Ass2 部分题目问题总结

Q1：主要问题出现在第一问，空集属于有限集，当A = B = φ 时，B⊂A

Q2：

1. 韦恩图可以用来辅助说明，但不宜作为证明的主体。
2. 计算证明需要将两边都展开到一样，或者由左推到右，而不能简单表述右边也一样

Q4：

1. 证明要从两个方向证明，if和only if，缺一不可。
2. 在引入题中没有的字母之前需要说明
3. A的幂集P(A)，其中A需要是集合。

Q6Q7：错误点均在扣分细则中写出，暂无需要总结的

Q5Q8：本次作业部分同学仍然存在表述不清晰的情况。部分同学惜字如金不愿意把语句写清楚，格式上不够规范；另外有同学在拼写和语法上还存在误用情形，写作业时请仔细检查；还有同学使用例子（或者画图像）来尝试证明（不是举反例），这种情况是无法涵盖一般情形的。

请注意：证明函数的性质一定是**使用**定义（或者判定定理），也就是说要通过计算/推理得到结论。单纯把定义的原句摆出来是无效的。

这两题的重灾区是**Q5 (b/e)**和**Q8 (a)**。很多同学对于函数相关的定义仍不够熟悉，因而证明过程/举例存在漏洞。一个常见的问题是不清楚复合函数的条件以及复合后的定义域/值域。例如

$f(x)=\log_2 x, g(x)=x^3$，两个函数能复合的条件是g的定义域为$\mathbb{R}^+$（此时g的值域为$\mathbb{R}^+$，是f的定义域的子集）

还有同学使用了反函数的符号，注意函数存在反函数当且仅当该函数为双射。

Q10：构造的AB两个集合要为uncountable集；部分同学在构造的过程中A = R ∪ {1}，B = R，A - B = {1}，构造有误。

Q13：

注：本题已调分，得分不直接反应答题情况。调分前平均分估计为1.7分，现在基本写了字底分就是2分。如果你的实际分数低于4分，说明证明过程基本错误；如果实际分数低于3分，则说明思路也完全错误。

使用偏导

一些同学的证明思路是，通过说明∂f/∂m和∂f/∂n大于零来说明单射。单射要求对于任意f，要求m和n都唯一。注意，这里不是所有偏导都大于0的函数都是满足条件的（而且几乎都不满足，为什么？）。最简单的例子：g(m,n) = m + n，这个函数怎么求导都满足偏导大于0，但明显不是单射，例如1+2=2+1。

画图显然法

很多同学直接把满足条件的m,n一列，然后直接发现，这不是有规律吗，那我不是把表一画直接说明一下就算证明了，美滋滋~

你规律都找出来了倒是证明啊（恼）。找规律可以用来寻找证明方向（参考数学归纳法），但不能作为任何证明过程。数学上有很多看起来“像”的结论，但一找到反例整个就会被推翻。仅凭观察得出的结论只能作为猜想。

可能有同学就要问了，我用的证明方式和证明有理数可列是一样的啊，为什么它就算对呢？主要区别就在于，有理数的证明的表是构造出来的，证明有理数可列的过程是逻辑完备的，你可以清晰的列出它证明的思路：有理数一定能表示成m/n（公理）→一定能构造出f(m,n)=m/n绘制在二维图表中→二维图表一定能按指定规则串成一列→有理数可列。而本题中画出这样的图表仅仅能说明f(m,n)可列，但这个列内加一的递增关系却是靠“显然”观察出来的，怎么能算做证明呢？

这里最简单的方式就是把找到的规律用公式表达并证明出来。非常简单，只要证明对于任意x,y>0，f(1,x+1)-f(x,1)=1以及f(x+1,y)-f(x,y+1)=1即可。因为有f(1,1)=1，所以用数学归纳法自然能够证明结论，而只画图是绝对的错误写法。**证明过程从来不拘泥于形式，唯一需要确保正确的只有逻辑的通畅可推。**

本题本身有很多其他证明方法，逻辑正确的都算正确了，包括但不限于标答、暴力解方程讨论范围、放缩法、分类讨论m+n的值等证明。这里也给同学们一个建议，学习证明过程时不要只把过程记下来，光记是没用的，要时刻问自已，每一步的证明是怎么来的？能从上一步推到这里吗？为什么能想到这种思路？这些东西不是背就能解决的，而是需要大量时间的思考。高中时题目都有套路，直接跟着模板套公式总能拿分。但现实中的问题根本没有那么多所谓的模板。离散数学前半学期花了很长时间都在讲逻辑，目的就是培养整体的思维能力，下次遇到不同的问题也能触类旁通。多理解，少识记，对我们理工科的学习都是有帮助的。

