Lista I - Mecânica Estatística

Lyliana Myllena Santos de Sousa - 11223740
Lyliana.sousa@usp.br

1.

Nesse exercício temos inicialmente que o nosso espaço amostral é composto por $\Omega^1 = \{10\text{ pc quebrados}, \ 90\text{ pc funcionando}\}$, ou seja, nosso espaço amostral tem 100 elementos. A probabilidade de eu tirar um elemento d meu espaço amostral e ele ser um PC funcionando é de:

$$Pr_1[\Omega^1] = \frac{\text{Numero de pc que funcionam}}{\text{Numero de pc}} = \frac{90}{100} = 0,9$$

Agora, para calcular a probabilidade do segundo PC estar funcionando, deve levar em consideração que o meu espaço amostral não é mais o mesmo, $\Omega^2 = \{10\text{ pc quebrados}, \ 89\text{ pc funcionando}\}$, com isso a probabilidade de um segundo PC tirado desse espaço amostral estar funcionando é de:

$$Pr_2[\Omega^2] = \frac{\text{Numero de pc que funcionam}}{\text{Numero de pc}} = \frac{89}{99}$$

Com isso, podemos ir calculando a probabilidade individual de cada PC tirado da sequência estar funcionado

$Pr_3 = \frac{88}{98}$; $Pr_4 = \frac{87}{97}$; $Pr_5 = \frac{86}{96}$; $Pr_6 = \frac{85}{95}$; $Pr_7 = \frac{84}{94}$; $Pr_8 = \frac{83}{93}$; $Pr_9 = \frac{82}{92}$; $Pr_{10} = \frac{81}{91}$;

Visto isso, temos que, nossa probabilidade é do tipo dependente, ela depende de que todos os Pr_x. Assim, a probabilidade do nosso exercício é:

$$Pr = \frac{90}{100} * \frac{88}{98} * \frac{87}{97} * \frac{86}{96} * \frac{85}{95} * \frac{84}{94} * \frac{83}{93} * \frac{82}{92} * \frac{81}{91} = \frac{90!}{80!} * \frac{90!}{100!} = 0,330476$$

Ou seja, a nossa probabilidade vai ser de aproximadamente 33%

```
In[ ]:= N[((90!)^2)/(100! * 80!)]
        valor numérico
Out[ ]= 0.330476
```

2.

Nesse exercício nos termos dois espaços amostrais: $\Omega^{\text{Urna 1}} = \{5\text{ bolas brancas}, \ 7\text{ bolas pretas}\}$, que possui 12 elementos, e $\Omega^{\text{Urna2}} = \{3\text{ bolas brancas}, \ 12\text{ bolas pretas}\}$, que possui 17 elementos. A Urna 1 é escolhida quando a moeda dá cara e a Urna 2 é escolhida quando a moeda dá coroa. No entanto, nossa moeda não é honesta, ela possui uma probabilidade de 4/10 de sair cara.

O exercício 2suponha que uma bola branca foi escolhida, perguntando qual a probabilidade de que no lançamento da moeda o resultado tenha sido coroa ? Para isso devemos lembrar do teorema de Bayes que é usado para saber a probabilidade de um evento A acontecer, sabendo que B já aconteceu. No nosso caso, temos:

- B será a bola branca escolhida.
- A será a moeda dar coroa.

$$\Pr[A \mid B] = \frac{\Pr[B \mid A] * \Pr[A]}{\Pr[B \mid A] * \Pr[A] + \Pr[B \mid \overline{A}] * \Pr[\overline{A}]}$$

Calcularemos agora cada termo do teorema de Bayes:

— $\Pr[B]$ = Probabilidade da bola ser branca = $\frac{\text{Numero de bolas brancas}}{\text{Numero de bolas}} = \frac{3}{27}$

— $\Pr[A]$ = Probabilidade da moeda ser coroa = $\frac{6}{10}$

— $\Pr\left[\bar{A}\right] = 1 - \Pr[A]$ = Probabilidade da moeda ser cara = $\frac{4}{10}$

