Lista IV - Mecânica Estatística

Lyliana Myllena Santos de Sousa - 11223740
Lyliana.sousa@usp.br

1.a)

Devido a semelhança do gás de férmions, podemos considerar que a função partição do sistema é dada por: $\mathrm{Ln}[\Xi(\beta, \mu)] = \sum_i \mathrm{Ln}[1 + \mathrm{Exp}[\beta(\mu - \epsilon_i)]]$, como cada um dos M sítios de adsorção podem estar em um dos estados, temos que:

$\mathrm{Ln}[\Xi(\beta, \mu)] = \sum_i M\,\mathrm{Ln}[1 + \mathrm{Exp}[\beta(\mu - \epsilon_i)]] = \sum_i \mathrm{Ln}[1 + \mathrm{Exp}[\beta(\mu - \epsilon_i)]]^M$.

Para $\epsilon_i = -\epsilon$, temos:

$\Xi(\beta, \mu) = [1 + \mathrm{Exp}[\beta(\mu + \epsilon)]]^M = [1 + z\,\mathrm{Exp}[\beta\epsilon]]^M$

1.b)

O número média de partículas é dado por:

$N = \frac{1}{\beta}\left(\frac{\partial}{\partial\mu}\mathrm{Ln}[\Xi(\beta, \mu)]\right) = z\left(\frac{\partial}{\partial z}\mathrm{Ln}[\Xi(\beta, z)]\right) = z\left(\frac{\partial}{\partial z} M\,\mathrm{Ln}[1 + z\,\mathrm{Exp}[\beta\epsilon]]\right) = \frac{z\mathrm{Exp}[\beta\epsilon]}{1 + z\,\mathrm{Exp}[\beta\epsilon]} M$

2.a)

Sendo a Hamiltoniana: $\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{N} c\,|\vec{p}_i|$.

A função partição canônica do sistema é dada pela expressão: $Z(T, V, N) = \frac{Q^N}{N!}$, sendo Q a função partição de apenas uma partícula dada por: $Q = \frac{1}{h^3}\int d^3\vec{r}\int d^3\vec{p}\ \mathrm{Exp}[-\beta\mathcal{H}]$.

Como a nossa exponencial não depende do espaço, temo que a integração do espaço nos dará o volume do recipiente, $V = \int d^3\vec{r}$, com isso, que pode ser reescrito como: $Q = \frac{V}{h^3}\int d^3\vec{p}\ \mathrm{Exp}[-\beta\mathcal{H}]$, considerando um sistema de coordenadas esféricos, temos que $d^3\vec{p} = \mathrm{dp}\,p^2\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{sen}\theta\,\mathrm{d}\phi$. Assim, nossa integral fica:

$Q = \frac{V}{h^3}\int d^3\vec{p}\ \mathrm{Exp}[-\beta\mathcal{H}] = \frac{V}{h^3}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\,\mathrm{sen}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\infty}\mathrm{dp}\,p^2\,\mathrm{Exp}[-\beta c p] =$

$\frac{V}{h^3}2*2\pi\int_0^{\infty}\mathrm{dp}\,p^2\,\mathrm{Exp}[-\beta c p] = \frac{4\pi V}{(\beta c h)^3}\left\{-\mathrm{Exp}[-\beta c p]\left((\beta c p)^2 + 2\beta c p + 2\right)\Big|_0^{\infty}\right. =$

$\frac{4\pi V}{(\beta c h)^3}\left\{\lim_{p\to\infty}\left(-\frac{(\beta c p)^2}{\mathrm{Exp}[\beta c p]} - \frac{2\beta c p}{\mathrm{Exp}[\beta c p]} + \frac{2}{\mathrm{Exp}[\beta c p]} + 2\right)\right\} = \frac{8\pi V}{(\beta c h)^3}$

Com isso, temos a função partição: $Z(T, V, N) = \frac{1}{N!}\left[\frac{8\pi V}{(\beta c h)^3}\right]^N = \frac{1}{h^{3N}N!}\left[\frac{8\pi V}{(\beta c)^3}\right]^N$

2.b)

No limite termodinâmico, dado por N, V $\longrightarrow \infty$, com $v = \frac{V}{N}$ fixo, temos a energia livre de Helmholtz por partícula: $f = f(T, V) = -\frac{1}{\beta}\,\text{Limit}\left[\frac{\text{LnZ}}{N}, N, V \to \infty\right]$, onde LnZ é dado por:

$\text{LnZ} = \text{Ln}\left(\frac{1}{h^{3N} N!}\left[\frac{8\pi V}{(\beta c)^3}\right]^N\right) = N\,\text{Ln}\left(\frac{8\pi V}{(\beta c)^3}\right) - \text{Ln}\,N! - 3\,\text{NLn}\,h$, onde usando a aproximação $\text{Ln}\,N! = N\,\text{Ln}\,N - N$. Assim,

$\text{LnZ} = \text{Ln}\left(\frac{1}{h^{3N} N!}\left[\frac{8\pi V}{(\beta c)^3}\right]^N\right) = N\left[\text{Ln}\left(\frac{8\pi V}{(\beta c)^3}\right) - \text{Ln}\,N + 1 - 3\,\text{Ln}\,h\right] = N\left[\text{Ln}\left(\frac{8\pi v}{(\beta c h)^3}\right) + 1\right]$. Assim, temos que a energia livre de Helmholtz é dada por, lembrando que $K_B T = \frac{1}{\beta}$:

$f = f(T, V) = -\frac{1}{\beta}\left[\text{Ln}\left(\frac{8\pi v}{(\beta c h)^3}\right) + 1\right] =$. A

$$K_B T\left[3\,\text{Ln}\left(\frac{c h}{K_B T}\right) - \text{Ln}(8\pi v) - 1\right] = 3 K_B T\ \text{Ln}(c h) - 3 K_B T\,\text{Ln}(K_B T) - K_B T\text{Ln}(8\pi v) - K_B T$$

partir disso, obtenho a entropia por partícula como sendo:

$s = -\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_v = -[3 K_B\,\text{Ln}(c h) - 3 K_B\,\text{Ln}(K_B T) - 3 K_B - K_B\,\text{Ln}(8\pi v) - K_B] =$

$-K_B[3\ \text{Ln}(c h) - 3\,\text{Ln}(K_B T) - 4 - \text{Ln}(8\pi v)] =$

$-K_B\left[\text{Ln}\left(\frac{(\beta c h)^3}{8\pi v}\right) - 4\right] = K_B\left[\text{Ln}\left(\frac{8\pi v}{(\beta c h)^3}\right) + 4\right]$

2.c)

Para obter o calor especifico faço: $C_V = T\left(\frac{\partial}{\partial T} s\right) = -T\,K_B\left[-\frac{\partial}{\partial T} 3\,\text{Ln}(K_B T)\right] = 3 K_B$

2.d)

Eu obtenho a pressão pelas relações a seguir: $p = -\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_T = -K_B T\left[-\frac{\partial}{\partial v}(\text{Ln}(8\pi v))\right] = \frac{K_B T}{v}$. Disso, obtenho que isso corresponde a Lei de Boyle $p\,v = K_B T \longrightarrow p\,V = N K_B T$, que descreve um gás ideal não relativístico.

3.a)

Um “mosh pit” pode ser descrita pelo comportamento das partículas de um gás ideal em duas dimensões. A hamiltoniana que descreve o sistema de partículas não interagentes de um gás ideal é dada por: $\mathcal{H}\{\vec{p}_i\} = \sum_{i=1}^{N} \frac{|\vec{p}_i|^2}{2m}$. A função de partição canônica do sistema é dada por: $Z(T, V, N) = \frac{Q^N}{N!}$, sendo Q a função partição de apenas uma partícula, temos que: $Q = \frac{1}{h^3}\int d^3\vec{r}\int d^3\vec{p}\ \text{Exp}\left[-\frac{\beta p^2}{2m}\right]$. Isso nos diz que a probabilidade de encontrarmos uma partícula do gás com posição contida em um intervalo

$d^3\vec{r}$, centrado em $\vec{r}$ e com o momento contido no intervalo $d^3\vec{p}$ centrado em $\vec{p}$:

$P_{MB}\{\vec{r}\,,\vec{p}\}\,d^3\vec{r}\,d^3\vec{p} = \frac{\mathrm{Exp}\left[-\frac{\beta p^2}{2m}\right]}{Q}\frac{d^3\vec{r}\,d^3\vec{p}}{h^3}$, isso é a distribuição de Maxwell que nos resulta em $\int d^3\vec{r}\int d^3\vec{p}\,P_{MB}\{\vec{r}\,,\vec{p}\} = 1$, onde como Q não depende de r, temos

$Q = \frac{Q_P}{h^3} \longrightarrow Q_P = \int d^3\vec{p}\,\mathrm{Exp}\left[-\frac{\beta p^2}{2m}\right] = \left(\frac{2m\pi}{\beta}\right)^{3/2}$. Além disso,

