《概率论与数理统计》

第一章　概率论的基本概念

§2．样本空间、随机事件

1．事件间的关系 $A \subset B$　则称事件 B 包含事件 A，指事件 A 发生必然导致事件 B 发生

$A \cup B = \{x | x \in A或x \in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的和事件，指当且仅当 A，B 中至少有一个发生时，事件 $A \cup B$ 发生

$A \cap B = \{x | x \in A且x \in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的积事件，指当 A，B 同时发生时，事件 $A \cap B$ 发生

$A — B = \{x | x \in A且x \notin B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的差事件，指当且仅当 A 发生、B 不发生时，事件 $A — B$ 发生

$A \cap B = \phi$，则称事件 A 与 B 是互不相容的，或互斥的，指事件 A 与事件 B 不能同时发生，基本事件是两两互不相容的

$A \cup B = S且\ A \cap B = \phi$，则称事件 A 与事件 B 互为逆事件，又称事件 A 与事件 B 互为对立事件

2．运算规则 交换律 $A \cup B = B \cup A$　$A \cap B = B \cap A$

结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$　$(A \cap B)C = A(B \cap C)$

分配律 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B)(A \cap C)$

德摩根律 $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$　$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

§3．频率与概率

定义　在相同的条件下，进行了 n 次试验，在这 n 次试验中，事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的**频数**，比值 n_A / n 称为事件 A 发生的**频率**

概率：设 E 是随机试验，S 是它的样本空间，对于 E 的每一事件 A 赋予一个实数，记为 P（A），称为事件的概率

1．概率 $P(A)$ 满足下列条件：

（1）**非负性**：对于每一个事件 A　$0 \le P(A) \le 1$

（2）**规范性**：对于必然事件 S　$P(S) = 1$

（3）**可列可加性**：设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是两两互不相容的事件，有

$P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$（$n$ 可以取 ∞）

2．概率的一些重要性质：

（i）$P(\phi)=0$

（ii）若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是两两互不相容的事件，则有 $P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$（$n$ 可以取 ∞）

（iii）设 A，B 是两个事件若 $A \subset B$，则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$，$P(\mathrm{B}) \geq P(\mathrm{A})$

（iv）对于任意事件 A，$P(A) \leq 1$

（v）$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$　　（逆事件的概率）

（vi）对于任意事件 A，B 有 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

§4 等可能概型（古典概型）

等可能概型：试验的样本空间只包含有限个元素，试验中每个事件发生的可能性相同

若事件 A 包含 k 个基本事件，即 $A=\{e_{i_1}\}\bigcup\{e_{i_2}\}\bigcup\cdots\bigcup\{e_{i_k}\}$，里

i_1，i_2，$\cdots$，i_k 是 $1,2,\cdots \mathrm{n}$ 中某 k 个不同的数，则有

$$P(A)=\sum_{j=1}^{k} P(\{e_{i_j}\}) = \frac{k}{n} = \frac{A\text{包含的基本事件数}}{\text{S中基本事件的总数}}$$

§5．条件概率

（1）　定义：设 A,B 是两个事件，且 $P(A)>0$，称 $P(B \mid A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$ 为事件 A 发生的条件下事件 B 发生的**条件概率**

（2）　条件概率符合概率定义中的三个条件

1° 非负性：对于某一事件 B，有 $P(B \mid A) \geq 0$

2° 规范性：对于必然事件 S，$P(S \mid A)=1$

3 可列可加性：设 $B_1, B_2, \cdots$ 是两两互不相容的事件，则有

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i | A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i | A)$$

（3） 乘法定理 设$P(A)>0$，则有$P(AB)=P(B)P(A|B)$称为乘法公式

（4） 全概率公式： $P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)$

贝叶斯公式： $P(B_k|A)=\dfrac{P(B_k)P(A|B_k)}{\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)}$

§6．独立性

定义 设 A，B 是两事件，如果满足等式$P(AB)=P(A)P(B)$，则称事件 A,B 相互独立

定理一 设 A，B 是两事件，且$P(A)>0$，若 A，B 相互独立，则$P(B|A)=P(B)$

定理二 若事件 A 和 B 相互独立，则下列各对事件也相互独立：A 与$\overline{B}$,$\overline{A}$与B,$\overline{A}$与$\overline{B}$

第二章 随机变量及其分布

§1 随机变量

定义 设随机试验的样本空间为$S=\{e\}$. $X=X(e)$是定义在样本空间 S 上的实值单值函数，称$X=X(e)$为随机变量

§2 离散性随机变量及其分布律

1． 离散随机变量：有些随机变量，它全部可能取到的值是有限个或可列无限多个，这种随机变量称为离散型随机变量

$P(X=x_k)=p_k$满足如下两个条件（1） $p_k\geq 0$，（2） $\sum_{k=1}^{\infty}P_k=1$

2． 三种重要的离散型随机变量

（1）$(0-1)$分布

设随机变量 X 只能取 0 与 1 两个值，它的分布律是

$P(X=k)=p^k(1-p)^{1-k}$，$k=0,1$ （$0<p<1$），则称 X 服从以 p 为参数的$(0-1)$分布或两点分布。

（2）伯努利实验、二项分布

设实验 E 只有两个可能结果：A 与$\overline{A}$，则称 E 为伯努利实验.设

$P(A)=p \quad (0<p<1)$，此时 $P(\bar{A})=1-p$.将 E 独立重复的进行 n 次，则称这一串重复的独立实验为 n 重伯努利实验。

