第二章 谓词演算

在命题逻辑中，主要研究命题与命题之间的逻辑关系，其组成单元是原子命题，而原子命题是以一个具有真假意义的完整的陈述句为单位，不考虑其结构、成分(如主语，谓语等)，对原子命题的联接关系的研究，不可能揭示原子命题的内部的特征。因此存在着很大的局限性：不能表达出每个原子公式的内部结构之间的关系，使得很多思维过程不能在命题逻辑中表示出来，例如著名的苏格拉底三段论

第二章 谓词演算

P：所有的人都是要死的；

Q：苏格拉底是人；

R：所以，苏格拉底是要死的。

显然，这三个命题有着密切的关系，当P和Q为真时，R必定为真，即R应该是P，Q的逻辑结果：即$P \wedge Q \rightarrow R$永真。但实际上并非如此：当P，Q取“1”，而R取“0”时$P \wedge Q \rightarrow R <=> 0$，即$P \wedge Q \rightarrow R$不是永真公式，即P，Q=>R不成立。用命题逻辑已无法正确地描述上述情况。

第二章 谓词演算

问题出现在哪里呢？

问题在于这类推理中，各命题之间的**逻辑关系**不是体现在原子命题之间，而是体现在构成**原子命题的内部成分之间**，即体现在命题结构以及深层次上，对此，命题逻辑无能为力。

所以在研究某些推理时，有必要对原子命题作进一步的分析，因此有必要引入谓词逻辑的概念。

2.1 谓词演算的基本概念与表示

在命题逻辑中，命题是具有真假意义的陈述句，从语法上分析，一个陈述句由主语和谓语两部分组成，比如：

"阿星是中科大学生"

"小强是中科大学生"

若用命题P，Q分别表示上述两句话，则P，Q是两个毫无关系的命题，这两个命题所表达的判断之间，没有任何逻辑关系。但事实上它们有一个共同的特性："是中科大学生"。

因此，若将句子分解为：主语+谓语，同时将相同的谓语部分抽取出来，则可以表示这一类的语句。

2.1 谓词演算的基本概念与表示

此时，若用P表示：P：是中科大学生，P后紧跟："某某人"，则上述两个句子可写为：P(阿星)；P(小强)。

因此，为了揭示命题内部结构以及命题的内部结构的关系，就按照这两部分对命题进行分析，分解成主语和谓语，并且把主语称为个体词或客体，而把谓语称为谓词。

2.1 谓词演算的基本概念与表示

2.1.1谓词

- 定义1：在原子命题中，可以独立存在的客体(句子中的主语，宾语等)，称为个体词(Individual)。而用以刻画个体词的性质或个体词之间的关系的词即是谓词(Predicate)。
- 单纯的谓词或单纯的个体词都无法构成一个完整的逻辑含义，只有将它们结合起来才能构成一个完整的，独立的逻辑断言。

2.1 谓词演算的基本概念与表示

- 定义2：个体词和谓词根据其具有的抽象分为两种：

(1).表示具体或特定的个体词称为个体常量(Individual Constant)，一般个体词常量用小写字母a, b, c, …表示；表示抽象的或泛指的个体词称为个体变量(Individual Variable), 一般用x, y, …等表示；

(1).表示具体性质或关系的谓词称为谓词常量(Predicate Constant)，表示抽象的或泛指的性质或关系的谓词称为谓词变量(Predicate Variable)，谓词一般都用大写字母F, G, H, …表示。

2.1 谓词演算的基本概念与表示

- **例1：指出下列命题的个体词和谓词。**

(1).合肥是一个省会城市，

(2).离散数学是计算机的基础课程，

(3).姚明是一名篮球健将，

(4).人是聪明的。

2.1 谓词演算的基本概念与表示

- 定义3：(1)个体词的取值范围称为**个体域**(或论域)(Individual Field)，常用D表示；(2)宇宙间所有个体域聚集在一起构成的个体域称为**全总个体域**(Universal Individual Field)。
- 定义4：设D为非空的个体域，定义在 D^n(表示n个个体都在个体域D上取值)上取值于{0, 1}上的n元函数，称为n元**命题函数**或**n元谓词**(Propositional Function)，记为P(x1, x2, …, xn)，此时个体变量x1, x2, …, xn的定义域都为D， P(x1, x2, …, xn)的值域为{0, 1}。

