第一部分　选择题（每题 4 分，总共 20 分）

B

1. 下列各函数中可以作为某随机变量的分布函数的是（　　）.

（A）$F_1(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，$-\infty<x<+\infty$　　（B）$F_2(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

（C）$F_3(x)=e^{-x}$，$-\infty<x<+\infty$　　（D）$F_4(x)=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2\pi}\arctan x$，$-\infty<x<+\infty$

2. 随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}ce^{-2x} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$，则 $E(X)=$（　　）

（A）$\dfrac{1}{2}$　　（B）1　　（C）2　　（D）$\dfrac{1}{4}$

3. 设 (X,Y) 为二维随机向量，则 X 与 Y 不相关的充分必要条件是（　　）.

（A）X 与 Y 相互独立　　（B）$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

（C）$D(XY)=D(X)\cdot D(Y)$　　（D）$E(XY)=E(X)\cdot E(Y)$

4. 设随机变量 X 和 Y 相互独立，且都服从正态分布 $N(0,3^2)$，设 $X_1,X_2,\cdots,X_9$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_9$ 分别是来自两总体的简单随机样本，则统计量 $U=\dfrac{\sum_{i=1}^{9}X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{9}Y_i^2}}$ 服从分布是（　　）.

（A）$t(9)$　　（B）$t(8)$　　（C）$N(0,81)$　　（D）$N(0,9)$

5. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n\ge 2)$ 是正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，若统计量 $K\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$ 为 σ^2 的无偏估计，则 K 的值应该为（　　）.

（A）$\dfrac{1}{2n}$　　（B）$\dfrac{1}{2n-1}$　　（C）$\dfrac{1}{2n-2}$　　（D）$\dfrac{1}{n-1}$

第二部分 填空题（每空 2 分，总共 20 分）

1. 甲口袋有 2 只白球、4 只黑球；乙口袋有 2 只白球、3 只黑球. 从甲口袋任取一球放入乙口袋，然后从乙口袋中任取一球，此时从乙口袋中取出的是白球的概率为______.

2. 已知事件 $P(A)=0.4$, $P(A\cup\overline{B})=0.8$, 且A与B相互独立，那么 $P(\overline{B}\mid A)=$______.

3. 若随机事件 A,B 相互独立， $P(A)=0.5, P(B)=0.2$, 那么 $P(\overline{A}\cup\overline{B})=$______.

4. 已知事件 B_1,B_2,B_3 的概率有 $P(B_1)=P(B_2)=P(B_3)=\dfrac{1}{3}, P(B_1B_2)=0$,

   $P(B_1B_3)=P(B_2B_3)=\dfrac{1}{16}$, 那么 $P(B_1\cup B_2\cup B_3)=$______.

5. 随机变量 X,Y 相互独立且都服从泊松分布 $P(3)$，则 $Cov(2X-Y,X+Y)$

   $=$______.

6. $X\sim b(n,p)$, 且 $E(X)=2, D(X)=1$, 则$P\{X>1\}=$______.

7. 随机变量 X 的密度函数 $p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & 0<x<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，则 X^3 的数学期望为______.

8. 已知 $E(X)=0, D(X)=4$, 则 $E\left[(3X-2)^2\right]=$______.

9. 设 $X_1,X_2,\dots,X_{20}$ 为来自于均匀分布总体 $U(-1,1)$ 的一组独立同分布容量为 20 的样本，记 $\overline{X}=\dfrac{1}{20}\sum\limits_{i=1}^{20}X_i$，那么 $D\left(3\overline{X}\right)=$______.

10. 设 $X_1,X_2,\dots,X_{10}$ 为来自于总体 X 的一组独立同分布容量为10的样本，总体方差 $D(X)=3$. 记 $\overline{X}=\dfrac{1}{10}\sum\limits_{i=1}^{10}X_i$，那么 $E\left(\sum\limits_{i=1}^{10}X_i^2-10\left(\overline{X}\right)^2\right)=$______.

第三部分 问答题（每题 10 分，总共 60 分）

1. 已知随机变量X的概率密度为$f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|},-\infty<x<\infty$. 求$Y=X^2$的概率密度.

2. 设二维随机变量(X,Y)的联合概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}3y\ , & 0<x<2,0<y<\frac{x}{2}.\\ 0\ , & \text{其他}\end{cases}$$

试求边缘密度函数$f_X(x)$和$f_Y(y)$.

3. 设 (X,Y) 的概率密度为$f(x,y)=\begin{cases}x^2+axy\ , & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2,\\ 0, \text{其它}, & \end{cases}$

试求: (1) a；（2）$P\{X+Y\geq 1\}$；(3) X与Y是否相互独立?

4. 设随机变量X的密度函数为 $f(x,\theta)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1}, & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$,

其中$\theta>0$为未知参数, $X_1,X_2,\dots,X_n$是X的简单随机样本，$x_1,x_2,\dots,x_n$是X的样本观察值,

(1) 求θ的最大似然估计量； (2) 求θ的矩估计量.

5. 设某机器生产的零件长度（单位：cm）$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，今抽取容量为 16 的样本，测得样本均值 $\bar{x}=10$，样本方差 $s^2=0.16$．

(1) 求 μ 的置信度为 0.95 的置信区间；

(2) 检验假设 $H_0:\sigma^2 \le 0.1$（显著性水平为 0.05）．

(附注)　$u_{0.95}=1.645$，$u_{0.975}=1.96$，
$t_{0.95}(16)=1.746$，$t_{0.95}(15)=1.753$，$t_{0.975}(15)=2.132$，
$\chi^2_{0.95}(16)=26.296$，$\chi^2_{0.95}(15)=24.996$，$\chi^2_{0.975}(15)=27.488$.
（此处均指为下分位点，下同。）

6. 甲、乙两车床生产同一种零件，现从这两车床生产的零件中分别抽取 5 个和 6 个，测得其外径(单位: mm):

甲	15.0	14.5	15.2	15.5	14.8	
乙	15.2	15.0	14.8	15.2	15.0	15.0

假定其外径服从正态分布. 在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，问乙车床加工精度是否比甲的高?（经计算知 $S_1^2=0.145$，$S_2^2=2.267\times10^{-2}$）

(附注)　$t_{0.95}(11)=1.796$，$t_{0.95}(10)=1.812$，$t_{0.95}(9)=1.833$，
$t_{0.975}(11)=2.201$，$t_{0.975}(10)=2.228$，$t_{0.975}(9)=2.262$，
$\chi^2_{0.95}(11)=19.68$，$\chi^2_{0.95}(10)=18.31$，$\chi^2_{0.95}(9)=16.92$.
$\chi^2_{0.975}(11)=21.92$，$\chi^2_{0.975}(10)=20.48$，$\chi^2_{0.975}(9)=19.02$.
$F_{0.95}(4,5)=5.19$，$F_{0.95}(5,6)=4.39$，$F_{0.95}(5,4)=6.26$，$F_{0.95}(6,5)=4.95$，
$F_{0.975}(4,5)=7.39$，$F_{0.975}(5,6)=5.99$，$F_{0.975}(5,4)=9.36$，$F_{0.975}(6,5)=6.98$.