Lista I - Física Matemática 1

Lyliana Myllena Santos de Sousa - 11223740
Lyliana.Sousa@usp.br

1.a)

Mostraremos que a soma das funções periódicas f_1 e f_2 de períodos L_1 e L_2 é uma função periódica de período mL_1, onde $mL_1 = nL_2$, a partir dos três propriedades das funções periódicas a seguir:
→ $f(x+T) = f(x)$, sendo T = nL, onde T é o período multiplicado por um número inteiro.
→ Sendo f_1 e f_2 duas funções periódicas de mesmo período, temos que:
$f_1(x+L) + f_2(x+L) = [f_1 + f_2](x+L) = [f_1 + f_2](x) = f_1(x) + f_2(x)$
→ Com o item acima, podemos observar que a soma de funções periódicas com um mesmo múltiplo de período, nos dará uma função periódica de período igual ao múltiplo de período. Ou seja,
$f_1(x+L_1) + f_2(x+L_2) = f_1(x+mL_1) + f_2(x+nL_2) = f_1(x+T) + f_2(x+T) = [f_1+f_2](x+T) =$
$[f_1+f_2](x)$, sendo $T = mL_1$ o período da função soma.

1.b)

Sendo $f(x)$ uma função periódica de período L, ela pode ser escrita como uma série de Fourier Complexa.
$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{\frac{i2\pi nx}{L}}$ (1.1), supondo que a nossa função converge. Integraremos ela de 0 à L.
$\int_0^L f(x)\,dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \int_0^L e^{\frac{i2\pi nx}{L}}\,dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \frac{i2\pi n}{L} \int_0^{i2\pi n} e^u\,du = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \frac{i2\pi n}{L} e^u \Big|_0^{i2\pi n} =$
$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \frac{i2\pi n}{L}[e^{i2\pi n} - 1] \Longleftrightarrow \int_0^L f(x)\,dx = 0$ (1.2)
Lembrando que $a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,dx$ (1.3), temos então que $a_0 = 0$. Sendo $c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$ (1.4), e lembrando que b_0 é sempre 0, temos que $c_0 = \frac{1}{2}a_0 = 0$. Com isso, temos que c_0 e a_0, que são os nossos coeficientes de Fourier são zeros. Disso eu tiro que a área de $f(x)$ é nula quando seu coeficiente linear é nulo, ou vice versa.
Se somarmos uma constante a uma função linear, ela continuará sendo uma função linear, só estará translada, porém se integrarmos essa função translada no período, teremos que:
$\bar{f}(x) = f(x) + \text{cte}$; $\int_0^L \bar{f}(x)\,dx = \int_0^L f(x)\,dx + \int_0^L \text{cte}\,dx = \text{cte}*L$, ou seja essa função não será mais periódica.

1.c)

Sendo f e g duas funções periódicas de mesmo período. Podemos escrever ambas funções como uma série de Fourier da forma complexa, com isso temos:

f(x-y) = $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{\frac{i2\pi n}{L}(x-y)}$ (2.1) e g(x) = $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \bar{c}_n e^{\frac{i2\pi n y}{L}}$ (2.2)

A partir das relações a cima, obteremos a convolução das funções:

f(x-y)g(x)= $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{\frac{i2\pi n}{L}(x-y)} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \bar{c}_n e^{\frac{i2\pi n y}{L}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \bar{c}_n e^{\frac{i2\pi n x}{L}}$ (2.3), lembrando que c_n e $\bar{c}_n$ é um valor que só depende de n.

$\int_0^L f(x-y)\, g(x)\, dy = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \bar{c}_n e^{\frac{i2\pi n x}{L}} \int_0^L dy = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \bar{c}_n e^{\frac{i2\pi n x}{L}} L$ (2.4)

$\frac{1}{L}\int_0^L f(x-y)\, g(x)\, dy = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \bar{c}_n e^{\frac{i2\pi n x}{L}}$ (2.5)

Ao final, observamos que a convolução possui uma formato de série de Fourier, sendo assim periódica no período L.

2.a)

Calcularemos a série de Fourier de f(x)=Cos(αx) para ser periódica por partes em [-π,π], com um período L =2π,para α um número real, no final dessa célula podemos observar alguns exemplos dessas funções de plot f(x) para diferentes tipos de α.

$f(x)= \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n \text{Cos}(\frac{2\pi n}{L} x) + b_n \text{Sin}(\frac{2\pi n}{L} x)\}$ (2.1), sendo os seus coeficientes:

$a_0= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\, dx$ (2.2) ; $a_n= \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \text{Cos}(\frac{2\pi n}{L} x)\, dx$ (2.3); $b_n= \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \text{Sin}(\frac{2\pi n}{L} x)\, dx$ (2.4);

Considerando que L = 2π e sendo o nosso intervalo [-π,π],temos:

$f(x)= \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n \text{Cos(nx)} + b_n \text{Sin(nx)}\}$ (2.5)

$a_0= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$; $a_n= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \text{Cos(nx)}\, dx$; $b_n= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \text{Sin(nx)}\, dx$;

Começarei calculando o a_0 :

$a_0= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \text{Cos}(x)\, dx = \frac{1}{\alpha\pi}[\text{Sin}(\alpha\pi) - \text{Sin}(-\alpha\pi)] \implies a_0 = \frac{2}{\alpha\pi}\text{Sin}(\alpha\pi)$ (2.6)

Antes de calcularmos $\{a_n, b_n\}$ devemos observar a paridade da função f(x). Cos(αx) é uma função par, então sua série de Fourier deve ser formada por uma somatória se funções pares (uma série de cossenos), com isso já conseguimos observar de imediato que $b_n = 0$ (2.7)

Calculando a_n:

$a_n= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \text{Cos(nx)}\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \text{Cos}(\alpha x) \text{Cos(nx)}\, dx$

Pela propriedade trigonométrica, a seguir : Cos(αx)Cos(nx) = $\frac{1}{2}$[Cos(αx + nx) + Cos(αx − nx)]

$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \text{Cos}([\alpha - n]\, x)\, dx + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \text{Cos}([\alpha + n]\, x)\, dx$, fazendo um substituição, temos:

$a_n = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{[\alpha-n]}\int_{-\pi[\alpha-n]}^{\pi[\alpha-n]} \text{Cos}(u)\, du + \frac{1}{[\alpha+n]}\int_{-\pi[\alpha+n]}^{\pi[\alpha+n]} \text{Cos}(t)\, dt\right]$

$a_n = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{2}{[\alpha-n]}\text{Sin}(\pi[\alpha - n]) + \frac{2}{[\alpha+n]}\text{Sin}(\pi[\alpha + n])\right] = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{[\alpha-n]}\text{Sin}(\pi[\alpha - n]) + \frac{1}{[\alpha+n]}\text{Sin}(\pi[\alpha + n])\right]$ (2.8)

Para simplificar o a_n utilizaremos as seguintes considerações:

- Sendo n um numero inteiro, então: Sin(nπ)=0 e Cos(nπ)=$(-1)^n$

- Pela propriedade trigonométrica Sin(A + B) = Sin(A)Cos(B) + Cos(A)Sin(B), teremos que: $\text{Sin}(\pi[\alpha-n])=\text{Sin}(\pi[\alpha+n])=\text{Sin}(\alpha\pi)(-1)^n$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{[\alpha-n]}\text{Sin}(\pi[\alpha-n]) + \frac{1}{[\alpha+n]}\text{Sin}(\pi[\alpha+n])\right] = \frac{1}{\pi}\left[\frac{2\,\alpha\,\text{Sin}(\alpha\pi)\,(-1)^n}{\alpha^2-n^2}\right] = \frac{\text{Sin}(\alpha\pi)}{\pi}\left[\frac{2\,\alpha(-1)^n}{\alpha^2-n^2}\right] \Longrightarrow$$

$$a_n = \frac{\text{Sin}(\alpha\pi)}{\pi}\left[\frac{2\,\alpha(-1)^n}{\alpha^2-n^2}\right] \quad (2.9)$$

Observação: Para entendermos o que acontece quando α = n ou α = -n, usaremos um dos limites fundamentais do calculo: $\text{Limit}\left[\frac{\text{Sin}(\omega x)}{x},\ \omega x \to 0\right] = \omega$ na Eq.(2.8) com isso chegaremos que

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\pi + \frac{\text{Sin}(2\,\pi\alpha)}{2\,\alpha}\right] \quad (2.10)$$

Com isso teremos a série de Fourier para $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{\text{Sin}(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Sin}(\alpha\pi)}{\pi}\left[\frac{2\,\alpha(-1)^n}{\alpha^2-n^2}\right]\text{Cos}(nx) = \frac{\text{Sin}(\alpha\pi)}{\pi}\left[\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2\,\alpha(-1)^n}{\alpha^2-n^2}\right]\text{Cos}(nx)\right] \quad (2.11)$$

Agora analisaremos nossa série de Fourier para $\alpha \in \mathbb{Z}$:

- Começarei com $\alpha = 0$. Para $\alpha = 0$ observamos pelo limite fundamental que $a_0 = 2$ e $a_n = b_n = 0$. Com isso $f(x)=1$, o que faz sentindo já que Cos(0) = 1.

- Para $\alpha \in \mathbb{Z}^*$, devemos lembrar que para $n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$ Sin(nx)=0. Com isso $a_0 = b_n = 0$. Agora devemos analisar o a_n para α = n e $\alpha \neq$ n:

→Para α = n, temos a Eq. (2.10) sendo que o $\text{Sin}(2\pi\alpha) = 0$, com isso $a_n = 1$.

