7.1(f) $\vdash_L B\rightarrow((\neg C)\rightarrow(\neg (B\rightarrow C)))$

Without deduction

Lemma: $(B\rightarrow C)\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C))$

1. $((B\rightarrow C)\rightarrow((A\rightarrow(B\rightarrow C))\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C))))\rightarrow((B\rightarrow C)\rightarrow((A\rightarrow(B\rightarrow C))\rightarrow((B\rightarrow C)\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C))))$
   { AS $(A\rightarrow(B\rightarrow C))\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C))$ }
2. $((A\rightarrow(B\rightarrow C))\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C)))\rightarrow((B\rightarrow C)\rightarrow((A\rightarrow(B\rightarrow C))\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C))))$
   { AS $A\rightarrow(B\rightarrow A)$ }
3. $(A\rightarrow(B\rightarrow C))\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C))$
   { AS $(A\rightarrow(B\rightarrow C))\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C))$ }
4. $(B\rightarrow C)\rightarrow((A\rightarrow(B\rightarrow C))\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C)))$
   { Follow from 2 and 3 by MP }
5. $(B\rightarrow C)\rightarrow((A\rightarrow(B\rightarrow C))\rightarrow((B\rightarrow C)\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C)))$
   { Follow from 1 and 4 by MP }
6. $(B\rightarrow C)\rightarrow(A\rightarrow(B\rightarrow C))$ { AS $A\rightarrow(B\rightarrow A)$ }
7. $(B\rightarrow C)\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C))$ { Follow from 5 and 6 by MP}

Prove $\vdash_L B\rightarrow((\neg C)\rightarrow(\neg (B\rightarrow C)))$

1. $((C\rightarrow(B\rightarrow C))\rightarrow((\neg C)\rightarrow(\neg (B\rightarrow C))))\rightarrow((B\rightarrow(C\rightarrow(B\rightarrow C)))\rightarrow(B\rightarrow((\neg C)\rightarrow(\neg (B\rightarrow C)))))$
   { Lemma}
2. $(C\rightarrow(B\rightarrow C))\rightarrow((\neg C)\rightarrow(\neg (B\rightarrow C)))$
   { 7.1(e) }
3. $(B\rightarrow(C\rightarrow(B\rightarrow C)))\rightarrow(B\rightarrow((\neg C)\rightarrow(\neg (B\rightarrow C))))$
   { Follow from 1 and 2 by MP}
4. $(C\rightarrow(B\rightarrow C))\rightarrow(B\rightarrow(C\rightarrow(B\rightarrow C)))$ { AS $A\rightarrow(B\rightarrow A)$ }
5. $C\rightarrow(B\rightarrow C)$ { AS $A\rightarrow(B\rightarrow A)$ }
6. $B\rightarrow(C\rightarrow(B\rightarrow C))$ { Follow from 4 and 5 by MP}
7. $B\rightarrow((\neg C)\rightarrow(\neg (B\rightarrow C)))$ { Follow from 3 and 6 by MP}

With deduction

Lemma: $\vdash_L B\rightarrow((B\rightarrow C)\rightarrow C)$

Just need to show $B,(B\rightarrow C)\vdash_L C$ { deduction theorem}

1. B {Premise}
2. $B\rightarrow C$ {Premise}
3. C {Follow from 1 and 2 by MP}

Next pro∨e $\vdash_L B\rightarrow((\neg C)\rightarrow(\neg (B\rightarrow C)))$

Just need to show $B \vdash_L ((\neg C)\rightarrow(\neg (B\rightarrow C)))$ { deduction theorem}

1. B {Premise}
2. B→((B→C)→C) {Lemma}
3. ((B→C)→C) {Follow from 1 and 2 by MP}

4. ((B→C)→C) →((¬C)→(¬ (B→C)))
{ 7.1(e) $\vdash_L (B \rightarrow C) \rightarrow ((\neg C) \rightarrow (\neg B))$ }

5. ((¬C)→(¬ (B→C))) {Follow from 3 and 4 by MP}

7.2(f) $\vdash_{HB} (A \vee (B \wedge C)) \leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$

Without deduction

(1)Show $\vdash_{HB} (A \vee (B \wedge C)) \rightarrow((A \vee B) \wedge (A \vee C))$

