写在前面:

先证明引理：$\vdash (a \to a)$

1. $\vdash ((a \to ((a \to a) \to a)) \to ((a \to (a \to a)) \to (a \to a)))$ A1
2. $\vdash (a \to ((a \to a) \to a))$ A1
3. $\vdash ((a \to (a \to a)) \to (a \to a))$ MP 1 2
4. $\vdash (a \to (a \to a))$ A1
5. $\vdash (a \to a)$ MP 3 4

在 L 系统中，提供 deduction theorem 的一个证明。
事实上，在这里提供该证明的主要目的，并不是揭示 deduction theorem（演绎定理）是合理而且自然的，而是构建一条“无需二次思考，只需动笔计算”的通路，这条通路提供的方法的正是对某个合式公式，已有使用 deduction theorem 的证明的时候，怎样构建不使用 deduction theorem 的证明。接下来的 7.1(c)中，我们先是在使用了 deduction theorem 的时候，（相较下）很自然很轻松地证明了目标式，接着使用这一通路（或说工具；或说算法），“无需二次思考，只需动笔计算”地构建了不使用 deduction theorem 的证明。
对这条通路，我们着重介绍的是“有演绎定理参与的证明 通向 无演绎定理参与的证明”，因为另一方向是显然的：我们已有$\vdash (a \longrightarrow b)$的证明的情况下，由于空集是$\Gamma \cup \{a\}$的子集，自然有$\Gamma \cup \{a\} \vdash (a \longrightarrow b)$；接着使用一次 MP，就有$\Gamma \cup \{a\} \vdash b$。

这个证明是口语化的，实际上提供的是一个算法（通过有限步提前确定的步骤，得到所希望的结果）：在已经有 $\Gamma \cup \{a\} \vdash b$时，如何构造$\Gamma \vdash (a \to b)$的证明。
运用归纳。
假设有一个合式公式序列（β1，β2，…），序列的长度有限，序列的最后一个元素为 b，并且序列满足这样的性质:
对于序列中的每一个元素βi:
βi 为 $\Gamma \cup \{a\}$ 中的一个元素。 或
βi 为逻辑公理或者定理。 或
存在 j,k < i 满足这样的形式： βk = （βj → βi）。

显然，将这个序列写出，就是 b 的一个证明（一般称其为 b 的证明序列）。前两种情况中的βi 显然满足$\Gamma \cup \{a\} \vdash \beta i$；对第三种情况，运用 MP 仍然满足$\Gamma \cup \{a\} \vdash \beta i$。

对于 i = 1，存在如上的三种可能中的前两种。
如果βi = a，运用上方引理即有$\vdash (a \to a)$。否则:
$\Gamma \vdash (\beta i \to (a \to \beta i))$ A1
$\Gamma \vdash \beta i$ 前提或公理或定理
$\Gamma \vdash (a \to \beta i)$ MP

这样$\Gamma \vdash (a \to \beta i)$对 i=1 成立。

运用归纳法。假设这个性质对 i <= n 成立。考虑 i = n + 1:
对于不由 MP 得到的βi，证明和 i = 1 情况相同。
对于由 MP 得到的βi。我们知道，存在 j,k ≤i，满足βk = （βj → βi）。由于归纳的假设前提，

我们已经有：$\Gamma \vdash (\alpha \ \to \beta j)$① 与 $\Gamma \vdash (\alpha \ \to \beta k)$也即$\Gamma \vdash (\alpha \ \to (\beta\, j \to \ \beta i))$②。
同时，我们有：
$\Gamma \vdash ((\alpha \ \to (\beta\, j \to \ \beta i)) \ \to ((\alpha \ \to \beta j) \to (\alpha \ \to \beta i)))$ A2
运用一次 MP：

$$\Gamma \vdash ((\alpha \ \to \beta j) \to (\alpha \ \to \beta i))$$

使用的是②。
对①再使用一次 MP：

$$\Gamma \vdash (\alpha \ \to \beta i)$$

这样，对整个序列中任一元素，上式都成立。自然，对于序列的尽头的 b 该性质依旧成立。这样 deduction theorem 的一个方向得到证明。对于另一个方向，直接使用 MP 即可。