→Para $\alpha \neq$ n, temos que $a_n = \frac{\text{Sin}(\alpha\pi)}{\pi}\left[\frac{2\,\alpha(-1)^n}{\alpha^2-n^2}\right] = 0$

Com as informações acima temos que a somatória dos cossenos será diferente de zero apenas quando α = n. Com isso

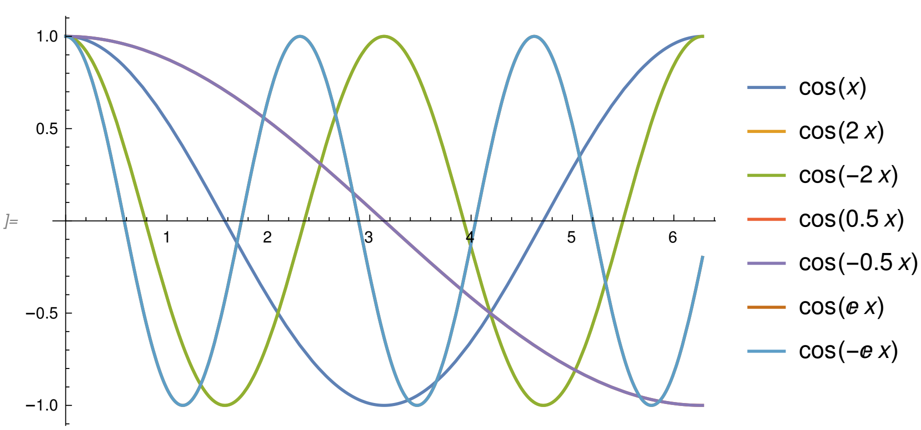
$$f(x) = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Sin}(\alpha\pi)}{\pi}\left[\frac{2\,\alpha(-1)^n}{\alpha^2-n^2}\right]\text{Cos}(nx) = \text{Cos}(\alpha x)$$

```
(*Observaremos abaixo alguns exemplos de plots para diferentes valores de α*)
Plot[{Cos[x], Cos[2 x], Cos[-2 x], Cos[0.5 * x], Cos[-0.5 * x], Cos[ⅇ * x], Cos[-ⅇ * x]},
 {x, 0, 2 Pi}, PlotLegends → "Expressions"]
```

gráfico cosseno cosseno cosseno cosseno cosseno cosseno cosseno

n··· legenda do gráfico

Out[ ]=

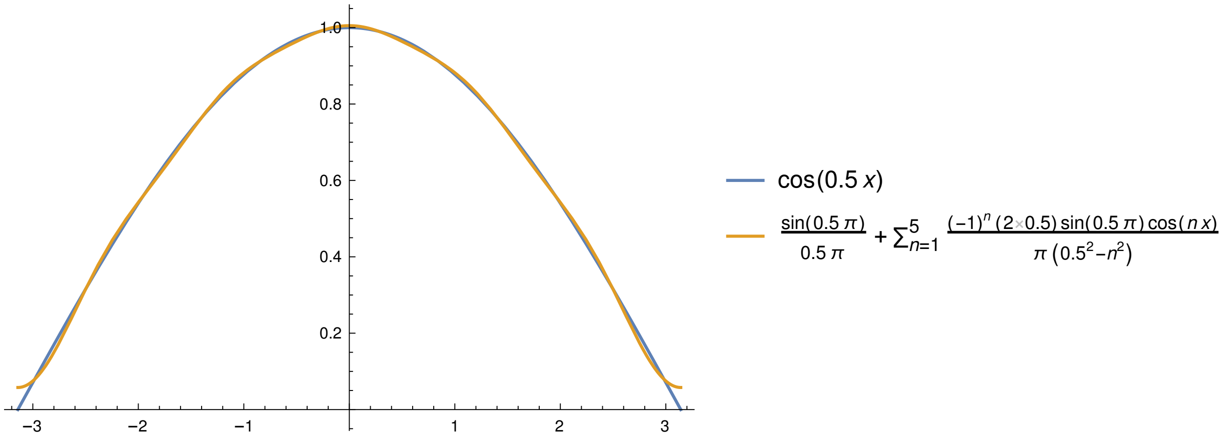


In[256]:=

```
Plot[{Cos[0.5 x], Sin[0.5 π]/(0.5 π) + Sum[(-1)^n/π * (2 * 0.5)/(0.5^2 - n^2) * Sin[0.5 π] * Cos[n x], {n, 1, 5}]},
 {x, -π, π}, PlotLegends → "Expressions"]
```

gráfico cosseno soma seno cosseno legenda do gráfico

Out[256]=

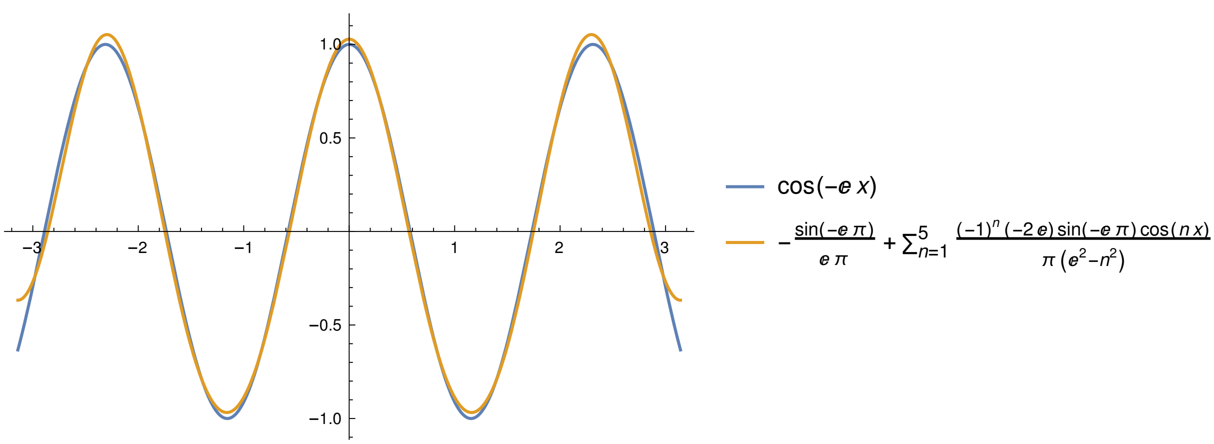


In[255]:=

```
Plot[{Cos[-e x], Sin[-e π]/(-e π) + Sum[(-1)^n/π * (-2 e)/(e^2 - n^2) * Sin[-e π] * Cos[n x], {n, 1, 5}]},
 {x, -π, π}, PlotLegends → "Expressions"]
```

gráfico cosseno soma seno cosseno legenda do gráfico

Out[255]=



2.b)

A relação trigonométrica $\text{Cot}(x) = \frac{\text{Cos}(x)}{\text{Sin}(x)}$. A Eq.(2.11) para $x = \pi$, nos dará:

$$f(x) = \frac{\text{Sin}(\alpha\pi)}{\pi}\left[\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2\,\alpha(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}\right]\text{Cos}(nx)\right] \implies \text{Cos}(\alpha\pi) = \frac{\text{Sin}(\alpha\pi)}{\pi}\left[\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2\,\alpha(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}\right]\text{Cos}(\pi\,n)\right]$$

$\Longrightarrow$ $\text{Cos}(\alpha\pi) = \frac{\text{Sin}(\alpha\pi)}{\pi}\left[\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2\,\alpha(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}\right](-1)^n\right]$ $\Longrightarrow$ $\text{Cos}(\alpha\pi) = \frac{\text{Sin}(\alpha\pi)}{\pi}\left[\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2\,\alpha(-1)^{2n}}{\alpha^2 - n^2}\right]\right]$ $\Longrightarrow$

$\frac{\text{Cos}(\alpha\pi)}{\text{Sin}(\alpha\pi)} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2\,\alpha}{\alpha^2 - n^2}\right]\right]$

$\text{Cot}(\alpha x) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2\,\alpha}{\alpha^2 - n^2}\right]\right]$

3.a)

Sendo $f(x)$ uma função periódica com período L. Teremos que a sua série e coeficiente de Fourier terão o seguinte formato:

$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n \text{Cos}\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) + b_n \text{Sin}\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)\right\}$ (3.1), sendo os seus coeficientes:

$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,dx$ (3.2) ; $a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\text{Cos}\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)dx$ (3.3); $b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\text{Sin}\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)dx$ (3.4);

Sendo $g(x) = f(x+\alpha)$,com $\alpha \in \mathbb{R}$, sua serie e coeficiente de fourier serão:

$g(x) = \frac{\bar{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\bar{a}_n \text{Cos}\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) + \bar{b}_n \text{Sin}\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)\right\}$ (3.5), sendo os seus coeficientes:

$\bar{a}_0 = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\,dx$ (3.6) ; $\bar{a}_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\text{Cos}\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)dx$ (3.7); $\bar{b}_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\text{Sin}\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)dx$ (3.8);

Agora encontrarei os coeficientes de Fourier da $g(x)$ em função dos coeficientes de $f(x)$;

→ Para encontrarmos o a_0, primeiro trocaremos a função $g(x)$ por uma relação de $f(x)$, depois faremos uma mudança de variável na integral (y = x + α ⇒ dy = dx). Isso mudará os nossos limites de integração, no entanto, como $g(x)$ é uma função periódica (ela é a função $f(x)$ com uma “fase”), podemos transladar o seu intervalo de integração.