1. A→(A∨B) {AS:A→(A∨B) }
2. (A→(A∨B))→((A→(A∨C))→(A→((A∨B)∧(A∨C))))
{ AS: (A→B)→((A→C)→(A→(B∧C))) }
3. (A→(A∨C))→(A→((A∨B)∧(A∨C))) { Follow from 1 and 2 by MP}
4. A→(A∨C) {AS:A→(A∨B) }
5. A→((A∨B)∧(A∨C)) { Follow from 3 and 4 by MP}
6. (B∧C)→B {AS: (A∧B)→A }
7. (B∧C)→C {AS: (A∧B)→A and In 7.2(b) you must have proved that (A∧B)→(B∧A) and
(B∧A)→(A∧B) }
8. B→(A∨B) {AS: B→(A∨B) }
9. C→(A∨C) {AS: B→(A∨B) }
10. ((B∧C)→B)→((B→(A∨B))→((B∧C)→(A∨B)))
{AS: (A→B)→((B→C)→(A→C)) }

11. (B→(A∨B))→((B∧C)→(A∨B)) (Follow from 6 and 10 by MP)
12. (B∧C)→(A∨B) { Follow from 8 and 11 by MP}
13. ((B∧C)→C)→((C→(A∨C))→((B∧C)→(A∨C)))
{AS: (A→B)→((B→C)→(A→C)) }

14. (C→(A∨C))→((B∧C)→(A∨C)) { Follow from 7 and 13 by MP}
15. (B∧C)→(A∨C) { Follow from 9 and 14 by MP}
16. ((B∧C)→(A∨B))→(((B∧C)→(A∨C))→((B∧C)→((A∨B)∧(A∨C))))
{ AS: (A→B)→((A→C)→(A→(B∧C))) }
17. ((B∧C)→(A∨C))→((B∧C)→((A∨B)∧(A∨C)))
{ Follow 12 and 16 by MP}

18. (B∧C)→((A∨B)∧(A∨C)) { Follow 15 and 17 by MP}
19. (A→((A∨B)∧(A∨C)))→(((B∧C)→((A∨B)∧(A∨C)))→((A∨(B∧C))→((A∨B)∧(A∨C))))

20. ((B∧C)→((A∨B)∧(A∨C)))→((A∨(B∧C))→((A∨B)∧(A∨C))) }
{ Follow 5 and 19 by MP}

21. (A∨(B∧C))→((A∨B)∧(A∨C))
{ Follow 18 and 20 by MP}

(2)Show ⊢HB ((A ∨ B) ∧ (A ∨ C))→ (A ∨ (B ∧ C))

过程见 with deduction 部分

其中用到 deduction theorem 的引理和证明均可改为不使用 deduction theorem 的形式并将证明过程改为 MP 来证明。

With deduction

Show ⊢HB (A ∨ (B ∧ C)) →((A ∨ B) ∧ (A ∨ C))

(1) Show {A}⊢HB(A∨B)∧(A∨C)

1. A { Premise}
2. A→(A∨B) {AS:A→(A∨B) }
3. A∨B { Follow 1 and 2 by MP}
4. A→(A∨C) {AS:A→(A∨B) }
5. A∨C { Follow 1 and 4 by MP}
6. (A∨B),(A∨C)⊢HB(A∨B)∧(A∨C) { The formula proved in page 93 of CPC¬1}
7. (A∨B)∧(A∨C) { 3 and 5 as premises}

(2) Show{ (B∧C)}⊢HB(A∨B)∧(A∨C)

1. B∧C { Premise}
2. (B∧C)→B {AS: (A∧B)→A }
3. (B∧C)→C {AS: (A∧B)→A and In 7.2(b) you must have proved that (A∧B)→(B∧A) and (B∧A)→(A∧B) }
4. B { Follow 1 and 2 by MP}
5. C { Follow 1 and 3 by MP}
6. B→(A∨B) {AS: B→(A∨B)}
7. C→(A∨C) {AS: B→(A∨B)}
8. A∨B { Follow 4 and 6 by MP}
9. A∨C { Follow 5 and 7 by MP}

10. {(A∨B),(A∨C)}⊢HB(A∨B)∧(A∨C)
{ The formula in page 93}

11. (A∨B)∧(A∨C) { 3 and 5 as premises}

(3) Combine (1) and (2)