— $\Pr[B \mid A]$ = Probabilidade da bola branca sair da urna 2 = $\frac{\text{Numero de bolas brancas}}{\text{Numero de bolas na urna 2}} = \frac{3}{15}$

— $\Pr\left[B \mid \bar{A}\right]$ = Probabilidade da bola branca sair da urna 1 = $\frac{\text{Numero de bolas brancas}}{\text{Numero de bolas na urna 1}} = \frac{5}{12}$

Assim, temos que a probabilidade de que a moeda tenha sido coroa é de aproximadamente 42%.

$$\Pr[A \mid B] = \frac{\Pr[B \mid A] * \Pr[A]}{\Pr[B \mid A] * \Pr[A] + \Pr[B \mid \overline{A}] * \Pr[\overline{A}]} = \frac{\left(\frac{3}{15}\right) * \left(\frac{6}{10}\right)}{\left(\frac{3}{15}\right) * \left(\frac{6}{10}\right) + \left(\frac{5}{12}\right) * \left(\frac{4}{10}\right)} = \frac{(3/25)}{(3/25) + (1/6)} = 0{,}4186$$

```
In[ ]:= N[(3 / 25) / ((3 / 25) + (1 / 6))]
        valor numérico

Out[ ]= 0.418605
```

3.a)

Nosso dado possui 6 fases e não é honesto, sendo que a probabilidade de sair o valor 6 é p e a probabilidade de sair o numero 1,2,3,4 e 5 é q para cada um desses valores. Assim, temos que o meu espaço amostral é $\Omega = \{x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3,\ x_4 = 4,\ x_5 = 5,\ x_6 = 6\}$, onde a nossa variável aleatória é $x \in \Omega$.

$\Pr[\Omega] = \sum_{x \in \Omega} \Pr[x] = \sum_{i=1}^{6} \Pr[x] = 5q + p = 1$

Dessa normalização temos que: $q = \frac{1-p}{5}$

3.b)

A distribuição de probabilidade de x, em termos de Delta de Dirac para o nosso espaço amostral Ω, dado:

$$\delta(x - x_i) = \begin{cases} 0 & , x \neq x_i \\ \infty & , x = x_i \end{cases} \quad \text{e} \quad p_i = \begin{cases} q = \frac{1-p}{5} & \text{para } i = 1, 2, 3, 4, 5 \\ p & \text{para } i = 6 \end{cases}$$

$P_\Omega[x] = \sum_{i=1}^{6} p_i\, \delta(x - x_i)$

3.c)

Sabendo que, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x - x_i)\,dx = f(x_i)$ e $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_i)\,dx = 1$

Calculando o valor médio de x:

$$\bar{x} = \langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x\,P_\Omega[x]\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^{6} x\,p_i\,\delta(x - x_i)\,dx = \sum_{i=1}^{6} p_i \int_{-\infty}^{\infty} x\,\delta(x - x_i)\,dx = \sum_{i=1}^{6} p_i\,x_i =$$

$$x_1\,p_1 + x_2\,p_2 + x_3\,p_3 + x_4\,p_4 + x_5\,p_5 + x_6\,p_6 = 15\,q + 6\,p = 15 * \frac{(1-p)}{5} + 6\,p = 3 + 3\,p$$

Calculando o desvio padrão:

$$(\Delta x)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2\,P_\Omega[x]\,dx =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(x^2 + \bar{x}^2 - 2\,x\,\bar{x}\right) P_\Omega[x]\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x^2 + \bar{x}^2 - 2\,x\,\bar{x}\right) \sum_{i=1}^{6} p_i\,\delta(x - x_i)\,dx =$$

$$\sum_{i=1}^{6} p_i \left[\int_{-\infty}^{\infty} x^2\,\delta(x - x_i)\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} \bar{x}^2\,\delta(x - x_i)\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} (-2\,x\,\bar{x})\,\delta(x - x_i)\,dx\right] =$$

