第一章 概率

随机试验与样本空间

试验 科学实验
或者对某一事物的某一特征进行观察

例 E_1:抛一枚硬币,观察正面H,反面T出现的情况

E_2:将一枚硬币连抛三次,观察正面 H 出现的次数

E_3:掷一颗骰子，观察出现的点数

E_4:从一批产品中抽取n件，观察次品出现的数量

E_5:对某厂生产的电子产品进行寿命测试

E_6:观察某地区的日平均气温和日平均降水量

问： 这些试验有什么特点？

试验前无法预知结果

随机试验与样本空间

试验 科学实验

或者对某一事物的某一特征进行观察

试验的特征

1. 试验可以在相同的条件下重复进行
2. 试验的结果可能不止一个，但试验前知道所有可能的全部结果
3. 在每次试验前无法确定会出现哪个结果

具有上述特征的试验称为 **随机试验**，简称 **试验**.

例 E:掷一颗骰子，观察出现的点数.

分析 E的结果

- "1点"、"2点"、...、"6点"
- 出现的点数不超过3
- 至少出现4点

简单结果(不可分) 也称"基本结果"

复合结果(可分解)

§2 样本空间

随机试验与样本空间

试验
- 基本结果（不可分） 称为样本点、基本事件
- 复合结果（可分解）

定义 称试验的全部样本点构成的集合为**样本空间**.

例 掷一颗骰子，观察出现的点数，其样本空间为

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

离散样本空间

例 抛两枚硬币，观察正、反两面出现的情况，其样本空间为

具体元素的非抽象集合

$$\Omega = \{(\text{反},\text{反}), (\text{反},\text{正}), (\text{正},\text{反}), (\text{正},\text{正})\}$$

例 记录深圳地区的日平均气温，其样本空间为

抽象的点集

$$\Omega = (-60, 60)$$

连续样本空间

例 飞机对位置为(x_0, y_0)的目标投掷一枚炸弹，观察其弹着点(x, y)，其样本空间为

$$\Omega = \{(x, y) \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < +\infty\}$$

§2 样本空间

随机试验与样本空间

试验
- 基本结果（不可分）—— 称为 **样本点、基本事件**
- 复合结果（可分解）—— 称为 **随机事件** 简称 **事件**

事件

从集合看：**事件是样本空间的子集**

从试验看：**事件是基本事件的复合**

随机事件

定义 满足一定条件的样本点的集合称为**随机事件**，简称为**事件**. 事件用大写字母A、B、C、$\cdots$表示.

例 掷一颗骰子，观察出现的点数，其样本空间为

$$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$$

事件A:"至少出现3点"，则 $A=\{3,\ 4,\ 5,\ 6\}\subset\Omega$

B:"出现最小或最大的点"，则$B=\{1,6\}$

C:"出现较大的点"，则$C=$?

模糊数学研究的内容

§2 样本空间

几个特殊事件

基本事件 一个样本点构成的单点集$\{\omega\}$

必然事件 每次试验都总发生的事件 $\Omega \subset \Omega$

不可能事件 每次试验都不会发生的事件 Φ (空集$\Phi \subset \Omega$)

小结:随机试验的数学描述

试验

基本结果	全体基本事件	事件 A
↕	↕	↕
样本点ω	样本空间 Ω	子集 A

事件 A 发生

试验时 A 中样本点出现

记

$$\mathscr{A} = \{A \mid A \subset \Omega, A\text{是事件}\}$$

称 $\mathscr{A}$ 为试验的事件域,即试验产生的所有事件为元素构成的集合.