$\bar{a}_0 = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\,dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x+\alpha)\,dx = \frac{2}{L}\int_\alpha^{L+\alpha} g(y)\,dy = \frac{2}{L}\int_0^L g(y)\,dy = a_0$

Portanto $\bar{a}_0 = a_0$ (3.9)

→ Para encontrarmos o a_n , seguiremos o mesmo passo do a_0 até chegarmos na mudança de variável. Neste ponto usaremos a relação trigonométrica a seguir:

$\text{Cos}\left(\frac{2\pi n}{L}y - \frac{2\pi n}{L}\alpha\right) = \text{Cos}\left(\frac{2\pi n}{L}y\right)\text{Cos}\left(\frac{2\pi n}{L}\alpha\right) + \text{Sin}\left(\frac{2\pi n}{L}y\right)\text{Sin}\left(\frac{2\pi n}{L}\alpha\right)$ (3.10)

Após mudarmos a relação trigonométrica, tiraremos as constantes da integral e, como já foi citado anteriormente, transladaremos o intervalo de integração.

$\bar{a}_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\text{Cos}\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x+\alpha)\text{Cos}\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)dx = \frac{2}{L}\int_\alpha^{L+\alpha} f(y)\text{Cos}\left(\frac{2\pi n}{L}(y-\alpha)\right)dy =$
$\frac{2}{L}\text{Cos}\left(\frac{2\pi n}{L}\alpha\right)\int_\alpha^{L+\alpha} f(y)\text{Cos}\left(\frac{2\pi n}{L}y\right)dy + \frac{2}{L}\text{Sin}\left(\frac{2\pi n}{L}\alpha\right)\int_\alpha^{L+\alpha} f(y)\text{Sin}\left(\frac{2\pi n}{L}y\right)dy =$
$\frac{2}{L}\text{Cos}\left(\frac{2\pi n}{L}\alpha\right)\int_0^{L} f(y)\text{Cos}\left(\frac{2\pi n}{L}y\right)dy + \frac{2}{L}\text{Sin}\left(\frac{2\pi n}{L}\alpha\right)\int_0^{L} f(y)\text{Sin}\left(\frac{2\pi n}{L}y\right)dy$

Portanto, $\bar{a}_n = a_n \text{Cos}\left(\frac{2\pi n}{L}\alpha\right) + b_n \text{Sin}\left(\frac{2\pi n}{L}\alpha\right)$ (3.11)

→ Para encontrarmos o b_n, seguiremos os mesmo passos do a_n, com uma diferença apenas na relação trigonométrica que usaremos, que será:

$\text{Sin}\left(\frac{2\pi n}{L}y - \frac{2\pi n}{L}\alpha\right) = \text{Sin}\left(\frac{2\pi n}{L}y\right)\text{Cos}\left(\frac{2\pi n}{L}\alpha\right) - \text{Cos}\left(\frac{2\pi n}{L}y\right)\text{Sin}\left(\frac{2\pi n}{L}\alpha\right)$ (3.12)

$\bar{b}_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\text{Sin}\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x+\alpha)\text{Sin}\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)dx = \frac{2}{L}\int_\alpha^{L+\alpha} f(y)\text{Sin}\left(\frac{2\pi n}{L}(y-\alpha)\right)dy =$

$\frac{2}{L}\int_{\alpha}^{L+\alpha} f(y)[\text{Sin}(\frac{2\pi n}{L}y)\text{Cos}(\frac{2\pi n}{L}\alpha) - \text{Cos}(\frac{2\pi n}{L}y)\text{Sin}(\frac{2\pi n}{L}\alpha)]\,dy =$

$\frac{2}{L}\text{Cos}(\frac{2\pi n}{L}\alpha)\int_{\alpha}^{L+\alpha} f(y)\,\text{Sin}(\frac{2\pi n}{L}y) - \frac{2}{L}\text{Sin}(\frac{2\pi n}{L}\alpha)\int_{\alpha}^{L+\alpha} f(y)\,\text{Cos}(\frac{2\pi n}{L}y)]\,dy =$

$\frac{2}{L}\text{Cos}(\frac{2\pi n}{L}\alpha)\int_{0}^{L} f(y)\,\text{Sin}(\frac{2\pi n}{L}y) - \frac{2}{L}\text{Sin}(\frac{2\pi n}{L}\alpha)\int_{0}^{L} f(y)\,\text{Cos}(\frac{2\pi n}{L}y)]\,dy$

Portanto, $\bar{b}_n = \text{Cos}(\frac{2\pi n}{L}\alpha)\,b_n - \text{Sin}(\frac{2\pi n}{L}\alpha)\,a_n$(3.13)

Com isso, terei que serie de Fourier de $g(x)=f(x+\alpha)$:

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\{[a_n\,\text{Cos}(\frac{2\pi n}{L}\alpha) + b_n\,\text{Sin}(\frac{2\pi n}{L}\alpha)]\,\text{Cos}(\frac{2\pi n}{L}x) + [\text{Cos}(\frac{2\pi n}{L}\alpha)\,b_n - \text{Sin}(\frac{2\pi n}{L}\alpha)\,a_n]\,\text{Sin}(\frac{2\pi n}{L}x)\} \quad (3.14)$$

3.b)

Agora realizaremos um processo semelhante ao do item 3.a), onde $g(x)=f(x)+\beta$.

$g(x)=\frac{\bar{a}_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\bar{a}_n\,\text{Cos}(\frac{2\pi n}{L}x) + \bar{b}_n\,\text{Sin}(\frac{2\pi n}{L}x)\right\}$

→ Para encontrarmos o a_0, foi bem simples, apenas realizemos usei a propriedade distributiva e fiz uma substituição.

$\bar{a}_0 = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\,dx = \frac{2}{L}\int_0^L (f(x)+\beta)\,dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,dx + \frac{2}{L}\int_0^L \beta\,dx$

Portanto, $\bar{a}_0 = a_0 + 2\beta$ (3.15)

→ Para encontrarmos o a_n faremos o mesmo processo para encontrarmos a_0, até chegarmos na integral $\int_0^L \beta\text{Cos}(\frac{2\pi n}{L}x)\,dx$, onde o seu resultado será $\frac{\beta}{\pi n}\text{Sin}(2\pi n)$, que conforme vimos no exercício 2, será zero.

$\bar{a}_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\,\text{Cos}(\frac{2\pi n}{L}x)\,dx = \frac{2}{L}\int_0^L (f(x)+\beta)\,\text{Cos}(\frac{2\pi n}{L}x)\,dx =$

$\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\text{Cos}(\frac{2\pi n}{L}x)\,dx + \frac{2}{L}\int_0^L \beta\text{Cos}(\frac{2\pi n}{L}x)\,dx = a_n + \frac{2}{L}\frac{\beta L}{2\pi n}\text{Sin}(2\pi n)$

Portanto, $\bar{a}_n = a_n$ (3.16)

→ Para encontrarmos o $b_n$faremos o mesmo processo para encontrarmos a_n, com a diferença que a integral $\int_0^L \beta\text{Sin}(\frac{2\pi n}{L}x)\,dx$ será $\frac{\beta}{\pi n}[\text{Cos}(2\pi n) - 1] = 0$, já que Cos($2\pi$n)=1.

$\bar{b}_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\,\text{Sin}(\frac{2\pi n}{L}x)\,dx = \frac{2}{L}\int_0^L (f(x)+\beta)\,\text{Sin}(\frac{2\pi n}{L}x)\,dx =$

$\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\text{Sin}(\frac{2\pi n}{L}x)\,dx + \frac{2}{L}\int_0^L \beta\text{Sin}(\frac{2\pi n}{L}x)\,dx = b_n - \frac{2}{L}\frac{\beta L}{2\pi n}[\text{Cos}(2\pi n) - 1]$

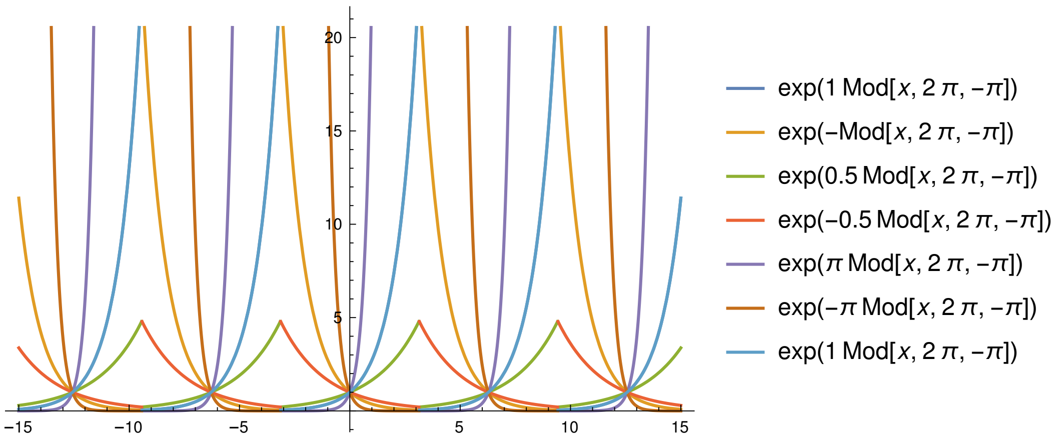
Portanto, $\bar{b}_n = b_n$ (3.17)

4.

