第一章 概率

§4 概率计算：计数方法

"抛硬币"、"掷骰子"等随机试验的特征：

1. 只有有限个基本结果
2. 每个基本结果的出现是等可能的

古典概型

设随机试验的样本空间为 Ω, 若

① Ω只含有限个样本点，即

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$$

② 每个样本点的出现是等可能的，即

$$P\{\omega_1\}=P\{\omega_2\}=\cdots P\{\omega_n\}=\frac{1}{n}$$

则称该试验为**等可能概型**，也称为**古典概型**.

问

怎样计算等可能概型中一般事件的概率？

等可能概型的概率计算

设事件 A 含 k 个样本点，即

$$A=\{\omega_{i_1},\omega_{i_2},\cdots,\omega_{i_k}\}$$
$$=\{\omega_{i_1}\}\cup\{\omega_{i_2}\}\cup\cdots\cup\{\omega_{i_k}\}$$

$$\therefore\quad P(A)=P\{\omega_{i_1}\}+P\{\omega_{i_2}\}+\cdots+P\{\omega_{i_k}\}$$
$$=\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}$$
$$=\frac{k}{n}$$

有利场合

$$P(A)=\frac{\text{导致}A\text{发生的方式个数}}{\text{所有试验结果个数}}=\frac{k}{n}$$

$$P(A)=\frac{A\text{的有利场合数}}{\text{样本点总数}}=\frac{k}{n}$$

例 抛两枚硬币，求出现一个正面一个反面的概率.

解 该试验的样本空间为

$$\Omega=\{\mathrm{HH},\mathrm{HT},\mathrm{TH},\mathrm{TT}\}$$

这是一个古典概型，事件 A：“一个正面一个反面”的有利场合是HT, TH

$$\therefore\quad P(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

小趣闻

18世纪著名的法国数学家达朗贝尔取样本空间为

$$\Omega=\{\mathrm{HH},\mathrm{HT},\mathrm{TT}\}$$

这不是等可能概型!

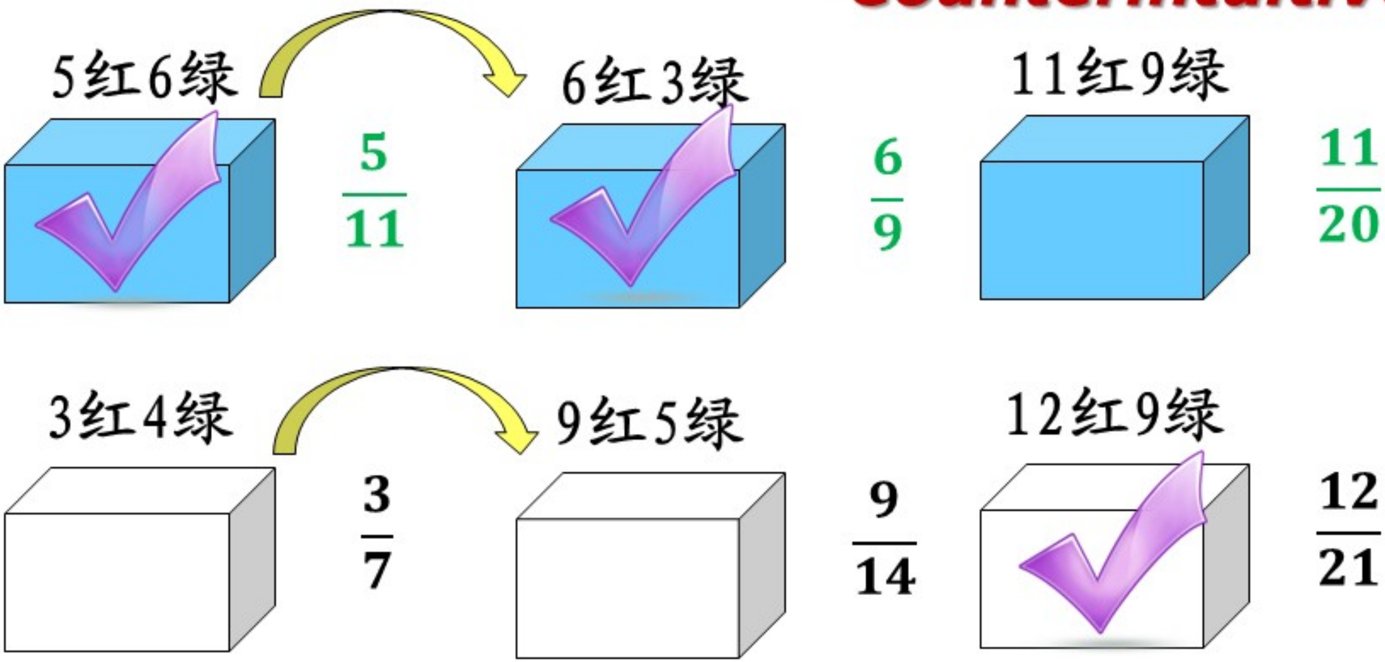
他计算得

$$P(A)=\frac{1}{3}\ \times$$

§4 概率计算：计数方法

规则：两个盒子各装红、绿色球若干. 允许先选择一个盒子，然后从选中的盒子里面随机选一个球. 如果选中红球，就得到奖品. 应该从哪个盒子里面选取？

Counterintuitive!



