第五章　数理统计的基本概念与抽样分布习题

1. 设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是来自总体 $B(N, p)$ 的样本，则样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的分布律为________；$E\overline{X}=$ Np；$D\overline{X}=$ $\frac{Np(1-p)}{n}$；

$ES_n^2=$ $Np(1-p)$；$ES_n^{*2}=$ $\frac{n-1}{n}Np(1-p)$。

2. 设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是来自总体 $P(\lambda)$ 的样本，则样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的分布律为________；$E\overline{X}=$ λ；$D\overline{X}=$ $\frac{\lambda}{n}$；

$ES_n^2=$ λ；$ES_n^{*2}=$ $\frac{n-1}{n}\lambda$。

3. 设（4,6,4,3,5,4,5,8,4,7）是来自总体 X 的一个样本值，则样本均值 $\bar{x}=$ 5；样本方差 $S_{10}^2=$ 2.2；修正样本方差 $S_{10}^{*2}=$ $\frac{22}{9}$。

$U=\sum_{i=1}^{m} X_i \sim N(0,m)$

$V=\sum_{i=m+1}^{n} X_i \sim N(0,n-m)$

$Y=\frac{1}{m}U^2+\frac{1}{n-m}V^2$

4. 设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是来自正态总体 $N(0,1)$ 的样本，则统计量

$$Y=\frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^{m} X_i\right)^2+\frac{1}{n-m}\left(\sum_{i=m+1}^{n} X_i\right)^2$$ 服从的分布是 $Y \sim \chi^2(2)$。

5. 设 $(X_1, X_2, \cdots, X_6)$ 是来自正态总体 $N(0,1)$ 的样本，统计量

$$Y=(X_1+X_2+X_3)^2+(X_4+X_5+X_6)^2$$，则当常数

$C=$ 3 时，CY 服从自由度为 2 的 χ^2 分布。

6. 设 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 1.5 为来自正态总体 X 的样本，求样本均值，样本方差的观察值。

7. 设总体 $\boldsymbol{X}$ 服从泊松分布 $P(\lambda)$，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是总体 X 的一个样本。

（1）试求样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的分布律；$\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}e^{-\lambda}$

（2）试求 $E\overline{X}, D\overline{X}, ES_n^2, ES_n^{*2}$；

$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n)$

$\sum_{i=n+1}^{m+n} X_i^2 \sim \chi^2(m)$

8. 设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n, X_{n+1}, \cdots, X_{n+m})$ 是来自正态总体 $N(0, \sigma^2)$ 的一个样本，求统计量

$$F=\frac{m\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n\sum_{i=n+1}^{n+m} X_i^2}$$ 的概率分布。$F(n,m)$

9. 设 $\overline{X}_1$ 和 $\overline{X}_2$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的容量为 n 的两个独立样本 $(X_{11}, X_{12}, \cdots, X_{1n})$ 和 $(X_{21}, X_{22}, \cdots, X_{2n})$ 的样本均值，试确定 $\boldsymbol{n}$，使得这两个样本均值之差的绝对值超过 σ 的概率大约为 0.01。

10. 设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，$\overline{X}$ 和 S_n^2 是样本均值和样本方

差，又设 X_{n+1} 服从 $N(\mu,\sigma^2)$ 分布，且与 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立，试求统计量 $T=\dfrac{X_{n+1}-\overline{X}}{S_n}\sqrt{\dfrac{n-1}{n+1}}$ 的概率分布。

11. $(X_1,X_2,\cdots,X_{10})$ 是来自正态总体 $N(0,\sigma^2)$ 的一个样本，记

$$Y=a\left(\frac{X_1+X_2+X_3+X_4}{\sqrt{X_5^2+X_6^2+\cdots+X_{10}^2}}\right)$$

选择常数 $\boldsymbol{a}$，使 Y 服从 t 分布。

第五章　数理统计的基本概念与抽样分布习题解答

1. ($X_1, X_2, \ldots, X_n$）的分布律为 $\prod_{i=1}^{n} C_N^{x_i} p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-p)^{nN-\sum_{i=1}^{n} x_i}$；$E\overline{X}=Np$；

$D\overline{X}=\dfrac{Np(1-p)}{n}$；$ES_n^2=\dfrac{n-1}{n}Np(1-p)$；$ES_n^{*2}=Np(1-p)$．

2. 样本($X_1, X_2, \ldots, X_n$)的分布律为 $[\lambda^{\sum x_i}/\prod_{i=1}^{n} x_i!]e^{-n\lambda}$；　$E\overline{X}=\lambda$；$D\overline{X}=\dfrac{\lambda}{n}$；