Utilizaremos a formulação complexa para calcular a série de Fourier $f(x)=e^{\lambda x}$ definida como periódica por partes no intervalo $[-\pi,\pi]$,ou seja, tem período L= 2π.Abaixo podemos observar o gráfico para diferentes tipos de λ.

```
(*Observaremos abaixo alguns exemplos de plots para diferentes valores de λ,
no primeiro gráfico veremos todos os valores plotados juntos e ao final
 do caderno observaremos eles em separado com sua serie de Fourier*)
                                                     transformada de Fourier discreta
Plot[{Exp[1 * Mod[x, 2 π, -π]], Exp[-1 * Mod[x, 2 π, -π]], Exp[0.5 * Mod[x, 2 π, -π]],
gráfico expo··· operação do módulo  expone··· operação do módulo  exponen··· operação do módulo
  Exp[-0.5 * Mod[x, 2 π, -π]],  Exp[π * Mod[x, 2 π, -π]], Exp[-π * Mod[x, 2 π, -π]],
  exponencial operação do módulo  expon··· operação do módulo  exponen·· operação do módulo
  Exp[1 * Mod[x, 2 π, -π]]}, {x, -15, 15}, PlotLegends → "Expressions"]
  expo··· operação do módulo                legenda do gráfico
```

Out[ ]=



Lembrando que a série de Fourier na forma complexa é dada pela soma:

$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{\frac{i 2 \pi n x}{L}}$ (4.1), sendo $c_n = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) e^{\frac{-i 2 \pi n x}{L}} \, dx$ (4.2), para seguirmos com esse exercício devemos ter em mente que $e^{-i n x} = \text{Cos}(nx) - i\,\text{Sin}(nx)$ (4.3).

Para calcularmos a série de Fourier, primeiro devemos calcular o c_n:

$c_n = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) e^{\frac{i 2 \pi n x}{L}} \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\lambda x} e^{-i n x} \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\lambda x} [\text{Cos}(nx) - i\,\text{Sin}(nx)] \, dx$ (4.4)

Separaremos a integral acima em duas partes, $A = \int_{-\pi}^{\pi} e^{\lambda x} \text{Cos}(nx) \, dx$ e $B = \int_{-\pi}^{\pi} e^{\lambda x} \text{Sin}(nx) \, dx$.

→ Resolveremos a integral A por partes, levando em consideração as seguintes informações: $\text{Cos}(\theta) = \text{Cos}(-\theta)$; $\text{Sin}(\theta) = -\text{Sin}(-\theta)$; $\text{Sin}(n\pi) = 0$ e $\text{Cos}(n\pi) = (-1)^n$ para $n \in \mathbb{Z}$; $\text{Sinh} = \frac{e^{\lambda\pi} - e^{-\lambda\pi}}{2}$; $\int f \, dg = fg - \int g \, df$.

$\int_{-\pi}^{\pi} e^{\lambda x} \text{Cos}(nx) \, dx = \text{Cos}(nx) \frac{e^{\lambda x}}{\lambda} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{\lambda} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\lambda x} \text{Sin}(nx) \, dx =$

$\text{Cos}(nx) \frac{e^{\lambda x}}{\lambda} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{\lambda^2} \text{Sin}(nx) e^{\lambda x} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{n^2}{\lambda^2} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\lambda x} \text{Cos}(nx) \, dx$

$\int_{-\pi}^{\pi} e^{\lambda x} \text{Cos}(nx) \, dx = \text{Cos}(nx) \frac{e^{\lambda x}}{\lambda} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{\lambda^2} \text{Sin}(nx) e^{\lambda x} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{n^2}{\lambda^2} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\lambda x} \text{Cos}(nx) \, dx$

$\left(1 + \frac{n^2}{\lambda^2}\right) \int_{-\pi}^{\pi} e^{\lambda x} \text{Cos}(nx) \, dx = \frac{1}{\lambda^2} \left[e^{\lambda x} (\lambda \text{Cos}(nx) + n \text{Sin}(nx)) \right]_{-\pi}^{\pi} =$

$\int_{-\pi}^{\pi} e^{\lambda x} \text{Cos}(nx) \, dx = \frac{1}{\lambda^2 + n^2} \left[e^{\lambda\pi} (\lambda \text{Cos}(n\pi) + n \text{Sin}(n\pi)) - e^{-\lambda\pi} (\lambda \text{Cos}(-n\pi) + n \text{Sin}(-n\pi)) \right]$

$\int_{-\pi}^{\pi} e^{\lambda x} \text{Cos}(nx) \, dx = \frac{\lambda}{\lambda^2 + n^2} \left[e^{\lambda\pi} (-1)^n - e^{-\lambda\pi} (-1)^n \right] = \frac{2\lambda(-1)^n}{\lambda^2 + n^2} \left[\frac{e^{\lambda\pi} - e^{-\lambda\pi}}{2} \right]$

Portanto, A = $\frac{2\lambda(-1)^n}{\lambda^2+n^2}$ Sinh($\lambda\pi$) (4.5)

→ Resolveremos a integral B da mesma maneira e com as mesmas considerações:

$\int_{-\pi}^{\pi} e^{\lambda x} \text{Sin}(nx)\, dx = \text{Sin}(nx)\,\frac{e^{\lambda x}}{\lambda}\, \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{n}{\lambda}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\lambda x}\text{Cos}(nx)\, dx =$

$\text{Sin}(nx)\,\frac{e^{\lambda x}}{\lambda}\, \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{n}{\lambda^2}\text{Cos}(nx)\, e^{\lambda x}\, \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{n^2}{\lambda^2}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\lambda x}\text{Sin}(nx)\, dx$

$\left(1 + \frac{n^2}{\lambda^2}\right)\int_{-\pi}^{\pi} e^{\lambda x}\text{Sin}(nx)\, dx = \frac{1}{\lambda^2}\left[e^{\lambda x}(\lambda\text{Sin}(nx) - n\text{Cos}(nx))\right]_{-\pi}^{\pi} =$

$\int_{-\pi}^{\pi} e^{\lambda x}\text{Sin}(nx)\, dx = \frac{1}{\lambda^2+n^2}\left[e^{\lambda\pi}(\lambda\text{Sin}(n\pi) - n\text{Cos}(n\pi)) - e^{-\lambda\pi}(\lambda\text{Sin}(-n\pi) - n\text{Cos}(-n\pi))\right]$

$\int_{-\pi}^{\pi} e^{\lambda x}\text{Sin}(nx)\, dx = \frac{n}{\lambda^2+n^2}\left[-e^{\lambda\pi}(-1)^n + e^{-\lambda\pi}(-1)^n\right] = -\frac{2n(-1)^n}{\lambda^2+n^2}\left[\frac{e^{\lambda\pi}-e^{-\lambda\pi}}{2}\right]$

Portanto, B = $\frac{2n(-1)^n}{\lambda^2+n^2}$ Sinh($\lambda\pi$) (4.6)

Sendo c_n dado por $c_n = \frac{1}{2\pi}(A - iB)$, então temos que:

$c_n = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2\lambda(-1)^n}{\lambda^2+n^2}\text{Sinh}(\lambda\pi) - i\,\frac{2n(-1)^n}{\lambda^2+n^2}\text{Sinh}(\lambda\pi)\right) \iff c_n = \frac{(-1)^n\,\text{Sinh}(\lambda\pi)}{\pi(\lambda^2+n^2)}(\lambda - i n)$

Portanto a série de Fourier da função $f(x) = e^{\lambda x}$ será:

$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}^{\infty}\frac{(-1)^n\,\text{Sinh}(\lambda\pi)}{\pi(\lambda^2+n^2)}(\lambda - i n)\, e^{\frac{i2\pi n x}{L}}$

Para calcularmos os coeficientes de (a_n, b_n) da formulação real, devemos levar em consideração algumas coisas vistas em aula, como:

→ $c_n^* = c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + i b_n)$

→ $c_n = \frac{1}{2}(a_n - i b_n)$

→ $c_n + c_n^* = \frac{1}{2}(a_n - i b_n + a_n + i b_n) = a_n$

→ $c_n - c_n^* = \frac{1}{2}(a_n - i b_n - a_n - i b_n) = -i\, b_n$

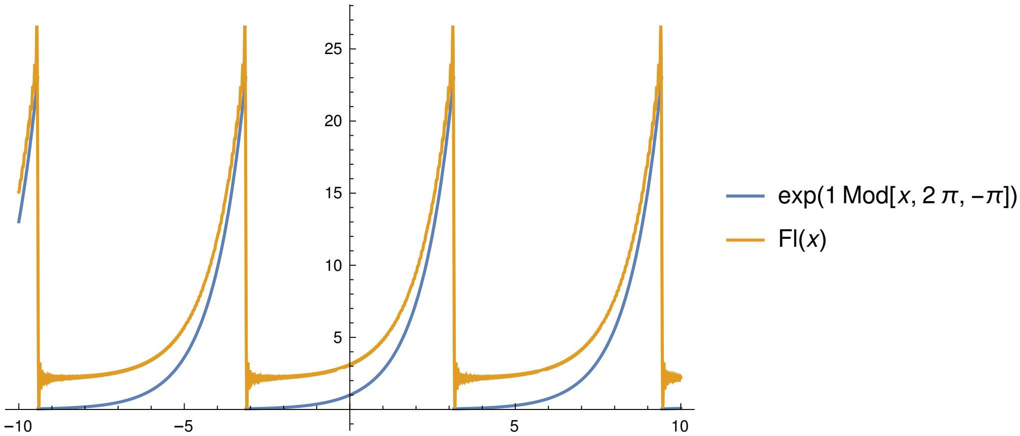
Com isso, seja $c_n^* = \frac{(-1)^n\,\text{Sinh}(\lambda\pi)}{\pi(\lambda^2+n^2)}(\lambda + i n)$, temos que:

$c_n + c_n^* = \frac{(-1)^n\,\text{Sinh}(\lambda\pi)}{\pi(\lambda^2+n^2)}(\lambda - i n + \lambda + i n) = a_n \iff a_n = 2\lambda\,\frac{(-1)^n\,\text{Sinh}(\lambda\pi)}{\pi(\lambda^2+n^2)}$

$c_n - c_n^* = \frac{(-1)^n\,\text{Sinh}(\lambda\pi)}{\pi(\lambda^2+n^2)}(\lambda - i n - \lambda - i n) = -2\, i b_n \iff b_n = -2n\,\frac{(-1)^n\,\text{Sinh}(\lambda\pi)}{\pi(\lambda^2+n^2)}$

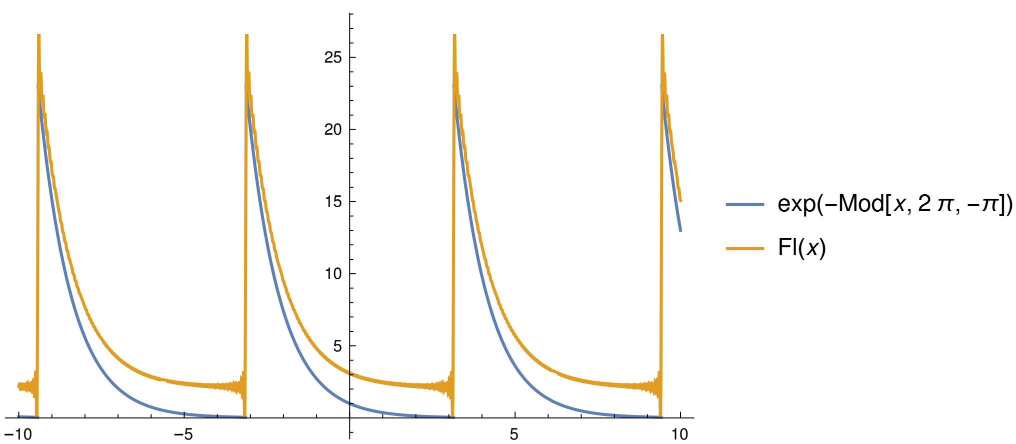
In[364]:=
```
(*Para λ = 1*) λ = 1;
Fl[x_] :=
 Sinh[λ π]/(2 λ) + Sum[2 λ ((-1)^n Sinh[λ π] Cos[n x])/(π(λ^2 + n^2)) - 2 n ((-1)^n Sinh[λ π] Sin[n x])/(π(λ^2 + n^2)), {n, 1, 100}]
                  soma

Plot[{Exp[1 * Mod[x, 2 π, -π]], Fl[x]}, {x, -10, 10}, PlotLegends → "Expressions"]
gráfico expo··· operação do módulo                      legenda do gráfico
```

Out[366]=



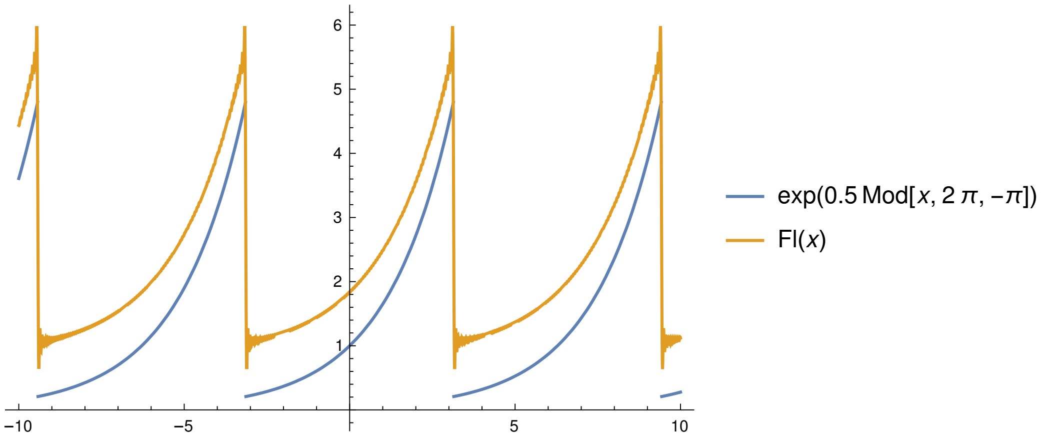
In[367]:=
```
(*Para λ = -1*) λ = -1;
Fl[x_] :=
 Sinh[λ π]/(2 λ) + Sum[2 λ ((-1)^n Sinh[λ π] Cos[n x])/(π(λ^2 + n^2)) - 2 n ((-1)^n Sinh[λ π] Sin[n x])/(π(λ^2 + n^2)), {n, 1, 100}]
                   soma

Plot[{Exp[-1 * Mod[x, 2 π, -π]], Fl[x]}, {x, -10, 10}, PlotLegends → "Expressions"]
gráfico expone··· operação do módulo                    legenda do gráfico
```

Out[369]=



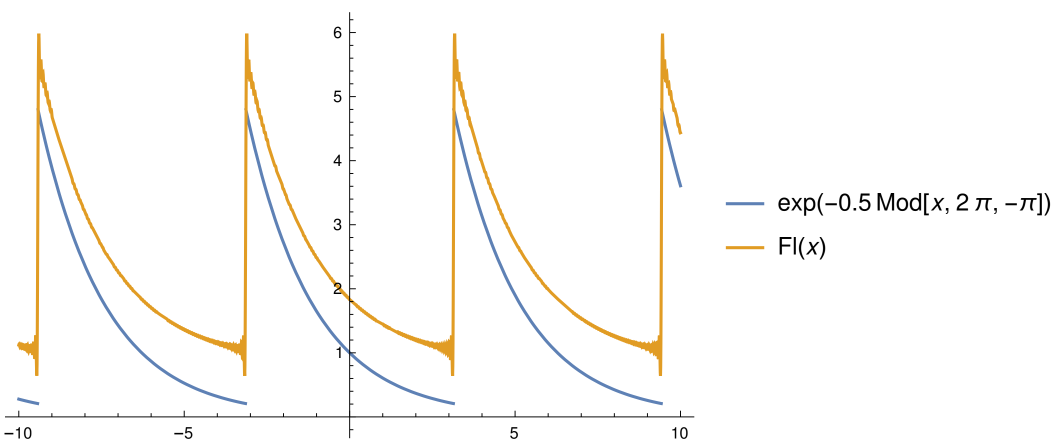
In[370]:=
```
(*Para λ = 0.5*)λ = 0.5;
Fl[x_] :=
```
$$\frac{\text{Sinh}[\lambda\,\pi]}{2\,\lambda} + \text{Sum}\left[2\,\lambda\,\frac{(-1)^n\,\text{Sinh}[\lambda\,\pi]\,\text{Cos}[n\,x]}{\pi(\lambda^2+n^2)} - 2\,n\,\frac{(-1)^n\,\text{Sinh}[\lambda\,\pi]\,\text{Sin}[n\,x]}{\pi(\lambda^2+n^2)},\ \{n,\ 1,\ 100\}\right]$$
soma

```
Plot[{Exp[0.5 * Mod[x, 2 π, -π]], Fl[x]}, {x, -10, 10}, PlotLegends → "Expressions"]
```
gráfico exponen··· operação do módulo legenda do gráfico

Out[372]=


In[373]:=
```
(*Para λ = -0.5*)λ = - 0.5;
Fl[x_] :=
```
$$\frac{\text{Sinh}[\lambda\,\pi]}{2\,\lambda} + \text{Sum}\left[2\,\lambda\,\frac{(-1)^n\,\text{Sinh}[\lambda\,\pi]\,\text{Cos}[n\,x]}{\pi(\lambda^2+n^2)} - 2\,n\,\frac{(-1)^n\,\text{Sinh}[\lambda\,\pi]\,\text{Sin}[n\,x]}{\pi(\lambda^2+n^2)},\ \{n,\ 1,\ 100\}\right]$$
soma

```
Plot[{Exp[-0.5 * Mod[x, 2 π, -π]], Fl[x]}, {x, -10, 10}, PlotLegends → "Expressions"]
```
gráfico exponencial operação do módulo legenda do gráfico