$$\sum_{i=1}^{6} p_i \left[x_i^2 + \bar{x}^2 - 2\,x_i\,\bar{x}\right] =$$

$$q\left(1 + (3 + 3\,p)^2 - 2\,(3 + 3\,p)\right) + q\left(4 + (3 + 3\,p)^2 - 4\,(3 + 3\,p)\right) +$$

$$q\left(9 + (3 + 3\,p)^2 - 6\,(3 + 3\,p)\right) + q\left(16 + (3 + 3\,p)^2 - 8\,(3 + 3\,p)\right) +$$

$$q\left(25 + (3 + 3\,p)^2 - 10\,(3 + 3\,p)\right) + p\left(36 + (3 + 3\,p)^2 - 12\,(3 + 3\,p)\right) =$$

$$\left[\frac{1-p}{5}\right]\left(5\left[9 + 9\,p^2 + 18\,p\right] + 55 - 90 - 90\,p\right) + p(36 + 9 + 9\,p^2 + 18\,p - 36 - 36\,p) =$$

$$-9\,p^2 + 7\,p + 2$$

$$\Delta x = \sqrt{-9\,p^2 + 7\,p + 2}$$

3.d)

Testando para o caso particular, onde o nosso dado é honesto, ou seja, a probabilidade será $p = \frac{1}{6}$. O nosso valor médio e desvio padrão, será então:

$$\bar{x} = 3 + 3\,p = 3 + \frac{3}{6} = \frac{7}{2} = 3,5 \qquad \text{e}$$

$$\Delta x = \sqrt{-9\,p^2 + 7\,p + 2} = \sqrt{-\frac{9}{36} + \frac{7}{6} + 2} = \sqrt{2,92} = 1,7$$

In[ ]:= $N\left[\sqrt{-\frac{9}{36} + \frac{7}{6} + 2}\right]$ valor numérico

Out[ ]= 1.70783

4.

Temos nossa variável aleatória x,onde x ∈ (0,1). Sabemos que a formula da distribuição de probabilidade uniforme no intervalo (a,b) é dado por: $\Pr_{\text{generalizada}} = \frac{1}{b-a}\begin{cases} 0 & \text{se } x < a \text{ e } x > b \\ 1 & \text{se } a \leq x \leq b \end{cases}$. Assim, a distribuição de probabilidade para a nossa variável x é dada por:

$\Pr_X[x] = 1\begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \text{ e } x > 1 \\ 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$

Para a distribuição de probabilidade da variável $y = Y(x) = \ln(x) \longrightarrow \chi = Y^{-1}(y) = e^y$. O nosso intervalo para y será: $y = \ln(x) \longrightarrow y \in (\ln(0), \ln(1)) = (-\infty, 0)$. Para descobrir a distribuição de probabilidade de y = ln(x), vou utilizar a seguinte expressão:

$\text{Py}_Y(y) =$

$$\Pr_X(\chi)\left|\frac{\text{dy}}{\text{dx}}\right|^{-1}_{y=Y(x)} = \Pr_X(e^y)\left|\frac{d(\ln(x))}{\text{dx}}\right|^{-1}_{y=Y(x)} = \Pr_X(e^y)\left|\frac{1}{x}\right|^{-1}_{y=Y(x)} = \Pr_X(e^y)\left|\frac{1}{e^y}\right|^{-1} = \Pr_X(e^y)\, e^y$$

Disso, eu tiro que a minha probabilidade de y é: $\Pr_X[x] = e^y\begin{cases} 0 & \text{se } x > 0 \\ 1 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$

5.a)

Maior parte das reações ocorrem próximas ao centro. PAra uma região de raio menor que $R = 5 * 10^8\, m$ o processo pode ser considerado uma caminhada aleatória. Sendo a velocidade do fóton igual a da luz, $c = 299\,792,\, 4$ Km/ s, e o passo do fóton $l = 1$ mm $= 10^{-3}\, m = 10^{-6}$ Km. Quero saber quantos passos ele leva para ir da origem para R, sabendo que a partícula percorrerá um caminho aleatório (a cada passo ele vai para um caminho diferente).