$ES_n^2=\dfrac{n-1}{n}\lambda$；$ES_n^{*2}=\lambda$．

3. 均值 $\boldsymbol{\bar{x}}=5$；样本方差 $S_{10}^2=2.2$；修正样本方差 $S_{10}^{*2}=\dfrac{22}{9}$

4. $\underline{\chi^2(2)}$

5. <u>C= 1/3</u>,　<u>2</u>

6. 样本均值：$\bar{x}=\dfrac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_i=\dfrac{1}{6}(1.5+2+2.5+3+3.5+1.5)=14/6$

样本方差：$$s^2=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}(x_i-\bar{x})^2=\frac{1}{6}[(1.5-7/3)^2+(2.5-7/3)^2+(2.5-7/3)^2+(3-7/3)^2+(3.5-7/3)^2+(1.5-7/3)^2]$$

7.

(1) $\prod_{i=1}^{n} P(x_i)=\prod_{i=1}^{n}\dfrac{\lambda^{x_i}}{x_i!}e^{-\lambda}=e^{-n\lambda}\lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i}/\prod_{i=1}^{n} x_i!$，$\boldsymbol{x_i=0,1\ldots,i=1,2,\cdots,n}$.

(2) $E\overline{X}=E\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i=EX=\lambda,\quad D\overline{X}=\dfrac{DX}{n}=\dfrac{\lambda}{n}$

$$ES_n^2 = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^{\ 2} - \bar{X}^2\right] = EX^2 - E\bar{X}^2 = DX + (EX)^2 - D\bar{X} - (E\bar{X})^2$$

$$= \lambda + \lambda^2 - \frac{\lambda}{n} - \lambda^2 = \frac{n-1}{n}\lambda$$

$$ES_n^{*2} = E\frac{n}{n-1}S_n^2 = \frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}\lambda = \lambda$$

8. $F(n, m)$

9. 由题意,$\bar{X}_1 \sim \mathrm{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$， $\bar{X}_2 \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$, 且他们相互独立

则 $\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N(0, \frac{2\sigma^2}{n})$。由 $P\left\{\left|\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right| > \sigma\right\} = 0.01$

得 $1 - P\left\{-\sigma \le \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \le \sigma\right\} = 0.01$， 则 $P\left\{-\sigma \le \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \le \sigma\right\} = 0.99$

于是 $P\{-\frac{-\sigma}{\sqrt{\frac{2\sigma^2}{n}}} \le \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{2\sigma^2}{n}}} \le \frac{\sigma}{\sqrt{\frac{2\sigma^2}{n}}}\} = 0.99$，

$$P\{-\sqrt{\frac{n}{2}} \le \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{2\sigma^2}{n}}} \le \sqrt{\frac{n}{2}}\} = 0.99$$

于是：$\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(-\sqrt{\frac{n}{2}}\right) = 0.99$， $2\Phi\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right) - 1 = 0.99$，

$\sqrt{\frac{n}{2}} = 2.57$,求得 $n = 13.2$

10. 由题意 $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$， $X_{n+1} \sim \alpha = \frac{1}{3}$,

所以 $X_{n+1} - \bar{X} \sim N(0, \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{n})$， $\frac{nS_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

所以 $\frac{X_{n+1} - \bar{X}}{\sqrt{\frac{n+1}{n}\sigma^2}}[\sqrt{\frac{nS_n^2}{\sigma^2(n-1)}}]^{-1} \sim t\,(n\text{-}1)$,

即：$\frac{X_{n+1} - \bar{X}}{S_n}\sqrt{\frac{n-1}{n+1}} \sim t\,(n\text{-}1)$

11. 由于 $X_1+X_2+X_3+X_4 \sim N\left(0,4\sigma^2\right)$

则 $\dfrac{\left(X_1+X_2+X_3+X_4\right)}{\sqrt{4\sigma^2}} \sim N(0,1)$ ，又 $\dfrac{\left(X_5^2+X_6^2+\cdots+X_{10}^2\right)}{\sigma^2} \sim \chi^2(6)$，

由 T 分布的定义

$$\left[\frac{\left(X_1+X_2+X_3+X_4\right)}{\sqrt{4\sigma^2}}\right] \Bigg/ \sqrt{\frac{\left(X_5^2+X_6^2+\cdots+X_{10}^2\right)}{6\sigma^2}} \sim t(6)$$

得到 $a=\sqrt{\dfrac{6}{4}}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.