2.1 谓词演算的基本概念与表示

- **例2：符号化如下命题。**

P：上海是一个现代化城市；

Q：甲是乙的父亲；

R：3介于2和5之间；

T：布什和萨达姆是同班同学。

- **注意：**

(1).谓词中个体词的顺序是十分重要的，不能随意变更。如F (b, c)与F (c, b)的真值就可能不同；

(2).一元谓词用以描述一个个体的某种特性，而n元谓词则用以描述n个个体之间的关系；

2.1 谓词演算的基本概念与表示

(3).0元谓词(不含个体词的)实际上就是一般的命题；

(4).一个n元谓词不是一个命题，但将n元谓词中的个体变元都用个体域中具体的个体取代后，就成为一个命题。

2.1.1量词

有了个体词和谓词的概念后，我们可以用具体的个体常量代换谓词中的个体变量，来获得相应的命题。但对有些命题，还是不能准确的符号化。

2.1 谓词演算的基本概念与表示

- **例3：**

(1).所有的老虎都会吃人的；

所有的x，R (x)， R (x)：x会吃人，x∈{老虎}；

(2).每一个人都会犯错误；

每一个x，P (x)， P (x)：x会犯错误，x∈{人}；

(3).有些人是大学生；

有一些x，Q (x)， Q (x)：x是大学生，x∈{人}；

(4).有一些自然数是素数。

有一些x，S (x)， S (x)：x是素数，x∈{自然数}；

2.1 谓词演算的基本概念与表示

对这几个例子，我们仅仅符号化了一部分内容，而对句子中的“每一个”，“任意的”，“有一些”等等与个体词的数量有关的语句，无法用谓词来表示。因此我们需要在n元谓词前端加入限制词，即引入“量词”的概念。

- **定义5：**

(1).将日常生活和数学中常用的“一切的”，“所有的”，“每一个”，“任意的”等词称为全称量词(Universal Quantifier)，符号化为“$\forall$”；

2.1 谓词演算的基本概念与表示

(2).将日常生活和数学中常用的“存在”，“有一个”，“至少有一个”，等词称为存在量词(Existential Quantifier)，符号化为“$\exists$”。

$\forall x/\exists x$：表示个体域里的所有的/有的个体；

$\forall x F(x)/\exists x F(x)$：表示个体域里所有的/存在个体具有性质F；

x：作用变量；

F (x)：量词的辖域。

2.1 谓词演算的基本概念与表示

我们再来看前面的例子：

(1).$(\forall x)R(x)$，$x \in \{老虎\}$；(2).$(\forall x)P(x)$，$x \in \{人\}$；

(3).$\exists x Q(x)$，$x \in \{人\}$；　(4).$\exists x S(x)$，$x \in \{自然数\}$。

上面表示有不好之处：

①总是要注明个体域；

②如果个体域注明不是很清楚的话，容易造成无法确定真值；

③不同命题函数中的个体可以居于不同的个体域，将它们组成复合函数时，不易表达。

2.1 谓词演算的基本概念与表示

因此，有必要对个体域进行统一，全部使用全总个体域，而此时，对每一个句子中个体变量的变化范围用一个特性谓词来刻划。统一成全总个体域后，在公式中就不必特别说明。

特性谓词在加入到命题函数中式遵循如下规则：

(1).对应全称量词，刻划其对应个体域的特性谓词作为蕴含式的前件加入；

(2).对应存在量词，刻划其对应个体域的特性谓词作为合取项加入。

2.1 谓词演算的基本概念与表示

- **例5：符号化下列语句。**

(1).天下乌鸦一般黑；

(2).张强和李平都是足球运动员；

(3).每一个实数都存在比它大的另外的实数；

(4).并非所有的动物都是脊椎动物；

(5).尽管有些人很聪明，但未必一切人都聪明；

(6).对于任意给定的$\varepsilon>0$，必存在着$\delta>0$使得对任意的x，只要$|x-a|<\delta$，就有$|f(x)-f(a)|<\varepsilon$成立。

2.1 谓词演算的基本概念与表示

- **例6：将下列命题形式化为谓词逻辑中的命题。**

(1).所有的病人都相信医生；

(2).有的病人相信所有的医生；

(3).有的病人不相信某些医生；

(4).所有的病人都相信某些医生。

- **例7：将下列命题形式化为一阶逻辑中的命题。**

(1).任意一个整数x，均有另一个整数y，使得x+y=0；

(2).存在这样的实数x，它与任何实数y的乘积均为y。

2.2 谓词演算公式

2.2.1 项与原子公式

- 定义1：项的形成规则：

(1).个体变元x_i(∈X)与个体常元c_i(∈C)都是

(2).若t_1, ... ,t_n是项，则$f_i^n(t_1,\dots,t_n)$也是项(f_i^n是函数集F中的第i个n元函数)

