

7.1(a)

lemma 1: $A \rightarrow A$

$$(1) (A \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)) \quad (A2)$$

$$(2) A \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow A) \quad (A1)$$

$$(3) (A \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A) \quad (MP(1)(2))$$

$$(4) A \rightarrow (B \rightarrow A) \quad (A1)$$

$$(5) A \rightarrow A \quad (MP(3)(4))$$

lemma 2: $(B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

$$(1) ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)))) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)))) \quad (A2)$$

$$(2) ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)))) \quad (A1)$$

$$(3) (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \quad (A2)$$

$$(4) (B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))) \quad (MP(2)(3))$$

$$(5) ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))) \quad (MP(1)(4))$$

$$(6) (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \quad (A1)$$

$$(7) (B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \quad (MP(5)(6))$$

(1)

$\vdash_L \neg\neg A \rightarrow A$

$$(1) (\neg\neg A \rightarrow (\neg\neg A \rightarrow A)) \rightarrow ((\neg\neg A \rightarrow \neg\neg A) \rightarrow (\neg\neg A \rightarrow A)) \quad (A2)$$

$$(2) ((\neg A \rightarrow \neg\neg\neg A) \rightarrow (\neg\neg A \rightarrow A)) \rightarrow ((\neg\neg A \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg\neg\neg A)) \rightarrow (\neg\neg A \rightarrow (\neg\neg A \rightarrow A))) \quad (lemma\ 2)$$

$$(3) (\neg A \rightarrow \neg\neg\neg A) \rightarrow (\neg\neg A \rightarrow A) \quad (A3)$$

$$(4) (\neg\neg A \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg\neg\neg A)) \rightarrow (\neg\neg A \rightarrow (\neg\neg A \rightarrow A)) \quad (MP(2)(3))$$

$$(5) ((\neg\neg\neg\neg A \rightarrow \neg\neg A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg\neg\neg A)) \rightarrow ((\neg\neg A \rightarrow (\neg\neg\neg\neg A \rightarrow \neg\neg A)) \rightarrow (\neg\neg A \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg\neg\neg A))) \quad (lemma\ 2)$$

$$(6) (\neg\neg\neg\neg A \rightarrow \neg\neg A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg\neg\neg A) \quad (A3)$$

$$(7) (\neg\neg A \rightarrow (\neg\neg\neg\neg A \rightarrow \neg\neg A)) \rightarrow (\neg\neg A \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg\neg\neg A)) \quad (MP(5)(6))$$

$$(8) \neg\neg A \rightarrow (\neg\neg\neg\neg A \rightarrow \neg\neg A) \quad (A1)$$

$$(9) \neg\neg A \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg\neg\neg A) \quad (MP(7)(8))$$

$$(10) \neg\neg A \rightarrow (\neg\neg A \rightarrow A) \quad (MP(4)(9))$$

$$(11)(\neg\neg A \rightarrow \neg\neg A) \rightarrow (\neg\neg A \rightarrow A) \quad (MP(1)(10))$$

$$(12)\neg\neg A \rightarrow \neg\neg A \quad (lemma\ 1)$$

$$(13)\neg\neg A \rightarrow A \quad (MP(11)(12))$$

(2)

$$\vdash_L \neg\neg A \rightarrow A$$

$$(1)\{\neg\neg A\} \vdash_L \neg\neg A \quad (premise)$$

$$(2)\{\neg\neg A\} \vdash_L \neg\neg A \rightarrow (\neg\neg\neg\neg A \rightarrow \neg\neg A) \quad (A1)$$

$$(3)\{\neg\neg A\} \vdash_L (\neg\neg\neg\neg A \rightarrow \neg\neg A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg\neg\neg A) \quad (A3)$$

$$(4)\{\neg\neg A\} \vdash_L \neg\neg\neg\neg A \rightarrow \neg\neg A \quad (MP(1)(2))$$

$$(5)\{\neg\neg A\} \vdash_L (\neg A \rightarrow \neg\neg\neg A) \rightarrow (\neg\neg A \rightarrow A) \quad (A3)$$