Considerando que a caminhada ocorre em coordenadas esféricas, o primeiro passo do fóton terá as seguintes coorde-

nadas>

$x_1 = l\sin(\phi_1)\cos(\theta_1)$; $y_1 = l\sin(\phi_1)\sin(\theta_1)$; $z_1 = l\cos(\phi_1)$; $0 \leq \phi_1 \leq \pi$ e $0 \leq \theta_1 \leq 2\pi$, onde ϕ_1 e θ_1 são os ângulos que indicam a direção dos passos.

Depois de N passos dados, eu tenho que:

$x = l\sum_{i=1}^{N}\sin(\phi_i)\cos(\theta_i)$; $y = l\sum_{i=1}^{N}\sin(\phi_i)\sin(\theta_i)$; $z = l\sum_{i=1}^{N}\cos(\phi_i)$;

A distância média percorrida por esses passos é:

$\langle r^2\rangle = \langle x^2 + y^2 + z^2\rangle = \left\langle l^2\left[\left(\sum_{i=1}^{N}\sin(\phi_i)\cos(\theta_i)\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{N}\sin(\phi_i)\sin(\theta_i)\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{N}\cos(\phi_i)\right)^2\right]\right\rangle$

Abaixo colocarei a resolução do exponencial desse somatório individualmente, lembrando que como as direções de ϕ_1 e θ_1 são aleatoriamente distribuídas e independentes, podemos dizer que pela ortogonalidade das funções trigonométricas, temos que: $\sum_{i\neq j}\sin(\phi_i)\sin(\phi_j) = \sum_{i\neq j}\cos(\theta_i)\cos(\theta_j) = 0$

Disso, teremos que:

- $\left(\sum_{i=1}^{N}\sin(\phi_i)\cos(\theta_i)\right)^2 = (\sin(\phi_1)\cos(\theta_1) + \sin(\phi_2)\cos(\theta_2) + \ldots + \sin(\phi_N)\cos(\theta_N))^2 =$
  $\sum_{i=1}^{N}\sin^2(\phi_i)\cos^2(\theta_i) + \sum_{i\neq j}\sin(\phi_i)\cos(\theta_i)\sin(\phi_j)\cos(\theta_j) =$
  $\sum_{i=1}^{N}\sin^2(\phi_i)\cos^2(\theta_i) + \sum_{i\neq j}\sin(\phi_i)\sin(\phi_j)\sum_{i\neq j}\cos(\theta_i)\cos(\theta_j) = \sum_{i=1}^{N}\sin^2(\phi_i)\cos^2(\theta_i)$

- $(\sum_{i=1}^{N} \sin(\phi_i)\sin(\theta_i))^2 = (\sin(\phi_1)\sin(\theta_1) + \sin(\phi_2)\sin(\theta_2) + \ldots + \sin(\phi_N)\sin(\theta_N))^2 =$
  $\sum_{i=1}^{N} \sin^2(\phi_i)\sin^2(\theta_i) + \sum_{i\neq j} \sin(\phi_i)\sin(\theta_i)\sin(\phi_j)\sin(\theta_j) =$
  $\sum_{i=1}^{N} \sin^2(\phi_i)\sin^2(\theta_i) + \sum_{i\neq j} \sin(\phi_i)\sin(\phi_j)\sum_{i\neq j}\sin(\theta_i)\sin(\theta_j) = \sum_{i=1}^{N} \sin^2(\phi_i)\sin^2(\theta_i)$

- $(\sum_{i=1}^{N} \cos(\phi_i))^2 =$
  $(\cos(\phi_1) + \cos(\phi_2) + \ldots + \cos(\phi_N))^2 = \sum_{i=1}^{N} \cos^2(\phi_i) + \sum_{i\neq j} \cos(\phi_i)\cos(\phi_j) = \sum_{i=1}^{N} \cos^2(\phi_i)$

