^j u)(\partial_x{}^{n-j} v)$ para $\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!\,(n-j)!}$, para chegar na forma polinomial do polinómio de Laguerre $L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$. Para isso, terei:

$\rightarrow \partial_x{}^j x^n = \frac{n!}{j!} x^j$

$\rightarrow \partial_x{}^{n-j} e^{-x} = (-1)^j e^{-x}$

$\rightarrow \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{n!}{j!} x^j (-1)^j e^{-x}$

Assim, tenho que: $L_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{(-x)^j}{j!}$

4.c)

Vou demonstrar agora uma nova forma de escrever a formula de Rodrigues $L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$.
Para isso, utilizarei o operador $D = \frac{d}{dx}$ e $y = e^{-x}$. Assim:
$\to D^n(ye^{-x}) = D^{n-1}[-ye^{-x} + e^{-x} Dy] = D^{n-1}[e^{-x}(D-1)y] = D^{n-2}[e^{-x}(D-1)^2 y]$
Portanto, $L_n(x) = \frac{1}{n!}\left(\frac{d}{dx} - 1\right)^n x^n$

4.d)

Agora, vou mostrar que $\frac{d}{dx} L_n(x) = \frac{1}{n!}\left(\frac{d}{dx} - 1\right) L_{n-1}$. Para isso usarei que
$D(D-1)^n = D(D-1)(D-1)^{n-1} = (D^2 - D)(D-1)^{n-1}$. Portanto,
$\frac{d}{dx} L_n(x) = \frac{1}{n!} D(D-1)^n x^n = \frac{1}{n!} D^2(D-1)^{n-1} x^n - \frac{1}{n!} D(D-1)^{n-1} x^n =$
$\frac{1}{(n-1)!} D(D-1)^{n-1} x^{n-1} - \frac{1}{(n-1)!}(D-1)^{n-1} x^{n-1} = DL_{n-1} - L_{n-1}$.
Assim, $\frac{d}{dx} L_n(x) = \frac{1}{n!}\left(\frac{d}{dx} - 1\right) L_{n-1}$

5.a)

Mostrando que $\int_0^\infty e^{-x} x^m L_n \, dx = 0$, para m<n. Tenho

que:
$\int_0^\infty e^{-x} x^m L_n \, dx = \int_0^\infty \frac{1}{n!} x^m \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}) \, dx = (-1)^n \frac{m!}{n!} \int_0^\infty \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}(x^m e^{-x})$.
Vou fazer uma integração por partes, onde: $\int u \, dv = uv - \int v \, du$ para u = 1, dv = $\frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}(x^m e^{-x})$, du = 0,
$v = \frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}}(x^m e^{-x})$. Assim, usando a regra de Leibniz, tenho:
$\int_0^\infty e^{-x} x^m L_n \, dx = \frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}}(x^m e^{-x}) \Big|_0^\infty = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (\partial_x{}^j x^m)(\partial_x{}^{n-j} e^{-x}) \Big|_0^\infty =$
$\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{n!}{j!} x^{m-j} (-1)^j e^{-x} \Big|_0^\infty = 0$

5.b)

Agora para m = n, faço:
$\int_0^\infty e^{-x} x^n L_n \, dx = (-1)^n \int_0^\infty \frac{d^{n-n}}{dx^{n-n}}(x^n e^{-x}) = (-1)^n \int_0^\infty (x^n e^{-x}) = (-1)^n n!$

5.c)

Sabemos que para m<n: $\int_0^\infty e^{-x} x^m L_n \, dx = 0$. Para m=n: $\int_0^\infty e^{-x} x^n L_n \, dx = (-1)^n n!$.
Analisando a situação onde j<m<n, onde eu chamo $L_m = \sum_{j=0}^m a_j x^j$, tenho que:

$\int_0^\infty e^{-x} L_n L_m dx = \sum_{j=0}^m a_j \int_0^\infty e^{-x} x^j L_n dx = 0$

Analisando a situação j≤m=n, tenho que devido ao resultado anterior, só sobrará o enésimo termo na nossa somatória.

$\int_0^\infty e^{-x} L_n L_n dx = \sum_{j=0}^n a_j \int_0^\infty e^{-x} x^j L_n dx = a_n \int_0^\infty e^{-x} x^n L_n dx$

Dá questão 4.a tiramos que $L_n(x) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{(-1)^j}{j!} (x)^j \to a_j = \binom{n}{j} \frac{(-1)^j}{j!}$. Portanto, $a_n = \frac{(-1)^n}{n!}$. Assim, usando o resultado do item5.b, temos que:

$\int_0^\infty e^{-x} L_n L_n dx = (-1)^{2n}$. Ou seja,

$\int_0^\infty e^{-x} L_n L_n dx = \delta_{\mathrm{nm}}$