$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$，$k=0,1,2,\cdots n$ 满足条件（1）$p_k \geq 0$，（2）$\sum_{k=1}^{\infty} P_k=1$ 注意到 $\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$ 是二项式（$p+q$）^{n} 的展开式中出现 p^k 的那一项，我们称随机变量 X 服从参数为 n，p 的二项分布。

（3）泊松分布

设随机变量 X 所有可能取的值为 0,1,2⋯，而取各个值的概率为

$P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, k=0,1,2\cdots$，其中 $\lambda>0$ 是常数，则称 X 服从参数为 λ 的泊松分布记为 $X \sim \pi$（λ）

§3 随机变量的分布函数

定义　设 X 是一个随机变量，x 是任意实数，函数 $F(x)=P\{X \leq x\}$，$-\infty<x<\infty$

称为 X 的分布函数

分布函数 $F(x)=P(X \leq x)$，具有以下性质(1)　$F(x)$ 是一个不减函数　（2）

$0 \leq F(x) \leq 1$，且 $F(-\infty)=0, F(\infty)=1$　（3）$F(x+0)=F(x)$，即 $F(x)$ 是右连续的

§4 连续性随机变量及其概率密度

连续随机变量：如果对于随机变量 X 的分布函数 F（x），存在非负可积函数 $f(x)$，使对于任意函数 x 有 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$，　则称 x　为连续性随机变量，其中函数 f(x)称为 X 的概率密度函数，简称概率密度

1 概率密度 $f(x)$ 具有以下性质，满足（1）$f(x) \geq 0$，(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$；

（3）$P(x_1 \leq X \leq x_2)=\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$；（4）若 $f(x)$ 在点 x 处连续，则有 $F'(x)=f(x)$

2,三种重要的连续型随机变量

(1)均匀分布

若连续性随机变量 X 具有概率密度 $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a<x<b \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$，则成 X 在区间(a,b)上服

从均匀分布.记为 $X \sim U$（a，b）

(2)指数分布

若连续性随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, & x>0\\ 0, & 其他\end{cases}$ 其中 $\theta>0$ 为常数，则称 X 服从参数为 θ 的指数分布。

（3）正态分布

若连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，$-\infty<x<\infty$，

其中 μ，σ（$\sigma>0$)为常数，则称X服从参数为 μ，σ 的正态分布或高斯分布，记为

$X \sim N$（μ，σ^2）

特别，当 $\mu=0$，$\sigma=1$ 时称随机变量 X 服从标准正态分布

§5 随机变量的函数的分布

定理　　设随机变量 X 具有概率密度 $f_X(x)$, $-\infty<x<\infty$, 又设函数 $g(x)$ 处处可导且恒有 $g'(x)>0$，则 Y=$g(X)$ 是连续型随机变量，其概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}f_X[h(y)]|h'(y)|, & \alpha<y<\beta\\ 0, & 其他\end{cases}$$

第三章　　多维随机变量

§1 二维随机变量

定义　设 E 是一个随机试验，它的样本空间是 $S=\{e\}$. $X=X(e)$ 和 $Y=Y(e)$ 是定义在 S 上的随机变量，称 $X=X(e)$ 为随机变量，由它们构成的一个向量（X，Y）叫做二维随机变量

设（X，Y）是二维随机变量，对于任意实数 x，y，二元函数

F（x，y）$=P\{(X\le x)\cap(Y\le y)\}\underline{\underline{记成}}P\{X\le x，Y\le y\}$ 称为二维随机变量（X，Y）的分布函数

如果二维随机变量（X，Y）全部可能取到的值是有限对或可列无限多对，则称（X，Y）是离散型的随机变量。

我们称 $P(X=x_i，Y=y_j)=p_{ij}$，i，$j=1,2,\cdots$ 为二维离散型随机变量（X，Y）的分布律。

对于二维随机变量（X，Y）的分布函数F（x，y），如果存在非负可积函数

f（x，y），使对于任意x，y有F（x，y）$=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}$f（u，v）dudv,则称（X，Y）是连续性的随机变量，函数f（x，y）称为随机变量（X，Y）的概率密度，或称为随机变量X和Y的**联合概率密度。**

§2 边缘分布

二维随机变量（X，Y）作为一个整体，具有分布函数F（x，y）.而X和Y都是随机变量，各自也有分布函数，将他们分别记为$F_X(x), F_Y(y)$，依次称为二维随机变量（X，Y）关于X和关于Y的**边缘分布函数。**

$$p_{i\bullet}=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=P\{X=x_i\},\ i=1,2,\cdots \qquad p_{\bullet j}=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}=P\{Y=y_i\},\ j=1,2,\cdots$$

分别称$p_{i\bullet}$ $p_{\bullet j}$为（X，Y）关于X和关于Y的**边缘分布律。**

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\ dy$　　　　$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\ dx$ 分别称$f_X(x)$，$f_Y(y)$为X，Y关于X和关于Y的**边缘概率密度**。

§3 条件分布

定义　设（X，Y）是二维离散型随机变量，对于固定的j，若$P\{Y=y_j\}>0$,

则称$P\{X=x_i|Y=y_j\}=\dfrac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\dfrac{p_{ij}}{p_{\bullet j}},i=1,2,\cdots$为在$Y=y_j$条件下随机变量X的条件分布律，同样

$P\{Y=y_j|X=X_i\}=\dfrac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}=\dfrac{p_{ij}}{p_{i\bullet}},j=1,2,\cdots$为在$X=x_i$条件下随机变量X的条件分布律。