Com isso temos que:
$\langle r^2 \rangle = \langle x^2 + y^2 + z^2 \rangle = \langle l^2 \sum_{i=1}^{N} [\sin^2(\phi_i)\cos^2(\theta_i) + \sin^2(\phi_i)\sin^2(\theta_i) + \cos^2(\phi_i)] \rangle =$
$\langle l^2 \sum_{i=1}^{N} [\sin^2(\phi_i) + \cos^2(\phi_i)] \rangle = \langle l^2 \sum_{i=1}^{N} 1 \rangle \longrightarrow \langle r^2 \rangle = l^2 N$
Assim, para r = R:
$N = \frac{R^2}{l^2} = 2,5 * 10^{23}$ passos

In[ ]:= $N\left[\frac{25 * 10^{16}}{10^{-6}}\right]$
valor numérico

Out[ ]= 2.5×10^{23}

5.b)

O fóton percorre uma distância que pode ser medida multiplicando o tamanho dos seus passos por quantos passos ele deu:
Distância = lN = $2,5 * 10^{23} * 10^{-6} = 2,5 * 10^{17}$ Km
Para descobrir quando anos um fóton levaria em média para chegar até R, devemos usar a relação $\Delta S = v * t$, onde a v é a velocidade do fóton. Assim, temos:
Tempo = $\frac{\text{Distância}}{c} = \frac{2,5 * 10^{17}\ \text{Km}}{299\,792,4\ \text{Km}/s} = 8,3391 * 10^{11}\ s = 8,$
$3391 * 10^{11} * 3,171 * 10^{-8}$ anos = 26 443, 3 anos

In[ ]:= $N\left[\frac{2.5 * 10^{17}}{299\,792.4}\right]$
valor numérico

Out[ ]= 8.3391×10^{11}

In[ ]:= $N[\ 8.3391 * 10^{11}\ * 3.171 * 10^{-8}\ ]$
valor numérico

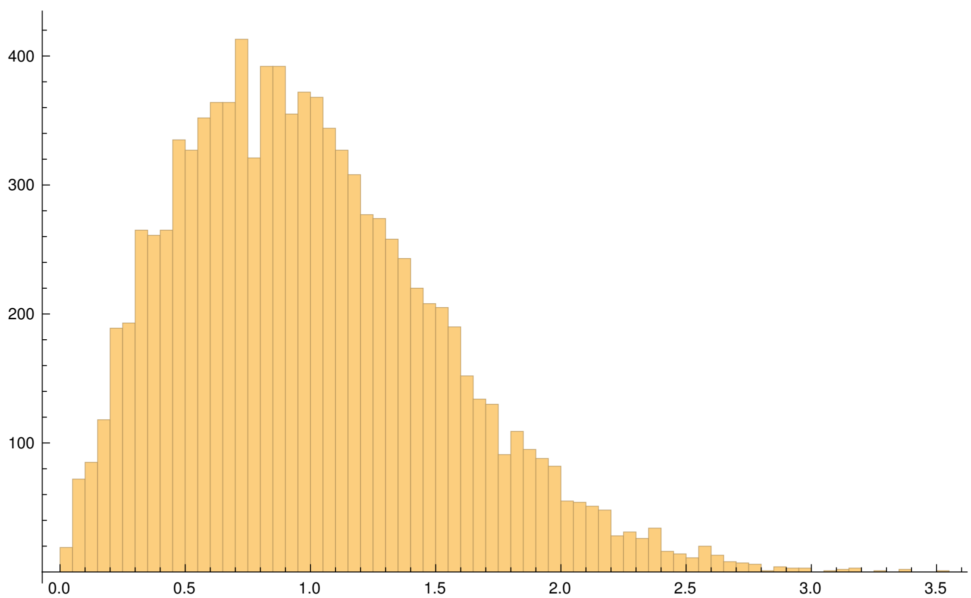
Out[ ]= 26 443.3

6.a)

