Assignment 1 问题总结

Q1，2，3，7 问题总结

1.这次有部分同学列真值表时用的是 1 和 0 表示，这样不规范，建议用 T 和 F 表示。这次就不扣分了。

2.提醒一下各位同学，存在和任意的优先级是比 and 和 or 要高的，在拿不准的情况下，一定要打括号，这次有一部分同学因为优先级没搞清楚，错了不少。

3.有些同学的谓词逻辑的格式十分不规范，这次是错的比较离谱的就扣分了，还可以解释得通的就酌情给分。例如，有些同学在“存在 x”后加上了逗号，然后后面写 Predicate，且把逗号当作括号来使用，这是错误写法。请同学们好好参照 PPT 或教材的规范写法。

4.请同学们写真值表的时候尽量把 TF 的每种情况列出来，建议不要偷工减料少几排。

5.请同学们不要把→写成双箭头。

Q4，5，6，11 问题总结

本次作业同学们普遍出现的问题有：

1. 不熟悉如何使用自然语言（尤其是英语）严谨清晰地描述推理过程。我在批改的过程中对此略有放水，希望同学们下来能认真学习参考答案的格式，把每一种情况**清楚**地描述出来，必要时合理使用数学符号。
2. 随意使用课上没讲的符号，如≡写成=、$\neg p$写成p'或者$\bar{p}$等，尤其是**手写**的同学也在使用不规范的符号，这是不应该的。望注意。
3. 个别同学没看清题目要求和做漏题的情况，读题的时候请仔细点。

Q4:

重灾区是没有按课件格式写出每一步使用的 law，跳步只要不是很严重我都给了分。此外就是 a 问需要利用 exclusive or 和 biconditonal 的定义（写成与或非的形式）来证明。

Q5:

这道题极易失分。一般的解法有：

1. 真值表法：比较麻烦但不容易出错。
2. 分类讨论法：仔细读题，讨论时需要把p,q,r三个变量**真值相同**和**真值不同**两种情况都讨论出来，或者参考充要条件的证明思路分别证明充分性和必要性。
3. 直接证明法：**唯一正确**的思路是证明$(p\vee\neg q)\wedge(q\vee\neg r)\wedge(r\vee\neg p)\equiv(p\wedge q\wedge r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)$这个结论，注意只能**使用 equivalence 而非 implication** 来证明！

   这里需要区分两个概念：$\big((p\to q)\wedge(q\to r)\big)\to(p\to r)\equiv T$是**成立**的，但$\big((p\to q)\wedge(q\to r)\big)\equiv(p\to r)$是**不成立**的。同学们可以尝试自己验证一下。

Q6:

部分同学在推导完成后没有给出结论，语言上不够严谨。本题没有因为没写 law 扣分，但不少同学因为结论错误丢分，证明完成记得验证结果。

Q11:

主要失分点在谓词没找完全，以及没按课件格式写出完整步骤。

Q8，9，10 问题总结

9、10 没什么问题，主要针对第八题。

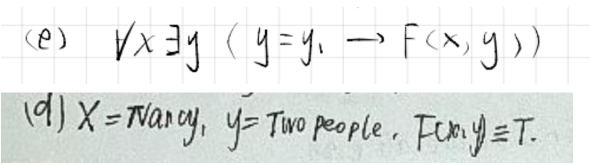
第 8 题错误集锦

第 8 题均分 3.15，主要是因为评分标准是按填空题的标准来的，所以描述不严谨的也不会给分。这里列一些常见错误供参考。就直接截作业图了（不想手打呃），不会透露个人信息，希望各位同学不要介意。

自定义独一写法

表示独一时，请不要“发明”自己的独一写法。

例：


(e) $\forall x \exists y\ (y = y_1 \rightarrow F(x, y))$

(d) $X = \text{Nancy},\ y = \text{Two people},\ F(x, y) \equiv T.$

恒真信息使用蕴含

注意，$\forall x(A(x) \rightarrow B(x))$既不能说明$A(x)$为真也不能说明$B(x)$为真。需要把他单独表示出来。

例：

$$\exists x \exists y \forall z\ (((z \neq x) \wedge (z \neq y)) \rightarrow (F(Nancy, x) \wedge F(Nancy, y) \wedge \neg F(Nancy, z)))$$

d 问意为“Nancy 刚好能骗两个人”。本写法并不能说明 Nancy 能骗到 x 和 y。请把单独写出来。

条件信息不用蕴含

$\forall x(A(x) \wedge B(x))$含义与$\forall x\, A(x) \wedge \forall x\, B(x)$相同。不能用它来描述当 A 就 B 的关系。

例：

(d) $\exists x F(\text{Nancy}, x) \wedge \exists y(y \neq x \wedge F(\text{Nancy}, y) \wedge \forall z(z \neq x \wedge z \neq y \wedge \neg F(\text{Nancy}, z))$

d 问意为“Nancy 刚好能骗两个人”。对于所有不是 x 和 y 的 z 来说，Nancy 都骗不了，这里的 z≠x 和 z≠y 属于判断的条件，不用蕴含就意味着它恒真。x，y，z 定义域都相同，对于任意 z 怎么可能恒不等呢？

