Q1. 设所需场数为X.

$p(X=4)=C_2^1(\frac{1}{2})^4=\frac{1}{8}$, $p(X=5)=C_2^1(C_4^3(\frac{1}{2})^3(\frac{1}{2}))\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$, $p(X=6)=C_2^1(C_5^3(\frac{1}{2})^3(\frac{1}{2})^2)\frac{1}{2}=\frac{5}{16}$

$p(X=7)=C_2^1(C_6^3(\frac{1}{2})^3(\frac{1}{2})^3)\frac{1}{2}=\frac{5}{16}$

$E(X)=\sum_x x\,p(x)=4\times\frac{1}{8}+5\times\frac{1}{4}+6\times\frac{5}{16}+7\times\frac{5}{16}=\frac{93}{16}$

Exercise 4

Q 1:

甲、乙两队进行篮球比赛, 若有一队胜 4 场比赛就结束, 假设甲、乙两队在每场比赛中获胜的概率都是 $\frac{1}{2}$, 求所需比赛的场数的数学期望.

Q2.

$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\,p(x)\,dx=\int_0^{+\infty}\frac{4x^3}{\alpha^3\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{\alpha^2}}dx \overset{t=\frac{x}{\alpha}}{=} \frac{4\alpha}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}t^3e^{-t^2}dt=\frac{4\alpha}{\sqrt{\pi}}\left[-\frac{1}{2}e^{-t^2}\right]_0^{+\infty}=\frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}}$

设动能为 $y=mx$, 则其密度为 $p(y)=\begin{cases}\frac{4y^2}{\alpha^3m^3\sqrt{\pi}}e^{-\frac{y^2}{m^2\alpha^2}}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$

$E(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}y\,p(y)\,dy=\int_0^{+\infty}\frac{4y^3}{\alpha^3m^3\sqrt{\pi}}e^{-\frac{y^2}{m^2\alpha^2}}dy \overset{t=\frac{y}{m\alpha}}{=} \frac{4m\alpha}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}t^3e^{-t^2}dt=\frac{4m\alpha}{\sqrt{\pi}}\left[-\frac{1}{2}e^{-t^2}\right]_0^{+\infty}=\frac{2m\alpha}{\sqrt{\pi}}$

Q 2:

设分子速度的分布密度函数由 *Maxwell* 分布律给出, 其密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}\frac{4x^2}{\alpha^3\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{\alpha^2}}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$$

其中 $\alpha>0$ 是常数, 求分子的平均速度和平均动能 (假设分子的质量等于 m).

Q3. $P\{X\ge 0\}=1$

马尔可夫不等式: $P\{X\ge n\}\le\frac{E(X)}{n}$

示性函数: $E[1_{\{X\ge n\}}]=1\cdot P\{X\ge n\}+0\cdot P\{X<n\}=P\{X\ge n\}$

法①: $\therefore P\{X\ge n\}=E(1_{\{X\ge n\}})$ $\therefore \sum_{n=1}^{\infty}P\{X\ge n\}=\sum_{n=1}^{\infty}E(1_{\{X\ge n\}})=E(\sum_{n=1}^{\infty}1_{\{X\ge n\}})=E(X)$

法②: $E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}kP\{X=k\}=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{k}P\{X=k\}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty}P\{X=k\}=\sum_{n=1}^{\infty}P\{X\ge n\}$

法③: $\sum_{n=1}^{\infty}P\{X\ge n\}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty}P\{X=k\}=P\{X=1\}+P\{X=2\}+P\{X=3\}+\cdots$
$+P\{X=2\}+P\{X=3\}+\cdots$
$+P\{X=3\}+\cdots$
$+\cdots$
$=P\{X=1\}+2P\{X=2\}+3P\{X=3\}+\cdots$
$=\sum_{k=0}^{\infty}kP\{X=k\}=E(X)$

Q 3:

设 X 为非负整值随机变量, 其数学期望存在, 证明

$$EX=\sum_{n=1}^{\infty}P(X\ge n).$$

Q4.