In[1]:=

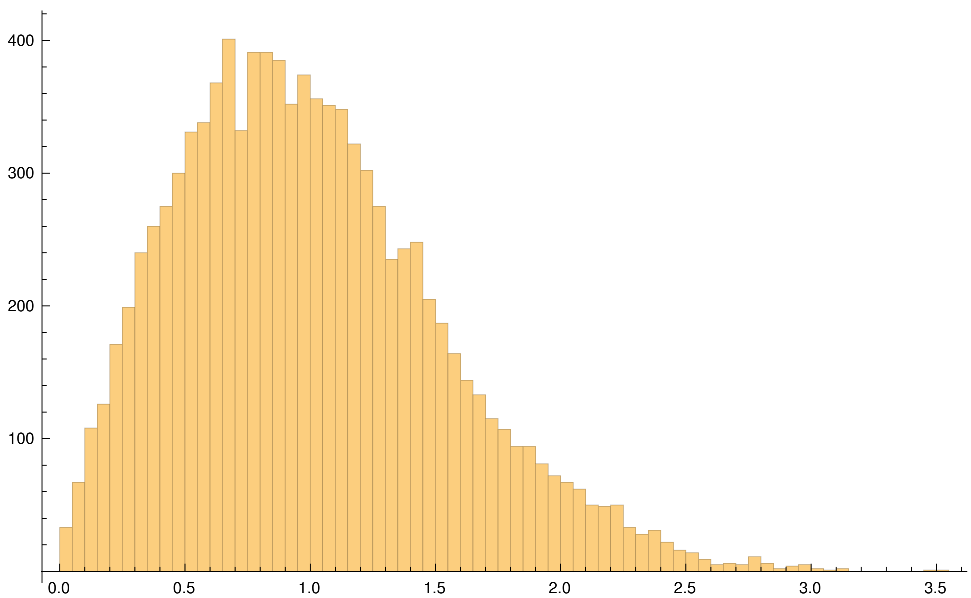
```
(*Definindo M, N, n, λn+1 e λn*)
                     valor numérico
ClearAll[M, N0, n , lis, r1]
apaga tudo
M = 10 001;
N0 = 2 ;(* Coloquei N0 para o matematica não confundir N com a função N*)
                                                      valor numérico     valc
n = N0 / 2;
lis = {};
For[i = 1, i < M, i++, mat = RandomVariate[NormalDistribution[], {N0, N0}];
para cada                    variável aleatória  distribuição normal
 matsim = (mat + Transpose[mat]) / 2;
                 transposição
 autovalores = Sort[Eigenvalues[matsim]];
                ord··· autovalores
 dif = autovalores[[n + 1]] - autovalores[[n]];
 lis = Join[lis, {dif}];]
       junta
r1 = lis / Mean[lis];
          média
his1 = Histogram[r1, 50, ImageSize → 500]
       histograma        tamanho da imagem
```