§4 概率计算：计数方法

一所美国高校的两个学院，分别是法学院和商学院，新学期招生．人们怀疑这两个学院有性别歧视．现作如下统计：

法学院

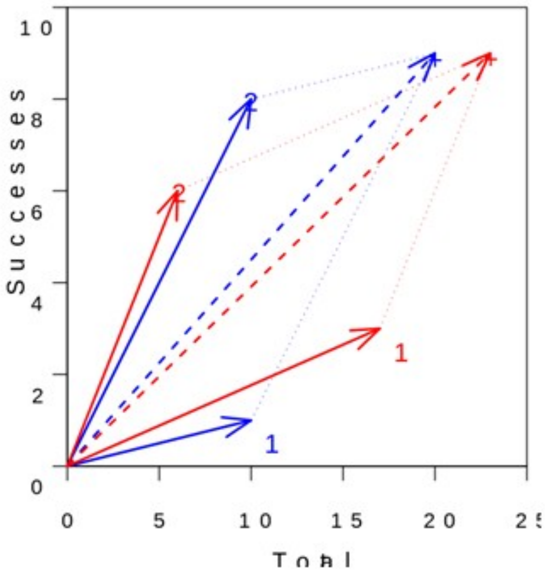
性别	录取	拒收	总数	录取比例
男生	8	45	53	15.1%
女生	51	101	152	33.6%
合计	59	146	205	

商学院

性别	录取	拒收	总数	录取比例
男生	201	50	251	80.1%
女生	92	9	101	91.1%
合计	293	59	352	

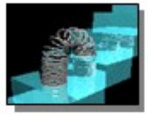
汇总后

性别	录取	拒收	总数	录取比例
男生	209	95	304	68.8%
女生	143	110	253	56.5%
合计	352	205	557	



Vector interpretation

为了避免辛普森悖论出现，就需要斟酌个别分组的权重，以一定的系数去消除**由分组资料基数差异所造成的影响**，同时必需了解该情境是否存在其他潜在要因而综合考虑.



排列与组合

选排列 从 n 个不同的元素中，任取 $k(\le n)$ 个元素，按照一定的顺序排成一列，全部排列个数为

$$A_n^k=\frac{n!}{(n-k)!}=n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

全排列 当 $k=n$ 时，称为全排列，

$$A_n^n=n!$$

排列的特点
取数与次序有关

组　合 从 n 个不同的元素中，任取 $k(\le n)$ 个元素并成一组，全部组合数为

$$\binom{n}{k}=C_n^k=\frac{A_n^k}{A_k^k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

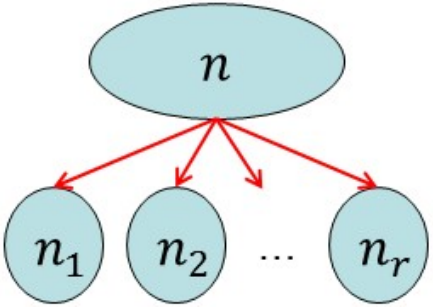
$$=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

组合的特点
取数与次序无关

推广形式

一般地，把 n 个球随机地分成 r 组 ($n>r$), 要求第 i 组恰有 n_i 个球($i=1,\ldots r$)，共有分法:

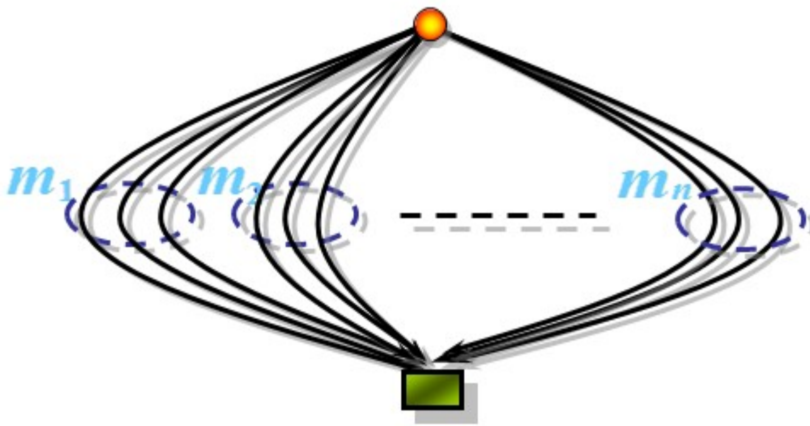
$$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_r!}=\binom{n}{n_1 n_2\ldots n_r}$$



