第一章 概率

§1 引言
§2 样本空间
§3 概率测度 (probability measure)
§4 概率计算：计数方法
§5 条件概率
§6 独立性

概率论公理化的三种学派

① 1921年以凯恩斯(J. M. Keynes)为代表的“主观概率学派”

凯恩斯主张把任何命题都看作事件,例如“明天将下雨”,“土星上有生命”等等都是事件,人们对这些事件的可信程度就是概率,而与随机试验无关,通常称为主观概率.

② 1928年以冯.米泽斯(von Mises)为代表的“客观概率学派”

米泽斯定义事件的概率为该事件出现的频率的极限,而作为公理就必须把这一极限的存在作为第一条公理,通常称为客观概率.

③ 1933年以柯尔莫哥洛夫为代表的“以测度论为基础的概率公理化体系”

目前,绝大多数教科书都是采用柯尔莫哥洛夫的概率公理化体系.

§3 概率测度

概率论 研究随机现象的统计规律性的数学学科

问题一 什么是统计规律性？

统计规律性是指在大量试验中呈现出的数量规律

问题二 什么是概率？

用频率来刻画

概率是指刻划随机事件在一次试验中发生的可能性大小的数量指标，这个数量指标应该满足：

① 它是事件固有的，不随人们主观意愿而改变；可以在相同条件下通过大量重复试验予以识别和检验

② 符合常情：事件发生可能性大，该值就大，反之就小；不可能事件的值最小(0)；必然事件的值最大(1)

频率

设 A 为一随机事件，在相同条件下进行 n 次重复试验

令

$$n_A = n \text{ 次试验中 } A \text{ 发生的次数}$$

$$f_n(A) = \frac{n_A}{n}$$

称 n_A 为事件 A 的**频数**，$f_n(A)$ 为事件 A 的**频率**.

频率的一般特性

1. 一般地 n 越大，则 n_A 越大
2. $n_A, f_n(A)$ 的值是“随机的”
3. $0 \le f_n(A) \le 1$

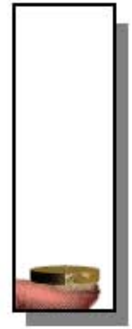
问 **频率是否有统计规律性？**

实例一 “抛硬币” 试验

将一枚硬币连续抛 n 次，记

$$H=\{出现正面\}$$

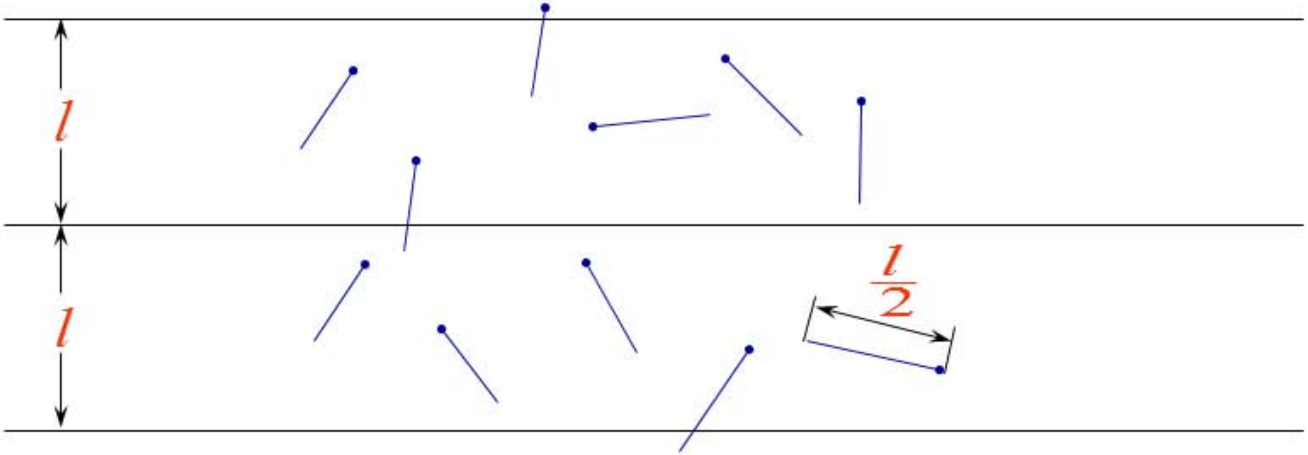
问 $f_n(H)$ 有什么规律?