设二维离散型随机变量（X，Y）的概率密度为$f(x,y)$，（X，Y）关于Y的边缘概率密度为$f_Y(y)$，若对于固定的y，$f_Y(y)$〉0，则称$\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$为在Y=y的条件下X的条件概率密度，记为$f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$

§4 相互独立的随机变量

定义 设F（x，y）及$F_X(x)$，$F_Y(y)$分别是二维离散型随机变量（X，Y）的分布

函数及边缘分布函数.若对于所有 x,y 有 $P\{X=x,Y=y\}=P\{X\le x\}\mathrm{P}\{\mathrm{Y}\le \mathrm{y}\}$，即

$\mathrm{F}\{x,y\}=\mathrm{F_X}(x)\mathrm{F_Y}(\mathrm{y})$，则称随机变量 X 和 Y 是相互独立的。

对于二维正态随机变量（X，Y），X 和 Y 相互独立的充要条件是参数 $\rho=0$

§5 两个随机变量的函数的分布

1，Z=X+Y 的分布

设(X,Y)是二维连续型随机变量，它具有概率密度 $f(x,y)$.则 Z=X+Y 仍为连续性

随机变量，其概率密度为 $f_{X+Y}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(z-y,y)\ dy$ 或 $f_{X+Y}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,z-x)\ dx$

又若 X 和 Y 相互独立，设（X，Y）关于 X，Y 的边缘密度分别为 $f_X(x),f_Y(y)$ 则

$f_{X+Y}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(z-y)\ f_Y(\mathrm{y})dy$ 和 $f_{X+Y}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)\ f_Y(z-x)dx$ 这两个公式称为

f_X,f_Y 的**卷积公式**

有限个相互独立的正态随机变量的线性组合仍然服从正态分布

2，$Z=\dfrac{Y}{X}$的分布、$Z=XY$的分布

设(X,Y)是二维连续型随机变量，它具有概率密度 $f(x,y)$，则 $Z=\dfrac{Y}{X}$，$Z=XY$

仍为连续性随机变量其概率密度分别为 $f_{Y/X}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}|x|f(x,xz)dx$

$f_{XY}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{1}{|x|}f(x,\dfrac{z}{x})dx$ 又若 X 和 Y 相互独立，设（X，Y）关于 X，Y 的边缘密度分别

为 $f_X(x),f_Y(y)$ 则可化为 $f_{Y/X}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)f_Y(xz)dx$

$$f_{XY}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|x|}f_{\mathrm{X}}(x)f_Y(\frac{z}{x})dx$$

3 $M=\max\{\mathrm{X，Y}\}$及$\mathrm{N}=\min\{X,Y\}$的分布

设 X，Y 是两个相互独立的随机变量，它们的分布函数分别为 $F_X(x),F_Y(y)$ 由于

$M=\max\{\mathrm{X，Y}\}$ 不大于 z 等价于 X 和 Y 都不大于 z 故有

$\mathrm{P}\{\mathrm{M}\le \mathrm{z}\}=\mathrm{P}\{\mathrm{X}\le \mathrm{z},\mathrm{Y}\le \mathrm{z}\}$ 又由于 X 和 Y 相互独立，得到 $M=\max\{\mathrm{X，Y}\}$ 的分布函

数为$F_{\max}(z)=F_X(z)F_Y(z)$

$\mathrm{N}=\min\{X,Y\}$的分布函数为$F_{\min}(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$

第四章　随机变量的数字特征

§1．数学期望

定义　设**离散型随机变量** X 的分布律为$P\{X=x_k\}=p_k$，k=1,2，…若级数$\sum_{k=1}^{\infty}x_k p_k$绝对收敛，则称级数$\sum_{k=1}^{\infty}x_k p_k$的和为随机变量 X 的数学期望，记为$E(X)$，即

$E(X)=\sum_i x_k p_k$

设**连续型随机变量** X 的概率密度为$f(x)$，若积分$\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx$绝对收敛，则称积分$\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx$的值为随机变量 X 的数学期望，记为$E(X)$，即$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$

定理　设 Y 是随机变量 X 的函数 Y=$g(X)$ (g 是连续函数)

（i）如果 X 是**离散型随机变量**，它的分布律为$P\{X=\mathrm{x_k}\}=p_k$，k=1,2，…若

$\sum_{k=1}^{\infty}g(x_k)p_k$绝对收敛则有$E(\mathrm{Y})=E(g(X))=\sum_{k=1}^{\infty}g(x_k)p_k$

（ii）如果 X 是**连续型随机变量**，它的分概率密度为$f(x)$，若$\int_{-\infty}^{\infty}g(x)f(x)dx$绝对收敛则有$E(\mathrm{Y})=E(g(X))=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)f(x)dx$

数学期望的几个重要性质

1 设 C 是常数，则有$E(C)=C$

2 设 X 是随机变量，C 是常数，则有$E(CX)=CE(X)$

3 设 X,Y 是两个随机变量，则有$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$；

4 设 X，Y 是相互独立的随机变量，则有$E(XY)=E(X)E(Y)$

§2 方差

定义　设 X 是一个随机变量，若$E\{[X-E(X)]^2\}$存在，则称$E\{[X-E(X)]^2\}$为 X 的方

差，记为D（x）即D（x）$=E\{[X-E(X)]^2\}$，在应用上还引入量$\sqrt{D(x)}$，记为$\sigma(x)$，称为标准差或均方差。

$$D(X)=E(X-E(X))^2=E(X^2)-(EX)^2$$

方差的几个重要性质

1 设C是常数，则有$D(C)=0,$

2 设X是随机变量，C是常数，则有$D(CX)=\mathrm{C}^2D(X)$，$D(X+C)=\mathrm{D(X)}$

3 设X,Y是两个随机变量，则有$D(X+Y)=\mathrm{D(X)}+\mathrm{D(Y)}+2\mathrm{E\{(X-E(X))(Y-E(Y))\}}$特别，若X,Y相互独立，则有$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