加法原理

做一件事共有 n 类方法：

- 第一类方法有 m_1 种方法
- 第二类方法有 m_2 种方法
- ……
- 第 n 类方法有 m_n 种方法

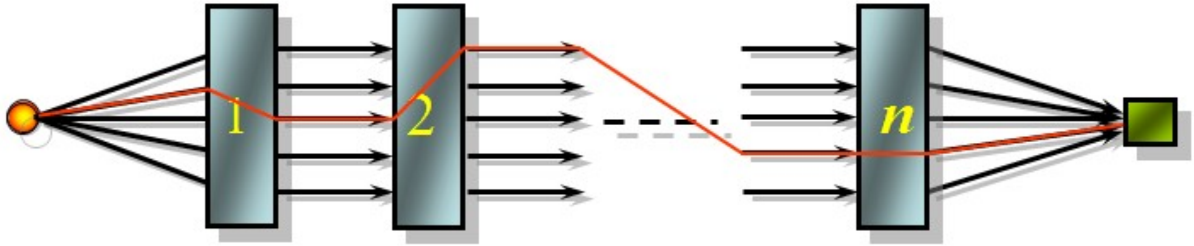


完成这件事的方法总数

$$N = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$$

乘法原理

做一件事共有 n 个步骤
- 第一步有 m_1 种方法
- 第二步有 m_2 种方法
- ……
- 第 n 步有 m_n 种方法

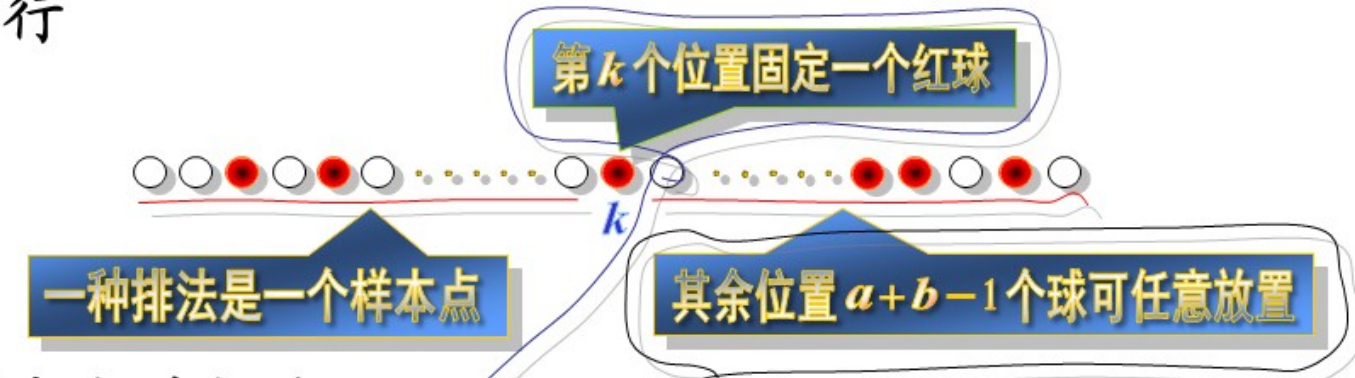


完成这件事的方法总数

$$N = m_1 \cdot m_2 \cdots m_n$$

例 袋中有 a 只红球，b 只白球，从袋中随机地将球一个个取出，求第 k 次取出的是红球的概率 $(1 \le k \le a+b)$.

分析 **思路一** 假设除颜色外球是可区分的，将取出的球排成一行



样本点总数为 $(a+b)!$

有利场合数为 $C_a^1 \cdot (a+b-1)!$

故所求概率为

$$p_k = \frac{a(a+b-1)!}{(a+b)!} = \frac{a}{a+b} \quad (1 \le k \le a+b)$$

例 袋中有 a 只红球，b 只白球，从袋中随机地将球一个个取出，求第 k 次取出的是红球的概率$(1 \le k \le a+b)$.

