

第三章 联合分布

- § 1 引言：联合累积分布函数
- § 2 (二维)离散随机变量
- § 3 (二维)连续随机变量
- § 4 独立随机变量
- § 5 条件分布
- § 6 联合分布随机变量函数
- § 7 极值和顺序统计量

多维随机变量的实际背景

例 人的身高 H 与体重 W

某地区的气温 X 、气压 Y 与湿度 Z

射击中落点横向偏差 X 与纵向偏差 Y

.....



问题 能不能将上述r.v单独分别进行研究?

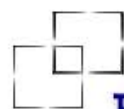
分析 一般人的身高与体重

$$\underline{H \sim N(\cdot, \cdot), \quad W \sim N(\cdot, \cdot)}$$

但身高与体重之间有一定关系.

气象指标中的气温、气压与湿度也是相关联的.

导弹射程误差与落点的横向偏差及纵向偏差都有关.



由于同一对象的不同指标之间往往是有一定联系的, 所以应该把它们作为一个整体来看待。

二维随机变量的概念

设 Ω 为样本空间, $X = X(\omega)$, $Y = Y(\omega)$ ($\omega \in \Omega$)

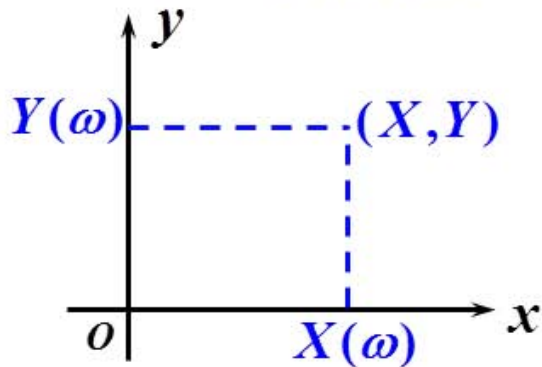
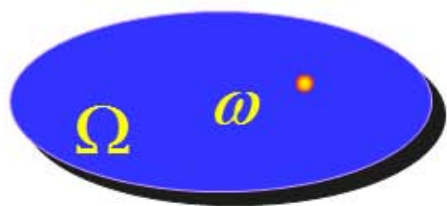
是定义在 Ω 上的两个 r.v, 记

$$(X, Y) \triangleq (X(\omega), Y(\omega)) \quad (\omega \in \Omega)$$

称 (X, Y) 为 **二维随机变量 (向量)**。

注

一个试验产生的二维随机变量可视为
向二维平面“投掷”一个“随机点”



定义 设 (X, Y) 为二维r.v, $\forall x, y \in (-\infty, \infty)$, 定义

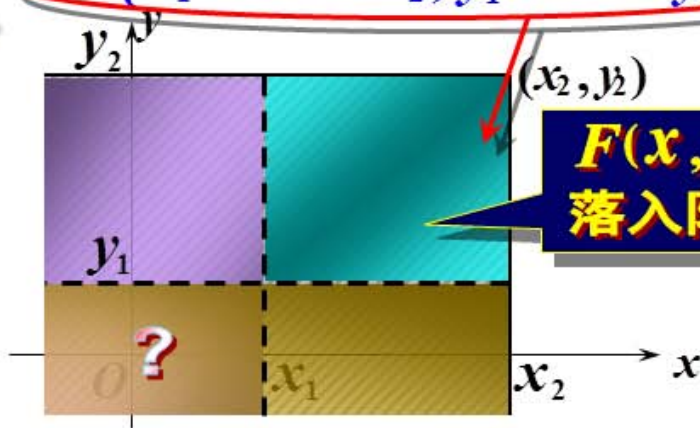
$$\begin{aligned} F(x, y) &\triangleq P(\{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\}) \\ &\triangleq P\{X \leq x, Y \leq y\} \end{aligned}$$

则称 $F(x, y)$ 为二维r.v (X, Y) 的**累积分布函数**, 或称为 X 与 Y 的**联合累积分布函数**.

问 如何利用分布函数计算概率

几何意义

$P\{x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2\}?$



$F(x, y)$ 表示随机点 (X, Y) 落入阴影区域的概率

$$\begin{aligned} &P\{x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2\} \\ &= F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) \geq 0 \end{aligned}$$

分布函数 $F(x, y)$ 的基本性质

① 任意固定 x_0 , $F(x_0, y)$ 是 y 的单调不减函数
任意固定 y_0 , $F(x, y_0)$ 是 x 的单调不减函数

② $0 \leq F(x, y) \leq 1$, 且

$$F(+\infty, +\infty) = 1, F(-\infty, -\infty) = 0$$

$$F(-\infty, y) = 0, F(x, -\infty) = 0 \quad (\forall x, y)$$

③ $F(x, y) = F(x, y+0)$, 即 $F(x, y)$ 关于 y 右连续
 $F(x, y) = F(x+0, y)$, 即 $F(x, y)$ 关于 x 右连续

④ $\forall x_1 < x_2, y_1 < y_2$ 有

$$\begin{aligned} & F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) \geq 0 \\ & = P\{x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2\} \end{aligned}$$



注 性质 ① ② ③ ④ 是分布函数的本质特征

注意：

分布函数 $F(x,y)$ 的性质(4)不能由前三条性质推出.

反例：令

$$F(x,y) = \begin{cases} 1, & x+y > -1 \\ 0, & x+y \leq -1 \end{cases}$$

显然 $F(x,y)$ 满足(1)(2)(3)三条性质，

但它不满足(4)，因为

$$F(1,1) - F(-1,1) - F(1,-1) + F(-1,-1) = 1 - 1 - 1 + 0 < 0.$$

这说明性质(4)不能由前三条性质推出，故定义一个二元函数为联合分布函数时性质(4)不能省去.

n 维随机向量

设 X_1, X_2, \dots, X_n 是定义在样本空间 Ω 上的 n 个 r.v, 则称 (X_1, X_2, \dots, X_n)

为 n 维随机变量或 n 维随机向量.

称 n 元函数

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n\}$$

为 n 维随机向量 (X_1, X_2, \dots, X_n) 的分布函数, 或称为 r.v X_1, X_2, \dots, X_n 的联合分布(函数).

二维随机变量的基本分类 $\left\{ \begin{array}{l} \text{二维离散型 r.v} \\ \text{二维连续型 r.v} \end{array} \right.$