$P_{MB}\{\vec{r}\,,\vec{p}\}\,d^3\vec{r}\,d^3\vec{p} = P_{MB}\{\vec{p}\}\,d^3\vec{p} = f_p(\vec{p})\,d^3\vec{p}$, onde considerando $\vec{p} = m\vec{v}$, tenho que:

$f(v)\,d\vec{v} = f(|\vec{v}|)\,d\vec{v} = f_p(\vec{p})\,d^3\vec{p}$, onde $f_p(\vec{p}) = \frac{\mathrm{Exp}\left[-\frac{\beta p^2}{2m}\right]}{Q_P} = \left(\frac{\beta}{2m\pi}\right)^{3/2}\mathrm{Exp}\left[-\frac{\beta p^2}{2m}\right]$. Realizando as mudanças de variáveis a seguir:

- $d^3\vec{p} = dp_x\,dp_y = d(mv_x)\,d(mv_y) = m^2\,d(v_x)\,d(v_y) = m^2\,v^2\,dv\,d\phi$
- $\beta = \frac{1}{K_B T}$

Substituindo, tenho que:

$f(v)\,d\vec{v} = f(|\vec{v}|)\,d\vec{v} = f_p(\vec{p})\,d^3\vec{p} = f_p(\vec{p})\,d^3\vec{p} = \left(\frac{\beta}{2m\pi}\right)^{3/2}\mathrm{Exp}\left[-\frac{mv^2}{2K_B T}\right]m^2\,v^2\,dv\,d\phi$. Com isso, obtenho a distribuição de probabilidades $f_V(v)$ do módulo da velocidade para o caso bidimensional.

$f_V(v)\,dv = \int_0^{2\pi} d\phi\left(\frac{m^{2/3}}{2\pi K_B T}\right)^{3/2}\mathrm{Exp}\left[-\frac{mv^2}{2K_B T}\right]v^2\,dv = 2\pi\left(\frac{m^{2/3}}{2\pi K_B T}\right)^{3/2}\mathrm{Exp}\left[-\frac{mv^2}{2K_B T}\right]v^2\,dv$. Portanto,

$f_V(v) = 2\pi\left(\frac{m^{2/3}}{2\pi K_B T}\right)^{3/2}\mathrm{Exp}\left[-\frac{mv^2}{2K_B T}\right]v^2$.

Sendo v_{mp} é a velocidade mais provável, obtida a partir da maximização de $f_V(v)$, assim:

$\frac{d}{dv}f_V(v)\,\Big|_{v=v_{mp}} = 2\pi\left(\frac{m^{2/3}}{2\pi K_B T}\right)^{3/2}\left(\frac{d}{dv}\mathrm{Exp}\left[-\frac{mv^2}{2K_B T}\right]v^2\right)\Big|_{v=v_{mp}} = 0 \Rightarrow 2v_{mp} - \frac{m}{K_B T}{v_{mp}}^3 = 0$. Resolvendo essa equação, obtemos três valore de $V_{mp} \in \{-\sqrt{\frac{2K_B T}{m}}, 0, \sqrt{\frac{2K_B T}{m}}\}$, onde o nosso valor de v_{mp} é o valor máximo, assim, $v_{mp} = \sqrt{\frac{2K_B T}{m}}$.

O valor médio da velocidade $\langle v\rangle$ é:

$$\langle v\rangle = \int_0^\infty v\,f_V(v)\,dv = \int_0^\infty 2\pi\left(\frac{m^{2/3}}{2\pi K_B T}\right)^{3/2}\mathrm{Exp}\left[-\frac{mv^2}{2K_B T}\right]v^3\,dv = 2\pi\left(\frac{m^{2/3}}{2\pi K_B T}\right)^{3/2}\int_0^\infty \mathrm{Exp}\left[-\frac{mv^2}{2K_B T}\right]v^3\,dv =$$

$$2\pi\left(\frac{m^{2/3}}{2\pi K_B T}\right)^{3/2}\frac{4{K_B}^2T^2}{2m^2}\left[-\mathrm{Exp}\left[-\frac{mv^2}{2K_B T}\right]\left(\frac{mv^2}{2K_B T}+1\right)\right]_0^\infty = 4\pi\left(\frac{m^{2/3}}{2\pi K_B T}\right)^{3/2}\frac{{K_B}^2T^2}{m^2}$$