Out[375]=


In[376]:=
```
(*Para λ = π*)λ = π;
Fl[x_] :=
```

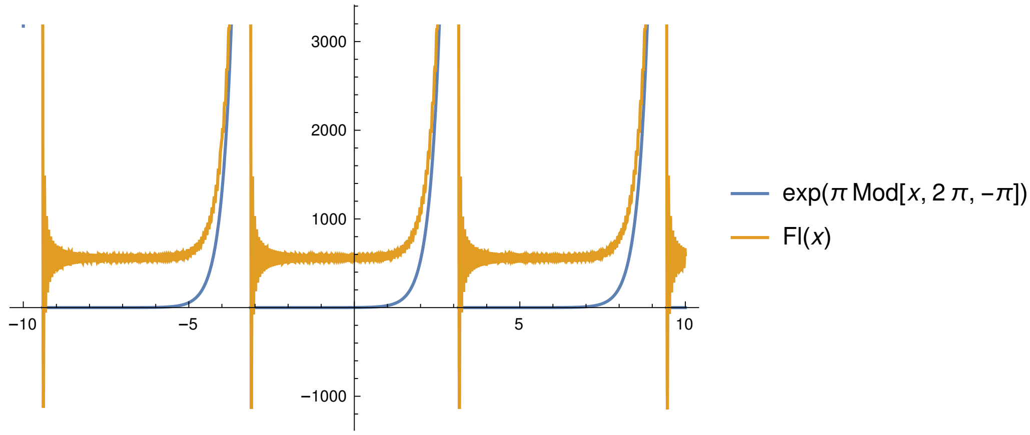
$$\frac{\text{Sinh}[\lambda\,\pi]}{2\,\lambda} + \text{Sum}\left[2\,\lambda\,\frac{(-1)^n\,\text{Sinh}[\lambda\,\pi]\,\text{Cos}[n\,x]}{\pi(\lambda^2+n^2)} - 2\,n\,\frac{(-1)^n\,\text{Sinh}[\lambda\,\pi]\,\text{Sin}[n\,x]}{\pi(\lambda^2+n^2)},\ \{n,1,100\}\right]$$

soma

```
Plot[{Exp[π * Mod[x, 2 π, -π]], Fl[x]}, {x, -10, 10}, PlotLegends → "Expressions"]
```

gráfico | expon··· | operação do módulo | legenda do gráfico

Out[378]=



In[379]:=
```
(*Para λ = -π*)λ = - π;
Fl[x_] :=
```

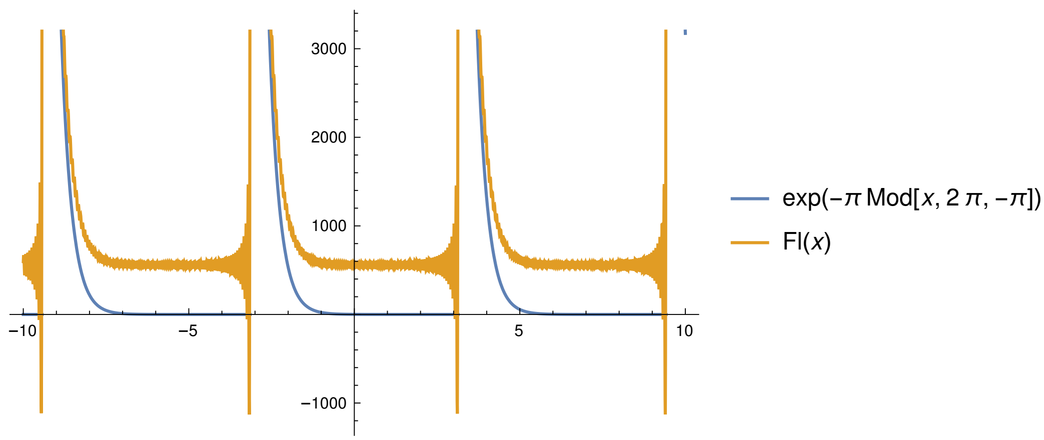
$$\frac{\text{Sinh}[\lambda\,\pi]}{2\,\lambda} + \text{Sum}\left[2\,\lambda\,\frac{(-1)^n\,\text{Sinh}[\lambda\,\pi]\,\text{Cos}[n\,x]}{\pi(\lambda^2+n^2)} - 2\,n\,\frac{(-1)^n\,\text{Sinh}[\lambda\,\pi]\,\text{Sin}[n\,x]}{\pi(\lambda^2+n^2)},\ \{n,1,100\}\right]$$

soma

```
Plot[{Exp[-π * Mod[x, 2 π, -π]], Fl[x]}, {x, -10, 10}, PlotLegends → "Expressions"]
```

gráfico | exponen·· | operação do módulo | legenda do gráfico

Out[381]=



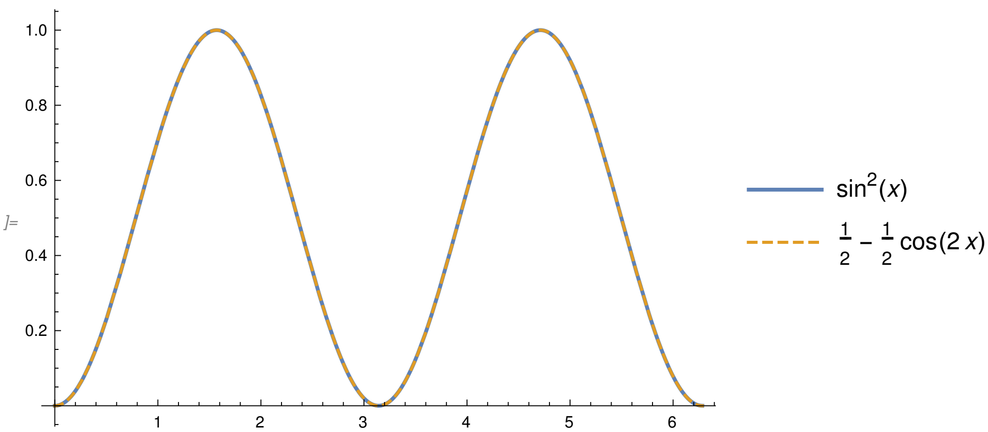
5.a)

Para encontrarmos a série de Fourier ($f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n \operatorname{Cos}\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)+b_n \operatorname{Sin}\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)\right\}$ (5.1), para os seguinte coeficientes $a_0=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,dx$ (5.2) ; $a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{Cos}\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)dx$ (5.3); $b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{Sin}\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)dx$ (5.4)) da função $f(x)=\operatorname{Sin}^2(x)$ para o intervalo $[-\pi,\pi]$ Devemos analisar primeiro a paridade da função $f(x)$, que é uma função par (ou seja, $f(x)=f(-x)$), com isso nossa série de Fourier será formada por uma série de funções pares. Portanto uma série de cossenos e, assim, $b_n=0$ (5.5).

Como estamos calculando a série de fourier por inspeção, não devemos calcular os coeficiente de a_0 e a_n. No entanto, podemos observar a série de Fourier da função $f(x)$ aparecendo na seguinte relação trigonométrica: $\operatorname{Sin}^2(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{Cos}(2x)$ (5.6). Essa relação trigonométrica já mostra a série de Fourier de $\operatorname{Sin}^2(x)$, onde $a_0=1$ (5.7) e $a_2=-\frac{1}{2}$ (5.8), e para os demais $n \neq \{0,2\},\ a_n=0$ (5.9).

In[ ]:=
```
Plot[{(Sin[x])^2, 1/2 - 1/2 * Cos[2 x]}, {x, 0, 2 Pi},
 PlotLegends → "Expressions", PlotStyle → {Thick, Dashed}]
```
gráfico | seno | cosseno | número pi | legenda do gráfico | estilo do gráfico | espesso | tracejado

Out[ ]=



5.b)

Nesse item resolveremos a questão de um jeito similar ao item 5.a), no entanto, usaremos a formulação complexa da série de Fourier ($f(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{\frac{i2\pi n x}{L}}$ (5.10), sendo $c_n=\frac{1}{L}\int_0^L f(x)e^{\frac{-i2\pi n x}{L}}dx$(5.11)) para entendermos a série de fourier da função $f(x)=e^{e^{-ix}}$. No enunciado da questão existe uma dica, expandir a exponencial externa em série de Taylor, lembrando que série de Taylor é dada por: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ (5.12).

A expansão da função exponencial centrada em 0 é uma das expansões mais simples e praticamente todos alunos acabam decorando ela no curso de cálculo 1, então não mostrarei os cálculos para chegar nela.

$e^{\alpha} = 1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^4}{4!} + \ldots$ (5.13) $\iff e^{\alpha} = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!}$ (5.14)

Ao substituirmos a Eq. (5.14) por $\alpha = -i x$, chegamos na série:

$e^{-ix} = 1 + e^{-ix} + \frac{e^{-2\,ix}}{2} + \frac{e^{-3\,ix}}{3!} + \frac{e^{-4\,ix}}{4!} + \ldots$ (5.15) $\iff e^{\alpha} = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{e^{-nix}}{n!}$ (5.16)

O interessante dessa serie é que ao utilizarmos o comando FourierSeries[Exp[Exp[-i*x]],x,4], que nos fornece a série de Fourier pela formulação complexa, observamos que é a mesma série. Sendo então a série de Fourier da função $f(x)=e^{e^{-ix}}$:

$f(x)= e^{e^{-ix}} = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{e^{-nix}}{n!}$, sendo $c_n = \frac{1}{n!}$, para $n \in \mathbb{N}$.

6.

Para mostrarmos que sendo f e g duas funções periódicas de mesmo período L, com os coeficientes complexos de Fourier c_n e d_n: $\frac{1}{L}\int_0^L f^*(x)\,g(x)\,dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n^* d_n$ (6.1). Primeiro devemos levar em consideração que, sendo $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{\frac{i2\pi nx}{L}}$ (6.2), o conjugado dela, será:

$f^*(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n^* e^{\frac{-i2\pi nx}{L}}$ (6.3) . Além disso iremos considerar $g(x)$ como sendo $g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n e^{\frac{i2\pi nx}{L}}$ (6.4).