分析 思路二 假设除颜色外球是不可区分的，将取出的球排成一行

样本点总数为 C_{a+b}^{a}

有利场合数为 C_{a+b-1}^{a-1}

故所求概率为

$$p_k = \frac{C_{a+b-1}^{a-1}}{C_{a+b}^{a}} = \frac{a}{a+b} \quad (1 \le k \le a+b)$$

§4 概率计算：计数方法

例 袋中有a只红球，b只白球，从袋中随机地将球一个个取出，求第k次取出的是红球的概率$(1 \le k \le a+b)$.

注

① **思路一** 假设除颜色外球是可区分的 排列

思路二 假设除颜色外球是不可区分的 组合

② 确定了样本空间的结构后，有利场合的构造必须与样本空间结构一致

③ **"出人意料"且有意思的结果**

设有n个人的班分到$m\ (< n)$张音乐会门票，全班采用抽签的方法来分配门票. 由上例的结果知，任何人是否抽到门票签与先后次序无关，抽到门票签概率都是$\frac{m}{n}$.

④ **很多实际问题都可以归结为（摸或扔）球模型**

例 将 n 只球随机地放入 $N\ (\ge n\ )$ 个盒子中去，试求每个盒子至多有一只球的概率。

分析 任一只球进任一盒子是等可能的，故这是古典概型问题

基本事件

解 样本点总数为

$$N \cdot N \cdots N = N^n$$

"每个盒子至多有一只球"的有利场合数为

$$A_N^n = N(N-1)\cdots[N-(n-1)]$$

故所求概率为

$$p = \frac{A_N^n}{N^n} = \frac{N(N-1)\cdots(N-n+1)}{N^n}$$

例 从数字$0,1,2,\cdots,9$中随机地(可重复)抽5个数字，则抽出的5个数字都不相同的概率是

$$p=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{10^5}=0.3024$$

无理数e的随机特征

考虑无理数

$$e=2.71828\cdots$$

将e的前800位小数分成160组，每组的5个数字视为从$0,1,2,\cdots,9$中随机抽出.

数得5个数字都不相同共有52组，其频率为

$$\frac{52}{160}=0.325\approx 0.3024$$

例（生日问题）参加某次聚会共n个人，求没有两人生日相同的概率.