(3).有限次使用(1)(2)得到的都是项。

令个体变元集X={x_1,x_2,…}，个体常元集C={c_1,c_2,…}，函数集F={f_1^1, f_2^1,…, f_1^2, f_2^2,…}，则当F=∅时，项集T=X∪C。当F≠∅时，项集T可如下分层：

$T=T_0 \cup T_1 f_1^1 \cup T_2 \cup \dots$

$T0=X \cup C=\{x_1,x_2,\dots,c_1,c_2,\dots\}$

$T1=\{f_1^1(x_1), f_1^1(x_2),\dots,f_1^1(c_1),\dots,f_2^1(x_1),\dots,f_1^2(x_1,x_1),\dots\}$

2.2 谓词演算公式

- **2.2.1 项与原子公式**
- **定义2 (闭项)**：只含有个体常元的项叫做闭项。
- 如$f_1^1(c)$, $f_1^2(c_1,c_1)$, $f_1^1(f_1^1(c))$等是闭项，$f_1^1(x_1)$, $f_1^2(c_1,x_1)$则不是
- **定义3 (原子公式集)**：原子公式集是指

$$Y=\cup_{i,n}(\{R_i^n\}\times\underbrace{T\times\ldots\times T}_{n个T})$$

即$Y=\{R_i^n(t_1,\ldots,t_n)|R_i^n\in R,\ t_1,\ldots,t_n\in T\}$，其中谓词集$R=\{R_1^1, R_2^1,\ldots, R_1^2, R_2^2,\ldots\}$，$R_i^n$叫做第i个n元谓词。

2.2 谓词演算公式

- **2.2.2 谓词演算公式集**
- **定义1 (谓词演算公式集)**:

字母表:

(1) 个体变元$x_1, x_2, \ldots$ (可数个)

(2) 个体常元$c_1, c_2, \ldots$ (可数个或有限个)

(3) 函数(运算)符$f_1^1, f_2^1, \ldots, f_1^2, f_2^2, \ldots$ (可数个或有限个)

(4) 谓词$R_1^1, R_2^1, \ldots, R_1^2, R_2^2, \ldots$ (可数或有限个，至少(一个)

(5) 联结词$\neg$，$\rightarrow$

(6) 全称量词$\forall$

(7) 左右括号、逗号(，)，，

2.2 谓词演算公式

- **2.2.2 谓词演算公式集**
- **定义1 (谓词演算公式集)：**

  谓词演算公式的形成规则：

  (1) 每个原子公式是公式

  (2) 若p, q是公式，则¬p, p→q, ∀x_ip (i=1,2,…)都是公式

  (3) 任一公式皆由规则(1)(2)的有限次使用形成。
- **括号、逗号可省略：把项$f_i^n(t_1,\ldots,t_n)$、原子公式$R_i^n(t_1,\ldots,t_n)$、p→q分别写成$f_i^n t_1\ldots t_n$ 、$R_i^n t_1\ldots t_n$、→pq即可，读法唯一**
- **公式集K(Y)也具有分层性，零层由原子公式组成，第k层公式由原子公式经过k次运算得来**

2.2 谓词演算公式

- **2.2.2 谓词演算公式集**
- **定义1 (谓词演算公式集)：**

  在谓词演算公式K(Y)上定义新的运算：

  (1) $p \vee q = \neg p \to q$

  (2) $p \wedge q = \neg(p \to \neg q)$

  (3) $p \leftrightarrow q = (p \to q) \wedge (q \to p)$

  (4) $\exists x_i p = \neg \forall x_i \neg p$

2.2 谓词演算公式

- **2.2.2谓词演算公式集**
- **定义2：** 给定一个合式公式G，若变元x出现在使用该变元的量词的辖域之内，则称变元x的出现为约束出现(Bound Occurrence)，此时的变元x称为**约束变元**(Bound Variable)，若x的出现不是约束出现，则称它为自由出现(Free Occurrence)，此时的变元称为**自由变元**(Free Variable)。

- **例1：求下列公式中各量词的辖域范围。**

$$(\forall x)(R(x,y)) = (\forall x)R(x,y)$$

$$(\forall x)(\exists y)(R(x,y)) = (\forall x)(\exists y)R(x,y)$$

$$(\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)(R(x,y) \wedge Q(y))) \neq (\forall x)P(x) \rightarrow (\exists y)(R(x,y) \wedge Q(y))$$

2.2 谓词演算公式

通常，一个量词的辖域是某公式G的子公式，因此，确定一个量词的辖域，就是找出位于该量词之后的相邻接的子公式。

(1).若量词后有括号，则括号内的子公式就是该量词的辖域；

(2).若量词后无括号，则与量词邻接的子公式为该量词的辖域。

- 例2：判断下列公式中的个体变元是约束变元，还是自由变元。

2.2 谓词演算公式

(1). $(\forall x)(P(x)) \to (\exists y)(R(x, y))$;

(2). $(\forall x)(P(x) \to Q(x))$;

(3). $(\forall x)(\exists y)(P(x, y) \vee Q(y, z)) \wedge (\exists x)R(x, y)$;

(4) $(\forall x)(P(x) \to R(x)) \wedge (\exists x)R(x, y)$.

