

本科概率论与数理统计测试题(二)

一、填空题

1. 设有随机变量 X 的分布函数为

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \begin{cases} 0, & \text{若 } x < -1 \\ 0.4, & \text{若 } -1 \leq x < 1 \\ 0.8, & \text{若 } 1 \leq x < 3 \\ 1, & \text{若 } x \geq 3 \end{cases}, \text{ 则 } X \text{ 的概率分布为}$$

X	
$P\{X = x\}$	

2. 已知二维离散型随机变量 (X, Y) 的概率分布如下

$Y \backslash X$	1	2	3
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$
2	$\frac{1}{3}$	α	β

当 $\alpha = \underline{\hspace{2cm}}$, $\beta = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, X 和 Y 相互独立.

3. 设随机变量 X 和 Y 独立, 且都在区间 $[1, 3]$ 上服从均匀分布, 引进事件 $A = \{X \leq a\}$, $B = \{Y > a\}$. 已知 $P\{A \cup B\} = \frac{7}{9}$, 则常数 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. 设二维随机变量 (X, Y) 的联合分布函数为

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 - 3^{-x} - 3^{-y} + 3^{-x-y}, & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases},$$

则二维随机变量 (X, Y) 的联合密度 $\varphi(x, y)$ 为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

二、选择题

1. 已知离散型随机变量 X 的可能取值为 $-2, 0, 2, \sqrt{5}$, 相应的概率依次为

$$\frac{1}{a}, \frac{3}{2a}, \frac{5}{4a}, \frac{7}{8a}, \text{ 则 } P\{|X| \leq 2 \mid X \geq 0\} \text{ 为}$$

- (A) $\frac{21}{29}$ (B) $\frac{22}{29}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{1}{3}$

2. 设随机变量 X 的密度函数为 $\varphi(x)$, 且 $\varphi(-x) = \varphi(x)$, $F(x)$ 是 X 的分布函数, 则对任意实数 a , 有

- (A) $F(-a) = 1 - \int_0^a \varphi(x) dx$ (B) $F(-a) = \frac{1}{2} - \int_0^a \varphi(x) dx$
 (C) $F(-a) = F(a)$ (D) $F(-a) = 2F(a) - 1$

3. 设随机变量 X 在区间 $(2, 5)$ 上服从均匀分布。现对 X 进行三次独立观测, 则至少有两次观测值大于 3 的概率为

- (A) $\frac{20}{27}$ (B) $\frac{27}{30}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{2}{3}$

4. 已知随机变量 X 的分布函数为 $F_X(x)$, 则 $Y = 5X - 3$ 的分布函数 $F_Y(y)$ 为

- (A) $F_X(5y - 3)$ (B) $5F_X(y)$ (C) $F_X(\frac{y+3}{5})$ (D) $\frac{1}{5}F_X(y) + 3$

三. 计算证明题

1. 设 10 件产品有 7 件正品, 3 件次品, 随机地抽取产品, 每次 1 件, 直到取到正品为止,

- (1) 若有放回地抽取, 求抽取次数的 X 概率分布;
 (2) 若不放回地抽取, 求抽取次数的 X 概率分布.

2. 已知随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = A + B \arctan x$ ($-\infty < x < +\infty$), 求

- (1) 系数 A 及 B ; (2) $P\{-1 < X < \sqrt{3}\}$; (3) X 的分布密度.

3. 设随机变量 X 的分布密度为
$$p(x) = \begin{cases} ke^{-3x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

试求: (1) 待定系数 k ; (2) 分布函数 $F(x)$; (3) 概率 $P(1 \leq x < 2)$ 和 $P(X \geq 1)$.

4. 已知二维随机变量 (X, Y) 的分布函数为

$$F(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{x}{2} \right) \left(\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{y}{3} \right) \quad (-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty)$$

试求 (X, Y) 关于 X, Y 的边缘分布函数.

5. 设随机变量 X 的密度函数为
$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^3 e^{-x^2}, & x \geq 0 \end{cases}$$

求 (1) $Y = 2X + 3$ (2) $W = \ln X$ 的密度函数.