

# 跳马实验报告

这是作者的「2025秋 数据结构及其算法」 其中一个实验内容。

## 1 需求分析

在  $n * n$  棋盘上，使“马”从给定起点出发，按照国际象棋马的走法遍历所有格子且只到达一次；若能覆盖全部格子即为一条完整巡游路径。需求包括：

- 输入: 棋盘规模  $n$  (典型  $n \geq 5$ ) 与起始坐标  $(x_0, y_0)$ 。
- 输出: 跳马可行的完整路径。
- 性能: 在合理时间内给出一个解乃至全部解。
- 健壮性: 非法输入检测；无解时返回明确提示。
- 可扩展: 支持附加特殊规则（如排除的格子，一般矩形棋盘等），可视化功能（跳马路径回放与手动跳马等）。

## 2 概要设计

### 2.1 设计思想/算法

对于求解部分，先给出能正确工作的朴素深度优先搜索（DFS 回溯）实现，再引入 Warnsdorff 启发式搜索算法来显著降低回溯量并快速得到大棋盘上的解。

#### 1. 普通 DFS（由浅入深）

- 基本思路：从起点出发，在搜索的每一个位置尝试所有合法马步，走到步数  $n * n$  则成功；若某一步无法继续则回溯并撤销标记。
- 优点：实现简单、能枚举所有解。
- 缺点：搜索树巨大，甚至随  $n^2$  指数增长，在大棋盘上回溯开销极高且求解速度极慢。

伪代码（核心）：

```
函数 JumpingSearch(stack, visited, size, depth, solutionCount):
    若 depth == size * size:
        输出 "found:"
        DrawChessboard(stack, size)
        solutionCount ← solutionCount + 1
        返回

    currentPos ← stack[depth - 1].pos
```

```

对 dir 从 0 到 7:
    nextPos.x ← currentPos.x + moveDirections[dir].x
    nextPos.y ← currentPos.y + moveDirections[dir].y
    若 ValidPos(nextPos, size, visited):
        stack[depth].pos ← nextPos
        stack[depth].direction ← dir
        visited[nextPos.x][nextPos.y] ← true
        JumpingSearch(stack, visited, size, depth + 1, solutionCount)
        visited[nextPos.x][nextPos.y] ← false    // 回溯撤销
// 说明:
// stack: 数组, 元素含 pos 与 direction; depth 为当前步序 (1..size*size)
// visited: 布尔矩阵标记已访问格
// moveDirections: 8 个马步偏移常量
// ValidPos: 越界与未访问检测
// 回溯保证穷举所有可能路径; 找到完整路径即输出并计数

```

## 2. Warnsdorff 启发式（用于快速求解大棋盘）

- 基本思路：在每一步选择下一个位置时，优先选择后继度（即该位置可继续走的合法马步数）最小的格子，从而减少未来回溯概率。
- 优点：大幅降低回溯次数，能在大棋盘上快速找到解。
- 缺点：实现复杂度增加；某些棋盘和起点仍可能无解或需较多回溯。

伪代码（核心）：

```

函数 WarnsdorffSearch(stack, visited, size, depth, solutionCount):
    若 depth == size * size:
        输出 "found:"
        DrawChessboard(stack, size)
        solutionCount ← solutionCount + 1
        返回

    currentPos ← stack[depth - 1].pos
    nextMoves ← GenerateNextMoves(currentPos, visited, size) // 按后继度排序
    对 move in nextMoves:
        nextPos ← move.pos
        stack[depth].pos ← nextPos
        stack[depth].direction ← move.direction
        visited[nextPos.x][nextPos.y] ← true
        WarnsdorffSearch(stack, visited, size, depth + 1, solutionCount)
        visited[nextPos.x][nextPos.y] ← false    // 回溯撤销
// GenerateNextMoves: 生成所有合法后继并按后继度升序排序