注意以上的4个例子，在一公式中，某一个变元的出现既可以是自由的，又可以是约束的(如3中的y)，因此易引起混淆。为了给人以一目了然的结果，对于表示不同意思的个体变元，我们总是以不同的变量符号来表示，即我们希望一个变元在同一公式中只以一种身份出现。由此我们引进两个规则：

2.2 谓词演算公式

- 规则1：（约束变元的改名规则）

(1). 将量词中出现的变元以及该量词辖域中此变量之所有约束出现，都用新的个体变元替换；

(2). 新的变元一定要有别于改名辖域中的所有其它变元。

- 规则2：（自由变元的代替规则）

(1). 将公式中出现该自由变元的每一处都用新的个体变元替换；

(2). 新变元不允许在原公式中以任何约束形式出现。

2.2 谓词演算公式

- **例3：**

(1).将公式 $(\forall x)(P(x) \to Q(x,y)) \wedge \mathrm{R(x,y)}$ 中的约束变元x进行改名；

(2).将公式 $(\forall x)(P(x) \to Q(x,y)) \wedge \mathrm{R(x,y)}$ 中的自由变元y进行代入。

注意：

(1).改名规则的施行对象是约束变元，代替规则的施行对象是自由变元；

(2).改名规则只对公式中的一个量词及其辖域内施行，即只对公式的一个子公式施行，代替规则必须对整个公式同一自由变元的所有自由出现同时施行，即必须对整个公式施行；

(3).改名或代替后公式等值。

2.2 谓词演算公式

- 定义3：若公式中不含自由出现的变元，则称该公式为闭式。

例如，$(\forall x)(F(x) \to (\exists y)H(x,y))$

$(\forall x)(F(x) \to G(x)) \vee (\forall x)(F(x) \to H(x))$

是闭式；$(\exists x)F(x) \wedge G(x)$ 不是闭式。

- 定义4 (项t对公式p中变元x是自由的)：用项t去代替公式p中自由出现的个体变元x时，若在代换后的新公式里，t的变元都是自由的，则说t对p中x是可自由代换的，简称t对p中x是可代换的，或简称t对p中x是自由的
- p(t)表示用项t去代换公式p(x)中所有自由出现的变元x所得的结果

2.2 谓词演算K

- **定义1（谓词演算K）**：谓词演算K是指带有如下规定的“公理”和“证明”的公式集K(Y)：

“公理”：

(K1) $p \to (q \to p)$

(K2) $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$

(K3) $(\neg p \to \neg q) \to (q \to p)$

(K4) $\forall x p(x) \to p(t)$，其中项t对p(x)中的x是自由的

(K5) $\forall x (p \to q) \to (p \to \forall x q)$，其中x不在p中自由出现

其中，p, q, r, p(x)都是任意的公式

2.2 谓词演算K

- **定义1(谓词演算K)**：谓词演算K是指带有如下规定的“公理”和“证明”的公式集K(Y)：

  “证明”：

  设p是某个公式，Γ是某个公式集。p从Γ可证明，记作$\Gamma\vdash p$，是指存在着公式的有限序列$p_1,\cdots,p_n$，其中$p_n=p$，且对每个$k=1,\cdots,n$有

  a）$p_k\in\Gamma$，或

  b）p_k为公理，或

  c）存在$i,j<k$，使$p_j=p_i\to p_k$(此时说由$p_i,p_i\to p_k$使用MP规则得到p_k)，或

  d）存在$j<k$，使$p_k=\forall x p_j$. 此时说由p_j使用“Gen”（推广）规则得到p_k。x叫做Gen变元

2.2 谓词演算K

- **定理1**：设$x_1, \cdots, x_n$是命题演算L的命题变元，$p(x_1, \cdots, x_n) \in L(Xn)$。我们有

$$\vdash_L p(x_1, \cdots, x_n) \Rightarrow \vdash_K p(p_1, \cdots, p_n),$$

其中，$p_1, \cdots, p_n \in K(Y)$，$p(p_1, \cdots, p_n)$是用$p_1, \cdots, p_n$分别代换$p(x_1, \cdots, x_n)$中的$x_1, \cdots, x_n$所得结果。