4 $D(X)=0$的充要条件是X以概率1取常数$\mathrm{E(X)}$，即$P\{X=E(X)\}=1$

切比雪夫不等式：设随机变量X具有数学期望$E(X)=\sigma^2$，则对于任意正数ε，不等式

$\mathrm{P}\{|\mathrm{X}-\mu|\geq\varepsilon\}\leq\dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$成立

§3 协方差及相关系数

定义　　量$E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$称为随机变量X与Y的协方差为$Cov(X,Y)$，即

$$Cov(X,Y)=E[(X-E(X))(Y-E(Y))]=E(XY)-E(X)E(Y)$$

而$\rho_{\mathrm{XY}}=\dfrac{Cov(\mathrm{X，Y})}{\sqrt{\mathrm{D(X)}}\sqrt{\mathrm{D(Y)}}}$称为随机变量X和Y的相关系数

对于任意两个随机变量X 和Y，$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2Cov(X,Y)$

协方差具有下述性质

1 $Cov(X,Y)=Cov(Y,X),\ Cov(aX,bY)=abCov(X,Y)$

2 $Cov(X_1+X_2,Y)=Cov(X_1,Y)+Cov(X_2,Y)$

定理　1　$|\rho_{XY}|\leq 1$

　　　2　$|\rho_{XY}|=1$的充要条件是，存在常数a,b使$P\{Y=a+bx\}=1$

当　$\rho_{\mathrm{XY}}=0$时，称X和Y不相关

附：几种常用的概率分布表

分布	参数	分布律或概率密度	数学期望	方差

两点分布	$0<p<1$	$P\{X=k)=p^k(1-p)^{1-k},k=0,1$,	p	$p(1-p)$
二项式分布	$n\ge 1$ $0<p<1$	$P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},k=0,1,\cdots n$,	np	$np(1-p)$
泊松分布	$\lambda>0$	$P(X=k)=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},k=0,1,2,\cdots$	λ	λ
几何分布	$0<p<1$	$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p,k=1,2,\cdots$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{1-p}{p^2}$
均匀分布	$a<b$	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & ,a<x<b\\ 0 & ，其他\end{cases}$，	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$
指数分布	$\theta>0$	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-x/\theta} & ,x>0\\ 0 & ,其他\end{cases}$	θ	θ^2
正态分布	μ $\sigma>0$	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2

第五章 大数定律与中心极限定理

§1. 大数定律

弱大数定理（辛欣大数定理） 设 $X_1,X_2\cdots$是相互独立，服从统一分布的随机变量序列，并具有数学期望$E(X_k)=\mu(k=1,2,\cdots)$.作前 n 个变量的算术平均$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k$，则对于任意$\varepsilon>0$，有$\lim_{n\to\infty}P\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\mu\right|<\varepsilon\}=1$

定义 设$Y_1,Y_2,\cdots Y_n\cdots$是一个随机变量序列，a 是一个常数，若对于任意正数ε，有$\lim_{n\to\infty}P\{|Y_n-a|<\varepsilon\}=1$，则称序列$Y_1,Y_2,\cdots Y_n\cdots$**依概率收敛于 a**，记为$Y_n\xrightarrow{p}a$

伯努利大数定理 设f_A是 n 次独立重复试验中事件 A 发生的次数，p 是事件 A 在每次试验中发生的概率，则对于任意正数ε〉0，有$\lim_{n\to\infty}P\{\left|\frac{f_n}{n}-p\right|<\varepsilon\}=1$或

$$\lim_{n\to\infty} P\{\left|\frac{f_n}{n}-p\right| \geq \varepsilon\} = 0$$

§2 中心极限定理

定理一（**独立同分布的中心极限定理**） 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，服从同一分布，且具有数学期望和方差 $E(X_i)=\mu,\ D(X_k)=\sigma^2$（k=1,2，…），则随机变量之和 $\sum_{i=1}^{n} X_k$ 标准化变量， $Y_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - E(\sum_{k=1}^{n} X_k)}{\sqrt{D(\sum_{k=1}^{n} X_k)}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$，

定理二（**李雅普诺夫定理**） 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n \cdots$ 相互独立，它们具有数学期望和方差 $E(X_k)=\mu_k,\ D(X_k)={\sigma_k}^2>0, k=1,2\cdots$ 记 ${B_n}^2=\sum_{k=1}^{n}{\varepsilon_k}^2$

定理三（**棣莫弗-拉普拉斯定理**）设随机变量 $\eta_n (n=1,2,\cdots)$ 服从参数为 $n, p(0<p<1)$ 的二项分布，则对任意 x，有 $\lim_{n\to\infty} P\{\frac{\eta_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq x\} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt = \Phi(x)$

1. 样本平均数：$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$.

2. 样本方差：$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$.

3. 设$X_1,\cdots,X_n$相互独立，X_i服从正态分布$N(\mu_i,\sigma_i^2)$，则其线性函数 $\eta=\sum_{i=1}^{n}a_iX_i$（$a_i$ 不全为零），也服从正态分布，且

$$E\eta=\sum_{i=1}^{n}a_i\mu_i,D\eta=\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sigma_i^2 .$$

4. 设$(X_1,\cdots,X_n)$是取自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$的样本，则

(1) $\overline{X}\sim N(\mu,\sigma^2/n)$；(2) $(\overline{X}-\mu)\sqrt{n}/\sigma\sim N(0,1)$.