事件间的关系与运算

设 $A, B, A_k (k=1,2,\cdots)$ 为事件

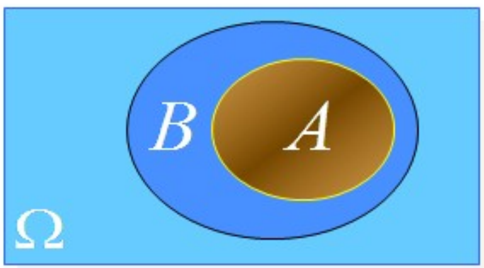
① $A \subset B$ ⟺ A 发生必导致 B 发生

特别有 $A = B$ ⟺ $A \subset B, B \subset A$

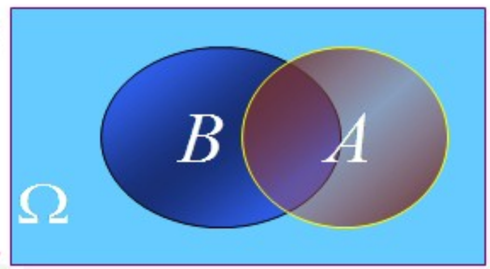
② $A \cup B = \{\omega \mid \omega \in A .\mathrm{or}. \omega \in B\}$ ⟺ A 发生或 B 发生

即 A, B 至少有一个发生，称为事件 A, B 的**和**.

$A \subset B$



$A \cup B$



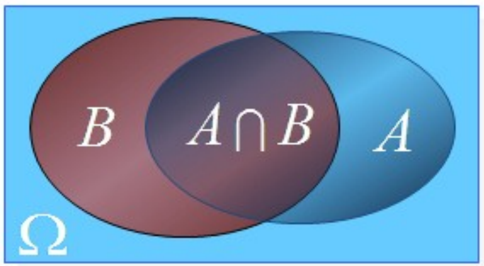
从集合和事件两方面来理解

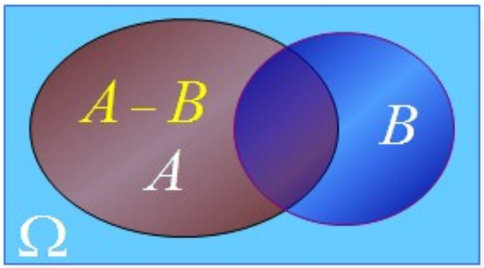
③ $A \cap B = \{\omega \mid \omega \in A, \omega \in B\} \longleftrightarrow A, B$ 同时发生称为事件 A, B 的**积**.

类似地可定义 n 个事件及可列个事件的积

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{\omega \mid \omega \in A_i, i = 1, 2, \cdots, n\}$$

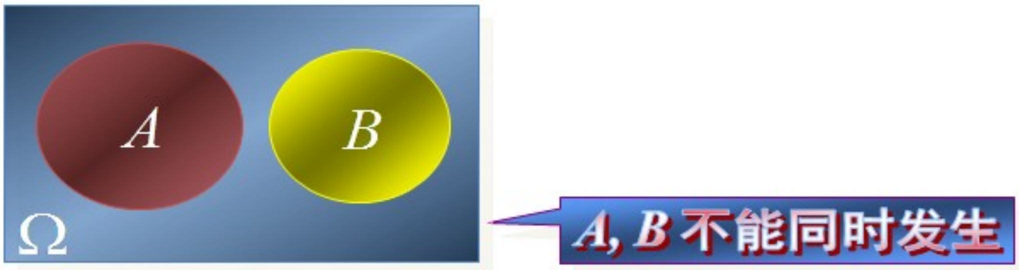
$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{\omega \mid \omega \in A_i, i = 1, 2, \cdots\}$$





④ $A - B = \{\omega \mid \omega \in A, \omega \notin B\} \longleftrightarrow A$ 发生 B 不发生称为事件 A, B 的**差**. 若 $A \supset B$, 则称 $A - B$ 为**真差**.

⑤ 若$A\cap B=\Phi$,则称 A,B **互不相容(互斥)**.