证明：因为L中的公理模式(L1)，(L2)，(L3)和K中的公理模式(K1)，(K2)，(K3)形式上完全相同，L中的推理规则MP也在K中保留着，所以$p(x_1, \cdots, x_n)$在L中的证明可转换成$p(p_1, \cdots, p_n)$在K中的证明，只要把所有命题变元x_i全都换成对应的p_i即可。

2.2 谓词演算K

- **定义2(命题演算型永真式)**：若$p(x_1, \cdots, x_n) \in L(X_n)$是命题演算L中的永真式，则对任意$p_1, \cdots, p_n \in K(Y)$，$p(p_1, \cdots, p_n)$叫做K的命题演算型永真式，简称永真式。

1. $\vdash p \to p$ 同一律
2. $\vdash \neg q \to (q \to p)$ 否定前件律
3. $\vdash (\neg p \to p) \to p$ 否定肯定律
4. $\vdash (p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$ HS,假设三段论
5. $\vdash \neg\neg p \to p$ 双重否定律

- **命题1**：Γ有矛盾 $\Rightarrow$ K的任一公式从Γ可证

2.2 谓词演算K

- **例 1**：$\{\neg\exists x\neg p\}\vdash\forall xp$

证明：

(1) $\neg\neg\forall x\neg\neg p$,	假定
(2) $\neg\neg\forall x\neg\neg p\to\forall x\neg\neg p$,	永真式
(3) $\forall x\neg\neg p$,	(1), (2), MP
(4) $\forall x\neg\neg p\to\neg\neg p$,	(K4)
(5) $\neg\neg p$,	(3), (4), MP
(6) $\neg\neg p\to p$,	永真式
(7) p,	(5), (6), MP
(8) $\forall xp$	(7), Gen

2.2 谓词演算K

- **命题2（$\exists_1$规则）**：设项t对p(x)中的x自由，则有

$$\vdash p(t) \to \exists x p(x)$$

证明：已知t对p(x)中的x自由，故有

$$\forall x \neg p(x) \to \neg p(t)$$

是(K4)型公理，由此式及永真式

$$(q \to \neg p) \to (p \to \neg q)$$

可得

$$\vdash p(t) \to \neg \forall x \neg p(x)$$

2.2 谓词演算K

- **例 2**：$\{\forall x(p\to q), \forall x\neg q\} \vdash \forall x\neg p$

证明：

(1) $\forall x(p\to q)$,	假定
(2) $\forall x(p\to q)\to(p\to q)$,	(K4)
(3) $p\to q$,	(1), (2), MP
(4) $\forall x\neg q$,	假定
(5) $\forall x\neg q\to\neg q$,	(K4)
(6) $\neg q$,	(4), (5), MP
(7) $(p\to q)\to(\neg q\to\neg p)$,	永真式
(8) $\neg q\to\neg p$	(3), (7), MP
(9) $\neg p$	(6), (8), MP
(10) $\forall x\neg p$	Gen

2.2 谓词演算K

- **定理2（演绎定理）：**

  (1) 若$\Gamma \vdash p\to q$，则$\Gamma\cup\{p\}\vdash q$

  (2) 若$\Gamma\cup\{p\}\vdash q$，且证明中所用Gen变元不在p中自由出现，则不增加新的Gen变元就可得$\Gamma\vdash p\to q$

  证明： (1) 由MP规则即得。

  (2) 设$q_1,\cdots,q_n$是q在K中从$\Gamma\cup\{p\}$的证明。由已知条件，该证明中涉及的Gen变元不在p中自由出现。现对n归纳：

  n=1时，$q_1=q$。此时有三种可能：$q=p$, $q\in\Gamma$, 或q是公理。类似命题演算中的证明，这三种情况都无需Gen规则即可得$\Gamma\vdash p\to q$

  n>1时，只需考虑q是使用Gen规则得到的情形（其他情形同命题演算中演绎定理的证明，且不涉及Gen）。设$q=\forall xq_i$, $i<n$, 且Gen变元x未在p中自由出现。这时

2.2 谓词演算K

- **定理2（演绎定理）：（2）若$\Gamma\cup\{p\}\vdash q$，且证明中所用Gen变元不在p中自由出现，则不增加新的Gen变元就可得$\Gamma\vdash p\to q$**