$E(|X|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|p(x)dx=\int_{-\infty}^{0}-x\frac{1}{2}e^{x}dx+\int_0^{+\infty}x\frac{1}{2}e^{-x}dx=-\frac{1}{2}[e^x]_{-\infty}^{0}+\frac{1}{2}[-e^{-x}]_0^{+\infty}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$

$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2p(x)dx=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}x^2e^xdx+\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}x^2e^{-x}dx=[e^x]_{-\infty}^{0}+[-e^{-x}]_0^{+\infty}=1+1=2$

$D(|X|)=E(X^2)-[E(|X|)]^2=2$

Q 4:

设随机变量 X 的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x}, & x\le 0,\\ \frac{1}{2}e^{-x}, & x>0,\end{cases}$$

求 $|X|$ 的数学期望及方差.

Q5、 $E(S)=\sum_{i=1}^{m}E(X_i)$ ， $E(T)=\sum_{i=m+1}^{m+n}E(X_i)$

$$Cov(S,T)=Cov\left(\sum_{i=1}^{m}X_i,\sum_{i=m+1}^{m+n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=m+1}^{m+n}Cov(X_i,X_j)=0$$

$$\rho_{ST}=\frac{Cov(S,T)}{\sqrt{D(S)}\sqrt{D(T)}}=0$$

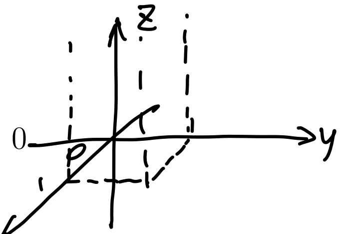
Q 5:

设随机变量 $X_1, X_2, \ldots, X_{m+n} (n > m)$ 是独立的, 有相同的分布, 并且有有限的方差, 试求 $S = X_1 + \cdots + X_m$与 $T = X_{m+1} + \cdots + X_{m+n}$ 两和之间的相关系数.

Q 6:

设随机向量 (X, Y, Z) 有联合密度

$$p(x, y, z) = (x + y)ze^{-z}, \quad 0 < x, y < 1, z > 0.$$



求此随机向量的协方差阵.

Q6、 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y,z)\,dy\,dz=\int_0^1\int_0^{+\infty}(x+y)ze^{-z}dz\,dy=\int_0^1 x+y\,dy=x+\frac{1}{2}$

$f_Y(y)=\int_0^1\int_0^{+\infty}(x+y)ze^{-z}dz\,dy=y+\frac{1}{2}$, $f_Z(z)=\int_0^1\int_0^1(x+y)ze^{-z}dx\,dy=ze^{-z}\int_0^1\frac{1}{2}+y\,dy=ze^{-z}$

$E(X)=\int_0^1 x(x+\frac{1}{2})dx=\frac{7}{12}$, $E(Y)=\frac{7}{12}$, $E(Z)=\int_0^{+\infty}z^2e^{-z}dz=2$

$E(X^2)=\int_0^1 x^2(x+\frac{1}{2})dx=\frac{5}{12}$, $E(Y^2)=\frac{5}{12}$, $E(Z^2)=\int_0^{+\infty}z^3e^{-z}dz=6$

$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{5}{12}-\frac{7}{12}\times\frac{7}{12}=\frac{11}{144}$, $D(Y)=\frac{11}{144}$, $D(Z)=E(Z^2)-[E(Z)]^2=2$

$E(XY)=\int_0^{+\infty}ze^{-z}dz\int_0^1\int_0^1 xy(x+y)\,dx\,dy=\frac{1}{3}$, $E(XZ)=\int_0^{+\infty}z^2e^{-z}dz\int_0^1\int_0^1 x(x+y)\,dy\,dx=\frac{7}{6}$

$E(YZ)=\int_0^{+\infty}z^2e^{-z}dz\int_0^1\int_0^1 y(x+y)\,dx\,dy=\frac{7}{6}$.

$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1}{3}-\frac{7}{12}\times\frac{7}{12}=-\frac{1}{144}$

$Cov(X,Z)=E(XZ)-E(X)E(Z)=\frac{7}{6}-\frac{7}{12}\times 2=0$, $E(Y,Z)=E(YZ)-E(Y)E(Z)=0$

协方差阵为

$$C=\begin{bmatrix}\frac{11}{144} & -\frac{1}{144} & 0\\ -\frac{1}{144} & \frac{11}{144} & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$