⑥ 若 $A\cup B=\Omega$ 且 $A\cap B=\Phi$,则称 A,B 互为**逆事件**或称为**对立事件**,记为

$$A=\Omega-B=\overline{B}=B^c$$
$$B=\Omega-A=\overline{A}=A^c$$

§2 样本空间

符号	集合含义	事件含义
Ω	全集	样本空间，必然事件
Φ	空集	不可能事件
$\omega \in \Omega$	集合的元素	样本点
$\{\omega\}$	单点集	基本事件
$A \subset \Omega$	一个集合	一个事件
$A \subset B$	A的元素在B中	A发生导致B发生
$A=B$	集合A与B相等	事件A与B相等
$A \cup B$	A与B的所有元素	A与B至少有一个发生
$A \cap B$	A与B的共同元素	A与B同时发生
$\bar{A}$ (或A^c)	A的补集	A的对立事件
$A-B$	在A中而不在B中的元素	A发生而B不发生
$A \cap B=\phi$	A与B无公共元素	A与B互斥

事件的运算定律

交换律 $A\cup B=B\cup A,\ A\cap B=B\cap A$

结合律 $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

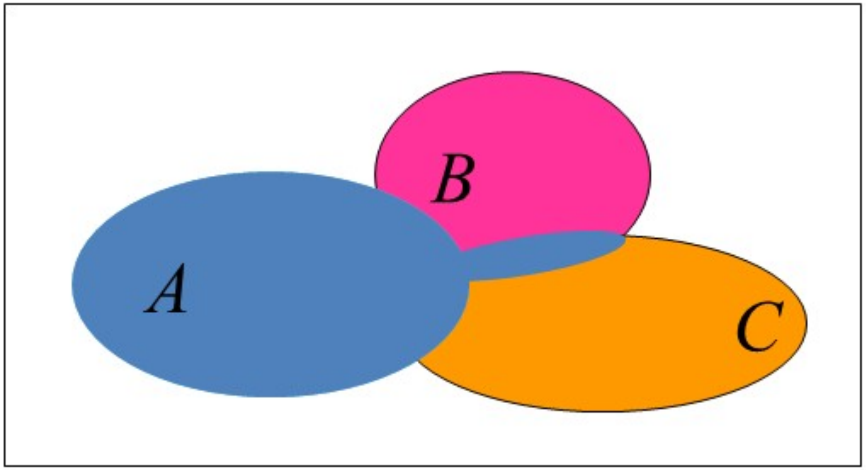
分配律 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

德·摩根（De Morgan）律

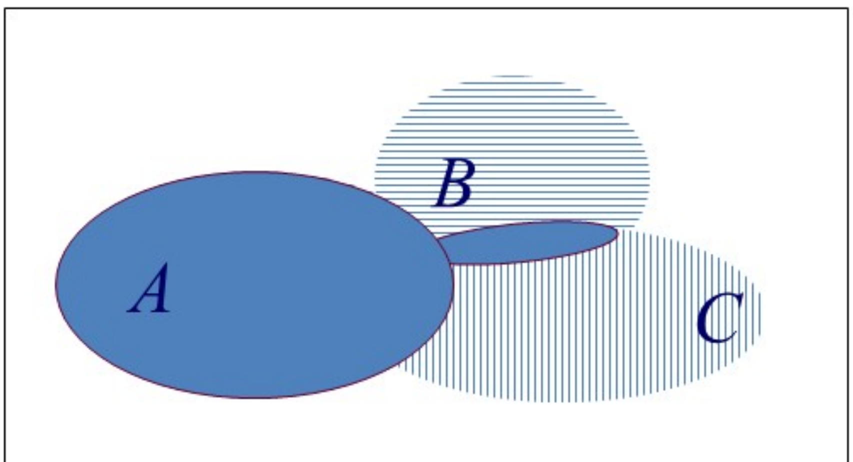
$$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B},\ \overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$$

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{n}B_k}=\bigcap_{k=1}^{n}\bar{B}_k\ ,\ \overline{\bigcap_{k=1}^{n}B_k}=\bigcup_{k=1}^{n}\bar{B}_k$$



分配律
图 示

$$A\cup(BC) =$$



$$(A\cup B)(A\cup C)$$

$$A\cup(B\cap C)$$
$$=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

注：可列（countable）

- 可列集：
  - 是指一个无穷集S，其元素可与自然数形成一一对应，因此可表为$S=\{s_1,s_2,\ldots\}$
- 至多可列：
  - 指可列或有限
- 可以证明：
  - 可列是“最小的”无穷，即任何一个无穷集合均含有可列子集

课后作业

P20： 5， 6

END