---

c 问语义

c 问题意为“没人能骗所有人”，可以表示为“不存在一个人，能骗所有人(¬∃∀)”，或“对于所有人，都不能骗完所有人(∀¬∀)” ，或“对于所有人，总存在一个人骗不到(∀∃¬)”，其他写法都是错的。

例：

(c) $\forall x \forall y(\neg F(x,y))$

这样写的意思是“任何人都骗不到任何人”。

---

e 问语义

e 题意为“存在唯一的一个人，所有人都能骗”，应该是先存在这个人，再被所有人骗。以下错误写法表达的是“所有人能且只能骗一个人”，这时这个人就不一定是同一个人了。

例：

$\forall x \exists! y\, F(x,y)$

（请谨慎使用∃!符号）

(e) $\forall x \exists y\,(F(x,y) \wedge \forall z(F(x,z) \rightarrow z=y))$

（这个例子不止这一个错误）

---

f 问语义

f 题意为“存在一个人，除了自己刚好能骗一个人”，答案至少要表达出“除了自己”的含义。至于自己是一定被骗、一定不被骗还是可能被骗都算对了。

例：

(f) $\exists x \exists y(F(x,y) \wedge \forall z(F(x,z) \rightarrow z=y))$

上式表示 x 只能骗一个 y。但如果 x=y 的话，就不满足题意了。

---

e 问∀复用

详见下例：

$(e)\ \exists y_1 \forall x\,(F(x,y_1) \wedge \forall y\,(F(x,y) \rightarrow y=y_1)$

本题题意为“存在唯一的一个人，所有人都能骗”，首先需要描述存在能被所有人骗的这个人。这一部分声明了存在 y1 这个人能被所有 x 骗。接下来需要说明任何能被所有人骗的人都是 y1，问题就出在这里。这条答案用的不是能被所有人骗，而是能被所有 x 骗，意思就变成了“所有 x 能且只能骗 y1”，这就导致总体语义变成了“存在一个人，使所有人只能骗这一个人”，就不对了。

量词作用域问题

量词声明的变量只在作用域内生效。例如，$\forall x(P(x)) \wedge Q(x)$的写法是错误的，因为$Q(x)$的$x$并没有被声明。

例：

$$\text{(f) } \exists x(\ \exists y(x \neq y \wedge F(x,y)) \wedge \forall z(z \neq y \wedge z \neq x \wedge \neg F(x,y))\ )$$

y 变量只能在∃y 作用域内使用。括号使用错，影响语义的会视情况扣分。

语法不规范

一些示例，影响语义的可能被扣分，但一般都没扣。

例：

$\neg\exists a\,F(Nancy,a) \wedge a \neq (y \vee z)$

a, y, z 都不是命题，不要直接用命题逻辑的符号处理。用集合相关符号都可以，比如$a \notin \{y,z\}$。

$(x \neq y \neq z)$

我知道是什么意思，但最好还是不要这样写。

$\forall x \exists y\, F(x,y)\, P(y)$

请不要用省略、逗号、&号、点乘符号等来代替∧。

Q12，13，14，15，16，17 问题总结

常见问题：

1. 建议在证明时，使用标准的符号∧来代替 and。
2. 望仔细审题，12 题(a)出现漏写情况。

3. 说明命题等价时，应当使用≡或↔或⇔符号。
4. 证明过程中尽量不要使用“may”这样的字眼，这会让读者感觉到作者对自己的证明不是很有信心，欠缺说服力。
5. 在证明$p \Rightarrow q$为真时，不可使用其逆命题$q \Rightarrow p$或其否命题$\neg p \Rightarrow \neg q$来提供依据。

证明要点提供：

从作业中可以看出大多数同学证明思路不够清晰、不够严谨，现提供一些证明要点如下：

1. 如何证明$p \Rightarrow q$为真？

   方法一：(i)假定p为 true。(ii)证明在p为 true 的前提下q也为 true。(iii) 说明$p \Rightarrow q$为 true。

   方法二：(i)假定$\neg q$为 true。(ii)证明在$\neg q$为 true 的前提下$\neg p$也为 true。(iii) 说明$\neg q \Rightarrow \neg p$为 true。(iv) 说明$\neg q \Rightarrow \neg p$与$p \Rightarrow q$的等价性。
2. 当需要证明$p \Rightarrow q$为真时，若希望从正向推导，应当写为：

   “Assume that p is true”或“Suppose p is true”等，表明“假定”之意；

   不建议写为：

   “Because p is true”或“Since p is true”等，此种写法带有“p本来就 true”的暗示，丧失严谨性。
3. 证伪问题的严谨性（以自然数集ℕ为例，其余集合类似）：