1. {A}⊢HB(A∨B)∧(A∨C) {1}
2. A→((A∨B)∧(A∨C)) { deduction theorem from 1}
3. {(B∧C)}⊢HB(A∨B)∧(A∨C){2}
4. (B∧C)→((A∨B)∧(A∨C)) { deduction theorem from 3}
5. (A→((A∨B)∧(A∨C)))→(((B∧C)→((A∨B)∧(A∨C)))→((A∨(B∧C)))→((A∨B)∧(A∨C)))

6. A→((A∨B)∧(A∨C)),(B∧C)→((A∨B)∧(A∨C))⊢HB(A∨(B∧C))→((A∨B)∧(A∨C))
{ deduction theorem from 5}

7. (A∨(B∧C)))→((A∨B)∧(A∨C))
{ Follow from 2, 4, 6 by MP}

Show ⊢HB ((A ∨ B) ∧ (A ∨ C))→ (A ∨ (B ∧ C))

引理 1：{A → B， B→ A}⊢HB(A↔ B)
1. A→B {前提}
2. B→A {前提}
3. (A→B)→((B→A)→(4→B)) {AS (X→Y)→((Y→X)→(X→Y)),X=A,Y=B}
4. (B→ A) →(A → B) {MP 根据 1，3 推出}
5. A ↔ B {MP 根据 2，4 推出}

引理 2：{A →B， B → C} ⊢HB(A → C)：
1. A →B {前提}
2. B →C {前提}
3. (A→B)→((B→C)→(A→C)) {AS (X→Y)→(Y→Z)→(X→2)X=A,Y=B,Z=C}
4. (B→ C) → (A → C) {MP 根据 1，3 推出}
5. A → C {MP 根据 2，4 推出}

引理 3：{A→ (B→ C)}⊢HB(B→ (A → C))
1.A→ (B → C) {前提}
2.(A→(B→C))→(((B→C)→C)→(A→C))
{AS (X→Y)→((Y→Z)→(X→Z)),X=A,Y=B→C,Z=C}
3.((B→ C) → C) →(A → C) {MP 根据 1，2 推出}
4.B→((B → C) → C) {MP 定义，A 替换为 B，B 替换为 C}
5.B→(A→C) {引理 2 由 3，4 推出，A 替换为 B，B 替换为(B→C)→C，
C 替换为 A→C}

引理 4：⊢HB (A→B) →((C∧ A) → (C ∧ B))：
1.(C∧ A)→C)→(((C∧A)→B)→(((C∧A)→(C∧B)))
{AS (X→Y)→((X→Z)→(X→(Y∧Z))X=CAA,Y=C,Z=B}
2. (C∧A) →C {AS (X∧Y) → X,X=C,Y= A}

3. (C∧ A) → A {AS (X∧Y) →Y,X=C,Y= A}
4. ((C∧A)→ A)→((A→B) →((C∧A)→B))
{AS (X→Y)→(((Y→Z)→(X→Z)),X=C∧A,Y=A,Z=B}
5. (A → B) →((C∧A) → B) {MP 根据 3，4 推出}
6. ((C∧A)→ B) →((C∧A) → (C∧B)) {MP 根据 1，2 推出}
7.(A→B)→((C∧A)→(C∧B)) {引理 2 根据 5，6 推出，A 替换为 A→B，B 替换为(C∧A)→B，C 替换为(C∧ A)→(C∧B)}

引理 5：{A→B，C→D}⊢HB((A∨C)→ (B∨ D))
1. A →B {前提}
2. C →D {前提}
3. B → (B∨D) {AS A→(A∨ B)，A 替换为 B，B 替换为 D}
4. D → (B∨D) {AS B→(A∨ B)，A 替换为 B，B 替换为 D}
5. A → (B∨D) {引理 2 根据 1，3 推出，C 替换为 B∨ D}
6. C → (B∨D) {引理 2 根据 2，4 推出，A 替换为 C，B 替换为 D，C 替换为 B∨D}
7. (A→(B∨ D))→((C→(B∨D))→((A∨C)→(B∨D)))
{AS (A→C)→((B→C)→((A∨B)→C)，B 替换为 C，C 替换为 B∨D }
8. (C→(B∨ D))→((A∨C)→(B∨D)) {MP 根据 5，7 推出}
9. (A ∨ C) → (B∨ D) {MP 根据 6，8 推出}