A raiz quadrada de velocidade quadrática média é dada por:

$${v_{rqm}}^2 = \langle v^2\rangle = \int_0^\infty v^2 f_V(v)\,dv = \int_0^\infty 2\pi\left(\frac{m^{2/3}}{2\pi K_B T}\right)^{3/2}\mathrm{Exp}\left[-\frac{mv^2}{2K_B T}\right]v^4\,dv =$$

$$2\pi\left(\frac{m^{2/3}}{2\pi K_B T}\right)^{3/2}\int_0^\infty \mathrm{Exp}\left[-\frac{mv^2}{2K_B T}\right]v^4\,dv = 2\pi\left(\frac{m^{2/3}}{2\pi K_B T}\right)^{3/2}\frac{3}{8}\pi^{1/2}\left(\frac{2K_B T}{m}\right)^{5/2} = \frac{3}{2}\frac{K_B T}{m^{3/2}}$$

Assim, $v_{rqm} = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{K_B T}{m^{3/2}}}$

4.a)

Usando uma função de onda que descreve uma partícula em uma onda parada, temos que para uma vibração apenas no eixo x, o comprimento de onda é dado por λ_x. Para garantir que nas extremidades do comprimento L tenham o valor zero da função de onda, fazemos: $\frac{L}{(\lambda_x/2)} = n_x$ e $\frac{L}{(\lambda_y/2)} = n_y$. Com isso, tenho o momento associado $p_x = \frac{h}{\lambda_x} = n_x \frac{h}{2L}$ e $p_y = \frac{h}{\lambda_y} = n_y \frac{h}{2L}$. Assim, tenho que a energia da partícula em termos do momento linear é dada por:
$\epsilon = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) = \frac{h^2}{8mL^2}(n_x^2 + n_y^2)$. Lembrando que $L^2 = A$ e que $n = \sqrt{n_x^2 + n_y^2}$. Assim, tenho que a energia é dada por: $\epsilon = \frac{h^2}{8mL^2}(n_x^2 + n_y^2) = \frac{h^2 n^2}{8mA}$. Com isso, tenho que
$n = \sqrt{\frac{8mA}{h^2}}\,\epsilon^{1/2} \Leftrightarrow \mathrm{dn} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8mA}{h^2}}\,\epsilon^{-1/2}\,\mathrm{d}\epsilon$.
D(∈) consiste no número de estados que uma única partícula por intervalo de energia unitário próximo a energia ∈. Conseguimos obter D(∈) pela relação:
$\sum_{\text{states } \phi_\alpha} A(\in_\alpha) = \sum_{\{n_x, n_y\}} A(\in_\alpha) = \frac{1}{4}\int A(\in)\, 2\pi\, n\, \mathrm{dn} = \int A(\in)\, D(\in)\, d\in$, onde utilizamos a relação entre n e ∈ citada à cima.
$\frac{1}{4}\int A(\in)\, 2\pi\, n\, \mathrm{dn} = \frac{1}{4}\int A(\in)\, 2\pi \sqrt{\frac{8mA}{h^2}}\,\epsilon^{1/2}\,\frac{1}{2}\sqrt{\frac{8mA}{h^2}}\,\epsilon^{-1/2}\,\mathrm{d}\epsilon = \int A(\in)\,\frac{2mA\pi}{h^2}\,\mathrm{d}\epsilon$, onde está faltando um fator de degenerescência associado ao spin da partícula $\gamma = 2s+1$. Obtendo $\int A(\in)\,\gamma\,\frac{2mA\pi}{h^2}\,\mathrm{d}\epsilon = \int A(\in)(2s+1)\frac{2mA\pi}{h^2}\,\mathrm{d}\epsilon = \int A(\in)\, D(\in)\, d\in$. Assim, tenho que $D(\in) = (2s+1)\frac{2\pi mA}{h^2}$. Como o spin do férmions é 1/2, temos que a densidade de estados de uma única partícula é dada: $D(\in) = \frac{4\pi mA}{h^2}$.