历史上有名的“抛硬币”试验

实验者	n	n_H	$f_n(H)$
德·摩根	2048	1061	0.5181
蒲　丰	4048	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005

实例二 "蒲丰投针试验"



记投针的总数为 n，针与平行线相交的次数为 n_A

则

$$\frac{n_A}{n} \approx \frac{1}{\pi}$$

$$\therefore \quad \frac{n}{n_A} \approx \pi$$

http://www.math.uah.edu/stat/apps/BuffonNeedleExperiment.html

实例三 考察英语文章中26个字母出现的频率，当观察次数 n 较大时，每个字母出现的频率呈现稳定性，下面是 Dewey 统计了438023个字母得到的统计表

字母	频率	字母	频率	字母	频率	字母	频率
E	0.1268	R	0.0594	M	0.0244	K	0.0060
T	0.0978	H	0.0573	W	0.0214	X	0.0016
A	0.0788	L	0.0394	Y	0.0202	J	0.0010
O	0.0776	D	0.0389	G	0.0187	Q	0.0009
I	0.0707	U	0.0280	P	0.0186	Z	0.0006
N	0.0706	C	0.0268	B	0.0156		
S	0.0634	F	0.0256	V	0.0102		

字母统计表的应用 ？ 密码破译

实例四 在“掷骰子”试验中，记事件

$$A_i=\{出现\ i\ 点\},\ i=1,2,3,4,5,6$$

将一颗骰子连续掷 n 次，问 $f_n(A_i)$ 有什么规律？

分析 如果一颗骰子六个面是均匀的，则当 n 很大时有应有

$$f_n(A_i)=\frac{n_{A_i}}{n}\approx\frac{1}{6}\quad(i=1,2,3,4,5,6)$$

随机事件的统计规律性

当n很大时，事件A的频率$f_n(A)$接近一个常数，即有

$$f_n(A) \to p \quad (n \to +\infty)$$

频率的稳定性

注 ① 常数p就是事件A发生的可能性大小，即概率

② 由于频率的取值是“随机的”，那么极限

$$f_n(A) \to p \quad (n \to +\infty)$$

是什么意思值得研究（第五章讨论该问题）

频率的基本性质

1. $0 \le f_n(A) \le 1$
2. $f_n(\Omega) = 1$
3. 若 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 是两两不相容事件，则

$$f_n\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{i=1}^{m} f_n(A_i)$$

$\forall\, i \ne j,\ i, j = 1, 2, \cdots, m$
$A_i \cap A_j = \Phi$

有限可加性

这三条性质刻画了频率的本质特征，启发我们定义事件的概率

频率的基本性质

- $0 \le f_n(A) \le 1$
- $f_n(\Omega) = 1$
- 若 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 是两两不相容事件，则

$$f_n(\bigcup_{i=1}^{m} A_i) = \sum_{i=1}^{m} f_n(A_i)$$

有限可加性

概率的公理化定义

定义 设 $\mathcal{A}$ 为样本空间 Ω 上的事件域，$\forall A \in \mathcal{A}$，若存在实数 $P(A)$ 与之对应，且满足

① 非负性：$P(A) \ge 0 \quad (\forall A \in \mathcal{A})$

② 规范性：$P(\Omega) = 1$

③ 可列可加性：对两两不相容的事件列 $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ 有

$$P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$$

σ 可加性

则称 $P(A)$ 为事件 A 的**概率**，称 $\{\Omega, \mathcal{A}, P\}$ 为**概率空间**.

概率的公理化定义

定义 设 $\mathcal{A}$ 为样本空间 Ω 上的事件域, $\forall A\in\mathcal{A}$, 若存在实数 $P(A)$ 与之对应，且满足

① 非负性: $P(A)\geq 0\ \ (\forall A\in\mathcal{A})$

② 规范性: $P(\Omega)=1$

③ 可列可加性：对两两不相容的事件列 $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ 有

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}P(A_k)$$

σ 可加性

则称 $P(A)$ 为事件 A 的**概率**, 称 $\{\Omega,\mathcal{A},P\}$ 为**概率空间**.

注记

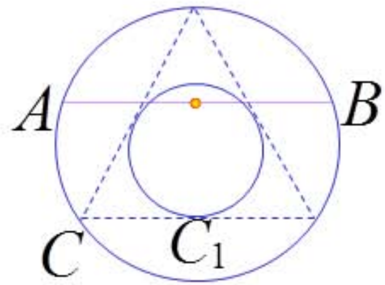
1. 1933年苏联的柯尔莫哥洛夫在测度论基础上提出的概率论公理化体系
2. 概率是定义在事件域上的特殊函数
3. 物体的长度，区域的面积都具有“非负性”与“可加性”，故“概率”实际上是对“事件”发生可能性大小的一种“度量”

例（贝特朗奇论）在半径为r的圆C内“任意”作一弦，试求此弦长度 l 大于圆内接等边三角形边长$\sqrt{3}r$的概率 p.