引理 6：⊢HB (¬(A ∨ B))→((¬A)∧(¬B))
1. B→ (A∨B) {AS}
2. A→ (A∨ B) { AS}
3. (B→(A∨B))→((¬(A∨ B))→(¬B))
{AS(A→ B)→((¬B)→(¬A))，A 替换为 B，B 替换为 A∨B }
4. (A→(A∨B))→((¬(A∨B))→(¬A))
{AS(A→B)→((¬B)→(¬A))，B 替换为 A∨B }
5. ((A ∨ B)) → (¬B) {MP 根据 1，3 推出}
6. ((A ∨ B))→ (¬A) {MP 根据 2，4 推出}
7.((¬(A∨B))→(¬A))→(((¬(A∨ B))→(¬B))→((¬(A∨B))→((¬A)∧(¬B))
{As(A→ B) →((A→ C)→(A→(B∧C)))，A 替换为¬(A∨ B)，B 替换为¬A，C 替换为¬B}
8.((¬(A∨ B))→(¬B))→((¬(A∨ B))→((¬A)∧(¬B)) {MP 根据 6，7 推出}
9. (¬(A ∨ B)) →((¬A) ∧ (¬B)) {MP 根据 5，8 推出}

引理 7：⊢HB (¬(A ∧ B))→((¬A) ∨ (¬B))
1. (((¬A) ∨(¬B))→((¬(¬A))A (¬(¬B)) {引理 6，A 替换为¬A，B 替换为¬B}
2.((((¬A)∨(¬B))→((¬(¬A)∧¬(¬B)))→((¬((¬(¬A)∧¬(¬B)))→(¬(¬((¬A)∨(¬B)))
{AS (A→B) →((¬B) →(¬A))，A 替换为¬((¬A)∨(¬B))，B 替换为(¬(¬A)A (¬(¬B)}

3. (¬((¬(¬A))A (¬(¬B)))→(¬(¬((¬A)∨(¬B)))
{MP 根据 1，2 推出}

4. (¬(¬((¬A) ∨(¬B)))→((¬A) ∨ (¬B))
{AS (¬(¬A))→ A，A 替换为(¬A) ∨(¬B}

5. (¬((¬(¬A)∧¬(¬B)))→((¬A)∨(¬B))
{引理 2 根据 3，4 推出，A 替换为(¬((¬(¬A)∧¬(¬B))，B 替换为(¬(¬((¬A) ∨(¬B))，C 替换为((¬A)∨(¬B))}

6. (((¬(¬A)∧¬(¬B)))→(A∧B))→((¬(¬A)∨(¬B))→(¬(¬(¬A)∨(¬B))))
{AS(A → B) →((¬B) →(¬A))，A 替换为(¬(¬A))A (¬(¬B))，B 替换为 A∧B}

7. ((¬(¬A)∧¬(¬B)))→(¬(¬A)) {AS(A∧B)→ A，A 替换为¬(¬A).B 替换为¬(¬B)}

8. ((¬(¬A)∧¬(¬B)))→(¬(¬B)) {AS (A ∧B)→B，A 替换为¬(¬A)，B 替换为¬(¬B)}

9. (¬(¬A))→A {AS}

10. (¬(¬B))→ B {AS (¬(¬A))→A，A 替换为 B}

11.((¬(¬A)∧¬(¬B)→A {引理 2 根据 7，9 推出，A 替换为((¬(¬A))∧(¬(¬B)，B 替换为¬(¬A)，C 替换 A}

12.((¬(¬A)∧¬(¬B))→ B {引理 2 根据 8，10 推出，A 替换为((¬(¬A)∧¬(¬B)))，B 替换为¬(¬B)，C 替换为 B}

13.((¬(¬A)∧¬(¬B))→A)→(((¬(¬A))∧(¬(¬B))→B)→((¬(¬A)∧¬(¬B)→(AAB)))
{AS (A→ B) →((A→C)→(A →(B∧C)))，A 替换为(¬(¬A)∧¬(¬B))，B 替换为 A，C 替换为 B}

14. (((¬(¬A)∧¬(¬B))→B)→(((¬(¬A)∧¬(¬B)))→(A∧B))
{MP 根据 11，13 推出) 15. (((¬A)) ∧(¬(¬B)))→(A∧ B) {MP 根据 12，14 推出}