证明：（2） n>1时。设$q=\forall xq_i$, i<n, 且Gen变元x未在p中自由出现。这时因$\Gamma\cup\{p\}\vdash q_i$，由归纳假设，有$\Gamma\vdash p\to q_i$，且不增加新的Gen变元。于是，有$p\to q$从$\Gamma$的证明如下：

1） …

k） $p\to q_i$ // $p\to q_i$从Γ的证明

k+1） $\forall x(p\to q_i)$ k）, Gen

k+2） $\forall x(p\to q_i)\to(p\to\forall xq_i)$ （K5）

k+3） $p\to\forall xq_i$, 即$p\to q$从 k+1）, k+2）, MP

上述过程中，除了x外没有使用别的Gen变元，其中使用公理K5时需要“Gen变元不在p中自由出现”这一条件

2.2 谓词演算K

- **推论1**：当p是闭式的时候，$\Gamma \cup \{p\} \vdash q \Leftrightarrow \Gamma \vdash p \to q$
- **命题3**：$\vdash \forall x(p \to q) \to (\exists xp \to \exists xq)$，除了x外不用其他Gen变元

证明：(1) $\{\forall x(p \to q), \ \forall x \neg q\} \vdash \forall x \neg p$ 例2

(2) $\{\forall x(p \to q)\} \vdash \forall x \neg q \to \forall x \neg p$ (1)演绎定理

(3) $\{\forall x(p \to q)\} \vdash \neg \forall x \neg p \to \neg \forall x \neg q$ (2)永真式(换位律)

(4) $\vdash \forall x(p \to q) \to (\exists xp \to \exists xq)$ (3)演绎定理

2.2 谓词演算K

- **定理3(反证律)：若$\Gamma\cup\{\neg p\}\vdash q$及$\neg q$，且所用Gen变元不在p中自由出现，则不增加新的Gen变元便可得$\Gamma\vdash p$。**

证明：首先，有p从$\Gamma\cup\{\neg p\}$的证明：

(1) q	已知
(2) $\neg q$	已知
(3) $\neg q\to(q\to p)$	永真式
(4) $q\to p$	(2), (3), MP
(5) p	(1), (4), MP

于是，以下公式从Γ可证：

(6) $\neg p\to p$	演绎定理
(7) $(\neg p\to p)\to p$	永真式
(8) p	(6), (7), MP

整个过程没有出现新的Gen变元

2.2 谓词演算K

- **定理4(归谬律)**：若$\Gamma \cup \{p\} \vdash q$及$\neg q$，且所用Gen变元不在p中自由出现，则不增加新的Gen变元便可得$\Gamma \vdash \neg p$。

证明：由已知条件及双重否定律$\neg\neg p \to p$可得：

（1）$\Gamma \cup \{\neg\neg p\} \vdash q$；　（2）$\Gamma \cup \{\neg\neg p\} \vdash \neg q$

由(1)(2)用反证律得$\Gamma \vdash \neg p$，且没有出现新的Gen变元

- 例3：$\{\forall xp\} \vdash \exists xq$

证明：(1) $\forall xp$　　假定

(2) $\forall x\neg p$　　假定

(3) $\forall x\neg p \to \neg p$　　(K4)

(4) $\forall xp \to p$　　(K4)

(5) p　　(1)，(4)，MP

(6) $\neg p$　　(2)，(3)，MP

由(5)(6)用归谬律得$\{\forall xp\} \vdash \neg\forall x\neg p$即$\exists xq$

2.2 谓词演算K

- **命题4（$\exists_2$规则）：设$\Gamma\cup\{p\}\vdash q$，其证明中Gen变元不在p中自由出现，且x不在q中自由出现，那么有$\Gamma\cup\{\exists xp\}\vdash q$，且除了x不增加其他Gen变元。**

证明：	(1) $p\to q$	演绎定理
	(2) $(p\to q)\to(\neg q\to\neg p)$	永真式
	(3) $\neg q\to\neg p$	(1)，(2)，MP
	(4) $\forall x(\neg q\to\neg p)$	(3)，Gen
	(5) $\forall x(\neg q\to\neg p)\to(\neg q\to\forall x\neg p)$	(K5)
	(6) $\neg q\to\forall x\neg p$	(4)，(5)，MP
	(7) $(\neg q\to\forall x\neg p)\to(\neg\forall x\neg p\to q)$	永真式
	(8) $\neg\forall x\neg p\to q$即$\exists xp\to q$	(6)，(7)，MP

使用演绎定理即可得$\Gamma\cup\{\exists xp\}\vdash q$. 以上建立$\Gamma\vdash\exists xp\to q$的过程除了x外未用其他新的Gen变元。