5. 设$(X_1,\cdots,X_n)$是取自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$的样本，则

(1) $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\sim\chi^2(n-1)$；(2) $\overline{X}$ 与$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 相互独立 .

6. 设两个随机变量 ξ 与 η 相互独立，且 $\xi\sim N(0,1)$，$\eta\sim\chi^2(n)$，则 $T=\frac{\xi}{\sqrt{\eta/n}}$服从具有 n 个自由度的 t 分布.

7. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是取自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$的样本，$\overline{X}$，S 分别为样本的平均数和标准差，则 $T=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$.

8. 设 $X_1,\cdots,X_{n_1}$，$Y_1,\cdots,Y_{n_2}$ 分别是来自两个相互独立的正态总体 $N(\mu_1,\sigma^2)$和 $N(\mu_2,\sigma^2)$，则

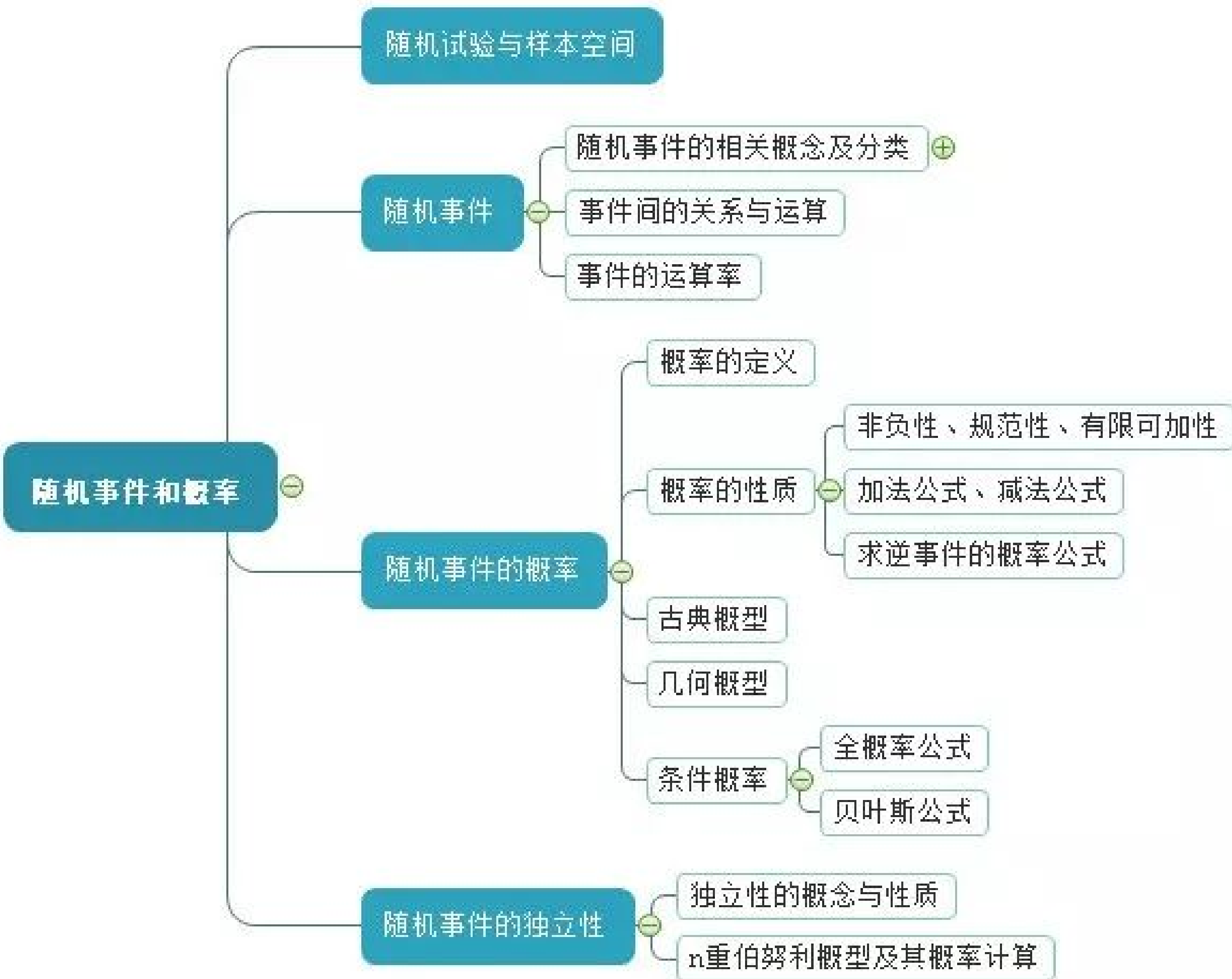
$$T=\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2).$$

