§7.2

1、令 $Y=X_{i+1}-X_i \sim N(0,2\sigma^2)$

$$E(Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{4\sigma^2}}dy=\frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}}\left(\left[-2\sigma^2 y e^{-\frac{y^2}{4\sigma^2}}\right]_{-\infty}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{+\infty}2\sigma^2 e^{-\frac{y^2}{4\sigma^2}}dy\right)=\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{4\sigma^2}}dy$$

令 $m=\frac{y}{2\sigma}$，则 $E(Y^2)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-m^2}dm$

$\because \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-m^2}dm=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(m^2+n^2)}dm\,dn$

令 $m=\rho\cos\theta, n=\rho\sin\theta$，则原式 $=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{+\infty}\rho e^{-\rho^2}d\rho\, d\theta=\int_{-\pi}^{\pi}\left[-e^{-\rho^2}\right]_0^{+\infty}d\theta=2\pi$

$\therefore E(Y^2)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\cdot 2\pi=\sqrt{\pi}$

无偏估计：

$$E(\hat{\sigma}^2)=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n-1}E(X_{i+1}-X_i)^2=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n-1}E(Y^2)=\frac{n-1}{k}\sqrt{\pi}=\sigma^2 \Rightarrow k=\frac{\sqrt{\pi}(n-1)}{\sigma^2}$$

2、$E(Y)=aE(\bar{X}_1)+bE(\bar{X}_2)$