$\mathbf{7.1(c)}$

$$先使用 deduction\ theorem:$$

$$\vdash \left((\neg B) \to (B \to C)\right)\ IFF\ \{\neg B\} \vdash (B \to C)$$

$$IFF\ \{\neg B, B\} \vdash C(接下来证明的目标)$$

$$1. B \to \left((\neg C) \to B\right) \qquad A1$$
$$2. (\neg B) \to \left((\neg C) \to (\neg B)\right) \qquad A1$$
$$3. (\neg C) \to B \qquad MP1\ \&\ premise$$
$$4. (\neg C) \to (\neg B) \qquad MP2\ \&\ premise$$
$$5. \left((\neg C) \to (\neg B)\right) \to \left(\left((\neg C) \to B\right) \to C\right) \qquad A3$$
$$6. \left((\neg C) \to B\right) \to C \qquad MP4,5$$
$$7. C \qquad MP3,6$$

本题不使用 deduction theorem 的证明，运用的就是上面的构造法。接下来的证明有一些不规范的地方，正式场合应当避免出现：

1. 使用数字标号代表某个合式公式。一般而言我们使用字母代表合式公式；此处这么使用的目的是便于回溯上文的步骤。
2. 从 14 步开始，出现大量跳步。对比这一证明和上文使用了演绎定理的证明，不难发现演绎定理的价值所在：很多情况下，使用演绎定理的证明更自然，更简洁，而不使用的证明则更显机械。
   下面的证明可能显得很不自然，因为本题我们使用了两次（而非一次）演绎定理，所以使用最开始提到的构造法时，在整体的证明中我们需要构建两次证明。
   先通过已有的$\{\neg B, B\} \vdash C$的证明“无需二次思考，只需动笔计算”地构建$\{\neg B\} \vdash (B \to C)$的证明；接着，通过得到的$\{\neg B\} \vdash (B \to C)$的证明“无需二次思考，只需动笔计算”地构建$\vdash \left((\neg B) \to (B \to C)\right)$的证明。14 步以前的步骤比较详细，可以用于体会：参照上方的构造法，我们对不使用 deduction theorem 的证明中的每一步得到的公式A_i，先是要构建$(B \to A_i)$的证明，之后要再次构建$((\neg B) \to (B \to A_i))$的证明。这样一步步下去，由于上方证明的最终结果为$C$，我们就一定能得到$((\neg B) \to (B \to C))$的证明。

$$1. B \to ((\neg C) \to B) \quad A1(记作①)$$

$$2. \neg B \to ((\neg C) \to (\neg B)) \quad A1(记作②)$$

$$3. (①) \to (B \to (①)) \quad A1$$

$$4. B \to (①) \quad MP1,3(记作④)$$

$$5. (④) \to ((\neg B) \to (④)) \quad A1$$

$$6. \neg B \to (④) \quad MP4,5$$

$$7. (②) \to (B \to (②)) \quad A1$$

$$8. B \to (②) \quad MP2,7(记作⑧)$$

$$9. (⑧) \to ((\neg B) \to ⑧) \quad A1(记作⑨)$$

$$10. (\neg B) \to ⑧ \quad MP8,9$$

$$11. (\neg B) \to (B \to (\neg B)) \quad A1(记作[11])$$

$$12. (B \to (②)) \to ((B \to (\neg B)) \to (B \to ((\neg C) \to (\neg B)))) \quad A2$$

$$13. (B \to (\neg B)) \to (B \to ((\neg C) \to (\neg B))) \quad MP8,12(记作[13])$$

$$14. (\neg B) \to ([13]) \quad (A1 \quad (([13] \to ((\neg B) \to ([13])))); [13]; MP)(记作[14])$$

$$15. (\neg B) \to (B \to ((\neg C) \to (\neg B))) \quad (记作[15])$$

(
15 的过程:

$$((\neg B) \to [13]) \to (([11]) \to [15]) \quad A2$$

$$MP[14]; 之后再MP[11], 得到[15]$$

)