4.b)

Calculando a energia de Fermi, temos que no zero absoluto, a integral $\int_0^{\in_f} D(\in)\, d\in = N$. Assim, determinamos a energia de fermi por: $\int_0^{\in_f} D(\in)\, d\in = \int_0^{\in_f} \frac{4\pi mA}{h^2}\, d\in = \frac{4\pi mA}{h^2}\in_f = N \longleftrightarrow \in_f = \frac{Nh^2}{4\pi mA}$.
A energia de fermi uma temperatura característica chamada de temperatura de Fermi (T_F):
$K_B T_F = \in_f \longleftrightarrow T_F = \frac{\in_f}{K_B} = \frac{Nh^2}{4\pi mAK_B}$

4.c)

A energia de estado fundamental é obtida por:
$E_{gs} = \int_0^{\in_f} \in D(\in)\, d\in = \frac{4\pi mA}{h^2}\int_0^{\in_f} \in d\in = \frac{4\pi mA}{h^2}\left[\frac{\in^2}{2}\right|_0^{\in_f} = \frac{4\pi mA}{h^2}\frac{\in_f^2}{2} = \frac{N}{\in_f}\frac{\in_f^2}{2} = \frac{N\in_f}{2}$. Com isso, tenho a seguinte expressão para a energia média: $\langle E\rangle = E_{gs} + \frac{\pi^2}{6} D(\in_f)(K_B T)^3$. Assim, a energia por partícula é:

$\frac{\langle E\rangle}{N} = \frac{E_{g\,s}}{N} + \frac{\pi^2}{6} D(\epsilon_f) \frac{(K_B\,T)^3}{N} = \frac{\epsilon_f}{2} + \frac{\pi^2}{6} \frac{4\,\pi\,m\,A}{h^2} \frac{(K_B\,T)^3}{N} = \frac{\epsilon_f}{2} + \frac{\pi^2}{6} \frac{(K_B\,T)^3}{N\,\epsilon_f}$

O calor específico é dado por: $C_V = \frac{\partial}{\partial T}(\langle E\rangle) = \frac{\pi^2}{3} \frac{4\,\pi\,m\,A}{h^2} K_B{}^2\,T = \frac{\pi^2}{3} \frac{N}{\epsilon_f} K_B{}^2\,T = \frac{\pi^2}{3} \frac{N}{\epsilon_f} K_B \frac{T}{T_F}$.

Para obter a entropia utilizo: $S(T) = \int_0^T \frac{C_V(T')}{T'} d\,T' = \frac{\pi^3}{3} N \frac{K_B}{T_F} \int_0^T d\,T' = \frac{\pi^3}{3} N\,K_B \frac{T}{T_F}$

4.d)

A função de partição semiclássica nos dá que: $Z_{\text{semiclássica}} = \frac{(Z_1)^N}{N!}$, com Z_1 sendo:

$Z_1 = \int_0^\infty \text{Exp}[-\epsilon / K_B\,T]\,D(\epsilon)\,d\,\epsilon = \int_0^\infty \text{Exp}[-\epsilon / K_B\,T] \frac{N}{\epsilon_f} d\,\epsilon = \frac{N}{\epsilon_f}[K_B\,T\,\text{Exp}[-\epsilon / K_B\,T]]_0^\infty = \frac{N}{\epsilon_f} K_B\,T$.

Com essa função de partição, eu obtenho a energia total por partícula: $\langle E\rangle = K_B\,T^2 \frac{\partial}{\partial T} \text{Ln}\,Z_{\text{semiclássica}}$,

onde $\text{Ln}\,Z_{\text{semiclássica}} = \text{Ln}\left[\frac{1}{N!}\left(\frac{N}{\epsilon_f} K_B\,T\right)^N\right]$, que pode ser aproximado por $\text{LnN}! \simeq N\,\text{Ln}\,N - N$. Assim,

$\text{Ln}\,Z_{\text{semiclássica}} =$

$$\text{Ln}\left[\frac{1}{N!}\left(\frac{N}{\epsilon_f} K_B\,T\right)^N\right] \simeq N\,\text{Ln}\left(\frac{N}{\epsilon_f} K_B\,T\right) - N\,\text{Ln}\,N + N = N\left[\text{Ln}\left(\frac{N}{\epsilon_f} K_B\,T\right) - \text{Ln}\,N + 1\right] = N\left[\text{Ln}\left(\frac{K_B\,T}{\epsilon_f}\right) + 1\right]$$

Portanto, a energia por partícula é dada por:

$\frac{\langle E\rangle}{N} = \frac{K_B\,T^2}{N} \frac{\partial}{\partial T} \text{Ln}\,Z_{\text{semiclássica}} = K_B\,T^2 \frac{\partial}{\partial T} \text{Ln}\left(\frac{K_B\,T}{\epsilon_f}\right) = K_B\,T$

O calor especifico é dado por: $C_V = \left(\frac{\partial}{\partial T}\langle E\rangle\right) = \left(\frac{\partial}{\partial T} K_B\,N\,T\right) = K_B\,N$

A entropia é dada por:

$S = \frac{\langle E\rangle}{T} + K_B\,\text{Ln}\,Z_{\text{semiclássica}} = K_B\,N + K_B\,N\,\text{Ln}\left(\frac{K_B\,T}{\epsilon_f}\right) + K_B\,N = K_B\,N\left[\text{Ln}\left(\frac{K_B\,T}{\epsilon_f}\right) + 2\right] = K_B\,N\,\text{Ln}\left(\frac{K_B\,T\,e^2}{\epsilon_f}\right)$

5.a)

Posso dizer que o número de estados que uma única partícula por intervalo de energia unitário proximo a energia ϵ é dado por: $D(\epsilon) = (2\,s + 1) \frac{2\,\pi\,m\,A}{h^2}$, como o bóson possui spin 0, temos que:$D(\epsilon) = \frac{2\,\pi\,m\,A}{h^2}$. O número médio de partículas em um intervalo ϵ é dado por:

$N = \sum_{\vec{k}} \langle n_{\vec{k}}\rangle = \langle n_0\rangle + \sum_{\vec{k}\neq 0} \langle n_{\vec{k}}\rangle$, onde Como não há limitação quanto ao número de bósons que podem ocupar o mesmo orbital, em temperatura zero todos os bósons devem ocupar o orbital caracterizado por $\vec{k} = 0$, nos dando $\langle n_0\rangle = \frac{1}{e^{-\beta\mu} - 1}$. Assim, sendo $f(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1}$, conhecemos a relação $n(\epsilon)\,d\epsilon = f(\epsilon)\,D(\epsilon)\,d\epsilon$. Temos que o número médio de partículas no recipiente é dado por:

$$N = \sum_{\vec{k}} \langle n_{\vec{k}}\rangle = \langle n_0\rangle + \sum_{\vec{k}\neq 0} \langle n_{\vec{k}}\rangle = \frac{1}{e^{-\beta\mu} - 1} + \int_0^\infty n(\epsilon)\,d\,\epsilon =$$
$$\frac{1}{e^{-\beta\mu} - 1} + \int_0^\infty D(\epsilon)\,f(\epsilon)\,d\,\epsilon = \frac{1}{e^{-\beta\mu} - 1} + \frac{2\,\pi\,m\,A}{h^2} \int_0^\infty \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1} d\,\epsilon = \frac{1}{e^{-\beta\mu} - 1} + \frac{2\,\pi\,m\,A}{h^2} \int_0^\infty \frac{d\epsilon}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1}$$

Com isso, obtenho a expressão: $\frac{N}{A} = \frac{1}{A\left(e^{-\beta\mu} - 1\right)} + \frac{2\,\pi\,m}{h^2} \int_0^\infty \frac{d\epsilon}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1}$

5.b)

A condensação de Bose-Einstein ocorre para a temperatura T_C, onde $\beta = \beta(T_C)$ e $\frac{N}{A}(T_C) = \frac{1}{A\left(e^{-\beta(T_C)\mu}-1\right)} + \frac{2\pi m}{h^2}\int_0^\infty \frac{d\epsilon}{e^{\beta(T_C)(\epsilon-\mu)}+1} = \frac{1}{A\left(e^{-\beta(T_C)\mu}-1\right)} + \frac{2\pi m e^{-\beta(T_C)\mu}}{h^2}\int_0^\infty \frac{d\epsilon}{e^{\beta(T_C)\epsilon}+e^{\beta(T_C)\mu}}$. Para a condensação ocorrer devemos resolver essa integral para encontrar o valor de T_C: $\int_0^\infty \frac{d\epsilon}{e^{\beta(T_C)\epsilon}+e^{-\beta(T_C)\mu}}$, onde a primitiva é:

$\int_0^\infty \frac{d\epsilon}{e^{\beta(T_C)\epsilon}+e^{-\beta(T_C)\mu}} = \frac{e^{-\beta\mu}\left(\epsilon\beta-\mathrm{Log}\left[e^{\epsilon\beta}+e^{\beta\mu}\right]\right)}{\beta}\Big|_0^\infty$, o valor dessa integral diverge, portanto não conseguimos obter um valor para T_C, assim, não ocorre uma condensação de Bose-Einstein.

In[ ]:=
```
Integrate[1/(Exp[β u] + Exp[β μ]), u]
```
integra

Out[ ]=
$$\frac{e^{-\beta\mu}\left(u\beta - \mathrm{Log}\left[e^{u\beta}+e^{\beta\mu}\right]\right)}{\beta}$$