Agora, supondo a convergência das funções faremos:

$f^*(x)\,g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n^* e^{\frac{-i2\pi nx}{L}} * \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n e^{\frac{i2\pi nx}{L}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n^* d_n e^{\frac{-i2\pi nx}{L} + \frac{i2\pi nx}{L}}$

$\int_0^L f^*(x)\,g(x)\,dx = \int_0^L \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n^* d_n\,dx = L\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n^* d_n$

$\frac{1}{L}\int_0^L f^*(x)\,g(x)\,dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n^* d_n$ (6.5)

7.

Sendo $f(x)$ uma função periódica de período $L = 2\pi$ no intervalo $[-\pi, \pi]$.A função $f(x)$ pode ser aproximada pela serie discreta: $f_N(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} [a_n \operatorname{Cos}(nx) + b_n \operatorname{Sin}(nx)]$ (7.1), sendo (a_n, b_n) os coeficientes. Para escolhermos a melhor aproximação da função. Faremos a partir da função erro quadrático médio. $E_N = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - f_N(x)]^2\,dx$ (7.2), que após substituirmos $f_N(x)$ ficará:

$E_N = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - a_0 - \sum_{n=1}^{N} [a_n \operatorname{Cos}(nx) + b_n \operatorname{Sin}(nx)]]^2\,dx$ (7.3)

Para encontrarmos o valor mínimo de (a_n, b_n), derivaremos a função erro quadrático por a_n e b_n, e igualaremos a zero a função, encontrando o ponto crítico da função erro que assumiremos como o nosso ponto de mínimo.

Antes de começarmos os cálculos é interessante citar algumas coisas que nos economizaram muito tempo. Como as integrais abaixo, que são frutos da ortogonalidade das funções trigonométricas.

→Sendo $\delta_{n,m} = \{0 \text{ para } n \neq m,\ 1 \text{ para } n = m\}$, temos:

→ $\int_0^L \operatorname{Sin}(\frac{2\pi n}{L} x) \operatorname{Cos}(\frac{2\pi m}{L} x)\,dx = 0$ (7.4)

$\rightarrow \frac{2}{L}\int_0^L \text{Cos}\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)\text{Cos}\left(\frac{2\pi m}{L}x\right)dx = \delta_{n,m}$ (7.5)

$\rightarrow \frac{2}{L}\int_0^L \text{Sin}\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)\text{Sin}\left(\frac{2\pi m}{L}x\right)dx = \delta_{n,m}$ (7.6)

→ Também vamos levar em consideração as integrais abaixo:

$\rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \text{Cos}(nx)\,dx = \frac{\text{Sin}(nx)}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\text{Sin}(\pi n) - \text{Sin}(-\pi n)}{n} = 0$ (7.7)

$\rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \text{Sin}(nx)\,dx = \frac{\text{Cos}(nx)}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\text{Cos}(n\pi) - \text{Cos}(-\pi n)}{n} = 0$ (7.8)

→ Começaremos encontrando a_n, derivaremos a Eq. por a_n e igualando essa função por zero. Reagruparemos a função de uma maneira conveniente e resolveremos suas integrais com base na ortogonalidade das funções trigonométricas e na integral de seno e cosseno citada acima. Por fim, isolaremos a_n e chegaremos no resultado desejado.

$\frac{\partial E_N}{\partial a_n} = -2 \times \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x) - a_0 - \sum_{n=1}^{N}[a_n \text{Cos}(nx) + b_n \text{Sin}(nx)]\right]\left[\sum_{n=1}^{N}\text{Cos}(nx)\right]dx = 0$ (7.9)

$\sum_{n=1}^{N}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\text{Cos}(nx)\,dx =$

$\sum_{n=1}^{N} a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \text{Cos}(nx)\,dx + \sum_{n=1}^{N}\int_{-\pi}^{\pi} a_n \text{Cos}^2(nx)\,dx + \sum_{n=1}^{N}\int_{-\pi}^{\pi} b_n \text{Sin}(nx)\text{Cos}(nx)\,dx$ (7.10)

$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\text{Cos}(nx)\,dx = \frac{L}{2}a_n \iff a_n = \frac{2}{L}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\text{Cos}(nx)\,dx$ (7.11)

→ Para encontrarmos b_n usaremos os mesmo passo a passo anterior.

$\frac{\partial E_N}{\partial b_n} = -2 \times \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x) - a_0 - \sum_{n=1}^{N}[a_n \text{Cos}(nx) + b_n \text{Sin}(nx)]\right]\left[\sum_{n=1}^{N}\text{Sin}(nx)\right]dx = 0$ (7.12)

$\sum_{n=1}^{N}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\text{Sin}(nx)\,dx =$

$\sum_{n=1}^{N} a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \text{Sin}(nx)\,dx + \sum_{n=1}^{N}\int_{-\pi}^{\pi} a_n \text{Sin}(nx)\text{Cos}(nx)\,dx + \sum_{n=1}^{N}\int_{-\pi}^{\pi} b_n \text{Sin}^2(nx)\,dx$ (7.13)

$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\text{Sin}(nx)\,dx = \frac{L}{2}b_n \iff b_n = \frac{2}{L}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\text{Sin}(nx)\,dx$ (7.14)

8.

Dado a função $\theta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$ (8.1), usaremos ela para definir a função Boxcar

$f(x) = \theta(x - u)\,\theta(x - v)$ (8.2), que também pode ser vista como $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [u, v] \\ 0 & x < u \text{ e } x > v \end{cases}$ (8.3), onde

temos a seguinte relação: $-\pi \leq u \leq v \leq \pi$ (8.4). Calcularemos a série de Fourier da função Boxcar por partes em $[-\pi, \pi]$, para u e v valores arbitrários respeitando a relação acima. Para isso, teremos:

$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\{a_n \text{Cos}(nx) + b_n \text{Sin}(nx)\}$ (8.5), para os seguinte coeficientes $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$ (8.6) ;

$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\text{Cos}(nx)\,dx$ (8.7); $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\text{Sin}(nx)\,dx$ (8.8)

→Começaremos por a_0:

$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{u} f(x)\,dx + \int_{u}^{v} f(x)\,dx + \int_{v}^{\pi} f(x)\,dx\right] = \frac{1}{\pi}\int_{u}^{v} dx$

Assim, $a_0 = \frac{(v-u)}{\pi}$ (8.9)

→ Calculo do a_n:

$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\text{Cos}(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{u} f(x)\text{Cos}(nx)\,dx + \int_{u}^{v} f(x)\text{Cos}(nx)\,dx + \int_{v}^{\pi} f(x)\text{Cos}(nx)\,dx\right] =$

$\frac{1}{\pi}\int_u^v \text{Cos}(\text{nx})\, dx = \frac{1}{\text{n}\pi}\text{Sin}(\text{nx})\ \Big|_u^v$

Assim, $a_n = \frac{1}{\text{n}\pi}[\text{Sin}(\text{nv}) - \text{Sin}(\text{nu})]$ (8.10)

→ Calculo do b_n:

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\text{Sin}(\text{nx})\, dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{u} f(x)\,\text{Sin}(\text{nx})\, dx + \int_u^v f(x)\,\text{Sin}(\text{nx})\, dx + \int_v^{\pi} f(x)\,\text{Sin}(\text{nx})\, dx\right] =$
$\frac{1}{\pi(v-u)}\int_u^v \text{Sin}(\text{nx})\, dx = -\frac{1}{\text{n}\pi(v-u)}\text{Cos}(\text{nx})\ \Big|_u^v$

Assim, $b_n = -\frac{1}{\text{n}\pi}[\text{Cos}(\text{nv}) - \text{Cos}(\text{nu})]$ (8.11)

Com isso teremos que a representação da série de Fourier real, será:

$f(x) = \frac{1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\text{n}\pi}[\text{Sin}(\text{nv}) - \text{Sin}(\text{nu})]\ \text{Cos}(\text{nx}) - \frac{1}{\text{n}\pi}[\text{Cos}(\text{nv}) - \text{Cos}(\text{nu})]\,\text{Sin}(\text{nx})\right\}$ (8.12)

Para a representação complexa da série de Fourier [$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{i\text{nx}}$ (8.13)]devemos levar em consideração as relações vista em sala: $c_n = \frac{1}{2}(a_n - i b_n)$ (8.14), $e^{i\theta} = \text{Cos}\theta + i\text{Sin}\theta$ (8.15) ,
$e^{-i\theta} = \text{Cos}\theta - i\text{Sin}\theta$ (8.16), com isso c_n será:

$c_n = \frac{1}{2\text{n}\pi(v-u)}[\text{Sin}(\text{nv}) - \text{Sin}(\text{nu}) + i\text{Cos}(\text{nv}) - i\text{Cos}(\text{nu})] =$
$\frac{1}{2\text{n}\pi i}[i\text{Sin}(\text{nv}) - i\text{Sin}(\text{nu}) - \text{Cos}(\text{nv}) + \text{Cos}(\text{nu})] = \frac{1}{2\text{n}\pi i}\left[-e^{-i\text{vn}} + e^{-i\text{un}}\right]$ (8.17)