Q14：

定义域值域问题

这题只需要找到两个单射即可。单射要求是：对于函数x→y的集合映射A→B，所有x对应的y在集合B里都唯一。但是我们讨论单射满射的前提都是它应该是一个函数。如果存在x对应的y不在B内，那它压根都不满足函数的定义了。所以一些同学g(x)=x/2是错的，因为x=0时，y=0，不在(0,1)内。

Q15：

使用传递性

本题两种错误，一种直接用|A|=|B|=|C|，一种先|A|<=|B|<=|C|，再|A|>=|B|>=|C|，从而推出|A|=|C|。这些写法都利用了基数比较的传递性。但是基数本质并不是实数（比如无限大的集合），我们平时也不会有在两个无限大之间化等号的写法，所以不要以普通数字的比较来理解基数，传递性也是不显然的，是需要证明的。本题就是要证明传递性，上述证明方法有点用结果推原因的意思。所以直接使用我们学过的定理就好了，找出双射即可。

Q16：部分同学x的取值范围不严谨，仅作提醒，这次不扣分。若是未写x取值范围的，皆扣分处理。

Q17：对算法流程不清晰，乘法次数算错。

Q9，Q11，Q12 问题总结

Q9

1. 在 Q9 中，有同学使用如下方法求解：

$$令\ S_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$$

$$则\ S_n - S_{n-1} = n^2$$

$$由于\ n^2 = \frac{2n^3+3n^2+n}{6} - \frac{2(n-1)^3+3(n-1)^2+(n-1)}{6}$$

$$可令\ b_n = \frac{2n^3+3n^2+n}{6}，\ 则有\ S_n - S_{n-1} = n^2 = b_n - b_{n-1}$$

$$\therefore S_n = b_n = \frac{2n^3+3n^2+n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

这个求解过程是**错误**的。因为根据 $S_n - S_{n-1} = b_n - b_{n-1}$ 不能得到 $S_n \equiv b_n$。不妨进行如下分析：

($\boldsymbol{i}$) **设原命题为：**“$\forall n \in N^+$，若 $S_n - S_{n-1} = b_n - b_{n-1}$，则 $S_n \equiv b_n$”

($\boldsymbol{ii}$) 移项，**等价变形为：**“$\forall n \in N^+$，若 $S_n - b_n = S_{n-1} - b_{n-1}$，则 $S_n - b_n \equiv 0$”

($\boldsymbol{iii}$) 令 $F(n) = S_n - b_n$，则**原命题等价变形为：**“$\forall n \in N^+$，若 $F(n) = F(n-1)$，则 $F(n) \equiv 0$”

($\boldsymbol{iv}$) 容易得到，若 $\forall n \in N^+$ 满足 $F(n) = F(n-1)$，则 $F(1) = F(2) = \cdots = F(n-1) = F(n) = C$

($\boldsymbol{v}$) 其中 C 为任意常数，可以不为 0，因此**原命题为假命题**。

2. 在 Q9 中，有同学尝试使用对等差数列 $\sum_{k=1}^{n} 2k = n(n+1)$进行积分的方式得出 $\sum_{k=1}^{n} k^2$，思路本身是可行的，但在求解过程中常出现过程错误。

例如：

$$\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right)' = \sum_{k=1}^{n} (k^2)' = \sum_{k=1}^{n} 2k\ (\text{错误之一：未指出要针对哪个自变量进行求导})$$

或：

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n}\left(\int 2k dk - C\right) = \int\left(\sum_{k=1}^{n} 2k\right) dk - nC\ (\text{错误之一：此处求和号与积分号不能随意互换})$$

为便于学生对照，助教现提供相应求解方法，如有错误，欢迎指出：

设数列 $1, 2, 3, \dots, n$ 的前 n 项和为 a_n，并设其通项为 $b_n = n$

设数列 $1^2, 2^2, 3^2, \dots, n^2$ 的前 n 项和为 A_n，并设其通项为 $B_n = n^2$

可得两数列间通项关系：$\dfrac{dB_n}{dn} = 2b_n$

$$\because\ B_n = A_n - A_{n-1},\qquad b_n = a_n - a_{n-1}$$

$$\therefore \frac{d(A_n - A_{n-1})}{dn} = 2(a_n - a_{n-1})$$

将公式变形，得：$\frac{dA_n}{dn} - 2a_n = \frac{dA_{n-1}}{d(n-1)} - 2a_{n-1}$

令 $F(n) = \frac{dA_n}{dn} - 2a_n$，则有$F(n) = F(n-1)$，即 $F(1) = F(2) = \cdots = F(n)$

不妨设 $F(n) \equiv C_1$，其中 C_1 为任意常数，则有 $\frac{dA_n}{dn} - 2a_n = C_1$

又有 $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$，因此 $\frac{dA_n}{dn} - n(n+1) = C_1$