9. 设两个随机变量 ξ_1 和 ξ_2 相互独立，且$\xi_i\sim\chi^2(n_i)(i=1,2)$，则

$$F=\frac{\xi_1/n_1}{\xi_2/n_2}\sim F(n_1,n_2).$$

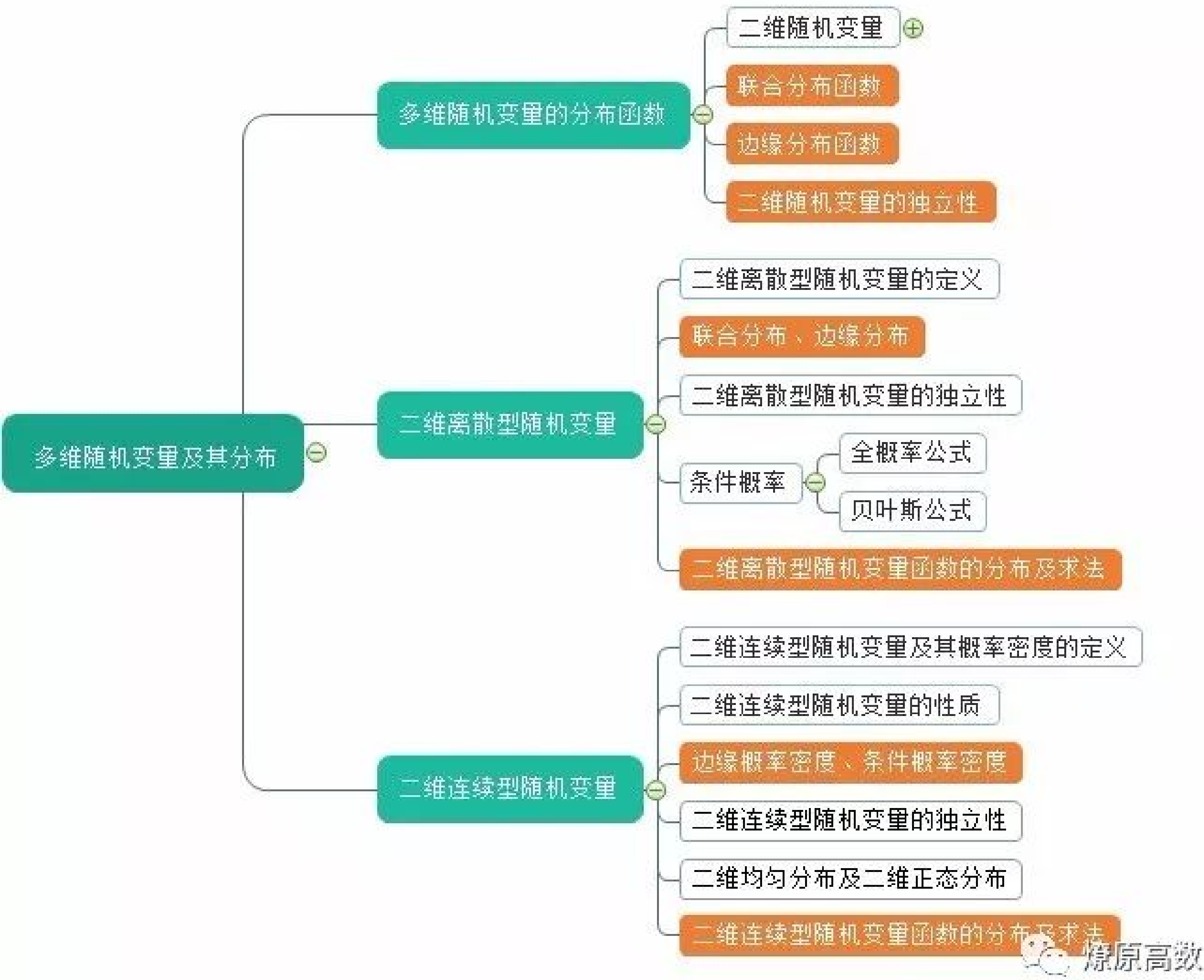
10. 设 $X_1,\cdots,X_{n_1}$ 和 $Y_1,\cdots,Y_{n_2}$ 分别是取自两个相互独立的正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$和 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$，则$F=\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$.

熔原高数


随机事件和概率
随机试验与样本空间
随机事件
随机事件的相关概念及分类
事件间的关系与运算
事件的运算率
随机事件的概率
概率的定义
概率的性质
非负性、规范性、有限可加性
加法公式、减法公式
求逆事件的概率公式
古典概型
几何概型
条件概率
全概率公式
贝叶斯公式
随机事件的独立性
独立性的概念与性质
n重伯努利概型及其概率计算