```

对于展示部分，设计一个解法回放模块，读取保存的路径文件并逐步在棋盘上显示马的移动过程，验证路径合法性。在求解完毕后直接执行。

## 2.2 数据结构

- 棋盘: 使用二维布尔数组 `board[n][n]` , 未访问用 0。
- 方向集合: 固定长度数组 `moves[8] = {(2,1),(1,2),(-1,2),(-2,1),(-2,-1),(-1,-2),(1,-2),(2,-1)}` 。
- 访问标记: 直接依据 `board` 对应元素是否为 0。
- 回溯栈: 记录从起点到当前点的路径并用作下一个步选择依据。此外还有搜索算法中递归调用栈。
- 算法实现辅助结构: 如 Warnsdorff 算法中的后继列表等。
- 统计信息: 尝试步数、回溯次数、用时等。

## 3 详细设计

使用 Warnsdorff 算法的 Jumping 模块划分:

- 输入校验: 检查 `n` 合法范围与起点坐标边界。
- 数据初始化: 分配 `board` , 清零并置起点。
- 可行性检测函数 `isValid(x,y)` : 越界 & 已访问判断。
- 后继度计算函数 `degree(x,y)` : 遍历 8 方向统计未访问合法格。
- 下一步生成函数 `nextMoves(x,y)` : 过滤合法后继, 附带度数计算, 按度数升序返回。
- 主搜索 `search(step,x,y)` :
  - 若 `step == n * n` 成功, 按需输出解法。
  - 获取 `nextMoves` ; 循环尝试, 递归; 失败则复原 `board` 。
- 结束处理: 输出路径或无解或未找到解等信息, 统计用时与回溯次数。
- 统计记录: 在每次递归进入、回退更新 `counters` 。

边界与异常:

- 对于较小的棋盘 (如 `n=5`), 将给出全部解; 更大的棋盘找到一个解即跳出搜索, 进入回放模块。
- 极大棋盘可能导致性能问题, 需合理限制 `n` 上限。
- 起点不合法立即报错。

解法回放模块:

- 读取保存的路径文件并检查合法性
- 解析路径数据
- 逐步在棋盘上显示马的移动过程
  - 由于过程在控制台进行, 棋盘规模相对较小 (设定最大棋盘大小为 `12 * 12`), 且步骤间 `pause` 时间较长, 可以采用朴素循环方法实现

## 4 实验结果

测试环境: 本地普通笔记本 CPU 单线程。

普通 DFS 样例结果:

- $n=5$ , 起点 (0,0): 在合理时间 (秒级) 内找到全部 304 条路径 (未考虑对称重复等情况)。

```
Solution #304 found.
Total solutions found: 304
Total function steps: 1735079
Elapsed wall time: 658 ms (0.658 s)
Elapsed CPU time: 19.076 s
-----
Replaying Knight's Tour solution from file: board_5_(0_0)_knights_tour_first_solution.txt
Board size: 5x5
Press Enter to step through each move, or type 'a' and Enter to autoplay.
```

- $n=8$ , 起点 (0,0): 在合理时间内找到至少一条完整路径。但是在  $5 * 10^7$  次搜索内仅找到 4 条路径。

```
This is a placeholder for the Jumping (Knight's Tour) problem solver.
Enter the size of the chessboard (max 8): 8
Chessboard size set to 8x8.
Enter the initial position of the knight (e.g., 0 0 for top-left corner): 0 0
Initial position set to (0, 0).
A complete tour is found:
  1  60  39  34  31  18   9  64
 38  35  32  61  10  63  30  17
 59   2  37  40  33  28  19   8
 36  49  42  27  62  11  16  29
 43  58   3  50  41  24   7  20
 48  51  46  55  26  21  12  15
 57  44  53   4  23  14  25   6
 52  47  56  45  54   5  22  13
Function steps: 10000000, Current depth: 53, Solutions found: 1
```

Warnsdorff 样例结果:

- $n=8$ , 起点 (0,0): 成功生成一条完整路径, 用时 3 ms, 搜索执行次数 169 (作为对比, 路径长度 64)。

```
C:\Users\Kommin\Desktop\Writings\C5\main.exe
This is a placeholder for the Jumping (Knight's Tour) problem solver.
Enter the size of the chessboard (max 64): 8
Chessboard size set to 8x8.
Enter the initial position of the knight (e.g., 0 0 for top-left corner): 0 0
Initial position set to (0, 0).
First solution written to file: board_8_(0_0)_knights_tour_first_solution.txt
Total solutions found: 1
Total function steps: 169
Elapsed wall time: 3 ms (0.003 s)
Elapsed CPU time: 3.223 s

-----
Replaying Knight's Tour solution from file: board_8_(0_0)_knights_tour_first_solution.txt
Board size: 8x8
Press Enter to step through each move, or type 'a' and Enter to autoplay.
_
```

- n=64, 起点 (8,0): 第一条完整路径用时 10 ms, 搜索执行次数 15625 (路径长度 4096)。

```
C:\Users\Kommin\Desktop\Writings\C5\main.exe
This is a placeholder for the Jumping (Knight's Tour) problem solver.
Enter the size of the chessboard (max 64): 64
Chessboard size set to 64x64.
Enter the initial position of the knight (e.g., 0 0 for top-left corner): 8 0
Initial position set to (8, 0).
First solution written to file: board_64_(8_0)_knights_tour_first_solution.txt
Total solutions found: 1
Total function steps: 15625
Elapsed wall time: 10 ms (0.01 s)
Elapsed CPU time: 5.078 s

-----
Replaying Knight's Tour solution from file: board_64_(8_0)_knights_tour_first_solution.txt
Board size exceeds maximum replay size (12): 64

-----
Knight's Tour experiment finished. Press Enter to exit.
_
```

- n=64, 起点 (0,0): 在  $5 \times 10^7$  次搜索内找不到完整路径, 表明某些起点仍较难。

```
C:\Users\Kommin\Desktop\Writings\C5\main.exe
Function steps: 32000000, Current depth: 4065, Solutions found: 0
Function steps: 33000000, Current depth: 4068, Solutions found: 0
Function steps: 34000000, Current depth: 4069, Solutions found: 0
Function steps: 35000000, Current depth: 4070, Solutions found: 0
Function steps: 36000000, Current depth: 4070, Solutions found: 0
Function steps: 37000000, Current depth: 4069, Solutions found: 0
Function steps: 38000000, Current depth: 4067, Solutions found: 0
Function steps: 39000000, Current depth: 4068, Solutions found: 0
Function steps: 40000000, Current depth: 4066, Solutions found: 0
Function steps: 41000000, Current depth: 4065, Solutions found: 0
Function steps: 42000000, Current depth: 4064, Solutions found: 0
Function steps: 43000000, Current depth: 4067, Solutions found: 0
Function steps: 44000000, Current depth: 4064, Solutions found: 0
Function steps: 45000000, Current depth: 4070, Solutions found: 0
Function steps: 46000000, Current depth: 4065, Solutions found: 0
Function steps: 47000000, Current depth: 4063, Solutions found: 0
Function steps: 48000000, Current depth: 4070, Solutions found: 0
Function steps: 49000000, Current depth: 4069, Solutions found: 0
Function steps: 50000000, Current depth: 4069, Solutions found: 0
No solution found within the maximum search steps limit (50000000).
Total solutions found: 0
Total function steps: 50011481
Elapsed wall time: 32802 ms (32.802 s)
Elapsed CPU time: 36.167 s

-----
Replaying Knight's Tour solution from file:
Error opening file:

-----
Knight's Tour experiment finished. Press Enter to exit.
_
```

对于极大棋盘, 启发式显著提升效率, 但仍存在起点敏感性。以上 Warnsdorff 解法均成功输出到文件。

跳马解法回放结果：

- n=8, 起点 (0,0): 成功读取并回放 Warnsdorff 算法生成的路径，逐步显示马的移动过程，验证路径合法性。