$$(6)\{\neg\neg A\} \vdash_L \neg A \rightarrow \neg\neg\neg A \quad (MP(3)(4))$$

$$(7)\{\neg\neg A\} \vdash_L \neg\neg A \rightarrow A \quad (MP(5)(6))$$

$$(8)\{\neg\neg A\} \vdash_L A \quad (MP(1)(7))$$

$$(9) \vdash_L \neg\neg A \rightarrow A \quad (deduction)$$

7.2 (a)

lemma 1: $A \rightarrow A$

$$(1)(A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A) \quad (A: (A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B))$$

$$(2)A \rightarrow (A \rightarrow A) \quad (A: A \rightarrow (B \rightarrow A))$$

$$(3)A \rightarrow A \quad (MP(1)(2))$$

(1)

$$\vdash_{HB} A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$$

$$(1)(A \rightarrow (B \rightarrow A))$$

$$\rightarrow \left(\left((B \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B)) \right) \rightarrow \left(A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B)) \right) \right) \quad (A: (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)))$$

$$(2)A \rightarrow (B \rightarrow A) \quad (A: A \rightarrow (B \rightarrow A))$$

$$(3)\left((B \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B)) \right) \rightarrow \left(A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B)) \right) \quad (MP(1)(2))$$

$$(4)(B \rightarrow A) \rightarrow \left((B \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B)) \right) \quad (A: (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \wedge C))))$$

$$(5)(B \rightarrow B) \rightarrow \left((B \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow B) \right) \quad (A: A \rightarrow (B \rightarrow A))$$

$$(6)(B \rightarrow B) \quad (lemma\ 1)$$

$$(7)(B \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow B) \quad (MP(5)(6))$$

$$\begin{aligned}
& (8) ((B \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow B)) \\
& \rightarrow \left(\left((B \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B)) \right) \rightarrow \left((B \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B)) \right) \right) \quad (A: (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))) \\
& (9) \left((B \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B)) \right) \rightarrow \left((B \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B)) \right) \quad (MP(7)(8)) \\
& (10) \left((B \rightarrow A) \rightarrow \left((B \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B)) \right) \right) \\
& \rightarrow \left(\left(\left((B \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B)) \right) \rightarrow \left((B \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B)) \right) \right) \right) \\
& \rightarrow \left((B \rightarrow A) \rightarrow \left((B \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B)) \right) \right) \quad (A: (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))) \\
& (11) \left(\left((B \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B)) \right) \rightarrow \left((B \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B)) \right) \right) \\
& \rightarrow \left((B \rightarrow A) \rightarrow \left((B \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B)) \right) \right) \quad (MP(4)(10)) \\
& (12) (B \rightarrow A) \rightarrow \left((B \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B)) \right) \quad (MP(9)(11)) \\
& (13) \left((B \rightarrow A) \rightarrow \left((B \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B)) \right) \right) \\
& \rightarrow \left((B \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B)) \right) \quad (A: (A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)) \\
& (14) (B \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B)) \quad (MP(12)(13)) \\
& (15) A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B)) \quad (MP(3)(14))
\end{aligned}$$

(2)

$$\vdash_{HB} A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$$

$$(1)\{A\} \vdash_{HB} A \quad (premise)$$

$$(2)\{A\} \vdash_{HB} A \rightarrow (B \rightarrow A) \quad (A: A \rightarrow (B \rightarrow A))$$

$$(3)\{A\} \vdash_{HB} B \rightarrow A \quad (MP(1)(2))$$

$$(4)\{A\} \vdash_{HB} (B \rightarrow A) \rightarrow \left((B \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B)) \right) \quad (A: A \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \wedge C))))$$

$$(5)\{A\} \vdash_{HB} (B \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B)) \quad (MP(3)(4))$$

$$(6)\{A\} \vdash_{HB} B \rightarrow B \quad (lemma\ 1)$$

$$(7)\{A\} \vdash_{HB} B \rightarrow (A \wedge B) \quad (MP(5)(6))$$

$$(8) \vdash_{HB} A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B)) \quad (deduction)$$