解微分方程得 $A_n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + C_1 \cdot n + C_2$，其中 C_1, C_2 均为任意常数

代入 $A_1 = 1, A_2 = 5$，求解得 $C_1 = \frac{1}{6}, C_2 = 0$

因此 $A_n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Q11

1. 在 Q11(b)中，有同学使用如下结论：

$$\{(a,b)|a,b \in N\} \subset N$$

这是错误的，设集合 $A = \{(a,b)|a,b \in N\}$，可将 A 使用列举法表示为：

$$A = \{(0,0),(0,1),(1,1),(1,0),(0,2),\ldots\}$$（集合中元素为有序数对）

而自然数集 N 用列举法表示为：

$$N = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,\ldots\}$$（集合中元素为数字）

两集合的元素种类都不同，更不能说两集合存在着子超集关系。

2. 在 Q11(b)中，有同学使用如下说明方法：

设函数 $f: N \times N \to N$ 有 $f(x,y) = x + y$

$\because$ 对所有满足 $x,y \in N$ 的有序数对 (x,y)，都有唯一的值 $f(x,y) = x + y \in N$ 与之对应

$\therefore \{(a,b)|a,b \in N\}$ 为可数集

此种说法不严谨，不妨对以上说法作分析如下：

选取有序数对 $(3,6)$ 和 $(1,8)$，可得 $f(3,6) = f(1,8) = 9$

$\therefore$ 在运算法则 f 下，两个不同的有序数对 $(3,6),(1,8)$都对应同一个自然数 9

$\therefore$ 在运算法则 f 下，值域中的自然数不能与定义域中的有序数对一一对应。

因此，使用函数 $f(x,y) = x + y$ 无法判断 $\{(a,b)|a,b \in N\}$ 是否为可数集

3. 在 Q11(c)中，最好在过程中加上实数集 R 为不可数集的证明，以保证答题的完整。但此次批改中，未写上此证明过程的也不扣分。

Q12

1. 在 Q12 中，有同学使用如下等式：

$$A \text{ and } B \text{ are sets}$$

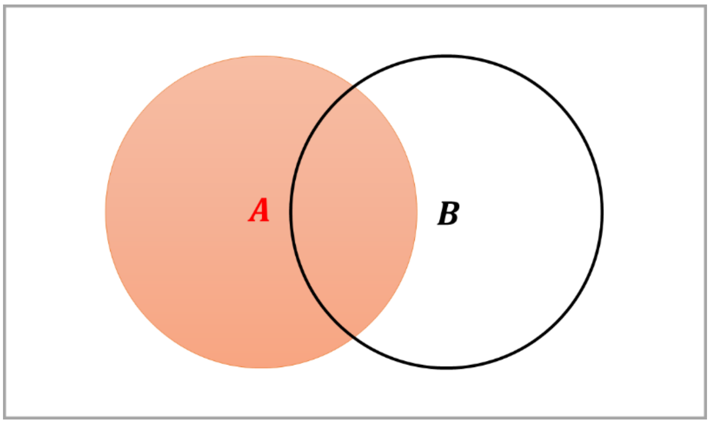
$$A = (A - B) \cup B$$

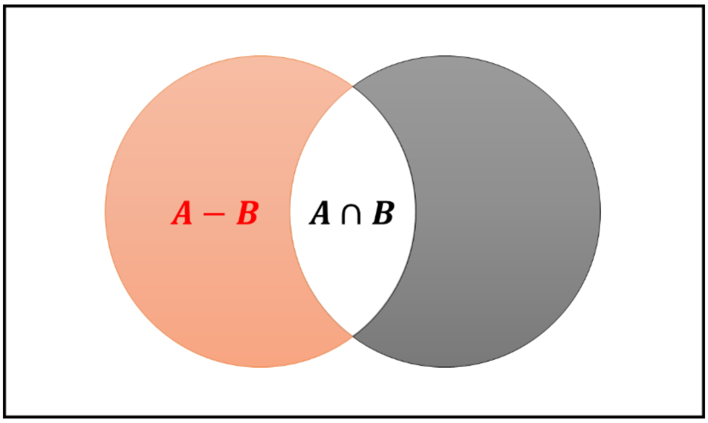
这是错误的。不妨将上述等式右边化简：

设全集为U，则有

$$\begin{aligned} & (A - B) \cup B \\ = & (A \cap \bar{B}) \cup B \\ = & (A \cup B) \cap (\bar{B} \cup B) \\ = & (A \cup B) \cap U \\ = & A \cup B \ (\neq A) \end{aligned}$$

更直观地，绘制 Venn 图分析：





可从图中看出：

$$(\boldsymbol{i}) \quad (A - B) \cup (A \cap B) = A$$

$$(\boldsymbol{ii}) \quad (A - B) \cup B = A \cup B$$