2.2 谓词演算K

- **命题5**：对K中任意公式p, q, r, 有：

  (1) $\vdash p\leftrightarrow p$； 自反性； (2) $\vdash p\leftrightarrow q \Rightarrow \vdash q\leftrightarrow p$ 对称性

  (3) $\vdash p\leftrightarrow q$且$\vdash q\leftrightarrow r \Rightarrow \vdash p\leftrightarrow r$ 传递性

- **定义3(可证等性)**：p与q可证等价(简称等价)，指$\vdash p\leftrightarrow q$成立
- **命题6**：$\Gamma \vdash p\leftrightarrow q \Leftrightarrow \Gamma \vdash p\rightarrow q$且$\Gamma \vdash q\rightarrow p$
- **命题7**：(1) $\vdash \forall xp(x)\leftrightarrow \forall yp(y)$

  (2) $\vdash \exists xp(x)\leftrightarrow \exists yp(y)$ 其中y不在p(x)中自由出现

- **命题8**：(1) $\vdash \neg\forall xp\leftrightarrow \exists x\neg p$； (2) $\vdash \neg\exists xp\leftrightarrow \forall x\neg p$
- **定理5(子公式的等价可替换性)**：设公式q是公式p的子公式：p=…q…。用公式q'替换p中的q所得结果记为p'=…q'…，则有

$$\Gamma \vdash q\leftrightarrow q' \Rightarrow \Gamma \vdash p\leftrightarrow p'$$

2.3 谓词演算的语义

2.3.1谓词的语言翻译

设G (x)是关于x的一元谓词，D是其个体域，任取 $x_0 \in D$，则 $G(x_0)$是一个命题。

$(\forall x)G(x)$是这样的一个命题："对任意x，$x \in D$，G(x)都成立"其真值规定如下：

$$(\forall x)G(x) = \begin{cases} 1 & \text{对所有的 } x \in D\text{，都有 } G(x) = 1 \\ 0 & \text{否则。} \end{cases}$$

$(\exists x)G(x)$ 是命题："存在一个 $x_0 \in D$，使得 $G(x_0)$成立，其真值为：

$$(\exists x)G(x) = \begin{cases} 1 & \text{至少有一个 } x_0 \in D\text{，都有 } G(x_0) = 1 \\ 0 & \text{否则。} \end{cases}$$

2.3 谓词演算的语义

当个体域D为有限集合时，设D={a_1，a_2，…，a_n}，则：

$$(\forall x)G(x)=\mathop{\wedge}\limits_{i=1}^{n}G(a_i)=G(a_1)\wedge G(a_2)\wedge\cdots\wedge G(a_n)$$

$$(\exists x)G(x)=\mathop{\vee}\limits_{i=1}^{n}G(a_i)=G(a_1)\vee G(a_2)\vee\cdots\vee G(a_n)$$

因此，对于一个谓词，如果其中每一个变量都在一个量词作用下，用它就不再是命题函数，而是一个命题了。

2.3 谓词演算的语义

- **例1：设P(x)：x是素数，I(x)：x是整数，Q(x，y)：x+y=0；用语句描述下列句子，并判断其真假值。**

(1). $(\forall x)(I(x) \rightarrow P(x))$;

(2). $(\exists x)(I(x) \land P(x))$;

(3). $(\forall x)(\forall y)(I(x) \land I(y) \rightarrow Q(x, y))$;

(4). $(\forall x)(I(x) \rightarrow (\exists y)(I(y) \land Q(x, y)))$;

(5). $(\exists x)(\forall y)(I(x) \land (I(y) \rightarrow Q(x, y)))$.

2.3 谓词演算的语义

2.3.2 谓词演算K的解释域与项解释

- **定义1（K的解释域）**： 设非空集M具有以下性质：

1）对K的每个个体常元c_i，都有M的元素$\overline{c_i}$与之对应：

$c_i \mapsto \overline{c_i}, \overline{c_i} \in M$

2）对K的每个函数或运算符f_i^n，都有M上的n运算符$\overline{f_i^n}$与之对应：

$$f_i^n \mapsto \overline{f_i^n}，\overline{f_i^n}\text{是M上的n元运算}$$

3）对K的每个谓词R_i^n，都有M上的n元关系$\overline{R_i^n}$与之对应：

$$R_i^n \mapsto \overline{R_i^n}，\overline{R_i^n}\text{是M上的n元关系}$$

带有上述三个映射的非空集合M叫做K的解释域，通常也叫做解释或结构。

2.3 谓词演算的语义

- **例1**： 设K中的c={c_1}，F={f_1^1, f_1^2, f_2^2}，R={R_1^2}. 下面的N是K的一个解释域：

  N={0, 1, 2, …}， $\overline{c_1} = 0$， $\overline{f_1^1}$：后继函数， $\overline{f_1^1}(n) = n + 1$