$$16. (\neg B) \to (B \to ((\neg C) \to (\neg B))) \quad 类似 9\sim15$$

$$17. ((\neg C) \to (\neg B)) \to (((\neg C) \to B) \to C) \quad A3(记作[17])$$

$$18. B \to [17] \quad 同样利用A1 与[17]的前提，之后MP$$

$$19. (\neg B) \to ([18]) \quad 同 17(记作[18])$$

$$20. B \rightarrow \left(\left((\neg C) \rightarrow B\right) \rightarrow C\right) \quad \text{记作}[20]$$

$$21. (\neg B) \rightarrow ([20])$$

$$22. (\neg B) \rightarrow (B \rightarrow C)$$

7.2(c)中，观察题面可以发现：我们要证明的是一个有对称性的式子：$(A \vee B) \leftrightarrow (B \vee A)$。为何说其有对称性？在 HB 系统中有公理：$\left((C \rightarrow D) \rightarrow \left((D \rightarrow C) \rightarrow (D \leftrightarrow C)\right)\right)$，也就是说我们只要证明了 $(A \vee B) \rightarrow (B \vee A)$与$(B \vee A) \rightarrow (A \vee B)$，运用两次 MP 就可以得到目标式。再观察这两个式子，可以发现：他们的结构是完全相同的。只要得到了其中一个式子的证明，将 A 和 B 的位置对换，就可以直接得到另一个式子的证明。

和之前的证明一样，使用序号代替合式公式一样是不规范的。

$7.2(c)$

在 HB 系统中（CPC-1 P92）：

- $(A \rightarrow (B \rightarrow A))$
  $((A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B))$
  $((A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)))$
- $((A \wedge B) \rightarrow A)$, $((A \wedge B) \rightarrow B)$
  $((A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \wedge C))))$
- $(A \rightarrow (A \vee B))$, $(B \rightarrow (A \vee B))$ A1
  $((A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C)))$ A2
- $((A \leftrightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B))$, $((A \leftrightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A))$
  $((A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow (A \leftrightarrow B)))$ A3
- $((A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg B) \rightarrow (\neg A)))$
  $(A \rightarrow (\neg (\neg A)))$, $((\neg (\neg A)) \rightarrow A)$

$$1. B \rightarrow (A \vee B) \quad A1$$

$$2. A \rightarrow (A \vee B) \quad A1$$

$$3. \left(B \rightarrow (A \vee B)\right) \rightarrow \left(\left(A \rightarrow (A \vee B)\right) \rightarrow \left((B \vee A) \rightarrow (A \vee B)\right)\right) \quad A2$$

$$4. (B \vee A) \rightarrow (A \vee B) \quad MP1,2,3(\text{记作④})$$

$$5. (A \vee B) \rightarrow (B \vee A) \quad replace\ A\ with\ B\ and\ B\ with\ A\ in\ 1,2,3,4(\text{记作⑤})$$

(这一步是不规范的，但是被单独列出，目的是带来一些启发。完整的证明是：

$$1*. A \rightarrow (B \vee A) \quad A1$$

$$2*. B \rightarrow (B \vee A) \quad A1$$

$$3*. \left(A \rightarrow (B \vee A)\right) \rightarrow \left(\left(B \rightarrow (B \vee A)\right) \rightarrow \left((A \vee B) \rightarrow (B \vee A)\right)\right) \quad A2$$

$$4*. (A \vee B) \to (B \vee A) \quad MP1*,2*,3*$$

)

$$6. \left((⑤ \to ④) \to \left((④ \to ⑤) \to (⑤ \leftrightarrow ④) \right) \right) \quad A3$$

$$7. (A \vee B) \leftrightarrow (B \vee A) \quad MP4,5,6$$

此题运用 deduction theorem 的空间有限，因为目标式中唯一的蕴含符是双向的；但是 deduction theorem 在这个系统中可能可以扩展出更多的形式（比如$\{A, B\} \vdash C \ IFF \ \vdash (A \wedge B) \to C$等等）用于简化证明。如果式子更长更难证明，可以尝试使用 deduction theorem 证明一些备用的引理。