Out[8]=



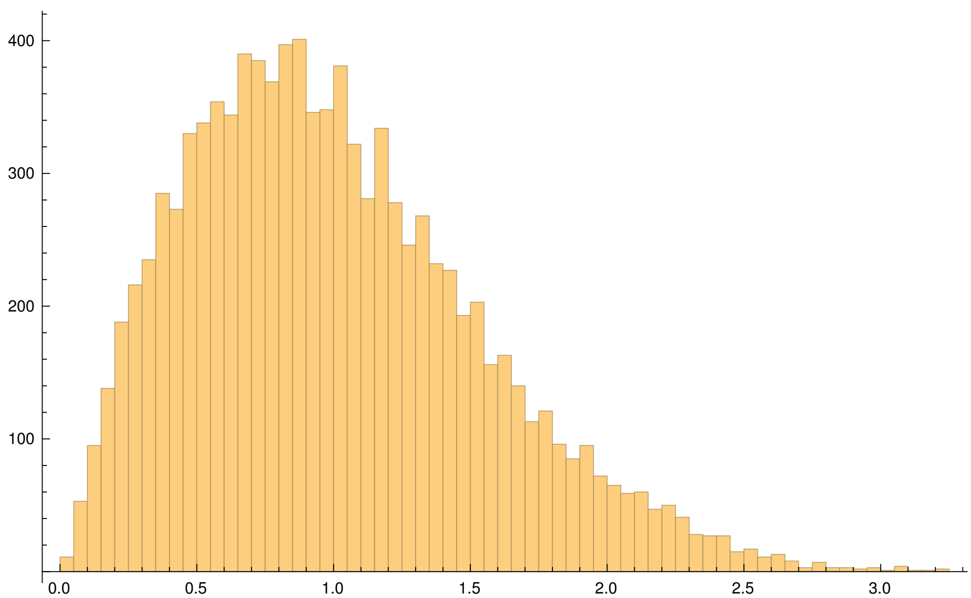
In[9]:=
```
(*Definindo M, N, n, λn+1 e λn*)
                      valor numérico
ClearAll[M, N0, n, lis, r2]
apaga tudo
M = 10 001;
N0 = 4 ;(* COloquei N0 para o matematica não confundir N com a função N*)
                                                    valor numérico     valc
n = N0 / 2;
lis = {};
For[i = 1, i < M, i++, mat = RandomVariate[NormalDistribution[], {N0, N0}];
para cada                    variável aleatória distribuição normal
 matsim = (mat + Transpose[mat]) / 2;
                 transposição
 autovalores = Sort[Eigenvalues[matsim]];
               ord··· autovalores
 dif = autovalores[[n + 1]] - autovalores[[n]];
 lis = Join[lis, {dif}];]
       junta
r2 = lis / Mean[lis];
          média
his2 = Histogram[r2, 50, ImageSize → 500]
       histograma          tamanho da imagem
```

Out[16]=



In[17]:=
```
(*Definindo M, N, n, λn+1 e λn*)
                    valor numérico
ClearAll[M, N0, n, lis, r3]
apaga tudo
M = 10 001;
N0 = 10 ;(* COloquei N0 para o matematica não confundir N com a função N*)
                                                             valor numérico     valc
n = N0 / 2;
lis = {};
For[i = 1, i < M, i++, mat = RandomVariate[NormalDistribution[], {N0, N0}];
para cada                    variável aleatória distribuição normal
 matsim = (mat + Transpose[mat]) / 2;
                 transposição
 autovalores = Sort[Eigenvalues[matsim]];
                    ord··· autovalores
 dif = autovalores[[n + 1]] - autovalores[[n]];
 lis = Join[lis, {dif}];]
       junta
r3 = lis / Mean[lis];
         média
his3 = Histogram[r3, 50, ImageSize → 500]
       histograma          tamanho da imagem
```

Out[24]=



6.b)

Para encontrarmos os valores de $H = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, usamos a relação $\det(H - \lambda I_n) = 0$. Assim, teremos que:

$$\det\begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{bmatrix} = 0 \longrightarrow (a-\lambda)(c-\lambda) - b^2 =$$

$$0 \longrightarrow a\,c - a\,\lambda - c\,\lambda + \lambda^2 - b^2 = 0 \longrightarrow \lambda^2 - (a+c)\lambda - b^2 + a\,c = 0$$

Disso teremos que, $\lambda_\pm = \frac{(a+c) \pm \sqrt{(a+c)^2 + 4(b^2 - a\,c)}}{2}$. Assim,

$$\Delta\lambda = \lambda_+ - \lambda_- = \frac{(a+c) + \sqrt{(a+c)^2 + 4(b^2 - a\,c)} - (a+c) + \sqrt{(a+c)^2 + 4(b^2 - a\,c)}}{2} = \sqrt{(a+c)^2 + 4(b^2 - a\,c)} =$$

$$\sqrt{a^2 + 2\,a\,c + c^2 + 4\,b^2 - 4\,a\,c} = \sqrt{a^2 - 2\,a\,c + c^2 + 4\,b^2} = \sqrt{(a-c)^2 + 4\,b^2}$$