解一：作半径为$r/2$ 的同心圆C_1

设弦AB的中点 M“任意”落于圆C_1 内

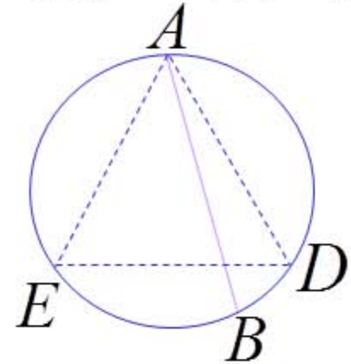
若M落于圆C_1内，则$l>\sqrt{3}r$，于是



$$p=\frac{\pi(r/2)^2}{\pi r^2}=\frac{1}{4}$$

解二：设弦AB 的一端A 固定于圆周上，另一端任意.

考虑等边ΔADE，如 B 落于角 A 对应的弧DE上，则$l>\sqrt{3}r$，于是



$$p=\frac{DE\text{的弧长}}{\text{圆周长}}=\frac{1}{3}$$

$\{\Omega,\mathcal{A},P\}$

例 设某地夏季天气只有3种状态：晴、阴(多云)、雨.已知晴的可能性是阴的2倍，雨的可能性只有阴的一半，问三种天的概率为多少？

$$\frac{2}{2+1+1/2} \qquad \frac{1}{2+1+1/2} \qquad \frac{1/2}{2+1+1/2}$$

$$\frac{4}{7} \qquad \frac{2}{7} \qquad \frac{1}{7}$$

$\longleftrightarrow$ 归一化

概率的基本性质

性质① $P(\Phi)=0$

$\because \quad \Phi=\Phi\bigcup\Phi\bigcup\cdots$

$\therefore \quad P(\Phi)=P(\Phi)+P(\Phi)+\cdots$

因为概率为实数, 故 $P(\Phi)=0.$

性质② 若 $A_1, A_2\cdots, A_n$ 是两两不相容的事件, 则

$$P(\bigcup_{k=1}^{n}A_k)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)$$

有限可加性

$$\because \quad \bigcup_{k=1}^{n}A_k=A_1\bigcup\cdots\bigcup A_n\bigcup\Phi\bigcup\Phi\cdots$$

故由可列可加性，有

$$P(\bigcup_{k=1}^{n}A_k)=P(A_1)+\cdots+P(A_n)+P(\Phi)+P(\Phi)+\cdots=0$$

$$=P(A_1)+\cdots+P(A_n)$$

性质③ 若 $A \subset B$, 则

$$P(B-A)=P(B)-P(A)$$

$$P(B) \geq P(A)$$

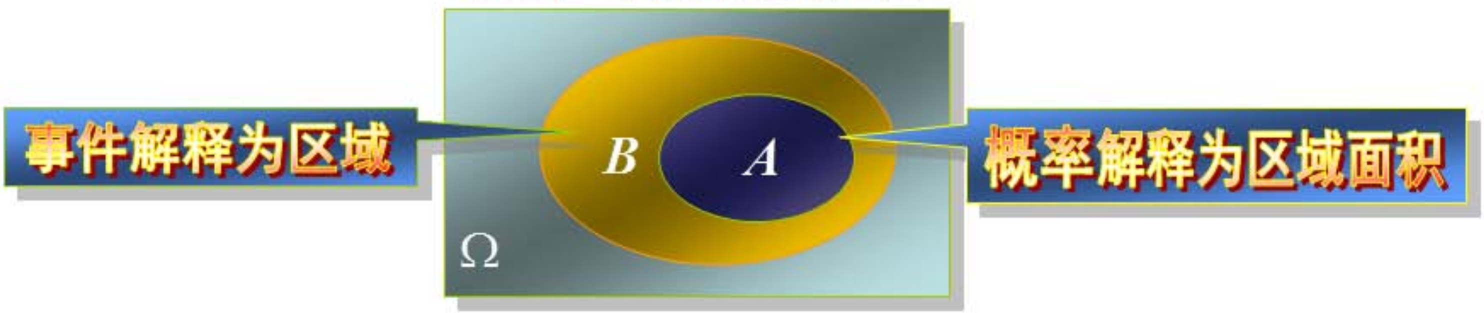
$$\because\ A \subset B \quad \therefore\ B = A \bigcup (B-A)$$