  $\overline{f_1^2}$：加法(+)， $\overline{f_2^2}$：乘法(×)， $\overline{R_1^2}$：相等(=)

  Q⁺：正有理数集合， $\overline{c_1} = 1$， $\overline{f_1^1}$：倒数函数， $\overline{f_1^2}$：乘法(×)

  $\overline{f_2^2}$：除法(÷)， $\overline{R_1^2}$：相等(=)

  考察K中只含有闭项的原子公式p：

$$R_1^2(f_1^2(f_1^1(c_1), c_1), f_1^2(f_1^1(c_1), c_1))$$

  p在解释域N中解释成：(0+1)+0=(0+1)×0，为假命题

  p在解释域Q⁺中解释成：$\frac{1}{1} \times 1 = \frac{1}{1} \div 1$，为真命题

2.3 谓词演算的语义

2.3.2 谓词演算K的解释域与项解释

- **定义2(项解释)**：对给定的解释域M，项解释φ是指具有以下性质的映射$\varphi: T \to M$：

  1） $\varphi(x_i)=\varphi_0(x_i)$，$\varphi(x_i)=\overline{c_i}$，

  其中映射$\varphi_0: X \to M$叫做个体变元的对象指派，φ_0给变元x_i指派的个体对象是$\varphi_0(x_i) \in M$。

  2) 若$\varphi(t_1), \cdots, \varphi(t_n)$已有定义，则令

$$\varphi(f_i^n(t_1, \cdots, t_n))=\overline{f_i^n}(\varphi(t_1), \cdots, \varphi(t_n))$$

  其中，2)称作项解释φ的"保运算性"。

- 项解释φ由个体变元的指派φ_0完全确定。φ_0可随意取，只要φ_0取定，变元有了指派，每个项的解释则可由1)和2)唯一确定下来

2.3 谓词演算的语义

2.3.2 谓词演算K的解释域与项解释

- **定义3（项解释的变元变通）**：对给定的解释域M，把所有的项解释组成的集合记作$\Phi_M=\{\varphi \mid \varphi: T\to M是项解释\}$。设x是某个给定的个体变元，y是任意的个体变元，且$\varphi, \varphi' \in \Phi_M$满足条件：

$$y \neq x \Rightarrow \varphi'(y)=\varphi(y),$$

则把φ'叫做φ 的x变通。（φ'和φ互为对方的x变通）

- 互为变通的φ与φ'的差别仅在于对变元x的指派可能不同(也可能相同)，而它们对其他变元的指派则全都相同。

2.3 谓词演算的语义

2.3.3 公式的赋值函数

- **定义1（公式的赋值函数）**：设M是给定的解释域，p是K中任一公式。由公式p按下面的方式归纳定义的函数$|p|:\Phi_M\to Z_2$叫做公式p的赋值函数。对任一项解释$\varphi\in\Phi_M$，记x的指派为$\bar{x}=\varphi(x)$，项t的解释为$\bar{t}=\varphi(t)$，并

1）当p为原子公式$R_i^n(t_1,\cdots,t_n)$时，令

$$|p|(\varphi)=\begin{cases}1, & 若(\bar{t}_1,\ldots,\bar{t}_n)\in\overline{R_i^n}\\ 0, & 若(\bar{t}_1,\ldots,\bar{t}_n)\notin\overline{R_i^n}\end{cases}$$

2）当p是$\neg q$或$q\to r$时，令

$|\neg q|(\varphi)=\neg|q|(\varphi)$， $|q\to r|(\varphi)=|q|(\varphi)\to|r|(\varphi)$

3）当p是$\forall xq$时，令

$$|\forall xq|(\varphi)=\begin{cases}1, & 若\varphi的任一x变通\varphi'都使|q|(\varphi')=1\end{cases}$$

2.3 谓词演算的语义

2.3.3 公式的赋值函数

- **命题1**：

  1） $|p \vee q|(\varphi) = |p|(\varphi) \vee |q|(\varphi)$

  2） $|p \wedge q|(\varphi) = |p|(\varphi) \wedge |q|(\varphi)$

  3） $|p \leftrightarrow q|(\varphi) = |p|(\varphi) \leftrightarrow |q|(\varphi)$

  4） $|\exists x q|(\varphi)=1 \Leftrightarrow$ 存在φ的x变通φ'使$|q|(\varphi')=1$