解 n个人 ⟷ n只球，365天 ⟷ 365个盒子，则

$$P\{没有两人生日相同\}=\frac{A_{365}^{n}}{365^{n}}$$

$$\therefore\ P\{至少有两人生日相同\}=1-\frac{A_{365}^{n}}{365^{n}}$$

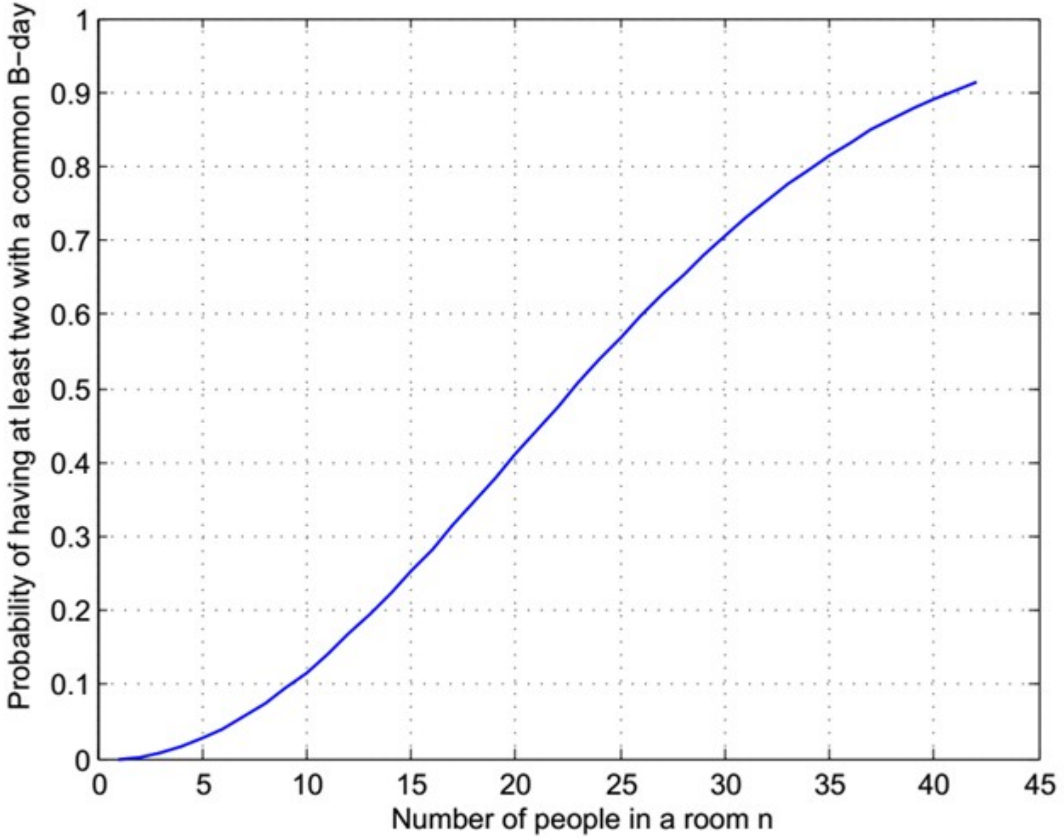
至少有两人生日相同的概率计算结果

	20	25	30	40	50	55	100
p	0.41	0.57	0.71	0.89	0.97	0.99	0.9999997

在实际应用中，概率非常接近1的事件可近似地看成必然事件，称为**几乎必然事件**

例 一个有100人的班级中，有两个人的生日在同一天是几乎必然的.

§4 概率计算：计数方法



Probability of having at least two with a common B−day
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
Number of people in a room n

例 某接待站在某周接待了12次来访,已知这12次来访都是在周二和周四进行的.问是否可以推断接待站的接待时间是有规定的?

解 假设接待站的接待时间没有规定，且认为来访者每周任一天到达是等可能的. 则

$$P\{12\text{次来访都在周二和周四}\}=\frac{2^{12}}{7^{12}}$$

$$=0.0000003$$

既然这个概率非常小，
那么这个事件就不应该发生

概率非常小的事件，称为**小概率事件.**

实际推断原理: 小概率事件在一次试验中是几乎不可能发生的.

由实际推断原理,可推断接待站接待时间是有规定的.

几何概型

古典概型的特点
- 有限个样本点
- 样本点等可能出现

问 怎样将样本空间推广到“无限个样本点”而又有某种“等可能性”？

例 某1万平方米的区域中，有一个大约10平方米的敌碉堡.现用迫击炮随机向该区域发射一发炮弹,问能将敌碉堡摧毁的概率是多少？

分析 由于炮弹发射的随机性,可认为炮弹落在1万平方米的区域中任一点是等可能的.则所求概率为

$$p=\frac{\text{碉堡面积}}{\text{区域总面积}}$$
$$=\frac{10}{10000}=0.001$$

几何概型

随机试验 向平面有界区域Ω投掷一个点

样本空间 Ω

事　　件 点落在可测量面积的平面区域A

事件概率

$$P(A)=\frac{A\text{的面积}}{\Omega\text{的面积}}$$

则称上述试验为**几何概型**.

注:

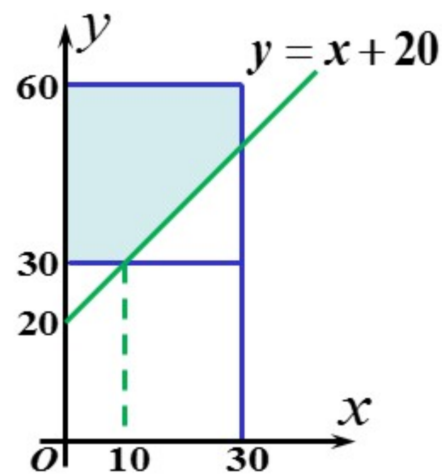
① 事件A发生的概率与位置无关,只与A的面积有关,这体现了某种“等可能性”

② 如果样本空间为有界区间、空间有界区域，则“面积”改为“长度”、“体积”

例 在一次演习中，某部队A接到命令要赶到某小河D岸为行进中的B部队架设浮桥. 假设A部队将于7点到7点30分之间到达D岸，架桥需要20分钟时间；B部队将于7点30分至8点之间到达D岸. 试求B部队到达D岸时能立即过河的概率.

解 设7点为零时,记 x, y分别表示A部队与B部队到达D岸的时间,则B部队到达D岸时能立即过河的充要条件是

$$\begin{cases} x+20 \le y \\ 0 \le x \le 30 \\ 30 \le y \le 60 \end{cases}$$



这是一个几何概型，所求概率是

$$p = \frac{30^2 - 20^2/2}{30^2} = \frac{7}{9}$$

课后作业

P21： 28, 29

补充题：

1、从n双尺码不同的鞋子中任取$2r$ ($2r<n$)只，求下列事件的概率：

1) 所取$2r$只鞋子中没有两只成对;

2) 所取$2r$只鞋子中只有两只成对;

3) 所取$2r$只鞋子恰好配成r对.

2、(匹配问题) 将4把能打开4间不同房门的钥匙随机发给4个人,试求至少有一人能打开门的概率.