   (i) 若希望证明命题：“$\exists n \in \mathbb{N}$，使得n满足某种条件p”为 false，应当说明所有的n都不满足条件p。即“$\forall n \in \mathbb{N}$，都不满足条件p”。

   (ii) 若希望证明命题：“$\forall n \in \mathbb{N}$，都n满足某种条件p”为 false，只需找出一个反例即可。即“$\exists n \in \mathbb{N}$，这个n不满足条件p”。

针对部分题目的常见错误与要点详述：

Q13:

1. 在 Q13 中，某些同学有如下写法：

$$(\boldsymbol{a, b\ are\ integers})$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$\Rightarrow \quad a + b = \sqrt{a^2 + 2ab + b^2}$$

   这是错误的，因为a与b为任意整数，所以$(a+b)$的值也可以为负数，正确的写法应为：

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$\Rightarrow \quad a + b = \pm\sqrt{a^2 + 2ab + b^2}$$

Q16:

1. 在 Q16 中，有同学使用“无理数与无理数之和为无理数”作为证明依据。但这其实是假命题，可举反例：设$a = 2 - \sqrt{2}, b = 2 + \sqrt{2}$，可以证明，$a$与$b$均为无理数，但$a + b = 4$为有理数。所以无理数与无理数之和

不一定为无理数。

2. 在 Q16 中，定理“$\sqrt{n}$ is irrational whenever n is a positive integer that is not a perfect square”应当译为“如果n是一个‘不是完全平方数的正整数’，那么$\sqrt{n}$是无理数。”言下之意，只有当根号之下的数字n为正整数时，才能使用这个定理。

某些同学有如下写法：

$$\because 5+2\sqrt{6}\ is\ not\ a\ perfect\ square.$$

$$\therefore According\ to\ the\ theorem, \sqrt{5+2\sqrt{6}}\ is\ irrational.$$

此种写法是错误的，错在把$(5+2\sqrt{6})$当成定理中的“n”来使用，没有满足“n为正整数”的前提。

3. 在 Q16 中，有同学有如下写法：

$$\because n = 5+2\sqrt{6}\ is\ not\ an\ integer$$

$$\therefore \sqrt{5+2\sqrt{6}}\ is\ irrational$$

这是错误的，其使用的依据“若n不为整数，则$\sqrt{n}$为无理数”是假命题。可举出反例：

假设$m=\frac{1}{9}$, 显然m不是整数，但$\sqrt{m}=\sqrt{\frac{1}{9}}=\frac{1}{3}$是有理数。

Q17:

1. 在 Q17 中，关于b^*的设定问题：

(i) 有同学将b^*设定为所有 bid 中的最大值。此种设定会使得$b_n \le b^*$天然成立，在 bidder n 竞标成功时，有$b_n = b^*$，无法判断 second highest bid 的大小，从而无法定量计算 payoff。

(ii) 有同学将b^*设定为所有 bid 中的次大值（Second highest bid, 或说 payment），此种设定也有一定的合理性，但应当注意当最大 bid 不只有一个时，次大值与最大值相等，所以在此种定义下当$b_n = b^*$时，bidder n 输赢均有可能。

2. 在 Q17 中，Payoff 情况总览：

	$\boldsymbol{b_n < v_n}$	$\boldsymbol{b_n = v_n}$(最优)	$\boldsymbol{b_n > v_n}$
$\boldsymbol{b^* < v_n}$	$\begin{cases} 0, & b_n \in (0, b^*) \\ 0 \text{ 或 } v_n - b^* > 0, & b_n = b^* \\ v_n - b^* > 0, & b_n \in (b^*, v_n) \end{cases}$	$v_n - b^* > 0$	$v_n - b^* > 0$
$\boldsymbol{b^* = v_n}$	0	0 或 $v_n - b^* = 0$	$v_n - b^* = 0$
$\boldsymbol{b^* > v_n}$	0	0	$\begin{cases} 0, & b_n \in (v_n, b^*) \\ 0 \text{ 或 } v_n - b^* < 0, & b_n = b^* \\ v_n - b^* < 0, & b_n \in (b^*, +\infty) \end{cases}$

内容摘自参考答案，方便学生用于对照错漏。

3. 在 Q17 中，关于分类讨论的选择问题：

应当注意，我们在实际的竞拍中，会先确定好v_n，再在确定了v_n的基础上选择b_n。所以应当在确定了v_n与b^*之间的关系的前提下来讨论b_n与v_n间的关系。即，在$v_n < b^*, v_n = b^*, v_n > b^*$三类情况下，分别讨论$b_n < v_n, b_n = v_n, b_n > b_n$的情况，才是合理的证明方法。

有同学如此分类讨论："在确定了b_n与b^*之间的关系的前提下，讨论b_n与v_n间的关系。"
此种讨论方法不妥（也根本无法得出正确结论）。因为此法暗示我们是先确定好了b_n，再在确定了b_n的基础上选择v_n，这与实际的竞拍流程并不相符。