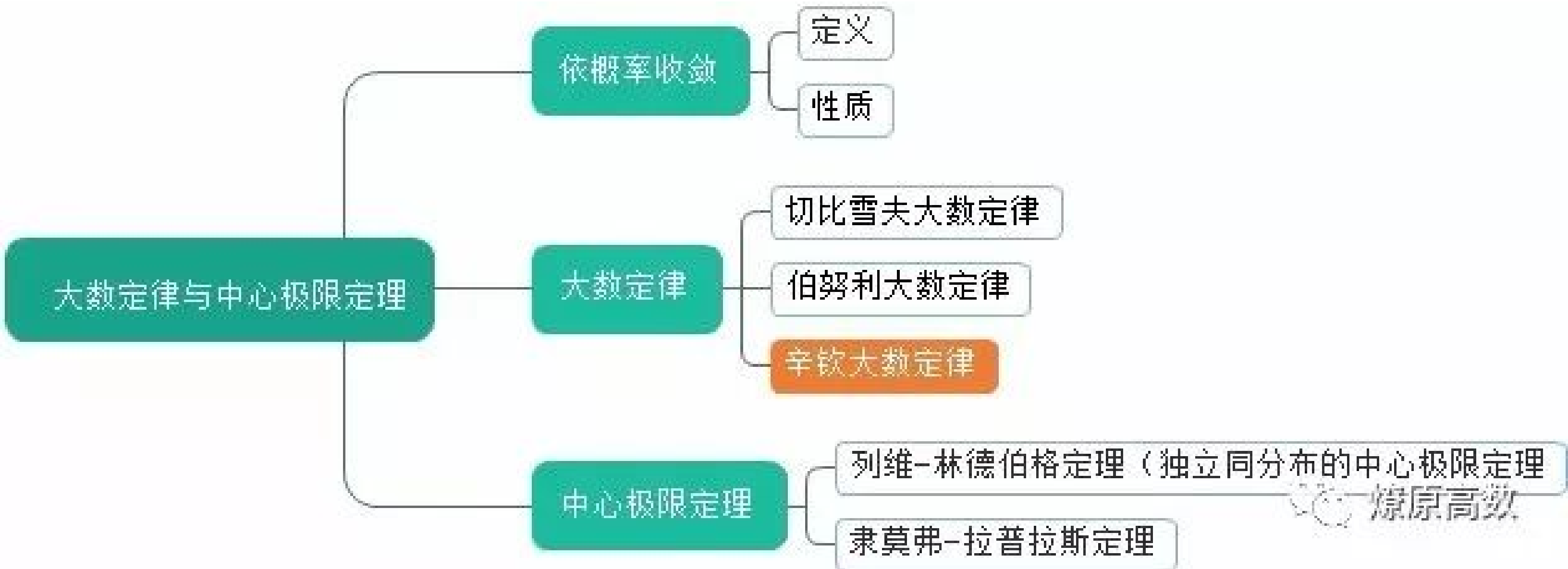
燎原高数

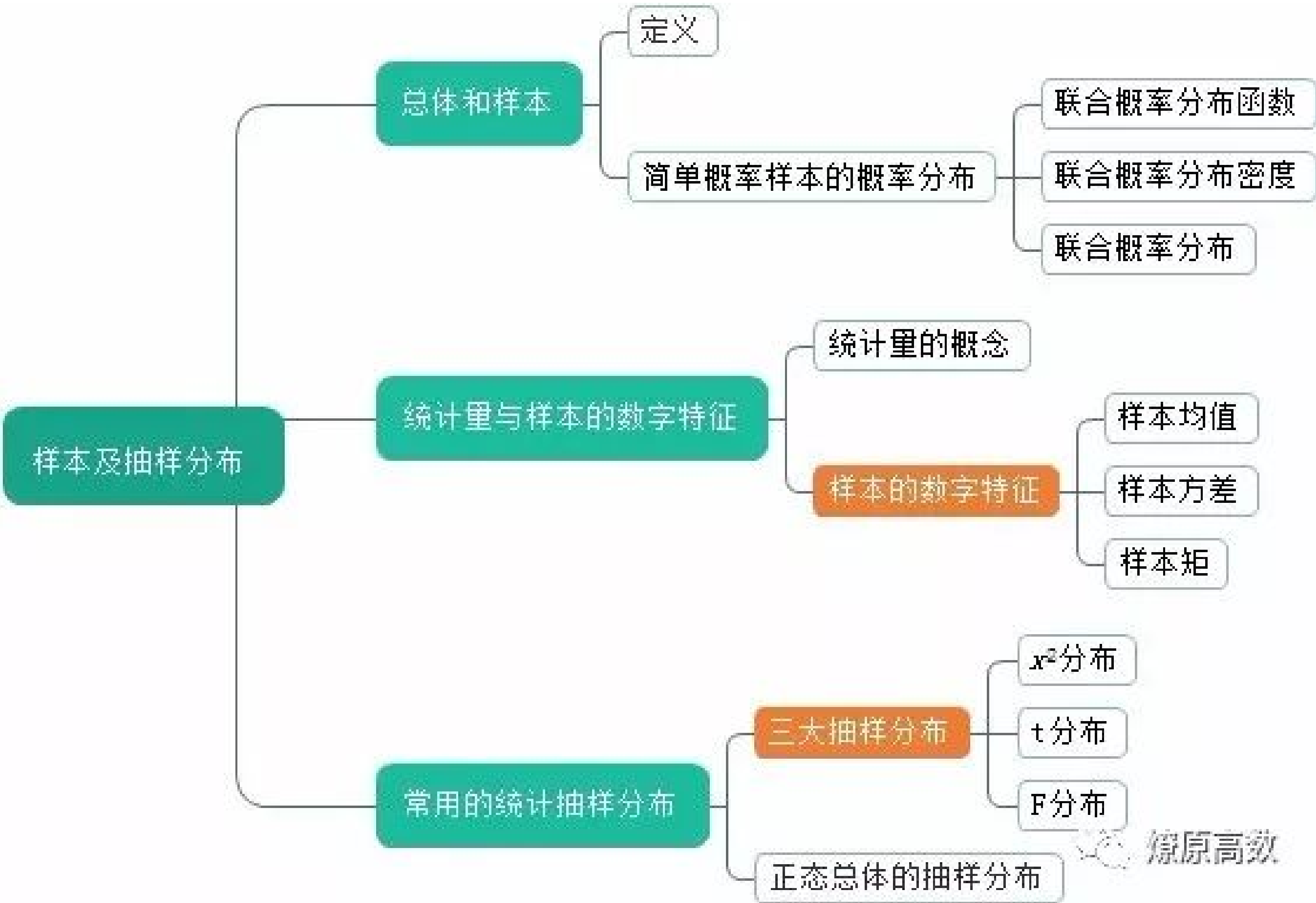

随机变量及其分布
随机变量
随机变量的定义
随机变量的分类
随机变量的分布函数
分布函数的定义
分布函数的性质
利用分布函数求概率
离散型随机变量
离散型随机变量的分布
离散型随机变量的分布函数
常用的离散型分布
0-1分布
二项分布B（n,p）
几何分布G(p)
超几何分布H（N,M,n）
泊松分布P(λ)
连续型随机变量
概率密度函数
概率密度的性质
常用的连续型分布
均匀分布
指数分布
正态分布
随机变量函数的分布
离散型随机变量函数的分布
连续型随机变量函数的分布
燎原高数