因 $A, B-A$ 互不相容, 故由有限可加性有

$$P(B-A)=P(B)-P(A)$$

再由概率非负性得 $P(B) \geq P(A)$

事件与概率的图示



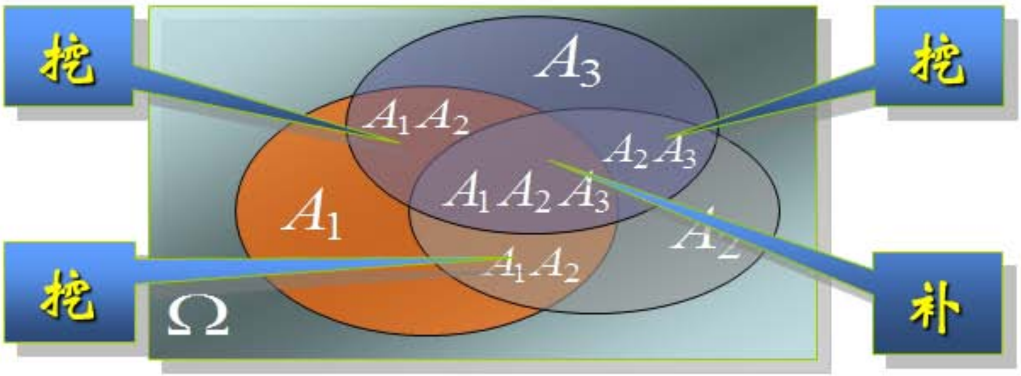
性质④ $0 \le P(A) \le 1$

性质⑤ $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

性质⑥（加法定律）对任何事件 A, B 有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

对于三事件 A_1, A_2, A_3 有



$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$$
$$-P(A_1A_2) - P(A_2A_3) - P(A_1A_3)$$
$$+P(A_1A_2A_3)$$

挖补原理 多事件的加法定律

对于n个事件，有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} P(A_i A_j)$$

$$+ \sum_{1 \le i < j < k \le n} P(A_i A_j A_k)$$

$$- \sum_{1 \le i < j < k < l \le n} P(A_i A_j A_k A_l)$$

$$+ \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n)$$

全加

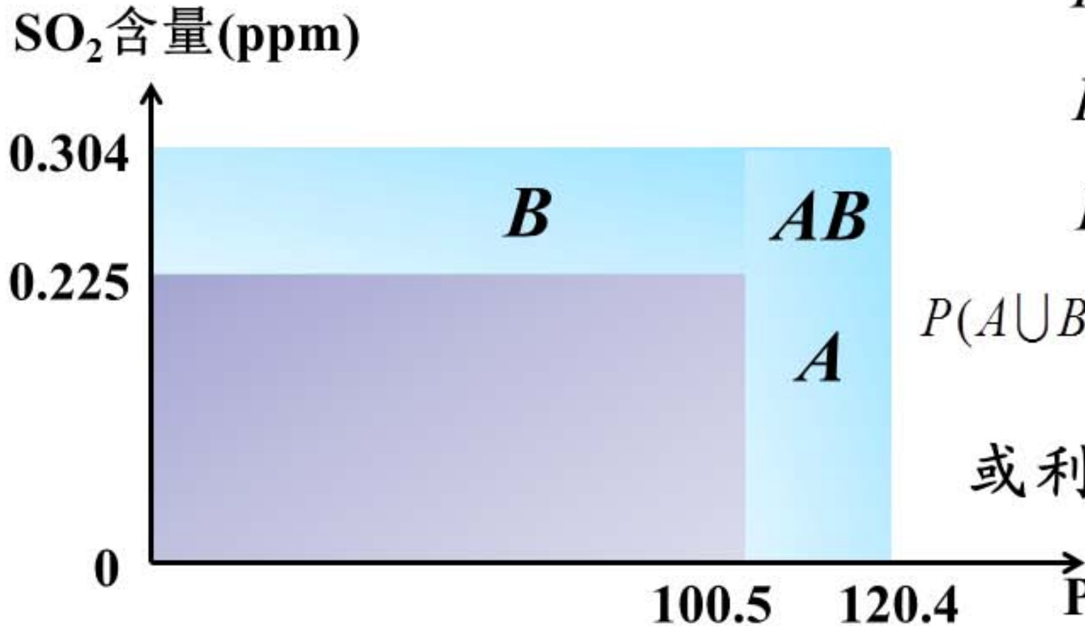
减二

加三

减四

挖补规律：加奇减偶

例 已知空气中PM2.5含量一般在0.0-120.4 (μg/m³)之间，SO_2含量一般在0.000-0.304 (ppm)之间，假设在上述范围内取值为等可能的. 一般认为，PM2.5含量在100.5μg/m³以上或SO_2含量在0.225ppm以上为对人体有害. 问空气质量为有害的概率是多少?



$P(A)=0.165$

$P(B)=0.260$

$P(AB)=0.043$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$
$$=0.382$$

或利用对立事件计算

课后作业

P20：4，7

END