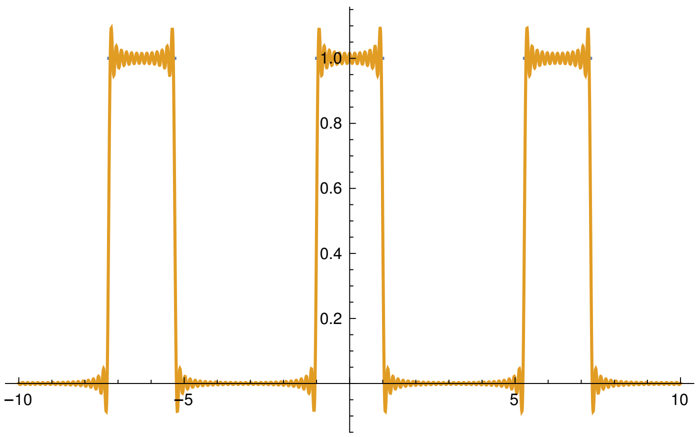
Assim, $c_n = \frac{i}{2\text{n}\pi}\left[e^{-i\text{vn}} - e^{-i\text{un}}\right]$ (8.18) e nossa série de Fourier será:

$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{i}{2\text{n}\pi}\left[e^{-i\text{vn}} - e^{-i\text{un}}\right] e^{i\text{nx}}$(8.19)

Abaixo, veremos alguns exemplos de série de fourier:

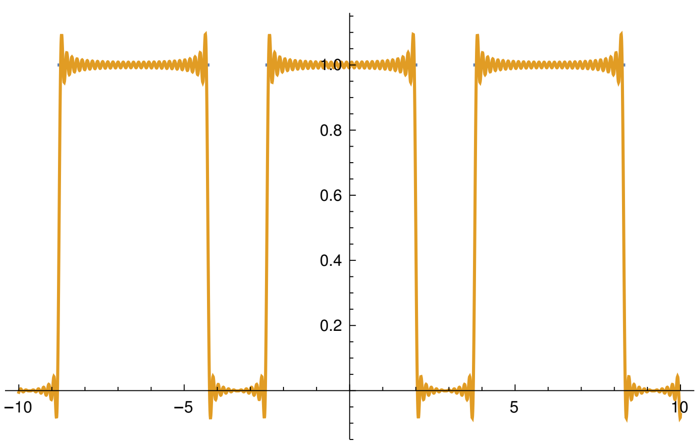
In[382]:=
```
(*Sendo u = -1 e v = 1*) u = -1 ; v = 1;
f[x_] := Piecewise[{{1, u < x < v}, {0, x < u & x > v}}];
         função por partes
g [x_] := (v - u)/(2 π) +
  Sum[(Sin[n * v] - Sin[u * n])/(n π) * Cos[n * x] - (Cos[n * v] - Cos[u * n])/(n π) * Sin[n * x], {n, 1, 40}];
  soma                                 cosseno                                   seno

Plot[{F[Mod[x, 2 π, u]], g[x]}, {x, -10, 10}, Exclusions → None]
gráfico operação do módulo                     exclusões     nenhum
```

Out[385]=



In[386]:=
```
(*Sendo u = -2.5 e v = 2*) u = -2.5 ; v = 2;
f[x_] := Piecewise[{{1, u < x < v}, {0, x < u & x > v}}];
         função por partes
g[x_] := (v - u)/(2 π) +
  Sum[(Sin[n * v] - Sin[u * n])/(n π) * Cos[n * x] - (Cos[n * v] - Cos[u * n])/(n π) * Sin[n * x], {n, 1, 40}];
  soma                                  cosseno                                      seno

Plot[{F[Mod[x, 2 π, u]], g[x]}, {x, -10, 10}, Exclusions → None]
gráfico operação do módulo                       exclusões   nenhum
```

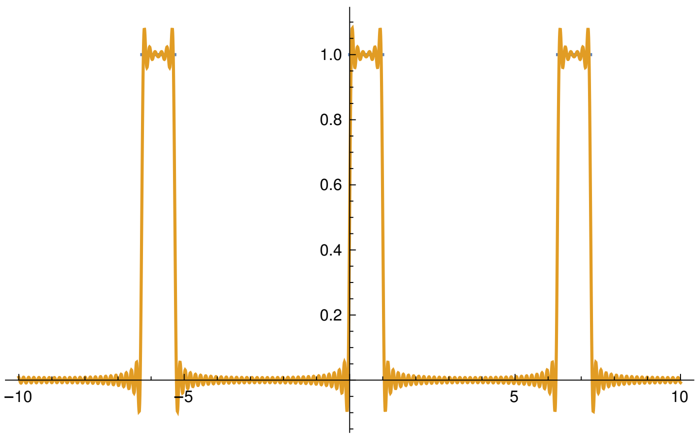
Out[389]=



In[390]:=

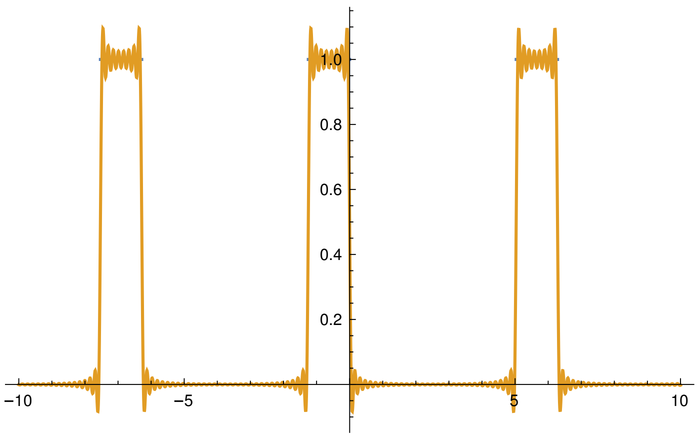
```
(*Sendo u = 0 e v = 1*) u = 0 ; v = 1;
f[x_] := Piecewise[{{1, u < x < v}, {0, x < u & x > v}}];
         função por partes
g [x_] := (v - u)/(2 π) +
  Sum[(Sin[n * v] - Sin[u * n])/(n π) * Cos[n * x] - (Cos[n * v] - Cos[u * n])/(n π) * Sin[n * x], {n, 1, 40}];
  soma                                    cosseno                                  seno

Plot[{F[Mod[x, 2 π, u]], g[x]}, {x, -10, 10}, Exclusions → None]
gráfico operação do módulo                    exclusões   nenhum
```

Out[393]=



In[394]:=
```
(*Sendo u = -1.25 e v = 0*)u = -1.25 ; v = 0;
f[x_] := Piecewise[{{1, u < x < v}, {0, x < u & x > v}}];
           função por partes
g [x_] := (v - u)/(2 π) +
   Sum[(Sin[n * v] - Sin[u * n])/(n π) * Cos[n * x] - (Cos[n * v] - Cos[u * n])/(n π) * Sin[n * x], {n, 1, 40}];
   soma                                  cosseno                                      seno

Plot[{F[Mod[x, 2 π, u]], g[x]}, {x, -10, 10}, Exclusions → None]
gráfico operação do módulo                    exclusões     nenhum
```

Out[397]=



Se o nosso vagão for simétrico, ou seja, u=-v, teremos então uma função par e com isso o nosso $b_n = 0$. Podemos observar isso analisando os coeficientes:

$a_0 = \frac{v-u}{\pi} = \frac{2v}{\pi}$

$a_n = \frac{1}{n\pi}[\mathrm{Sin}(nv) - \mathrm{Sin}(-nv)] = \frac{2}{n\pi}\mathrm{Sin}(nv)$

$b_n = -\frac{1}{n\pi}[\mathrm{Cos}(nv) - \mathrm{Cos}(-nv)] = 0$

9.

Do exercício anterior tiro que a função Boxcar é representada por $f(x) = \theta(x - u)\,\theta(x - v)$(9.1) e que a sua série de Fourier é dada por $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{i}{2n\pi}\left[e^{-i vn} - e^{-i un}\right] e^{i nx}$(9.2)

Para o nosso exercício teremos que u = b - a (9.3)e v = b + a (9.4). Com isso, então:

$f(x) = \theta(x - b + a)\,\theta(x - b - a) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{i}{2n\pi}\left[e^{-i(b+a)n} - e^{-i(b-a)n}\right] e^{i nx} =$

$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{-ii}{2n\pi i}\left[-e^{-i an} + e^{i an}\right] e^{i nx} e^{-i bn} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n\pi}\mathrm{Sin}[na]\, e^{i nx} e^{-i bn}$ (9.5).

Adaptando a função delta de Dirac que vimos nas notas de aula para o nosso caso, temos:

$\delta(x) = a \xrightarrow{\mathrm{Lim}} 0\ \frac{\theta(x-b+a)\,\theta(x-b-a)}{2a} = a \xrightarrow{\mathrm{Lim}} 0 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n\pi}\,\frac{\mathrm{Sin}[na]}{2a}\, e^{i nx} e^{-i bn} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{e^{i nx} e^{-i bn}}{2\pi}\ a \xrightarrow{\mathrm{Lim}} 0\ \frac{\mathrm{Sin}[na]}{an}$, pelo limite fundamental do calculo temos por fim:

$$\delta(\mathrm{x}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{e^{i \mathrm{nx}} e^{-i \mathrm{bn}}}{2\pi} (9.6)$$