6.c)

Considerando que o valor de b, depende de dois números gaussianos, que possuem as seguintes distribuições de probabilidade independentes: $P_a(u) = P_c(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}$. Assim, como foi dito no enunciado o número gaussiano b depende dos números gaussianos a e c, farei que eles possuem a seguinte relação: $b = \frac{a+c}{2}$. Disso, usarei a seguinte relação para obter a probabilidade de b: $P_b(u) = P_a(u)\,P_c(u) = \frac{1}{2\pi} e^{-u^2}$. Essa distribuição de probabilidade, ainda precisa ser normalizada, para isso farei:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{cte} * \frac{e^{-u^2}}{2\pi} \text{du} = \frac{\text{cte}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} \text{du} = \frac{\text{cte}}{2\pi} \sqrt{\pi} = 1 \longrightarrow \text{cte} = \frac{2\pi}{\sqrt{\pi}}$$

Assim, nossa distribuição de probabilidade de b é: $P_b(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2}$

In[ ]:= $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} \, du$

Out[ ]= $\sqrt{\pi}$

6.d)

Para $P_a(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a^2/2}$; $P_b(b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-b^2}$; $P_c(c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-c^2/2}$. Temos que:

$$P_\Delta(\Delta\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{da} \int_{-\infty}^{\infty} \text{db} \int_{-\infty}^{\infty} \text{dc}\, \delta\left(\Delta\lambda - \sqrt{(c-a)^2 + 4\,b^2}\right) P_a(a)\,P_b(b)\,P_c(c) =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{da} \int_{-\infty}^{\infty} \text{db} \int_{-\infty}^{\infty} \text{dc}\, \delta\left(\Delta\lambda - \sqrt{(c-a)^2 + 4\,b^2}\right) \frac{e^{-a^2/2 - b^2/2 - c^2/2}}{2\,\pi^{3/2}}$$

Realizando a mudança de variável: $x = \frac{c+a}{2}$ e $y = \frac{c-a}{2} \longrightarrow a = x - y$ e $c = x + y$. Terei que:

- $\sqrt{(c-a)^2 + 4\,b^2} = \sqrt{4\,y^2 + 4\,b^2} = 2\sqrt{y^2 + b^2}$
- $a^2 + b^2 + c^2 = 2\,x^2 + 2\,y^2 + b^2$

Para fazer a mudança de variável da integral dupla, eu faço que $d\,a\,d\,c = \left|\frac{\partial(a,c)}{\partial(x,y)}\right| d\,x\,d\,y$, onde $\left|\frac{\partial(a,c)}{\partial(x,y)}\right|$ é o módulo do Jacobiano, sendo ele: $\left|\frac{\partial(a,c)}{\partial(x,y)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial a}{\partial x} & \frac{\partial a}{\partial y} \\ \frac{\partial c}{\partial x} & \frac{\partial c}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$. Com isso, eu tenho que: $d\,a\,d\,c = \left|\frac{\partial(a,c)}{\partial(x,y)}\right| d\,x\,d\,y = 2\,d\,x\,d\,y$. Assim, nossa integral fica:

$$P_\Delta(\Delta\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{dy} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{db}\,\delta\left(\Delta\lambda - 2\sqrt{y^2 + b^2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{dx}\, \frac{e^{-\frac{1}{2}(2\,x^2 + 2\,y^2 + b^2)}}{\pi^{3/2}} =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{dy} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{db}\,\delta\left(\Delta\lambda - 2\sqrt{y^2 + b^2}\right) \frac{e^{-\frac{1}{2}(2\,y^2 + b^2)}}{\pi^{1/2}}$$

In[ ]:= $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Exp}[(-2 * x^2 - 2 * y^2 - b^2) / 2]\, dx$

exponencial

Out[ ]= $e^{-\frac{b^2}{2} - y^2} \sqrt{\pi}$