

概率论与数理统计 作业题

第七章 参数估计

§7.1 点估计

教材 P218: 5(a)(b)(c)

补充题

1. 设总体 X 具有密度函数

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{2}{\theta^2}(\theta - x), & 0 < x < \theta \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

X_1, X_2, \dots, X_n 是其样本, 求 θ 的矩估计.

2. 设总体 X 的密度函数为 $f(x; \theta)$, X_1, X_2, \dots, X_n 为其样本, 求下列情况下 θ 的最大似然估计.

$$(1) \quad f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{\theta^x}{x!} e^{-\theta}, & x = 0, 1, 2, \dots \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (\theta > 0)$$

$$(2) \quad f(x; \theta) = \begin{cases} \theta \alpha x^{\alpha-1} e^{-\theta x^\alpha}, & x > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (\alpha \text{已知})$$

3. 设总体 X 具有密度函数

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \theta(1-x)^{\theta-1}, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

X_1, X_2, \dots, X_n 是其样本, 求 θ 的矩估计及最大似然估计.

§7.2 估计量的评价标准

1. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, X_1, X_2, \dots, X_n 为其样本. 试求 k , 使 $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)^2$ 为 σ^2 的无偏估计.

2. 设从均值为 μ , 方差为 $\sigma^2 > 0$ 的总体中, 分别抽取容量为 n_1, n_2 的两个独立样本. \bar{X}_1 和 \bar{X}_2 分别是两样本的均值. 试证: 对于任意 $a, b(a + b = 1)$, $Y = a\bar{X}_1 + b\bar{X}_2$ 都是 μ 的无偏估计, 并确定常数 a, b 使 $D(Y)$ 达到最小.

3. 设总体 X 服从参数为 θ 的指数分布, 概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

其中 $\theta > 0$ 未知.

(1) 证明: \bar{X} 和 $n \cdot \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ 都是未知参数 θ 的无偏估计.

(2) 比较这两个估计量的有效性.

§7.3 区间估计

1. 设某种清漆的 9 个样品, 其干燥时间 (单位: h) 分别为 6.0, 5.7, 5.8, 6.5, 7.0, 6.3, 5.6, 6.1, 5.0. 设干燥时间 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. 在下面两种情况下: (1) $\sigma = 0.6(h)$; (2) σ 未知, 求 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间.

2. 有一大批糖果. 现从中随机地取 16 袋, 称得重量(以克计)如下:

506	508	499	503	504	510	497	512
514	505	493	496	506	502	509	496

设袋装糖果的重量近似地服从正态分布, 试求:

(1) 总体均值 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间.

(2) 总体标准差 σ 的置信水平为 0.95 的置信区间.

3. 为比较 I, II 两种型号步枪子弹的枪口速度, 随机地取 I 型子弹 10 发, 得到枪口速度的平均值为 $\bar{x}_1 = 500(m/s)$, 方差 $s_1^2 = 1.10(m/s)^2$, 随机地取 II 型子弹 20 发, 得到枪口速度的平均值为 $\bar{x}_2 = 496(m/s)$, 方差 $s_2^2 = 1.20(m/s)^2$. 假设两总体都可认为近似地服从正态分布, 且生产过程可认为方差相等. 求两总体均值差 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信水平 0.95 的置信区间.

4. 研究由机器 A 和机器 B 生产的钢管的内径, 随机地抽取机器 A 生产的钢管 18 只, 测得样本方差 0.34mm^2 ; 随机地取机器 B 生产的钢管 13 只, 测得样本方差 0.29mm^2 . 设两样本相互独立, 且设由机器 A 和机器 B 生产的钢管的内径分别服从正态分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2), N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 这里 $\mu_1, \sigma_1^2, \mu_2, \sigma_2^2$ 均未知. 试求方差比 σ_1^2/σ_2^2 的置信水平为 0.90 的置信区间.