多维随机变量及其分布
多维随机变量的分布函数
二维随机变量
联合分布函数
边缘分布函数
二维随机变量的独立性
二维离散型随机变量
二维离散型随机变量的定义
联合分布、边缘分布
二维离散型随机变量的独立性
条件概率
全概率公式
贝叶斯公式
二维离散型随机变量函数的分布及求法
二维连续型随机变量
二维连续型随机变量及其概率密度的定义
二维连续型随机变量的性质
边缘概率密度、条件概率密度
二维连续型随机变量的独立性
二维均匀分布及二维正态分布
二维连续型随机变量函数的分布及求法
燎原高数

- 随机变量的数字特征
  - 随机变量的数学期望
    - 离散型随机变量的数学期望$E(X)=\sum x_k p_k$
    - 连续型随机变量的数学期望$E(X)=\int xf(x)dx$
    - 随机变量的数学期望的性质
    - 常用随机变量的数学期望
  - 随机变量的方差
    - 方差的定义：$D(X)=E\{[X-E(X)]2\}$
    - 方差的计算$D(X)=E(X2)-[E(X)]2$
    - 随机变量方差的性质
    - 常用随机变量的方差
  - 协和相关系统
    - 协方差
      - 定义
      - 计算公式
      - 相关性质
    - 相关系数
      - 定义
      - 性质
      - 不相关的等价条件
  - 随机变量的矩
    - k阶原点矩
    - k阶中心矩
    - 混合中心矩
  - 切比雪夫不等式

燎原高数


大数定律与中心极限定理
依概率收敛
定义
性质
大数定律
切比雪夫大数定律
伯努利大数定律
辛钦大数定律
中心极限定理
列维-林德伯格定理（独立同分布的中心极限定理
隶莫弗-拉普拉斯定理
煉原高数


样本及抽样分布
总体和样本
定义
简单概率样本的概率分布
联合概率分布函数
联合概率分布密度
联合概率分布
统计量与样本的数字特征
统计量的概念
样本的数字特征
样本均值
样本方差
样本矩
常用的统计抽样分布
三大抽样分布
x^2分布
t分布
F分布
正态总体的抽样分布
燎原高数

- 参数估计
  - 点估计
    - 矩估计
      - 1 求总体矩
      - 2 样本矩代替总体矩
      - 3 求出矩估计量
    - 最大似然估计
      - 1 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$
      - 2 $\ln L(\theta)=\sum_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$
      - 3 $\frac{d\ln L}{d\theta}=0$
  - 评级标准
    - 无偏性 $E(\theta)=\theta$
    - 有效性 $D(\hat{\theta}_1)\le D(\hat{\theta}_2)$
    - 相合性 $\lim_{n\to\infty} P\{|\hat{\theta}_n-\theta|\ge\varepsilon\}=0$
  - 区间估计
    - 双侧
      - 单正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$
        - μ
          - σ^2 已知 ： $\left(\bar{X}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}\cancel{(n-1)}\right)$
          - σ^2 未知： $\left(\bar{X}\pm\frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2}(n-1)\right)$
        - σ^2： $\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)},\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right)$
      - 双正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$N(\mu_2,\sigma_2^2)$
    - 单侧置信区间 $N(\mu,\sigma^2)$

- 概述
  - 原理
    - 反证法
      - 假设Ho为真，若得出“不合理现象”则转而接受H1
    - 小概率事件原理
      - 小概率在一次试验中不可能发生
  - 两类假设
    - H1/备择假设：希望得到证实的假设
    - Ho虚无假设：直接被检验的假设
  - 两类错误
    - Ⅰ型错误/α错误/弃真错误：其概率为α，当Ho正确时，我们拒绝了Ho（小概率事件真的发生了的时候）
    - Ⅱ型错误/β错误/取伪错误：概率为β，当Ho错误时，接受了Ho（大概率事件不一定发生）
    - 将范Ⅰ型错误的概率α称为假设检验的显著性水平。经检验，若差异超过某一误差限度，则表明差异具有统计学意义
    - 关系
      - 在其他条件不变的情况下，α和β不可能同时减小或增大
      - 因为α和β是在两个相互对立的前提下的概率，α+β不一定等于1
      - 在规定了α的情况下要同时尽量减少β，直接方法就是增大样本容量
    - 统计检验力
      - 某个检验能够正确拒绝一个错误的Ho的概率。1-β
      - 影响因素
        - 处理效应大小
          - 处理效应大，犯错误概率低
        - 显著性水平α
          - α增大，则β相应减小
        - 检验的方向性
          - 单侧检验的统计检验力要高于双侧
        - 样本容量
        - 标准差越小越容易显著
  - 两类检验
    - 单侧检验：强调某一方向的检验
    - 双侧检验：只强调差异
  - 步骤

真实情况	判断结果	
	接受 H_0	拒绝 H_0
H_0 为真	正确 $1-\alpha$	弃真：Ⅰ型错误 α
H_0 为假	取伪：Ⅱ型错误 β	正确 $1-\beta$