# 本科概率论与数理统计测试题(三)

1 2 3 4 5

0.2 0.3 0.4 0.5 0.6

## 一、 填空题

1.一台仪器由5个元件组成，元件发生故障与否相互独立，且第$i$个元件发生故障的概率为$P_i = 0.2 + 0.1(i-1)$，则发生故障的元件个数$X$的数学期望$EX =$ 2.0 .

$D \sim U[0,2]$. $S = \pi(\frac{D}{2})^2$

2.一零件的横截面是圆，对截面的直径进行测量，设其直径服从区间$[0,2]$上的均匀分布，则截面面积的数学期望为 $\frac{\pi}{3}$ ,面积的方差为___

$E(S) = \frac{\pi}{4}E(D^2) = \frac{\pi}{4}\int_0^2 \frac{1}{2}x^2 dx$ $D(S) = \frac{\pi^2}{16}D(D^2)$

$x+Y=n$

$X, Y \sim b(n, \frac{1}{2})$

$D(X) = D(Y) = \frac{n}{4}$

$E(X) = E(X) = \frac{n}{2}$

3.将一枚硬币重复掷$n$次，以$X$和$Y$分别表示正面向上和反面向上的次数，则$X$和$Y$的相关系数$\rho_{XY} =$ $-1$ .

$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(nX - X^2) - \frac{n^2}{4} = nE(X) - E(X^2) - \frac{n^2}{4} = -\frac{n}{4}$

$\rho_{XY} = \frac{-\frac{n}{4}}{(\frac{n}{4})} = -1$

4.设随机变量$X$在$[a,b]$上服从均匀分布，则$X$的$k$阶原点矩为______，三阶中心矩为 0 .

$E(k)$

$\frac{1}{k+1}(a^k + a^{k-1}b + \cdots + ab^{k-1} + b^k)$

$E(X - E(X))^3 = E(X - \frac{a+b}{2})^3 = \int_a^b (x - \frac{a+b}{2})^3 \frac{1}{b-a} dx = \left[\frac{(x - \frac{b+a}{2})^4}{4(b-a)}\right]_a^b = 0.$

## 二、选择题

B

1.设连续型随机变量$X$的分布函数为 $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 00 \\ x^3, & 0 < x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$

$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 < x \le 1 \\ 0, & \sim \end{cases}$

则$EX$=

(A) $\int_0^{+\infty} x^4 dx$ (B) $\int_0^1 3x^3 dx$ (C) $\int_0^1 x^4 dx + \int_1^{+\infty} x dx$ (D) $\int_0^{+\infty} 3x^3 dx$

$E(X) = 3$, $E(Y) = 4$, $D(X) = 2.1$, $D(Y) = 2.4$

B

2.设随机变量$X, Y$相互独立，且$X \sim B(10, 0.3)$, $Y \sim B(10, 0.4)$，则$E(2X - Y)^2 =$

$E(2X - Y) = 2E(X) - E(Y) = 2$ , $D(2X - Y) = 4D(X) + D(Y) = 10.8$

$E(2X-Y)^2 = D(2X-Y) + E^2(2X-Y)$

$= 10.8 + 4 = 14.8$

(A) 12.6 (B) 14.8 (C) 15.2 (D) 18.9

D

3.设顾客在某银行的窗口等待服务的时间为$X$分钟，$X$服从指数分布（参数是$\frac{1}{5}$），等待的时间超过10分钟，顾客就要离去，某顾客在一个月内要去银行5次，则他至少有一次离去的概率是

$X \sim E(\frac{1}{5})$ $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

$P(Y \ge 1) = 1 - P(Y = 0)$

$= 1 - P^5(X \le 10)$

$= 1 - (1 - e^{-2})^5$

$\int_0^{10} \frac{1}{5} e^{-\frac{x}{5}} dx = -e^{-\frac{x}{5}}\Big|_0^{10} = 1 - e^{-2}$

(A) $5(1 - e^{-2})$ (B) $\frac{1}{5}(1 - e^{-2})$ (C) $(1 - e^{-2})^5$ (D) $1 - (1 - e^{-2})^5$

AC

4.设随机变量$X$和$Y$独立同分布，记$U = X - Y, V = X + Y$,则随机变量$U$与$V$必然

$E(U) = E(X) - E(Y)$ , $E(V) = E(X) + E(Y)$

(A) 不独立 (B) 独立 (C) 相关系数不为零 (D) 相关系数为零

$Cov(V, U)$

$\begin{cases} U = X - Y \\ V = X + Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = \frac{1}{2}(U + V) \\ Y = \frac{1}{2}(V - U) \end{cases}$

$= E(X^2 - Y^2) - E^2(X) + E^2(Y)$

$= D(X) - D(Y)$

5.设$X \sim N(1,2^2)$，$X_1, X_2, \cdots, X_n$,为$X$的样本，则下列选项正确的是

(A) $\dfrac{\overline{X}-1}{2} \sim N(0,1)$　　　　(B) $\dfrac{\overline{X}-1}{4} \sim N(0,1)$

(C) $\dfrac{\overline{X}-1}{2/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$　　　　(D) $\dfrac{\overline{X}-1}{\sqrt{2}} \sim N(0,1)$

## 三、计算证明题

1. 从学校乘汽车到火车站的途中有 3 个交通岗，假设在各个交通岗遇到红灯的事件是相互独立的，并且概率都是$\dfrac{2}{5}$,设$X$为途中遇到红灯的次数，求随机变量$X$的分布律和数学期望.

2. $k$个人在一楼进入电梯，楼上有$n$层. 设每个人在任何一层楼出电梯是等可能的，若用$X$表示电梯的停梯次数，求$EX$.

3.已知随机变量$X$的分布函数为 $F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \dfrac{x}{4}, & 0 < x \le 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$，求 $E(X)$, $D(X)$.

4. 已知随机变量$X$和$Y$分别服从正态分布$N(1,3^2)$和$N(0,4^2)$,且$X$与$Y$的相关系数$\rho_{XY}=-\dfrac{1}{2}$.设$Z=\dfrac{X}{3}+\dfrac{Y}{2}$,求$X$与$Z$的相关系数$\rho_{XY}$.

5. 现有一大批种子，其中良种占$\dfrac{1}{6}$，现从中任取 6000 粒. 试分别
(1) 用切比雪夫不等式估计；(2) 用中心极限定理计算：这 6000 粒中良种所占的比例与$\dfrac{1}{6}$之差的绝对值不超过 0.01的概率.

6. 从正态总体$X \sim N(\mu, 6^2)$中抽取容量为$n$的样本，
(1) 若$\mu = 3.4$，$n$至少应取多大才能保证样本的均值位于区间$(1.4, 5.4)$内的概率不小于0.95？
(2) 若保证$\mu$的95%的置信区间的长度小于2，$n$至少应取多大？