§5 矩生成函数

定义 随机变量 X 的**矩生成函数(矩母函数, moment generating function, mgf)** 定义为

$$M(t)=E(e^{tX})\ \text{(前提：期望存在)}.$$

(离散情形) $$M(t)=\sum_x e^{tx}p(x)$$

(连续情形) $$M(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}f(x)\mathrm{d}x$$

注

- 矩生成函数对某些特殊的 t 可能不存在.
- 矩生成函数与分布函数的关系：如果矩生成函数在包含零点的开区间上存在,那么它唯一确定其概率分布.

性质 如果矩生成函数在包含零点的开区间上存在，那么$M^{(r)}(t)=E(X^r)$.

证 用麦克劳林展开

$$M(t)=E\left(e^{tX}\right)=E\left(\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(tX)^r}{r!}\right)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{t^r}{r!}E(X^r),$$

因此

$$E(X^r)=\frac{\mathrm{d}^r M(t)}{\mathrm{d}t^r}\bigg|_{t=0}=M^{(r)}(t).$$

应用

用矩生成函数来计算随机变量的各阶矩.

例 设 $X\sim P(\lambda)$, 用矩生成函数计算其期望和方差.

解 根据定义,

$$M(t)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{tk}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^t)^k}{k!}e^{-\lambda}$$

$$=e^{-\lambda}e^{\lambda e^t}=e^{\lambda(e^t-1)}$$

该和式对所有的 t 都收敛,因此

$$M'(t)=\lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)},\quad M''(t)=\lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)}+\lambda^2 e^{2t}e^{\lambda(e^t-1)}.$$

从而 $E(X)=M'(0)=\lambda,\qquad E(X^2)=M''(0)=\lambda^2+\lambda,$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\lambda.$$

例 设 $X \sim N(0,1)$, 用矩生成函数计算其期望和方差.

解 根据定义,

$$M(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} e^{-x^2/2} \mathrm{d}x = \frac{e^{t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}} \mathrm{d}x$$

该积分对所有的 t 都收敛.

进行变量替换 $u = x - t$, 则

$$M(t) = e^{t^2/2} \underline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \mathrm{d}u} = e^{t^2/2}.$$

易得 $E(X) = 0$, $D(X) = 1$.

性质 如果 X 具有矩生成函数$M_X(t)$, $Y=a+bX$, 则 Y具有矩生成函数$M_Y(t)=e^{at}M_X(bt)$.

证

$$M_Y(t)=E\left(e^{tY}\right)=E\left(e^{at+btX}\right)=e^{at}E(e^{btX})=e^{at}M_X(bt).$$

例 设 $Y\sim N(\mu,\sigma^2)$, 求 Y 的矩生成函数.

解 因为 Y 与 $\mu+\sigma X$ 同分布, 其中 $X\sim N(0,1)$.

因此

$$M_Y(t)=e^{\mu t}M_X(\sigma t)=e^{\mu t}e^{\sigma^2 t^2}.$$

性质 如果 X 和 Y 独立, $Z = X + Y$, 则在矩生成函数都存在的共同区间上, 有 $M_Z(t) = M_X(t)M_Y(t)$.

证 $M_Z(t) = E\left(e^{tZ}\right) = E\left(e^{tX+tY}\right) = E\left(e^{tX}e^{tY}\right).$

因为 X 与 Y 独立, 故而

$$M_Z(t) = E\left(e^{tX}\right)E\left(e^{tY}\right) = M_X(t)M_Y(t).$$

例

泊松分布的可加性. $M(t) = e^{\lambda(e^t-1)}.$

正态分布的可加性. $M(t) = e^{\mu t}e^{\sigma^2 t^2}.$