16.(¬(A∧ B))→(((¬(¬A))∧(¬(¬B)))){MP 根据 6，15 推出}

17.(¬(A∧B)→((¬A)∨(¬B)) {引理 2 根据 5，16 推出，A 替换为¬(A∧B)，B 替换为¬((¬(¬A)∧¬(¬B)，C 替换为(¬A) ∨ (¬B)

引理 8：{A→ B，C→D}⊢HB((A∧C)→(B∧D))：

1. A →B {前提}

2. C→ D {前提}

3. (A∧C) → A {AS (A∧ B) → A，B 替换为 C}

4. (A∧C) →C {AS (A∧ B) →B，B 替换为 C}

5. (A∧C)→B {引理 2 根据 1，3 推出，A 替换为 AAC，B 替换为 A，C 替换为 B}

6. (A∧C) →D {引理 2 根据 2，4 推出，A 替换为 A∧C，B 替换为 C，C 替换为 D}

7. ((A∧C)→B)→(((A∧C)→D)→((A∧C)→(B∧D)))
{AS (A→B)→((A→C)→(A→(B∧C))A 替换为 A∧C.C 替换为 D}

8. ((A∧C)→ D)→((A∧C)→(B∧D))
{MP 根据 5，7 推出}

9. (A∧ C) → (B ∧ D) {MP 根据 6，8 推出}

引理 9：⊢HB((¬A) →(¬B))→ (B→ A)：

1. ((¬A)→(¬B))→((¬(¬B))→(¬(¬A)))
{AS(A→B)→((¬B)→(¬A))，A 替换为¬A，B 替换为¬B}

2. B→ (¬(¬B)) {AS A →(¬(¬A))，A 替换为 B}

3. (¬(¬B)→((¬A)→(¬B))→(¬(¬A)))
{引理 3 根据 1 推出，A 替换为(¬A)→(¬B)，B 替换为¬(¬B)，C 替换为¬(¬A)}

4.B→(((¬4)→(¬B))→(¬(¬4)))　　{引理 2 根据 2，3 推出，A 替换为 B，B 替换为¬(¬B)，C 替换为((¬4)→(¬B))→ (¬(¬A))}

5. ((¬A)→(¬B))→(B→(¬(¬A)))　　{引理 3 根据 4 推出，A 替换为 B，B 替换为(¬A)→(¬B)，C 替换为¬(¬A)}

6. (¬(¬A))→ A　　{AS}

7.(B→(¬(¬A)))→(¬(¬A))→A)→(B→A))

{AS (A→B)→((B→C)→(A→C))，A 替换为 B，B 替换为¬(¬A)，C 替换为 A}

8.((¬(¬A))→A)→((B→(¬(¬A)→(B→ A))

{引理 3 根据 7 推出，A 替换为 B→(¬(¬A))，B 替换为(¬(¬A))¬→ A，C 替换为 B→A}

9. (B→ (¬(¬A))) → (B → A)　　{MP 根据 6，8 推出}

10.((¬A)→(¬B))→(B→A)　　{引理 2 根据 5，9 推出，A 替换为(¬A)→(¬B)，B 替换为 B→(¬(¬A))，C 替换为 B→A)

引理 10： {A→ (B→C)，A→(D→E)}⊢HB A→((B∨D) →(C∨E))

1.A →(B→) C)　　{前提}

2.A →(D→ E)　　{前提}

3.B→ (A → C)　　{引理 3 根据 1 推出}

4. D →(A → E)　　{引理 3 根据 2 推出}

5. C→(C ∨E)　　{AS A → (A∨B) }

6. E → (C∨E)　　{AS B→(A∨ B) }

7.(A→C)→((C→(C∨E))→(A→(C∨E)))

{AS (A→B)→((B→C)→(A→C)) }

8.(A→E)→((E→(C∨E))→(A→(C∨ E))

{AS (A→B)→((B→C)→(A→C)) }

9. (C→(C∨E))→((A→ C) →(A→(C∨E))

{引理 3 根据 7 推出 }

10. (E→(C∨E))→((A → E)→(A →(C∨E)))

{引理 3 根据 8 推出 }

11. (A → C) →(A → (C ∨ E)) {MP 根据 5，9 推出 }

12. (A → E) → (A →(C ∨ E)) {MP 根据 6，10 推出}

13.B→(A→(C∨E))　　{引理 2 根据 3，11 推出 }

14. D →(4 →(C∨E))　　{引理 2 根据 4，12 推出 }

15.(B→(A→(C∨E)))→((D→(A→(C∨ E)))→((B∨ D)→(A→(C∨E)))

{AS(A→C)→((B→C)→((A∨ B)→C)) }

16. (D→(A→(C∨E)))→((B∨D)→(A→(C∨E)))

{MP 根据 13，15 推出}

17. (B∨ D)→(A→(C∨E))　　{MP 根据 14，16 推出}

18.A→((B∨D)→(C∨E))　　{引理 3 根据 17 推出，A 替换为 B∨D，B 替换为 A，C 替换为 C∨E}

引理 11：⊢HB (A∨ B)→(¬(¬A) ∧(¬(B)) :

1. (A→(¬((¬A) ∧(¬B)))→((B→(¬((¬A)∧(¬B))→((A∨B)→(¬((¬A)∧(¬B)))))

{AS(A→C) →((B→ C)→((A∨ B) →C)，C 替换为¬((¬A)∧(¬B))}

2. (((¬A)∧(¬B))→(¬A))→((¬(¬A))→(¬((¬A)∧(¬B))))

{AS (A→B)→((¬B)→(¬A))，A 替换为(¬A) ∧(¬B)，B 替换为¬A}

3.((¬A) ∧ (¬B))→(¬A) {AS (A∧ B) → A，A 替换为¬A，B 替换为¬B}

4. (¬(¬A))→ (¬((¬A)∧ (¬B))) {MP 根据 2，3 推出}

5.A→ (¬(¬A)) {AS}

6.A→(¬((¬A)∧(¬B))) {引理 2 根据 5，4 推出，B 替换为¬(¬A)，C 替换为¬((¬A)A(¬B)}

7.((¬A)∧(¬B))→(¬B))→((¬(¬B))→(¬((¬A)∧(¬B))))

{AS (4→B)→((¬B)→(¬A))，A 替换为(¬A) ∧(¬B)，B 替换为¬B}

8.((¬A)∧ (¬B))→ (¬B) {AS (A∧B) → B，A 替换为¬A，B 替换为¬B

9. ((¬B))→ (¬((¬A) ∧ (¬B))) {MP 根据 7，8 推出}

10. B→ (¬(¬B)) {AS A → (¬(¬A))，A 替换为 B}

11.B→(¬((¬A)∧(¬B))) {引理 2 根据 9，10 推出，A 替换为 B，B 替换为¬(¬B)，C 替换为¬((¬A)v(¬B)}

12.(B→(¬((¬A)∧(¬B)))→((A∨ B) →(¬((¬A)∧(¬B)))) {MP 根据 1，6 推出}

13.(A∨ B) → (¬((¬A)∧ (¬B))) {MP 根据 11，12 推出}

引理 12 (7.2(g)左推右)： A∧(B∨ C)}⊢HB((A∧ B) ∨(A∧ C))：

1.A∧(B∨ C) {前提}

2.(A∧(B∨C))→A {AS (X∧Y)→X,X= A,Y=B∨C}

3.(A∧(B∨C))→(B∨C) {AS (X∧Y)→Y,X=A,Y=B∨C}

4.A {MP 根据 1，2 推出}

5.B∨ C {MP 根据 1，3 推出}

6.A→ (B→(A∧B)) {7.2(a)}

7.A → (C→ (A∧ C)) {7.2(a)，B 替换为 C}

8.B→ (A∧ B) {MP 根据 4，6 推出}

9.C→ (A ∧ C) {MP 根据 4，7 推出}

10.(B∨C)→((A∧B)∨(A∧C)) {引理 5 根据 8，9 推出，A 替换为 B，B 替换为 A∧B，D 替换为 A∧C

11. (A ∧B) ∨(A ∧ C) {MP 根据 5，10 推出}

Proof：⊢HB ((A ∨ B) ∧ (A ∨ C))→ (A ∨ (B ∧ C))

1. ((¬(A∨(B∧C))→(¬((A∨B)∧(A∨C))→(((A∨B)∧(A∨C))→(A∨(B∧C))) {引理 9，A 替换为 A ∨(B∧C)，B 替换为(A ∨ B) ∧(A ∨ C)}

2. ((¬A)∧((¬B)∨(¬C)→(((¬A)∧(¬B))∨((¬A)∧(¬C))) {引理 12，A 替换为¬A，B 替换为¬B，C 替换为¬C}

3. ((¬A)∧((¬B)∨(¬C))→(((¬A)∧(¬B))∨((¬A)∧(¬C))) {引理 12，A 替换为¬A，B 替换为¬B,C 替换为¬C}

4. ((A ∨(B∧C))→((¬A)∧(¬(B∧C))) {引理 6，B 替换为 B∧ C}

5. (¬(B ∧ C)) →((¬B)∨(¬C)) {引理 7，A 替换为 B，B 替换为 C}

6. ((¬A)∧(¬(B∧C)))→((¬A)∧((¬B)∨(¬C))) {引理 4 根据 14 推出，A 替换为¬(B∧C)，B 替换为(¬A) ∧ (¬(B∧C))，C 替换为¬A}

7.(¬(A∨(B∧C)))→((¬A)∧((¬B) ∨(¬C))

{引理 2 根据 13，15 推出，A 替换为¬(A∨(B∧C))，B 替换为(¬A)∧(¬(B∧ C))，

8.(((¬A)¬(¬B))∨((¬A)∧(¬C)))→(¬((C替换为((¬A)∧((B)∨(¬C))))

{引理 6，A 替换为(¬A) ∧(¬B)，B 替换为(¬A) ∧(¬C)}

9. (A∨ B) → ((¬A)∧(¬B)))　　{引理 11}

10. (A∨ C) →((¬A) ∧ (¬C)))　　{引理 11，B 替换为 C}

11. ((A∨B)∧(A∨C))→((¬((¬A)∧(¬B)∧(¬((¬A)∧(¬C)))

{引理 8 根据 18，19 推出，A 替换为 A∨B，B 替换为¬((¬A) ∧ (¬B))，C 替换为

12.((A∨B)∧A∨C)→((¬((¬A)∧(¬B))∧(¬((¬A)∧(¬C)))A替换为→(((¬A)∧((¬A)∧(¬B))∧(¬((¬A)∧(¬C)))))→

(¬((A∨B)∧(A∨C))))　　{AS(X→Y)→((¬Y)→(¬X)),X=(A∨B)∧(A∨C),Y=(¬((¬A)∧(¬B))∧(¬((¬A)∧(¬C))) }

13.(¬((¬((¬A)∧(¬B)))∧(¬((¬A)∧(¬C))→(¬((A∨B)∧(A∨C)))

{MP 根据 20，21 推出}

14. ((¬A)∧(¬B))∨(¬A)∧(¬C)))→(((A∨ B)∧(A∨C)))

{引理 2 根据 17，22 推出，A 替换为((¬A)∧(¬B))∨(¬A)∧(¬C)，B 替换为

15. ((¬A)∧((¬B) ∨ (¬C)))→(¬((A∨ B)∧(A∨C)))((¬A)∧(¬B)))∧((¬A)∧(¬C))，C 替换为¬((A ∨ B)∧(A∨ C))}

{引理 2 根据 12，23 推出，A 替换为(¬A)∧((¬B)∨(¬C))，B 替换为

16. (¬(A∨(B∧C))→(¬((A∨B)∧(A∨C)))(¬A)∧(¬B))∨((¬A)∧(¬C))，c 替换为¬((A∨B)∧(A∨C)}

{引理 2 根据 16，24 推出，A 替换为¬(A∨(B∧C))，B 替换为(¬A) A ((¬B) ∨ (¬C))，

17. ((A ∨ B)∧(A∨ C))→(A ∨(B∧C))C 替换为¬((A∨ B)∧(A∨ C))}

{MP 根据 11，25 推出}

18. (A∨(B∧C))→((A∨ B)∧(A∨C))

{引理 1 根据 9，26 推出，A 替换为 A∨(B∧C)，B 替换为(A∨ B)∧(A∨ C)}

Show ⊢HB (A ∨ (B ∧ C)) ↔ ((A ∨ B) ∧ (A ∨ C))

1. (A∨(B∧C)))→((A∨B)∧(A∨C))　　{前提}

2. (A∨(B∧C))→((A∨ B)∧(A∨C))　　{前提}

3. (A ∨ (B ∧ C)) ↔ ((A ∨ B) ∧ (A ∨ C))　　{引理 1，由 1，2 推出}